I. DIFERENCIÁLNA ROVNICA $y' = f(x, y)$

1. Základné pojmy a poznatky

2. Smerové pole

Budeme sa zaoberať najprv d. rovnicami prvého rádu tvaru

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

kde f značí danú funkciu premenných x, y definovanú v nejakom obore σ. Takúto d. rovnicu nazývame <u>explicitnou</u>, pretože y' je explicitnou funkciou premenných x, y. σ je tzv. <u>definičný obor</u>, stručne <u>obor d. rovnice (a)</u>. O funkcii f a obore σ nerobíme zatiaľ žiadne predpoklady.

Funkcia f priraďuje ku každému bodu $(x, y) \in \sigma$ isté číslo $f(x, y)$. Usporiadaná trojica čísel $(x, y, f(x, y))$ sa nazýva <u>lineárny element d. rovnice (a) v bode (x, y)</u>, jednotlivé čísla trojice sú <u>súradnice</u> lineárneho elementu. Množina všetkých lineárnych elementov v jednotlivých bodoch oboru σ je tzv. <u>smerové pole</u> d. rovnice (a). Množina bodov $(x, y) \in \sigma$, v ktorých má funkcia f tú istú hodnotu, nazýva sa <u>izoklína</u> d. rovnice (a). Rovnica každej izoklíny sa teda môže písať v tvare $f(x, y) = C$, kde C značí nejakú konštantu. V bodoch tejže izoklíny majú všetky lineárne elementy tú istú tretiu súradnicu.

Každý lineárny element $(x, y, f(x, y))$ môžeme znázorniť graficky malou úsečkou, ktorá prechádza obrazom bodu (x, y) a má smernicu $f(x, y)$ t.j. zviera s kladným smerom osi x uhol, ktorého tangens je $f(x, y)$. Smerové pole znázorňujeme tak, že vyznačíme väčší počet bodov v obore σ, usporiadaných do niekoľko radov napr. vodorovných a zvislých a v každom z nich nakreslíme malú úsečku znázorňujúcu príslušný lineárny element. Ľahko nahliadneme, že v bodoch tejže izoklíny sú tieto úsečky rovnobežné.

Ako príklad zoberme d. rovnicu

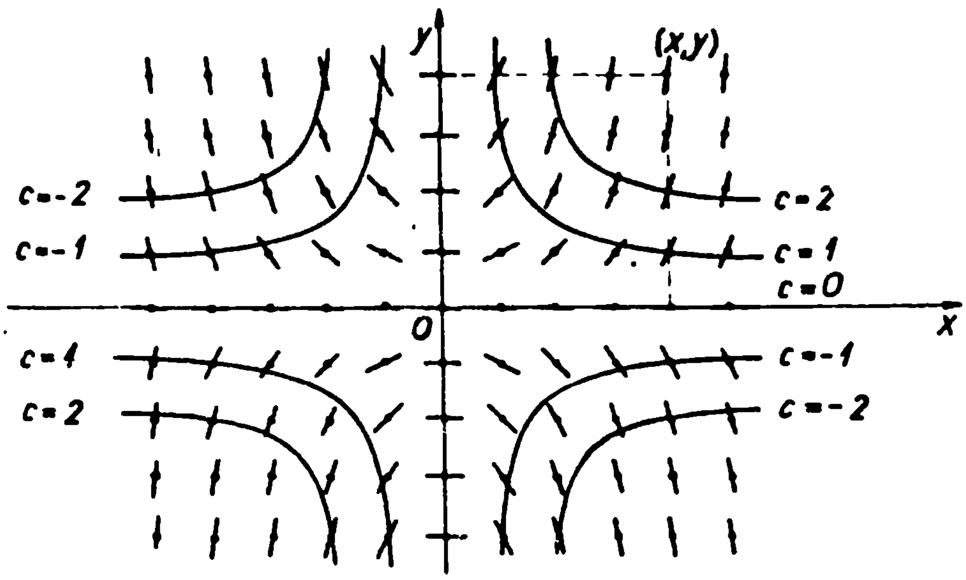
$$y' = x \cdot y \tag{1}$$

ktorej definičný obor je celá rovina. Znázornime napr. jej lineárne elementy v bodoch (x, y), ktorých každá súradnica je jedno z čísel 0; $\pm 0,5$; ± 1; $\pm 1,5$; ± 2. Tieto lineárne elementy sú $(-2; -2; 4)$, $(-2; -1,5; 3)$, $(-2; -1; 2)$ atď., a sú znázornené na nasledujúcom obrázku, z ktorého získavame prehľad o príslušnej časti smerového poľa.

Izoklíny d. rovnice (1) sú hyperboly

$$x \cdot y = C$$

určené jednotlivými konštantami C. Na obrázku sú znázornené pre $C = 0, \pm 1, \pm 2$.



Obr. 1

3. Význam smerového poľa

Podľa toho, čo sme povedali v odseku 1, rozumieme riešením alebo integrálom d. rovnice (a) každú funkciu, ktorá jej vyhovuje. Krivku, ktorá je určená ľubovoľným riešením[1], nazývame integrálnou (int.). Predpokladajme, že d. rovnica (a) má nejaké riešenia. Uvažujme o jednom z nich a označme množinu, napr. interval, na ktorom je definované, j. Potom pre $x \in j$ je $(x, y(x)) \in \sigma$ a funkcia y má v čísle x deriváciu, ktorej hodnota je $f(x, y(x))$. To môžeme vyjadriť tým, že int. krivka y leží v obore σ a v každom svojom bode má dotyčnicu v smere príslušného lineárneho elementu. Inými slovami, v každom svojom bode sa dotýka príslušného lineárneho elementu, t.j. sleduje smerové pole. Vidíme najmä, že všetky int. krivky d. rovnice (a), ktoré pretínajú tú istú izoklínu, pretínajú ju v tomže smere.

Táto názorná úvaha vedie k jednoduchej metóde slúžiacej k hľadaniu funkcií, ktoré by mohli mať približne ten istý priebeh ako integrály d. rovnice. Princíp metódy je ten, že za hľadané funkcie volíme polygóny skladajúce sa z malých úsečiek, ktoré sledujú smerové pole. Metódu vyložíme po grafickej stránke.

---

1 Krivkou určenou funkciou y, definovanou v nejakej množine j, stručne krivkou y, rozumieme množinu bodov $(x, y(x))$, $x \in j$.

Nech (x_0, y_0) je ľubovoľný bod v obore σ a hľadajme polygón, ktorý by mohol aproximovať riešenie d. rovnice (a) prechádzajúce týmto bodom[2]. N j-prv nakreslíme malú úsečku, ktorá vychádza z bodu (x_0, y_0), má smer lineárneho elementu v tomto bode a koncový bod (x_1, y_1) napravo od bodu (x_0, y_0); jej smernica je teda $f(x_0, y_0)$. Ak je $(x_1, y_1) \in \sigma$, nakreslíme opäť malú úsečku, ktorá vychádza z bodu (x_1, y_1), má smer lineárneho elementu v tomto bo e a koncový bod (x_2, y_2) napravo od bodu (x_1, y_1); jej mernica je teda $f(x_1, y_1)$. Ak je $(x_2, y_2) \in \sigma$, môžeme tento postup opakovať prípadne niekoľkokrát. Tym dostaneme istý polygón o vrcholoch (x_0, y_0), $(1, y_1)$, (x_2, y_2), ..., ktorý vychádza z bodu (x_0, y_0) a sleduje smero-é pole. Je to tzv. Eulerov polygón d. rovnice (a), vychádzajúci z bodu (x_0, y_0). Zdá sa prirodzené usúdiť, že má približne ten istý priebeh ako niektoré riešenie d. rovnice (a), vyc ádzajúce z bodu (x_0, y_0), ak, pravda, také riešenia xistujú. Všimnime si, že polygón závisí od zvolenýc dĺžok jeho str n a je jednoznačne určený postupnosťou čísel $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$. Môžeme sa domnievať, že vystihuje riešenie tým presnejšie, čím kratšie zvolíme jeho strany. Podobne dostaneme Eulerov polygón, ktorý do bodu (x_0, y_0) vchádza; J ho konštrukcia sa líši od predchádzajúcej len tým, že sa koncové body jednotlivých úsečiek zvolia vždy naľavo od začiatočných. Tento polygon pravdepodobne aproximuje niektoré riešenie d. rovnice (a) a opäť súdime, že tým presnejšie, čím sú j ho strany kratšie. Obidva polygóny, pokiaľ exi tujú, tvoria dohromady Eulerov polygón d. rovnice (a), prechádzaj ci bodom (x_0, y_0), kt - rý naznačuje isté riešenie d. rovnice (a) prechádzajúce b dom (x_0, y_0).

Táto jednoduchá metóda na určenie približného riešenia danej d. rovnice má cenu nielen pre teóriu, lebo ako neskoršie (v ods. 26) uvidíme, dá sa na jej princípe vypracovať dôkaz existencie riešenia, ale tiež i po stránke praktickej. V praxi (predovšetkým technickej) ide často o zistenie len približ - ného priebehu riešenia danej d. rovnice, prechádzajúceho daným bodom, ktoré spr idla býva jediné a v tom prípade môžeme túto metódu vždy aplikovať bez na menších ťažkostí.

Na nasledujúcom obrázku je znázornený približný priebeh riešenia d. rovnice

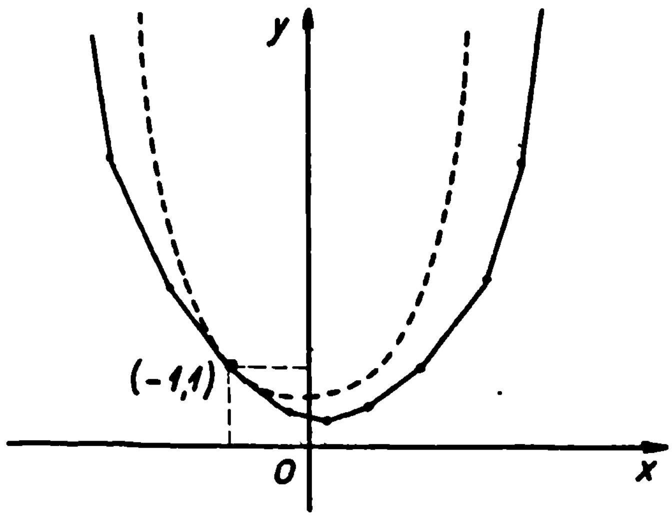
$$y' = x \cdot y$$

----

[2] O ľubovoľnej funkcii hovoríme, že prechádza bodom (x_0, y_0), keď číslo x_0 je z jej oboru definície a funkcia má v ňom hodnotu y_0; hovoríme, že vychádza z bodu (x_0, y_0), alebo vchádza do bodu (x_0, y_0), keď x_0 je najmenším, alebo najväčším číslom z jej definičného oboru a funkcia má v ňom hodnotu y_0. Ďalej hovoríme, že funkcia smeruje sprava alebo zľava do bodu (x_0, y_0), keď má v čísle x_0 limitu sprava alebo zľava rovnajúcu sa hodnote y_0.

Tieto názvy prenášame na krivky, takže napr. hovoríme, že krivka y prechádza bodom (x_0, y_0), keď to platí o funkcii y atď. Podobne prenášame názvy o krivkách na príslušné funkcie, takže napr. hovoríme, že funkcia y leží v istom obore, keď to platí o krivke y, atď.

prechádzajúceho bodom (-1, 1), získaný touto metódou a súčasne je znázornené (bodkovane) skutočné riešenie[3] $y = \exp \dfrac{x^2 - 1}{2}$



Obr. 2

4. P o j e m r i e š e n i a

Riešením d. rovnice (a) sme dosiaľ rozumeli každú funkciu, ktorá vyhovuje d. rovnici (ods. 1). Tento pojem je príliš široký, pretože riešenia by mohli byť definované na najrozmanitejších množinách, ktorých vlastnosti by teóriu ovplyvňovali a komplikovali. Možno práve z tohto dôvodu sa nevyskytli dosiaľ ani pokusy o teóriu v tejto všeobecnosti. V ďalších úvahách sa vždy obmedzíme na riešenia, ktoré sú definované v nejakom intervale.

5. D e f i n i č n é o b o r y d. r o v n i c e (a)

D. rovnica (a) môže mať riešenie len vtedy, keď jej obor definície a funkcia f sama majú určité vlastnosti. Bez ďalšieho vidíme, že keď existuje riešenie y d. rovnice (a), definované v intervale j, potom obor d. rovnice obsahuje krivku y a na nej hodnoty f (x, y (x)) funkcie f, ako hodnoty derivácie funkcie y v intervale j, tvoria interval[4].

Aby teória bola jednoduchá, študujú sa spravidla d. rovnice, ktorých definičné obory sú oblasti alebo uzávery oblastí a predpokladá sa, že funkcia f je v nich spojitá vzhľadom na obe premenné.

Podrobnejšie popíšeme niektoré druhy týchto oborov.

---

[3] Symbol exp x značí číslo e^x

[4] To znamená, že keď funkcia f (x, y (x)) nadobúda vnútri intervalu j hodnôt a_1, a_2 a ak $a_1 < b < a_2$, potom vnútri intervalu j má tiež niekde hodnotu b. Pozri [1], str. 111

Oblasťou rozumieme neprázdnu otvorenú a súvislú bodovú množinu, t.j. neprázdnu množinu, ktorej každý bod je vnútorný a každé dva rôzne body množiny možno spojiť polygónom v nej ležiacim. Ponechávame čitateľovi, aby si rozmyslel, že množina úsečiek a množina poradníc bodov tvoriacich ľubovoľnú oblasť sú otvorené intervaly. Uzáver oblastí σ, $\bar{\sigma}$ je množina všetkých limít konvergentných postupností, ktorých členy sú body oblasti σ. Zo všeobecných viet o uzáveroch množín usúdime zrejme, že $\bar{\sigma}$ je najmenšia uzavretá množina obsahujúca oblasť σ a že sa skladá z oblasti σ a jej hranice[5].

Často sú definičnými obormi d. rovníc tzv. normálne obory.

Normálnym oborom rozumieme množinu bodov (x, y), ktorých úsečky x tvoria nejaký interval j_1 a poradnice y závisia od x a pri každom x tvoria nejaký interval j_2 (x); koncové čísla intervalu j_2 (x), pokiaľ existujú, sú spojitými funkciami x. Pritom pripúšťame, aby sa interval j_2 (x) v koncových číslach intervalu j_1 redukoval na jediné číslo.

Ak je interval j_1 a tiež každý interval j_2 (x) ohraničený (ak množiny koncových čísel intervalov j_2 sú ohraničené), potom tiež normálny obor je ohraničený. Ak nie je niektorá z týchto podmienok splnená, je neohraničený.

Keď interval j_1 a všetky intervaly j_2 sú otvorené, je normálny obor oblasťou; keď sú uzavreté, je uzáverom oblasti.

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené normálne obory.

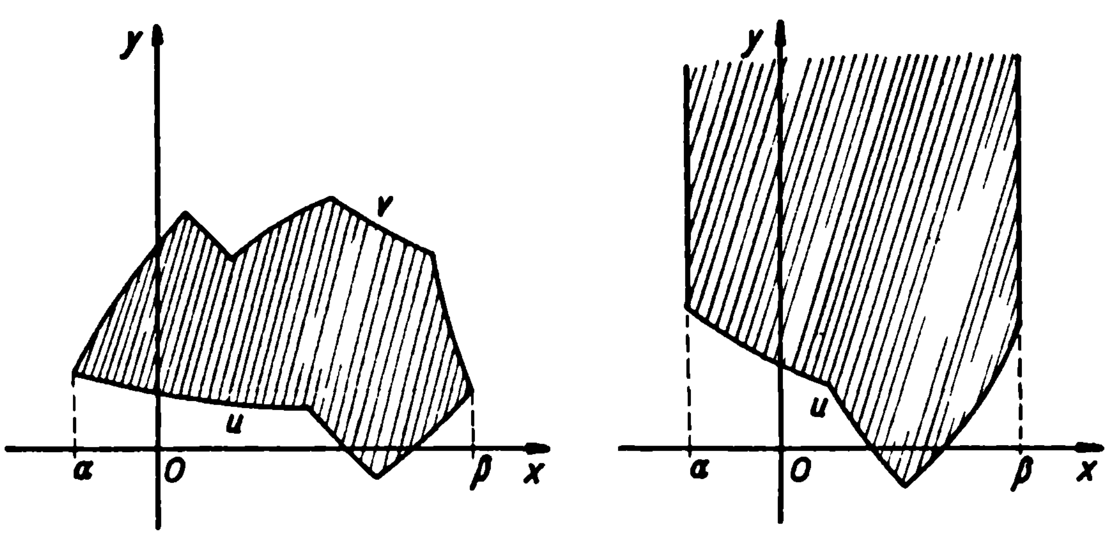
Prvý, ohraničený, je daný vzorcami tvaru:

$$\alpha \leq x \leq \beta \,, \quad u(x) \leq y \leq v(x);$$

druhý je neohraničený a je definovaný vzorcami:

$$\alpha \leq x \leq \beta \,, \quad u(x) \leq y;$$

pritom u, v značia spojité funkcie.



Obr. 3

---

5 Pozri [2], str. 40 - 41, 54.

Zvláštnymi prípadmi normálnych oborov sú tzv. dvojrozmerné (dv.) intervaly.

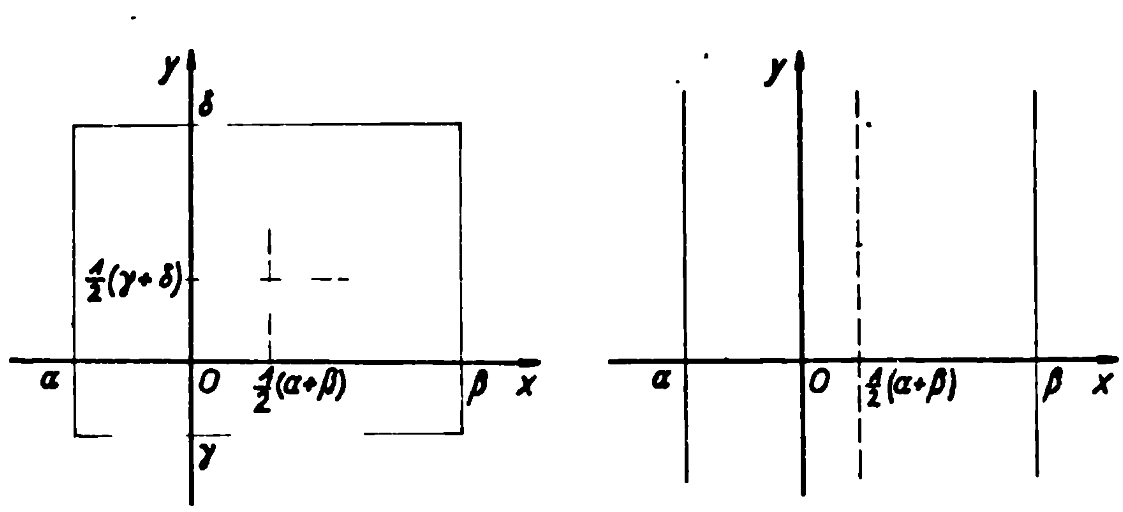
Dv. intervalom rozumieme množinu bodov (x, y), ktorych úsečky x vypĺňajú nejaký interval j_1 a poradnice y, nejaký interval j_2. Označujeme ho $j_1 \times j_2$ a v prípade $j_1 = j_2$ jednoducho j_1^2.

Ak obidva intervaly j_1, j_2 sú ohraničené, potom i dv. interval $j_1 \times j_2$ j ohraničený. V tom prípade rozumieme jeho stredom bod, ktorého súradnice sú arit etickymi stredmi koncových čísel intervalov j_1, j_2. Keď aspoň jeden z intervalov j_1, j_2 je neohraničený, potom i dv. interval $j_1 \times j_2$ je neohraničený. Najčastejšie sa vyskytne prípad, že interval j_1 j ohraničený, ale j_2 sa skladá zo všetkých reálnych čísel. V tomto prípade rozumieme stredom dv. intervalu $j_1 \times j_2$ každý bod, ktorého prvá súradnica je aritmetický stred koncových bodov intervalu j_1 a druhá ľubovoľné číslo.

Keď obidva intervaly j_1, j_2 sú otvorené, je dv. interval $j_1 \times j_2$ oblasť; keď obidva sú uzavreté, je uzáverom oblasti.

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené dv. intervaly

$[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, $[\alpha, \beta] \times (-\infty + \infty)$ [6]



Obr. 4

Ďalšími zvláštnymi prípadmi normálnych oborov sú tzv. klinové obory. Rozoznávame klinové obory pravé a ľavé.

6

Interval o koncových číslach (koncoch) α, β označujeme $[\alpha, \beta]$ alebo (α, β) podľa toho, či je uzavretý alebo otvorený; ak je na jednom konci napr. α uzavretý a na druhom konci β otvorený, označujeme ho $[\alpha, \beta)$ alebo $(\beta, \alpha]$. Interval všetkých reálnych čísel označujeme $(-\infty, \infty)$.

Klinový obor pravý je určený nejakým bodom (x_o, y_o), istým okolím sprava čísla x_o [7], j, a dvoma z bodu (x_o, y_o) vychádzajúcimi polpriamkami, ktorých smernice sú nejaké čísla m < M. Je to množina bodov (x, y), ktorých súradnice vyhovujú vzťahom:

$$x \in j, \quad y_o + m(x - x_o) \leq y \leq y_o + M(x - x_o)$$

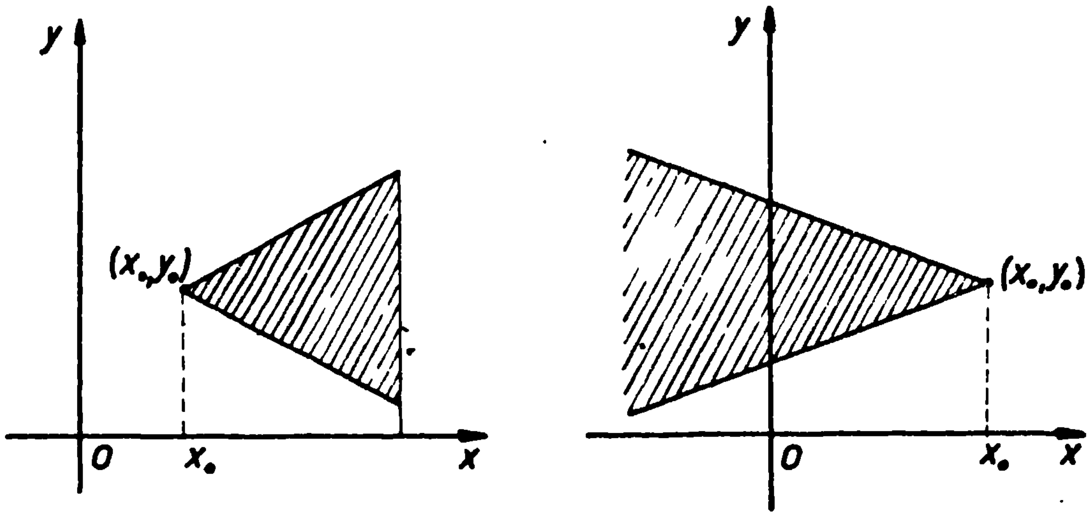
Body tohto klinového oboru ležia teda na oboch polpriamkach a medzi nimi, a to na polpriamke s menšou smernicou a nad ňou a na polpriamke s väčšou smernicou a pod ňou a ich úsečky sú v intervale j. Bod (x_o, y_o) je vrchol klinového oboru, obidve polpriamky sú jeho strany.

Klinový obor ľavý je definovaný podobne pomocou dvoch polpriamok, ktoré vchádzajú do bodu (x_o, y_o).

Keď interval j je neohraničený alebo ohraničený, alebo uzavretý, platí to isté o klinovom obore.

V ďalšom častejšie hovoríme o klinovom obore s daným vrcholom a stranami, neuvádzajúc nič o príslušnom intervale j, v takom prípade máme na mysli klinový obor neohraničený.

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené klinové obory pravý a ľavý; prvý je ohraničený, druhý neohraničený.



Obr. 5

----

7 Používame tieto názvy: Pravým okolím alebo okolím sprava čísla x_o rozumieme každý interval zľava uzavretý číslom x_o; pravým rýdzim okolím alebo rýdzim okolím sprava čísla x_o rozumieme každý zľava otvorený interval o ľavom konci x_o. Obdobný zmysel majú názvy: ľavé okolie alebo okolie zľava čísla x_o a ľavé rýdze okolie alebo rýdzie okolie zľava čísla x_o. Okolím čísla x_o rozumieme spravidla súčet nejakého okolia sprava a okolia zľava čísla x_o; v širšom zmysle zahrňujeme pod týmto názvom i pravé alebo ľavé okolie čísla x_o. Podobný zmysel užší alebo širší má názov rýdze okolie čísla x_o.

6. Základné vlastnosti riešení

Vráťme sa k úvahám o riešeniach d. rovnice (a).

Pripusťme, že d. rovnica (a) má nejaké riešenie y, definované v istom intervale j. Potom v každom čísle $t \in j$ existuje derivácia funkcie y, $y'(t)$ a jej hodnota je $f(t, y(t))$; keď interval j je okolím sprava (zľava) čísla ξ, potom v čísle ξ ide o deriváciu sprava (zľava).

Podľa vety o prírastku funkcie platí pre ľubovoľné čísla $x, x' \in j$

$$y(x) - y(x') = f(\tau, y(\tau)) \cdot (x - x') \qquad (1)$$

pričom τ značí vhodné číslo medzi x, x'[8], ktoré je rôzne od x, x' keď $x \neq x'$.

Pripusťme ďalej, že funkcia f je ohraničená na krivke y, takže v intervale j platí nerovnosť $|f(t, y(t))| \leq M_y$, s vhodným číslom M_y (≥ 0). Potom zo vzorca (1) vychádza

$$|y(x) - y(x')| \leq M_y |x - x'|$$

Z tohto vzťahu usudzujeme, aplikujúc princíp konvergencie, že riešenie y má limitu sprava v ľavom a limitu zľava v pravom konci intervalu j, pokiaľ tieto konce existujú.

Tým sme došli k výsledku, že <u>každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá je definovaná v nejakom intervale zľava (sprava) ohraničenom a na ktorom je funkcia f ohraničená, smeruje sprava (zľava) k istému bodu, ktorého úsečkou je ľavý (pravý) koncový bod definičného intervalu</u>.

Keď funkcia f je ohraničená v definičnom obore d. rovnice (a), potom túto vlastnosť má i na každej int. krivke; v tom prípade platí náš výsledok pre každú int. krivku s definičným intervalom zľava alebo sprava ohraničeným.

7. Užšie a širšie riešenie

Nech y značí riešenie d. rovnice (a) definované v istom intervale j. Riešenie y určuje nekonečne mnoho ďalších riešení d. rovnice (a), z ktorých každé je dané ako čiastočná funkcia riešenia y v nejakom intervale, ležiacom v j. To vyplýva z toho, že ak je rovnosť $y'(x) = f[x, y(x)]$ splnená všade v intervale j, je splnená i v každej jeho časti. O týchto riešeniach hovoríme, že sú <u>užšie než y</u> a nazývame ich <u>čiastkami</u> alebo <u>zúženiami integrálu y</u>. Riešenie y je tiež svojou čiastkou; ostatné čiastky sú definované v intervaloch menších než j[9] a nazývajú sa <u>vlastnými</u>. Existencia užších riešení je teda zrejmá.

---

[8] T.j. že buď $x \leq \tau \leq x'$, alebo $x' \leq \tau \leq x$.

[9] <u>Interval menší (väčší) než j</u> je každý interval, ktorý leží v (na) intervale j a je od neho rôzny. <u>Interval sprava (zľava) menší než j</u> je každý interval ležiaci v j, ktorý je sprava (zľava) ohraničený a ktorý, v prípade, že interval j je sprava (zľava) ohraničený, má pravý (ľavý) koncový bod menší (väčší) než j. Podobne je definovaný <u>interval sprava (zľava) väčší než j</u>.

Zaujímavejší je pojem riešenia širšieho než y, tzv. rozšírenie integrálu y. Ľubovoľné riešenia Y d. rovnice (a), definované v nejakom intervale J, nazýva sa širšie než y alebo tiež rozšírenie integrálu y, keď interval J leží na j a pre $x \in j$ je $Y(x) = y(x)$. Táto definícia obsahuje tiež, že integrál y je svojím rozšírením. Súčasne vidíme, že riešenie y je užšie než každé jeho rozšírenie. Zaujímame sa samozrejme o tzv. vlastné rozšírenia, ktoré sú definované na intervaloch väčších než j.

Pokiaľ ide o existenciu širších riešení, je užitočný tento poznatok:

Ak y_1, y_2 sú riešenia d. rovnice (a), prvé definované v nejakom okolí zľava j_1 čísla ξ, druhé definované v nejakom jeho okolí sprava j_2 a ak obidve riešenia majú v čísle ξ tú istú hodnotu, potom funkcia Y, definovaná v intervale $J = j_1 \cup j_2$[10] vzorcom

$$Y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{pre } x \in j_1 \\ y_2(x) & \text{pre } x \in j_2 \end{cases}$$

je rozšírením každého riešenia y_1, y_2.

Stačí zrejme zistiť, že funkcia Y vyhovuje v intervale J d. rovnici (a). Je isté, že jej vyhovuje v každom čísle $x \in J$, rôznom od ξ. Avšak vyhovuje jej i v čísle ξ, lebo má v ňom deriváciu zľava $D_- y_1(\xi)$ a deriváciu sprava $D_+ y_2(\xi)$ a tieto derivácie majú rovnakú hodnotu $f(\xi, \eta)$. Pritom je $\eta = y_1(\xi) = y_2(\xi)$.

Keď teda nejaké riešenie d. rovnice (a) nadväzuje[11] na iné, potom obidve riešenia dohromady tvoria integrál, ktorý je širší než každé z nich.

Ďalší dôležitý poznatok o možnosti rozšírenia daného integrálu je tento:

Nech obor d. rovnice (a) je uzavretý a funkcia f je v ňom spojitá. Každé riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v nejakom pravom (ľavom) rýdzom okolí čísla ξ a vyznačuje sa tým, že na ňom je funkcia f ohraničená, možno rozšíriť i do čísla ξ.

Vskutku, nech y značí ľubovoľné riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v nejakom napr. pravom rýdzom okolí j čísla ξ a vyznačuje sa tým, že funkcia $f(x, y(x))$ je v intervale j ohraničená. Máme ukázať, že existuje širšie riešenie Y, definované v pravom okolí čísla ξ, $J = j \cup \{\xi\}$.

Z výsledku v ods. 6. predovšetkým usudzujeme, že int. krivka y smeruje sprava k istému bodu (ξ, η). Nech Y je funkcia definovaná v intervale J vzorcami:

$$Y(x) = y(x) \quad \text{pre } x \in j, \quad Y(\xi) = \eta$$

---

10 Súčet dvoch množín, napr. intervalov j_1, j_2 označujeme symbolom $j_1 \cup j_2$ ich prienik $J_1 \cap j_2$. Množinu skladajúcu sa z jediného čísla ξ označujeme $\{\xi\}$. Prázdnu množinu označujeme $\emptyset$.

11 O ľubovoľnej funkcii y_2 hovoríme, že nadväzuje na inú funkciu y_1, ak existuje bod, do ktorého y_1 vchádza a z ktorého y_2 vychádza.

Ukážeme, že táto funkcia je riešením d. rovnice (a), ktoré samozrejme rozširuje integrál y do čísla ξ. Pre ten účel stačí zistiť, že bod (ξ, η) je v obore d. rovnice (a) a že funkcia Y má v čísle ξ deriváciu sprava, ktorej hodnota je $f(\xi, \eta)$. Z definície funkcie Y vidíme, že pre $x \in j$ je $(x, Y(x)) \in \sigma$ a že v čísle ξ má funkcia Y hodnotu η a je tam spojitá sprava. Z toho plynie, že bod (ξ, η) je limitou postupností, ktorých členy sú body z oboru σ z toho usudzujeme ďalej, že bod (ξ, η) leží v obore σ, lebo tento obor je uzavretý. Podľa predpokladu je funkcia f v bode (ξ, η) spojitá. Ďalej pre $x \in j$ podľa vety o prírastku je

$$\frac{Y(x) - Y(\xi)}{x - \xi} = f(\tau, Y(\tau))$$

kde číslo τ spĺňa nerovnosť $\xi < \tau < x$. Pre $x \to \xi_+$ je $\tau \to \xi_+$ $Y(\tau) \to \eta$, $f(\tau, Y(\tau)) \to f(\xi, \eta)$, takže z predchádzajúcej rovnice vychádza, že funkcia Y má v čísle ξ deriváciu sprava o hodnote $f(\xi, \eta)$.

Z tohoto výsledku vyplýva predovšetkým:

Keď obor d. rovnice (a) je uzavretý a funkcia f je v ňom spojitá a ohraničená, možno každé riešenie d. rovnice (a), ktoré je definované v nejakom pravom (ľavom) rýdzom okolí čísla ξ, rozšíriť i do čísla ξ. Špeciálne možno rozšíriť každé riešenie definované v nejakom otvorenom intervale (α, β) na uzavretý interval $[\alpha, \beta]$.

8. Riešenie s koncami na hranici oboru d. rovnice. Úplné riešenie

Uvažujme o d. rovnici (a) v nejakom obore σ. Nech y je ľubovoľné riešenie d. rovnice (a), definované v istom intervale j.

O riešení y hovoríme, že má pravý (ľavý) koncový bod na hranici oboru σ, keď interval j sprava (zľava) uzavretý istým číslom ξ a bod $(\xi, y(\xi))$ je na hranici oboru σ; bod $[\xi, y(\xi)]$ je teda pravý (ľavý) koniec riešenia y. Ďalej vtedy, keď interval j je sprava (zľava) otvorený a nastáva jeden z týchto prípadov:

1. Interval j je sprava (zľava) neohraničený,

2. je sprava (zľava) ohraničený a riešenie y je v každom ľavom (pravom) rýdzom okolí jeho pravého (ľavého) konca ξ neohraničené,

3. je tam ohraničené a existuje postupnosť bodov int. krivky y, s úsečkami menšími (väčšími) než ξ, ktorá konverguje k istému bodu (ξ, η), na hranici oboru σ.

Všimnime si, že keď interval j je sprava (zľava) otvorený a ohraničený a riešenie y je v istom ľavom (pravom) rýdzom okolí jeho pravého (ľavého) konca ξ, ohraničené, potom čísla

$$(H =) \lim \sup y(x), \lim \inf y(x) \quad (= \eta)$$

pre $x \longrightarrow \xi_-$ ($x \longrightarrow \xi_+$) sú konečné a podľa klasickej vety existuje na int. krivke y postupnosť bodov, ktorá konverguje k bodu (ξ, H), resp. k bodu (ξ, η). Odtiaľ vidíme, že v takomto prípade má riešenie y pravý (ľavý) koniec na hranici oboru σ, ak aspoň jeden z oboch bodov (ξ, H), (ξ, η) na nej leží.

Dôležitý je pojem úplného riešenia. Riešenie y sa nazýva sprava (zľava) úplné, keď neexistuje jeho rozšírenie na interval sprava (zľava) väčší než j; nazýva sa úplné, keď je úplné sprava i zľava.

Ľahko nahliadneme, že riešenie y je sprava (zľava) úplné, keď interval j je sprava (zľava) otvorený a riešenie má pravý (ľavý) koniec na hranici oboru σ.

Naproti tomu, keď interval j je sprava (zľava) uzavretý a riešenie y má pravý (ľavý) koniec na hranici oboru σ, potom toto riešenie nie je nutne sprava (zľava) úplné. Napr. d. rovnica[12]

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

v obore:

$$\sigma : -\infty < x < +\infty, -1 \leqq y \leqq 1$$

má riešenie y, definované v intervale ($j \equiv$) $(-\infty, \frac{\pi}{2}\rangle$ takto:

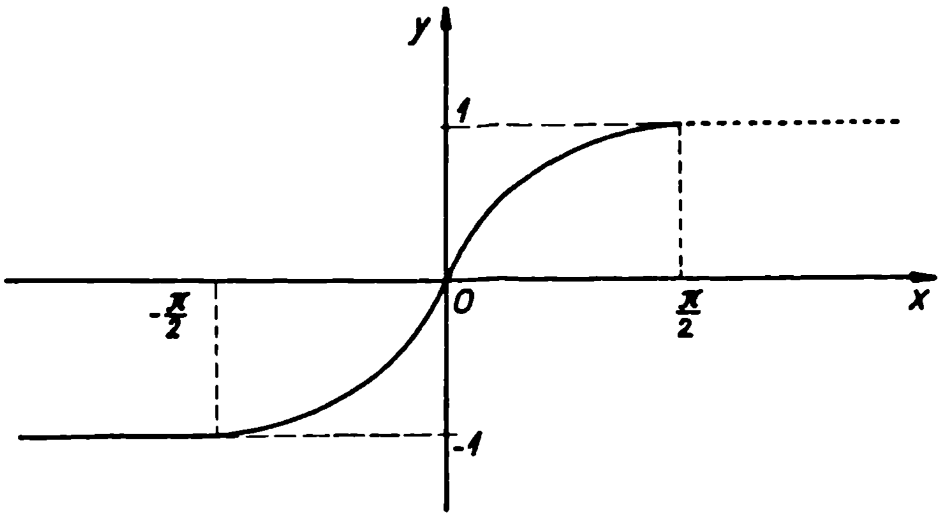
$$y(x) = \begin{cases} -1 & \text{pre } -\infty < x \leqq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x & \text{pre } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Toto riešenie má pravý koniec $(\frac{\pi}{2}, 1)$ na hranici oboru σ; avšak nie je sprava úplné, lebo ho možno rozšíriť na interval sprava väčší než j, $(-\infty, \infty)$, takto: $\bar{y}(x) = 1$ pre $\frac{\pi}{2} \leqq x < +\infty$. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku

---

12

Symbol $\sqrt{\ }$ značí nezáporné číslo



Obr. 6

9. Zúženie a rozšírenie definičného oboru d. rovnice

Uvažujme opäť o d. rovnici (a), v ktorej f značí ľubovoľnú funkciu v nejakom obore $\mathcal{O}$.

Zúženie. D.rovnica (a) určuje nekonečne mnoho ďalších explicitných d. rovníc, z ktorých každá je daná čiastočnou funkciou f v nejakom obore ležiacom v $\mathcal{O}$. O týchto d. rovniciach hovoríme, že sú užšie než (a) a nazývame ich čiastkami, alebo zúženiami d. rovnice (a). Vidíme, že užšie d. rovnice vzniknú z d. rovníc (a) zúžením jej definičného oboru. Podľa tejto definície je tiež d. rovnica (a) svojou čiastkou. Ostatné čiastky majú za definičné obory vlastné podmnožiny v $\mathcal{O}$ a nazývajú sa vlastnými. Všimnime si, že keď funkcia f v d. rovnici (a) je ohraničená alebo spojitá, potom tie isté vlastnosti má čiastočná funkcia f v každej užšej d. rovnici. Každé riešenie nejakej časti d. rovnice (a) je prirodzene tiež riešením d. rovnice (a); keď riešenie je úplné pre užšiu d. rovnicu, môže byť vlastnou čiastkou vhodného riešenia d. rovnice (a). Napr. d. rovnica

$$y' = 0, \quad \text{v obore } \mathcal{O} : -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

pripúšťa zúženie:

$$y' = 0 \quad \text{v obore} \quad : \alpha \leqq x \leqq \beta, \gamma \leqq y \leqq \delta$$

Druhá rovnica má úplné riešenie napr. $y = \gamma$, $\alpha \leqq x \leqq \beta$, ktoré je vlastnou čiastkou úplného riešenia prvej d. rovnice : $y = \gamma$, $-\infty < x < \infty$.

Zúžiť d. rovnicu (a) znamená teda zúžiť jej definičný obor $\mathcal{O}$. Túto operáciu však uskutočňujeme vždy za určitým cieľom a spravidla preto, aby sme obor $\mathcal{O}$ aproximovali užšími obormi, ktoré by mali žiadané vlastnosti.

Dôležité sú predovšetkým aproximácie otvorených množín, zvlášť oblastí tzv. sieťovými obormi, ktoré sú ohraničené a uzavreté.

Predpokladajme, že množina $\mathcal{O}$ je otvorená. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo. Pomocou čísla n definujeme dv. intervaly:

$$\left[\frac{\mu}{2^n}, \frac{\mu+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right] \qquad (1)$$

kde μ, ν $= -n\,2^n, -n\,2^n+1, \ldots, n\,2^n-1$. Tieto dv. intervaly sa teda skladajú z obvodov a vnútra štvorcov siete, ktorá je vytvorená priamkami vedenými vo vzdialenostiach $-n, -n+\frac{1}{2^n}, \ldots, n-\frac{1}{2^n}, n$ od počiatku rovnobežne s osmi. Je ich celkom $(2n\,2^n)^2$ a dohromady tvoria dv. interval $[-n, n] \times [-n, n]$.

Systém dv. intervalov (1) označíme S_n. Je zrejmé, že každý dv. interval z S_n je súčtom štyroch dv. intervalov zo systému S_{n+1}.

Nech s_n značí súčet všetkých dv. intervalov zo systému S_n, ktoré ležia v množine σ.

Predovšetkým vidíme, že množina s_n je ohraničená a uzavretá.

Ďalej platí vzťah

$$s_n \subset s_{n+1}$$

takže máme

$$s_1 \subset s_2 \subset s_3 \subset \ldots \qquad (2)$$

To je zrejmé, keď množina s_n je prázdna; keď nie je, potom každý dv. interval zo systému S_n ležiaci v s_n je súčtom štyroch dv. intervalov zo systému S_{n+1}, ktoré sú tiež v s_n a teda i v množinách σ a s_{n+1}.

Napokon ukážeme, že každý bod množiny σ je vnútorným bodom celkom všetkých[13] množín postupnosti (2).

Vskutku, nech je $(x, y) \in \sigma$ ľubovoľný bod. Pretože množina σ je otvorená, existuje $\delta > 0$ také, že dv. interval $[x-\delta, x+\delta] \times [y-\delta, y+\delta]$ leží v množine σ. Nech n je tak veľké, že platia nerovnosti:

$$-n < x,\ y < n; \quad \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}.$$

Potom pri vhodných celých číslach μ, ν $(= -n\,2^n, \ldots, n\,2^n-1)$ máme

$$\frac{\mu}{2^n} \leqq x < \frac{\mu+1}{2^n}; \quad \frac{\nu}{2^n} \leqq y < \frac{\nu+1}{2^n}.$$

---

13 Slovom <u>celkom</u> vyjadrujeme, že sa pripúšťa konečný počet výnimiek

takže je

$$x - \delta < \frac{\mu - 1}{2^n} < x < \frac{\mu + 1}{2^n} < x + \delta , \; y - \delta < \frac{\nu - 1}{2^n} < y <$$

$$< y < \frac{\nu + 1}{2^n} < y + \delta$$

Odtiaľ usudzujeme, že dv. interval

$$\left[\frac{\mu - 1}{2^n}, \frac{\mu + 1}{2^n}\right] \times \left[\frac{\nu - 1}{2^n}, \frac{\nu + 1}{2^n}\right]$$

je časťou dv. intervalu $[x - \delta , x + \delta] \times [y - \delta , y + \delta]$, teda časťou množiny σ a bod (x, y) je v jeho vnútri; súčasne je súčtom štyroch dv. intervalov zo systému S_n. Z toho vyplýva, že tento dv. interval je v množine s_n, takže (x, y) je vnútorným bodom množiny s_n a tiež i všetkých ďalších množín postupnosti (2).

Z výsledku, ktorý sme práve odvodili, vyplýva, že množiny postupnosti (2), od určitej počínajúc, nie sú prázdne. Keď množina s_n nie je prázdna, nazývame ju n-tý sieťový obor v množine σ, stručne n-tý sieťový obor.

Rozšírenie. Obráťme sa teraz k rozšíreniam d. rovnice (a). Podobne, ako sme definovali d. rovnice užšie než (a), definujeme d. rovnice širšie než (a), čiže rozšírenia d. rovnice (a). Tieto vzniknú z d. rovnice (a) rozšírením jej definičného oboru. D. rovnica (a) je teda užšou než každé jej rozšírenie. Predovšetkým sa zaujímame o tzv. rozšírenia vlastné, ktorých definičné obory sú väčšie než u d. rovnice (a). Z každého integrálu ľubovoľného rozšírenia d. rovnice (a) je riešením tejto d. rovnice každá časť y, definovaná v nejakom intervale j, ktorá sa vyznačuje tým, že krivka y leží v σ.

Rozšíriť d. rovnicu (a) teda znamená rozšíriť funkciu f na širší obor, t.j. definovať v nejakom obore $\Sigma \supset \sigma$ novú funkciu F, ktorá by mala v každom bode oboru σ tú istú hodnotu ako f. Ak sa na hodnotu F nekladú žiadne ďalšie požiadavky, nie je potom definícia funkcie F žiadnym problémom. Ťažkosti môžu nastať až vtedy, keď sa požaduje, aby sa niektoré vlastnosti funkcie f v obore σ, napr. ohraničenosť a spojitosť, preniesli na funkciu F v obore Σ.

V tomto smere je dôležitá veta, že sa každá v nejakom kompaktnom obore spojitá funkcia dá rozšíriť na funkciu ohraničenú a rovnomerne spojitú v celej rovine, pričom absolútna hodnota širšej funkcie nikde neprevýši maximum absolútnej hodnoty pôvodnej funkcie v jej definičnom obore[14]. Tu sa spokojíme s popisom spojitého rozšírenia spojitej funkcie v niekoľkých zvláštnych prípadoch, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

14

Pozri [3], str. 75

a) Nech f je (spojitá) funkcia v obore σ, ktorý sa skladá len z dvoch rôznych bodov (x_1, y_1), (x_2, y_2). Potom existuje širšia funkcia F, definovaná na úsečke s týmito koncovými bodmi, ktorá je tam spojitá a jej absolútna hodnota nikde neprevýši najväčšie z čísel $|f(x_1, y_1)|$, $|f(x_2, y_2)|$.

Takouto funkciou je napr. lineárna funkcia vzdialenosti bodu na úsečke od bodu (x_1, y_1), daná vzorcom:

$$F(x, y) = f(x_1, y_1) + \sqrt{\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y^2 - y_1)^2}} \cdot \Big[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \Big]$$

ktorá má všetky uvedené vlastnosti. Tento vzorec definuje tzv. lineárne rozšírenie funkcie f, z koncových bodov úsečky na celú úsečku.

b) Nech f je spojitá funkcia v obore σ, ktorý sa skladá z niektorých vrcholov a prípadne z niektorých strán nejakého obdĺžnika ω a nech je všade $|f(x, y)| \leqq M$ pri vhodnom čísle M. Potom existuje širšia funkcia F, definovaná na celom obdĺžniku ω, ktorá je tam spojitá a všade spĺňa nerovnosť $|F(x, y)| \leqq M$.

Vskutku, funkciu F definujeme predovšetkým v bodoch oboru σ, v ktorých jej prisúdime tie isté hodnoty, aké má funkcia f. Ak nie je f definovaná vo všetkých vrcholoch obdĺžnika ω, prisúdime jej v nich ľubovoľné hodnoty neprevyšujúce absolútne číslo M. Tým je funkcia F definovaná vo všetkých vrcholoch a prípadne na niektorých stranách obdĺžnika ω. Ak nie je definovaná na všetkých stranách, rozšírime jej definíciu lineárne z koncových bodov každej strany, kde nie je definovaná, na celú stranu. Funkcia F má tým všetky žiadané vlastnosti.

c) Nech f je spojitá funkcia v obore σ, ktorým je nejaký obdĺžnik ω a nech je všade $|f(x, y)| \leqq M$; pri vhodnom M. Potom existuje širšia funkcia F, definovaná v celom uzavretom dv. intervale, skladajúcom sa z obdĺžnika ω a z jeho vnútra, ktorá je v dv. intervale spojitá a všade spĺňa nerovnosť $|F(x, y)| \leqq M$.

Vskutku, funkciu F definujeme predovšetkým v bodoch oboru σ, prisudzujúc jej tam tie isté hodnoty, aké má fukcia f. Ďalej zvolíme ľubovoľne hodnotu funkcie F v niektorom bode vnútri obdĺžnika, (x_2, y_2), napr. v jeho strede, dbajúc len na to, aby absolútne nepresiahla číslo M. V ľubovoľnom inom vnútornom bode (x, y) dv. intervalu prisúdime potom funkcii F hodnotu, ktorú v ňom má jej lineárne rozšírenie z bodov (x_1, y_1), (x_2, y_2), na úsečku s týmito koncami; pritom je (x_1, y_1) bod na obdĺžniku, v ktorom lúč vychádzajúci z bodu (x_2, y_2) a prechádzajúci bodom (x, y) pretína obdĺžnik. Funkcia F má už všetky žiadané vlastnosti.

d) Nech f je spojitá funkcia v obore σ, ktorý sa skladá z niektorých bodov (x_μ, y_ν), niektorých úsečiek o koncových bodoch $(x_{\mu-1}, y_\nu)$, (x_μ, y_ν) a $(x_\mu, y_{\nu-1})$, (x_μ, y_ν) a niektorých dv. intervalov $[x_{\mu-1}, x_\mu] \times [y_{\nu-1}, y_\nu]$, pričom $x_{\mu-1}, x_\mu, y_{\nu-1}, y_\nu$ značia jednotlivé čísla istých delení

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_m = \beta , \gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_n = \delta$$

nejakých intervalov $[\alpha, \beta], [\gamma, \delta]$ a nech je všade $|f(x, y)| \leqq M$. Potom existuje širšia funkcia F, definovaná v dv. intervale $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$, ktorá je tam spojitá a všade spĺňa nerovnosť $|F(x, y)| \leqq M$.

Vskutku, funkciu F definujeme predovšetkým v obore σ hodnotami funkcie f. Ak nie je funkcia F definovaná vo všetkých bodoch (x_μ, y_ν), prisúdime jej v nich ľubovoľné hodnoty absolútne neprevyšujúce číslo M. Ak nie je funkcia F definovaná na všetkých úsečkách o koncových bodoch $(x_{\mu-1}, y_\nu)$, (x_μ, y_ν) a $(x_\mu, y_{\nu-1})$, (x_μ, y_ν), rozšírime jej definíciu na každú zvyšujúcu úsečku lineárne z jej koncových bodov. Ak nie je konečne funkcia F definovaná v každom dv. intervale $[x_{\mu-1}, x_\mu] \times [y_{\nu-1}, y_\nu]$, rozšírime jej definíciu na každý dv.interval, v ktorom nie je definovaná, z jeho obvodu do vnútra spôsobom uvedeným v ods. c. Funkcia F je potom definovaná v dv. intervale $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ a má tam žiadané vlastnosti.

e) Nech f je spojitá funkcia v kompaktnom normálnom obore σ, definovanom nerovnosťami:

$$\sigma : \alpha \leqq x \leqq \beta , \ u(x) \leqq y \leqq v(x)$$

pričom u, v sú funkcie v intervale $[\alpha, \beta]$ spojité a spĺňajú nerovnosti $u(x) < v(x)$ s prípadnými výnimkami v číslach α, β, v ktorých môže platiť rovnosť a nech je všade $|f(x, y)| \leqq M$. Potom existuje širšia funkcia F definovaná v neohraničenom dv. intervale $\overline{\sigma}$.

$$\overline{\sigma} : \alpha \leqq x \leqq \beta , \ -\infty < y < +\infty$$

ktorá je tam rovnomerne spojitá a všade spĺňa nerovnosť $|F(x, y)| \leqq M$. Vskutku, funkciu F definujeme takto:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pre} \quad (x, y) \in \sigma \\ f[x, u(x)] & \text{pre} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta , \quad y \leqq u(x) \\ f[x, v(x)] & \text{pre} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta , \quad y \geqq v(x) \end{cases} \qquad (3)$$

Zrejme je $|F(x, y)| \leqq M$ pre $(x, y) \in \overline{\sigma}$. Prenechávame čitateľovi, aby ukázal, že funkcia F je v dv. intervale $\overline{\sigma}$ rovnomerne spojitá.

D. rovnicu $y' = F(x, y)$, v ktorej F značí funkciu definovanú vzorcom (3), nazývame <u>prirodzeným rozšírením d. rovnice</u> (a). Hovoríme tiež, že sme funkciu f rozšírili prirodzeným spôsobom na funkciu F.

10. Obory, v ktorých ležia všetky int. krivky prechádzajúce týmže bodom

Uvažujme o ľubovoľnej d. rovnici (a) v istom obore σ. Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ ľubovoľný bod. Pri vyšetrovaní int. kriviek d. rovnice (a) prechádzajúcich bodom (ξ, η) môžeme vziať do úvahy len časti oboru σ, v ktorých ležia int. krivky d. rovnice (a) prechádzajúce bodom (ξ, η). V niektorých prípadoch nie je obťažné také časti oboru σ vymedziť. Pripomíname, že všetky riešenia prechádzajúce bodom (ξ, η), pokiaľ existujú, majú v ňom tú istú smernicu $f(\xi, \eta)$ a teda všetky int. krivky prechádzajúce bodom (ξ, η) majú v tomto bode spoločnú dotyčnicu o smernici $f(\xi, \eta)$.

Označme $j(x)$ otvorený interval, ktorého jedným koncovým bodom je ξ a druhým ľubovoľné číslo $x \neq \xi$. Ďalej označme $\sigma(x)$ množinu všetkých bodov oboru σ, ktorých úsečka leží v intervale $j(x)$; $\sigma(x)$ je teda prienik oboru σ a dv. intervalu $j(x) \times (-\infty, \infty)$.

Je zrejmé, že keď bodom (ξ, η) prechádzajú riešenia d. rovnice (a) je $o(x) \neq \emptyset$ pre každé $x \neq \xi$; keď existujú len riešenia, ktoré do bodu (ξ, η) vchádzajú alebo len také, ktoré z neho vychádzajú, máme na mysli len $x < \xi$, alebo len $x > \xi$.

Predpokladajme, že pre každé $x \neq \xi$ (alebo aspoň pre každé $x < \xi$ alebo $x > \xi$) je $\sigma(x) \neq \emptyset$ a že množina hodnôt funkcie f v obore $\sigma(x)$ je ohraničená.

Nech u, U sú ľubovoľné funkcie definované pre všetky x (alebo pre všetky $x \leq \xi$, alebo $x \geq \xi$) majúce v čísle ξ hodnotu η a vyznačujúce sa tým, že pre každé číslo $x \neq \xi$, (alebo $x < \xi$, alebo $x > \xi$) a $(t, y) \in \sigma(x)$ je

$$u(x) \leq f(t, y) \leq U(x)$$

Takými funkciami sú napr. funkcie m, M majúce v čísle ξ hodnotu η a v čísle $x \neq \xi$ hodnoty[15]:

$$m(x) = \inf_{(t,y)\in\sigma(x)} f(t,y), \quad M(x) = \sup_{(t,y)\in\sigma(x)} f(t,y)$$

Všimnime si, že vľavo od čísla ξ funkcia m neklesá a M nerastie a vpravo od neho m nerastie a M neklesá.

Pripustime, že d. rovnica (a) má riešenie y prechádzajúce bodom (ξ, η) definované v nejakom intervale j. Potom v každom čísle $t \in j \cap j(x)$ je

$$u(x) \leq f\big(t, y(t)\big) \leq U(x)$$

---

15 $\inf\limits_{(t,y)\in\sigma(x)} f(t,y)$ značí dolnú hranicu hodnôt funkcie f v obore $\sigma(x)$; podobne $\sup\limits_{(t,y)\in O(x)} f(t,y)$ hornú hranicu. Pozri [4] str. 53

Aplikujúc vetu o prírastku na funkciu y v ľubovoľnom intervale $[\xi, x]$, kde $\xi \neq x \in j$, dostaneme

$$y(x) - \eta = f(\tau, y(\tau))(x - \xi) \qquad (\tau \in j \cap j(x))$$

Odtiaľ a z predchádzajúcich nerovností vyplýva pre $x \in j$:

$$(x - \xi)\, U(x) \leq y(x) - \eta \leq (x - \xi)\, U(x) \quad \text{pre} \quad x \leq \xi\,,$$

$$(x - \xi)\, u(x) \leq y(x) - \eta \leq (x - \xi)\, U(x) \quad \text{pre} \quad x \geq \xi\,.$$

Tým sme zistili, že int. krivka y leží medzi krivkami

$$\eta + (x - \xi)\, u(x) \quad \text{a} \quad \eta + (x - \xi)\, U(x) \tag{1}$$

pripomeňme, že tieto krivky sú definované pre všetky x (alebo pre všetky $x \leq \xi$, alebo $x \geq \xi$).

Vidíme teda, že všetky int. krivky d. rovnice (a) prechádzajúce bodom (ξ, η) ležia v obore medzi krivkami (1). Najmä keď funkcia f je v obore σ ohraničená, takže tam spĺňa nerovnosti

$$\mu \leq f(x, y) \leq M$$

s vhodnými číslami μ, M dostávame tieto výsledky:

Keď $\mu = M$, t.j. keď funkcia f má v obore σ konštantnú hodnotu μ, je každá int. krivka d. rovnice (a) prechádzajúca bodom (ξ, η) časťou priamky prechádzajúcej bodom (ξ, η) a majúcej smernicu μ.

Keď $\mu < M$, ležia všetky int. krivky d. rovnice (a), prechádzajuce bodom (ξ, η) v ľavom a v pravom klinovom obore, ktorého vrchol je bod (ξ, η) a ktorého strany majú smernice μ, M; samozrejme v prípade, že vrchol je pravým (ľavým) koncom niektorej int. krivky, uplatňuje sa pre ňu len ľavý (pravý) klinový obor.

Všimnime si, že keď funkcia f má niektorú z uvedených vlastností v nejakom obore $\sigma_0 \subset \sigma$, platia príslušné výsledky pre čiastky riešenia, ktoré ležia v obore σ_0.

<u>Príklad</u>. Uvažujme o d. rovnici

$$y' = \frac{a\, x^3 y}{x^4 + y^2} \tag{a'}$$

v ktorej a značí ľubovoľnú konštantu a ktorej oborom je celá rovina. Pritom sa dohodnime na tom, že funkcia na pravej strane, ktorú označme f, má v bode $(0, 0)$ hodnotu 0.

Pokúsme sa vymedziť časť oboru funkcie f, v ktorej ležia všetky int. krivky d. rovnice (a') prechádzajúce bodom $(0,0)$. Je zrejmé, že takéto int. krivky existujú; napr. krivka $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Keď $a = o$ je funkcia $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ a jej časti prechádzajúce bodom $(0,0)$, zrejme jedinými riešeniami prechádzajúcimi týmto bodom, takže v tomto prípade je naša otázka nezaujímavá.

Nech teda $a \neq 0$. Nadväzujúc na predchádzajúcu úvahu, označme $j(x)$ otvorený interval s koncovými bodmi 0 a ľubovoľným číslom $x \neq 0$ a $\sigma(x)$ dv. interval $j(x) \times (-\infty, \infty)$. Ukážeme, že množina hodnôt funkcie f v obore $\sigma(x)$ je ohraničená a určíme príslušné funkcie u, U.

Zrejme zo vzorca, ktorý platí pre všetky čísla x, y.

$$0 \leq (x^2 - y)^2 = x^4 + y^2 - 2x^2y$$

vidíme, že keď x, y nie sú súčasne nuly, je[16]

$$-1 \leq \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \leq 1$$

odtiaľ plynú pre všetky čísla x, y nerovnosti[17]

$$-\frac{|a|}{2}|x| \leq f(x, y) \leq \frac{|a|}{2}|x|$$

takže pre $x \neq 0$, $(t, y) \in \sigma(x)$ máme

$$-\frac{|a|}{2} \cdot |x| < -\frac{|a|}{2} \cdot |t| \leq f(t, y) \leq \frac{|a|}{2} \cdot |t| < \frac{|a|}{2} \cdot |x|$$

Z týchto vzorcov už vyplýva, že množina hodnôt funkcie f v $\sigma(x)$ je ohraničená, a to zdola číslom $-\frac{|a|}{2} \cdot |x|$ a zhora číslom $\frac{|a|}{2} \cdot |x|$. Ostatne, z toho, že funkcia f má v každom bode $(t, \mp \operatorname{sgn} a \cdot t \cdot |t|)$[18] hodnotu $\mp \frac{|a|}{2} |t|$ vidíme, že číslo $(m(x) =) -\frac{|a|}{2}|x|$ je dolnou hranicou a $(M(x) =) \frac{|a|}{2} \cdot |x|$ hornou hranicou funkcie f v obore $\sigma(x)$.

Môžeme teda použiť vzorec (1), ak zvolíme $u(x) = -\frac{|a|}{2}|x|$, $U(x) = \frac{|a|}{2}|x|$

---

16 Zrejmá je druhá nerovnosť, prvú nerovnosť dostaneme tak, že sa druhá aplikuje na čísla x, $-y$.

17 Z nich vidíme, že funkcia f je v bode $(0,0)$ spojitá.

18 $\operatorname{sgn} \alpha$ značí 0 pre $\alpha = 0$, $+1$ pre $\alpha > 0$ a -1 pre $\alpha < 0$.

Vidíme, že všetky int. krivky d. rovnice (a′) prechádzajúce bodom (0,0) ležia medzi krivkami $-\frac{|a|}{2}x|x|$ a $\frac{|a|}{2}x|x|$, resp. medzi parabolami o rovniciach

$$y = -\frac{|a|}{2}x^2, \quad y = \frac{|a|}{2}x^2 \qquad (a \neq 0)$$

11. Dolné a horné funkcie

Uvažujme opäť o ľubovoľnej d. rovnici (a) v nejakom obore σ. Nech u je ľubovoľná funkcia, definovaná v intervale j, ktorá sa vyznačuje tým, že krivka u leží v obore σ a že funkcia u má v každom čísle $x \in j$ deriváciu $u'(x)$.

Funkcia u sa nazýva dolnou funkciou vzhľadom na funkciu f alebo vzhľadom na rovnicu (a) stručne: dolnou funkciou, ak pre $x \in j$ spĺňa nerovnosť:

$$u'(x) \leq f(x, u(x)) \tag{1}$$

Podobne sa definuje horná funkcia tým, že v tejto definícii nahradíme slovo dolná slovom horná a znak $\leq$ znakom $\geq$. Pre hornú funkciu platí teda nerovnosť

$$u'(x) \geq f(x, u(x)) \tag{2}$$

Napr. je každé riešenie d. rovnice (a) dolnou a súčasne hornou funkciou vzhľadom na d. rovnicu (a).

Ďalší dôležitý príklad môžeme uviesť v prípade, že oborom funkcie f je nejaký neohraničený dv. interval $j \times (-\infty, \infty)$ a funkcia f je v ňom ohraničená spĺňajúca nerovnosti

$$\mu \leq f(x, y) \leq M$$

s vhodnými číslami μ, M. Potom funkcia daná v intervale j vzorcom $u(x) = \eta + (x - \xi)\mu$, kde ξ, η značia ľubovoľné čísla, $\xi \in j$ je dolná a $v(x) = \eta + (x - \xi).M$ horná funkcia vzhľadom na f.

Všimnime si, že časť každej dolnej alebo hornej funkcie vzhľadom na rovnicu (a), definovanú v nejakom intervale menšom než j, je opäť dolnou alebo hornou funkciou vzhľadom na d. rovnicu (a).

Za účelom ľahšieho vyjadrovania nazvime dolnou (hornou) časťou oboru σ vzhľadom na krivku u stručne: dolným (horným) oborom množinu všetkých bodov $(x, y) \in \sigma$, vyznačujúcich sa tým, že $x \in j$ a $y \leq u(x)$ $[y \geq u(x)]$. Názorne povedané, dolný (horný) obor sa skladá zo všetkých bodov oboru σ, ktoré ležia pod (nad) krivkou u a na nej. Je zrejmé, že spoločnými bodmi dolného a horného oboru sú práve len body na krivke u. Dolný (horný) obor vzhľadom na u označujeme σ_u [σ^u] .

Predpokladajme teraz, že u je dolná funkcia vzhľadom na d. rovnicu (a). Ukážeme, že platí táto veta:

Keď funkcia f(x, y) vo všetkých bodoch $(x, y) \in \sigma_u$ [$(x, y) \in \sigma^u$] spĺňa nerovnosť

$$f(x, y) \geq f\left(x, u(x)\right)$$

potom každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) niektorého bodu oboru σ^u [σ_u], leží, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, celá v obore σ^u [σ_u], t.j. leží celá nad (pod) krivkou u, prípadne na nej.

<u>Dôkaz</u>. Uskutočníme ho napr. v prípade, že funkcia f má žiadanú vlastnosť v bodoch oboru σ_u. Pripustime, že existuje riešenie y d.rovnice (a), definované v istom intervale $j_0 \subset j$, ktoré vychádza z niektorého bodu $(\xi, \eta) \in \sigma^u$, takže $\xi \in j_0$ a $u(\xi) \leq y(\xi)$ a že o int. krivke y naše tvrdenie neplatí. Potom v istom čísle ($\xi <$) $x_1 \in j_0$ platí nerovnosť:

$$u(x_1) > y(x_1)$$

Z tejto a z predchádzajúcej nerovnosti a zo spojitosti funkcií u, y usudzujeme, že existuje číslo $x_0 \in [\xi, x_1)$, ktoré sa vyznačuje tým, že $u(x_0) = y(x_0)$ a v každom čísle $x \in (x_0, x_1]$ je $u(x) > y(x)$. Ďalej vidíme, že v intervale $[x_0, x_1]$ platia vzorce

$$u'(x) \leq f\left(x, u(x)\right) \leq f\left(x, y(x)\right) = y'(x)$$

takže je $[u(x) - y(x)]' \leq 0$. Z tejto nerovnosti usudzujeme, že funkcia u - y v intervale $[x_0, x_1]$ nerastie a odtiaľ vzhľadom na vzťahy $u(x_0) - y(x_0) = 0$, $x_0 < x_1$ vychádza $u(x_1) - y(x_1) \leq 0$, čo odporuje definícii čísla x_1.

Dôsledkom tejto vety je poznatok, že za predpokladov v nej uvedených leží každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) niektorého bodu krivky u, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, celá v obore σ^u [σ_u] .

Podobné výsledky platia i o horných funkciách.

Nech v je ľubovoľná horná funkcia vzhľadom na d. rovnicu (a). Podobne ako v predchádzajúcej úvahe by sme dokázali túto vetu:

Keď funkcia f vo všetkých bodoch $(x, y) \in \sigma^v$ [$(x, y) \in \sigma_v$] spĺňa nerovnosť

$$f(x, y) \leq f\left(x, v(x)\right)$$

potom každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) niektorého bodu oboru σ_v [σ^v] leží, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, celá v obore σ_v [σ^v], t.j. leží celá pod (nad) krivkou v a prípadne na nej.

Z tejto vety vidíme, že za predpokladov v nej uvedených leží každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) niektorého bodu krivky v, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, celá v obore σ_v $[\sigma^v]$.

Zhrnutím predchádzajúcich poznatkov dochádzame k týmto záverom:

Nech u je dolná a v horná funkcia vzhľadom na d. rovnicu (a) definovanú v intervale j a nech v každom čísle $x \in j$ je $u(x) \leq v(x)$ $[u(x) \geq v(x)]$.

Keď funkcia f spĺňa vo všetkých bodoch $(x, y) \in \sigma_u$ $[(x,y) \in \sigma^u]$ nerovnosť

$$f(x, y) \geq f(x, u(x))$$

a vo všetkých bodoch $(x, y) \in \sigma^v$ $[(x, y) \in \sigma_v]$ nerovnosť

$$f(x, y) \leq f(x, v(x))$$

potom každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) niektorého bodu oboru medzi krivkami u, v leží, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, celá v tomto obore.

Oborom medzi krivkami u, v rozumieme, pravda, obor $\sigma^u \cap \sigma_v$ $[\sigma_u \cap \sigma^v]$.

Zrejmým dôsledkom tejto vety je, že ak krivky u, v vychádzajú z (vchádzajú do) toho istého bodu (ξ, η) a funkcia f spĺňa predtým uvedené nerovnosti, potom každá int. krivka d. rovnice (a), ktorá vychádza z (vchádza do) bodu (ξ, η), leží, pokiaľ je definovaná v časti intervalu j, v obore medzi krivkami u, v.

Predchádzajúce výsledky môžeme použiť k dôkazu tejto vety:

Keď funkcia f pri každom x vzhľadom na y nerastie (neklesá), pričom $(x, y) \in \sigma$, potom z (do) každého bodu $(\xi, \eta) \in \sigma$ vychádza (vchádza) najviac jedno riešenie d. rovnice (a).

Treba podotknúť, že zmysel tvrdenia je ten, že existuje okolie j sprava (zľava) čísla ξ také, že každé dve riešenia, ktoré vychádzajú z (vchádzajú do) bodu (ξ, η), splývajú v každom $x \in j$, v ktorom sú obidve definované.

<u>Dôkaz</u>. Predpokladajme napr. že $f(x, y)$ vzhľadom na y nerastie. Pripusťme, že z istého bodu $(\xi, \eta) \in \sigma$ vychádzajú dve int. krivky u, v definované v istých okoliach sprava čísla ξ; označme j_0 prienik týchto okolí.

Potom máme túto situáciu:

Časť funkcie u $[v]$ je v intervale j_0 vzhľadom na d. rovnicu (a) dolnou funkciou; platia nerovnosti

$$f(x, y) \geq f(x, u(x)) \quad \text{pre} \quad x \in j_0, \quad (x, y) \in \sigma_u$$

$$f(x, y) \geq f(x, v(x)) \quad \text{pre} \quad x \in j_0, \quad (x, y) \in \sigma_v$$

Časť funkcie $v[u]$ v intervale j_0 je integrálom d. rovnice (a) vychádzajúcim z bodu $(\xi, \eta) \in o^u$ $[(\xi, \eta) \in o^v]$.

Podľa uvedených viet plynú odtiaľ pre $x \in j_0$ nerovnosti

$$v(x) \geqq u(x) \qquad [u(x) \geqq v(x)]$$

takže je $u(x) = v(x)$.

Príklad. V d. rovnici

$$y' = \operatorname{sgn} x \,.\, \sqrt[3]{y}$$

ktorej oborom je celá rovina, vyznačuje sa funkcia na pravej strane tým, že v každom čísle $x \leqq 0$ vzhľadom na y, rastie a v každom čísle $x \geqq 0$ klesá. Môže vtedy do bodu $(0,0)$ vchádzať a z neho vychádzať najviac jedno riešenie d. rovnice. Jedno riešenie bodom $(0,0)$ skutočne prechádza, totiž $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. Vidíme, že je to jediné riešenie našej d. rovnice, prechádzajúce bodom $(0,0)$.

Poznámka. V pojme dolnej a hornej funkcie je obsiahnutý predpoklad, že príslušné funkcie majú deriváciu. Tento predpoklad možno zovšeobecniť tým, že sa vyžaduje len existencia derivácie sprava (D_+) a zľava (D_-). V tomto prípade vystupia pre dolné funkcie miesto nerovností (1) vzťahy

$$D_+ u(x) \leqq f[x, u(x)], \quad D_- u(x) \leqq f[x, u(x)]$$

a pre horné funkcie miesto (2) vzťahy

$$D_+ u(x) \geqq f[x, u(x)], \quad D_- u(x) \geqq f[x, u(x)]$$

Dá sa ukázať, že aj pri tejto všeobecnejšej definícii zostávajú v platnosti predtým uvedené vety.

Dokonca je možné robiť obdobné úvahy aj v prípade, že sa o dolných a horných funkciách predpokladá len spojitosť a príslušné nerovnosti sa požadujú pre derivácie v širšom zmysle (dolné a horné, zľava a sprava).

12. Transformácia premenných

V teórii d. rovníc sa často používa operácia, ktorá sa označuje ako transformácia premenných. Jej obsah spočíva v tom, že sa k danej d. rovnici priradí nová d. rovnica tak, aby integrály obidvoch boli v jednojednoznačnom zobrazení a dva priradené integrály boli jednojednoznačne na seba zobrazené bodove. Z vlastností integrálov jednej d. rovnice a použitého priradenia sa potom usudzuje na vlastnosti integrálov druhej.

Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

pričom o funkcii f a jej definičnom obore σ nerobíme žiadne predpoklady.

Predpokladajme ale, že množina σ je jednojednoznačne zobrazená bodove na istú množinu Σ. Body (X, Y) množiny Σ nech súvisia s bodmi (x,y) množiny σ vzorcami

$$\begin{aligned} X &= \varphi (x, y) \qquad & x &= \Phi (X, Y) \\ Y &= \psi (x, y) \qquad & y &= \Psi (X, Y) \end{aligned} \tag{1}$$

ktoré definujú spomenuté jednojednoznačné zobrazenie množiny σ na Σ a inverzné zobrazenie množiny Σ na σ. Predpokladajme, že funkcie φ, ψ majú v obore σ spojité parciálne derivácie prvého rádu a podobne funkcie Φ, Ψ v obore Σ. Okrem toho predpokladajme, že hodnoty funkcie

$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot f \tag{2}$$

v obore σ sú buď vždy kladné, alebo vždy záporné.

Uvažujme teraz funkciu F, ktorá je definovaná v obore Σ vzorcom

$$F (X,Y) = \frac{\psi'_x (x, y) + \psi'_y (x, y) \cdot f(x, y)}{\varphi'_x (x, y) + \varphi'_y (x, y) \cdot f(x, y)}$$

kde (x, y), (X, Y) sú dva odpovedajúce si body.

Zo vzorcov (1) vyplýva, že hodnoty parciálnych derivácií funkcií $\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ v každých dvoch odpovedajúcich si bodoch spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned} \varphi'_x \Phi'_X + \varphi'_y \Psi'_X &= 1 \qquad & \Phi'_X \varphi'_x + \Phi'_Y \psi'_x &= 1 \\ \varphi'_x \Phi'_Y + \varphi'_y \Psi'_Y &= 0 \qquad & \Phi'_X \varphi'_y + \Phi'_Y \psi'_y &= 0 \\ \psi'_x \Phi'_X + \psi'_y \Psi'_X &= 0 \qquad & \Psi'_X \varphi'_x + \Psi'_Y \psi'_x &= 0 \\ \psi'_x \Phi'_Y + \psi'_y \Psi'_Y &= 1 \qquad & \Psi'_X \varphi'_y + \Psi'_Y \psi'_y &= 1 \end{aligned}$$

Ďalej ľahko vidíme, že hodnoty funkcie

$$\Phi'_X + \Phi'_Y \cdot F$$

v obore Σ sú tiež vždy buď kladné, alebo vždy záporné a že platí vzťah:

$$f(x, y) = \frac{\Upsilon'_X (X, Y) + \Upsilon'_Y (X, Y) \cdot F (X, Y)}{\Phi'_X (X, Y) + \Phi'_Y (X, Y) \cdot F (X, Y)}$$

Nech teraz y je ľubovoľné riešenie d. rovnice (a) definované v nejakom intervale j. Potom funkcia $\varphi [x, y(x)]$ má v každom čísle $x \in j$ deriváciu a tá je buď vždy kladná alebo vždy záporná, pretože to isté platí o funkcii (2) v obore σ. Z toho usudzujeme, že funkcia $\varphi[x, y(x)]$ je v intervale j spojitá a v ňom stúpa alebo klesá; jej hodnoty tvoria teda interval J, v ktorom existuje inverzná funkcia.

Definujme v intervale J funkciu $Y(X)$ takto:

$$X = \varphi \left(x, y(x)\right) \qquad Y(X) = \psi\left(x, y(x)\right)$$

Potom obidve krivky $\left(x, y(x)\right)$, $x \in j$ a $\left(X, Y(X)\right)$, $X \in J$ sú na seba jednojednozačne zobrazené vzorcami (1); súradnice dvoch odpovedajúcich si bodov súvisia spolu podľa práve napísaných vzorcov a súčasne spĺňajú rovnice

$$x = \Phi \left(X, Y(X)\right), \quad y(x) = \Upsilon \left(X, Y(X)\right)$$

Funkcia Y má v každom čísle $X \in J$ deriváciu, ktorá je daná vzorcom

$$Y'(X) = \frac{\psi'_x \left(x, y(x)\right) + \psi'_y \left(x, y(x)\right) \cdot f \left(x, y(x)\right)}{\varphi'_x \left(x, y(x)\right) + \varphi'_y \left(x, y(x)\right) \cdot f \left(x, y(x)\right)} = F \left(X, Y(X)\right)$$

v ktorom $\left(x, y(x)\right)$ a $\left(X, Y(X)\right)$ značia odpovedajúce si body. Odtiaľ vyplýva, že funkcia Y je riešením d. rovnice

$$Y' = F(X, Y) \tag{A}$$

Zo súmernosti vzorcov usudzujeme, že naopak ku každému riešeniu d. rovnice (A) je transformáciou (1) jednojednozačne priradené isté riešenie d. rovnice (a) a medzi týmito riešeniami je definovaná jednojednozačná bodová priradenosť.

D. rovnice (a) a (A) sú vzhľadom na transformáciu (1) ekvivalentné v tom zmysle, že si ich riešenia jednojednoznačne odpovedajú a dva odpovedajúce si integrály sú transformáciou jednojednoznačne na seba bodove zobrazené.

Hovoríme, že transformáciou, alebo substitúciou premenných (1) prejdú d. rovnice (a) a (A) jedna v druhú. Z vlastností integrálov jednej d. rovnice a transformácie usudzujeme na vlastnosti integrálov druhej.

Napr. transformáciou

$$X = -x, \quad Y = y; \quad x = -X, \quad y = Y$$

prejdú d. rovnice

$$y' = f(x, y), \quad Y' = - f(- X, Y)$$

jedna v druhú a ich definičné obory sú súmerné vzhľadom na os y. Keď napr. z niektorého bodu definičného oboru vychádza isté riešenie jednej d. rovnice, tak potom do odpovedajúceho bodu v definičnom obore druhej d. rovnice vchádza riešenie tejto d. rovnice, ktoré tamtomu odpovedá. Všimnime si tiež, že keď nejaká funkcia u je dolnou (hornou) funkciou vzhľadom na prvú d. rovnicu, je funkcia U definovaná vzorcom $(U(X) = u(x)$ hornou (dolnou) funkciou vzhľadom na druhú.

Iný užitočný príklad je transformácia daná vzorcami:

$$X = y, \quad Y = x; \quad x = Y, \quad y = X$$

ktorá každú bodovú množinu zobrazuje jednojednoznačne na množinu súmernú vzhľadom na priamku, ktorá rozpoľuje uhol kladných polosí. Keď funkcia f je buď vždy kladná alebo vždy záporná, môžeme aplikovať predchádzajúcu úvahu a vidíme, že transformáciou prejdú d. rovnice

$$y' = f(x, y), \quad Y' = \frac{1}{f(Y, X)}$$

jedna v druhú; ich definičné obory sú však súmerné vzhľadom na tú priamku. Každá int. krivka jednej d. rovnice sa zobrazí transformáciou na krivku danú funkciou inverznou a táto krivka je int. krivkou druhej d. rovnice.

Príklad. Uvažujme opäť d. rovnicu

$$y' = \frac{a\, x^3\, y}{x^4 + y^2}, \quad a \neq 0 \tag{3}$$

ktorú sme mali v ods. 10. Pripomeňme si, že jej oborom je celá rovina a že hodnota funkcie na pravej strane v bode $(0,0)$ je 0.

V ľubovoľnej časti roviny, ktorá neobsahuje body, ktorých úsečka alebo poradnica je nulová, teda v každej otvorenej štvrťrovine: $x > 0, \; y > 0$; $x < 0, \; y > 0$; $x < 0, \; y < 0$; $x > 0, \; y < 0$, je funkcia na pravej strane vždy buď kladná alebo vždy záporná.

Uvažujme o časti d. rovnice (3), ktorej oborom je napr. otvorená štvrťrovina $\sigma : x > o, \; y > o$.

Transformáciou:

$$X = y, \quad Y = x^4; \quad x = \sqrt[4]{Y}, \quad y = X \tag{4}$$

sa štvrťrovina σ zobrazí jednojednoznačne do seba: $\sigma' = \sigma$. Funkcie $\varphi = y$, $\psi = x^4$ majú v obore σ všetky vlastnosti, ktoré predchádzajúca teória vyžaduje, Jednoduchým výpočtom zistíme, že naša časť d. rovnice (3) prejde transformáciou (4) v d. rovnicu v obore $X > 0, \; Y > 0$:

$$Y' = \frac{4}{aX} \cdot Y + \frac{4}{a} X \qquad (5)$$

Táto d. rovnica je po formálnej stránke podstatne jednoduchšia než pôvodná; z vlastností jej integrálov a transformácie (4) môžeme usudzovať na vlastnosti integrálov d. rovnice pôvodnej.

Cvičenie. V prípade $a = 4$ má d. rovnica (5) riešenie dané vzorcom

$$Y(X) = X^2 + 2cX, \qquad (X > 0)$$

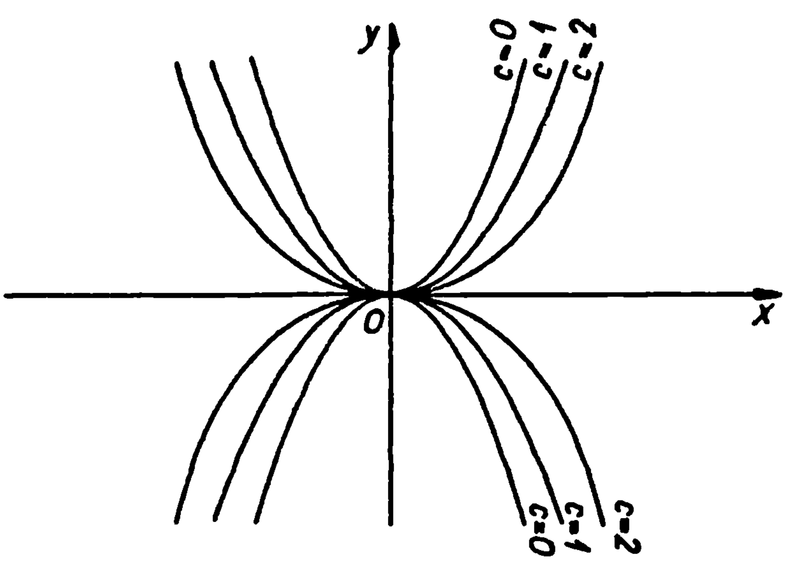
kde $c \geq 0$ je ľubovoľná konštanta. Odvoďte z toho, že časť d. rovnice (3), ktorej oborom je otvorená štvrťrovina $x > 0$, $y > 0$, má riešenie

$$y(x) = -c + \sqrt{c^2 + x^4}, \qquad (x > 0)$$

Všetky tieto riešenia, určene jednotlivými hodnotami konštanty c, smerujú sprava do bodu $(0,0)$. Je zrejmé, že sú riešeniami d. rovnice (3); ukážte, že každé z nich sa dá rozšíriť do bodu $(0,0)$. Urobte podobné úvahy o častiach d. rovnice (3) v ostatných otvorených štvrťrovinách, Zistite, že bodom $(0,0)$ prechádza nekonečne mnoho riešení d. rovnice (3), ktoré sú dané vzorcom

$$y(x) = \pm\,(c - \sqrt{c^2 + x^4}), \quad x \in (-\infty, \infty)$$

Tiež $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ je riešením d. rovnice (3), prechádzajúcim bodom $(0,0)$. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku



Obr. 7

Všimnite si, že ďalšie riešenia d. rovnice (3) prechádzajúce bodom $(0,0)$ sú dané vzorcami

$$y(x) = \begin{cases} \pm\,(c_1 - \sqrt{c_1^2 + x^4}) & \text{alebo } 0 \text{ pre } x \geqq 0 \\ \pm\,(c_2 - \sqrt{c_2^2 + x^4}) & \text{alebo } 0 \text{ pre } x \leqq 0 \end{cases}$$

v ktorých $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ značia ľubovoľné konštanty. Z týchto úvah nevyplýva, že by snáď nemohli existovať ešte ďalšie integrály d. rovnice (3), prechádzajúce bodom (0,0). Všetky integrálne krivky prechádzajúce bodom (0,0) ležia medzi parabolami o rovniciach $y = -2x^2$, $y = 2x^2$ (ods. 10).

2. Systémy funkcií jednej premennej

13. Základné vlastnosti

V nasledujúcich niekoľkých odsekoch vyvinieme krátku teóriu o systémoch funkcií jednej premennej, ktorá je veľmi užitočná pre teóriu študovaných d. rovníc.

Majme ľubovoľnú neprázdnu množinu Y funkcií jednej premennej, ktoré sú definované v istom spoločnom intervale j. Množinu Y nazývame tiež systémom Y.

Nech m je ľubovoľná neprázdna podmnožina intervalu j : m ⊂ j. Budeme hovoriť, že funkcie systému Y sú spola rovnomerne ohraničené na množine m, ak existuje číslo $A > 0$ také, že hodnota každej funkcie vo vhodnom čísle $x_y \in m$ spĺňa nerovnosť

$$| y(x_y) | \leq A$$

Vidíme, že táto vlastnosť je dedičná, t.j. keď funkcie systému Y sú na množine m spola rovnomerne ohraničené, potom tú istú vlastnosť majú tiež funkcie každej neprázdnej podmnožiny množiny Y. Funkcie systému Y sú na množine m spola rovnomerne ohraničené napr. vtedy, keď množina ich hodnôt v niektorom čísle množiny m je ohraničená.

Ďalej budeme hovoriť, že funkcie systému Y sú rovnomerne ohraničené na množine m, ak existuje také číslo $B > 0$, že hodnota každej funkcie $y \in Y$ v každom čísle $x \in m$ spĺňa nerovnosť

$$| y(x) | \leq B$$

Tiež táto vlastnosť je dedičná.

Vidíme, že funkcie systému Y sú na množine m rovnomerne ohraničené, sú tam aj spola rovnomerne ohraničené. Okrem toho množina ich hodnôt v každom čísle množiny m je ohraničená.

Napokon definujeme dôležitý pojem rovnomocnej spojitosti funkcií systému Y na množine m takto:

Funkcie systému Y sa nazývajú rovnomocne spojité na množine m, keď ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že každá funkcia $y \in Y$ spĺňa v každých dvoch číslach $x, x' \in m$, pre ktoré je $|x - x'| < \delta$, nerovnosť