

Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady

Eukleidovy Základy

In: Martina Bečvářová (author): Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. (Czech). Praha: Prometheus, 2002. pp. 19–23.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401802>

Terms of use:

© Bečvářová, Martina

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EUKLEIDOVY ZÁKLADY

Třináct knih Základů.

Eukleidovy *Základy* jsou tvořeny třinácti knihami. Jak již bylo řečeno, pojednávají o geometrii (planimetrii a stereometrii), aritmetice a teorii čísel a o geometrické algebře.

První čtyři knihy jsou planimetrické. První kniha začíná 23 definicemi, 5 postuláty a 9 axiomy, po nichž následuje 48 vět s důkazy.¹⁸ Pojednává o trojúhelnících, obdélnících, rovnoběžkách, rovnoběžnících a rovnoplochých útvarech. Předposlední větou první knihy je věta Pýthagorova, poslední věta obsahuje obrácené tvrzení k této slavné větě.

Druhá kniha (2 definice, 14 vět) je věnována geometrické algebře, rovnoplochosti a transformaci geometrických útvarů, objevuje se zde pojem gnómonu.

Třetí kniha (11 definic, 37 vět) se zabývá vlastnostmi kružnic (tětivy, průměry, středy, dotyk kružnic, tečny, obvodový a středový úhel, oblouky a kruhové úseče, mocnost bodu ke kružnici).

Čtvrtá kniha (7 definic, 16 vět) je věnována problematice opisování a vepisování kružnic daným trojúhelníkům a několika pravidelným mnohoúhelníkům (čtverec, pětiúhelník, šestiúhelník, patnáctiúhelník) a opisování a vepisování těchto útvarů daným kružnicím.

Pátá a šestá kniha jsou věnovány teorii proporcí, tj. teorii poměrů a úměr geometrických veličin (délky, obsahy a objemy), a jejím aplikacím.

Pátá kniha (18 definic, 25 vět) prezentuje Eudoxovu teorii proporcí, šestá (5 definic, 33 vět) ji využívá v planimetrii; jsou zde dokazovány věty o podobnosti rovinných útvarů, zobecněná Pýthagorova věta, najdeme zde konstrukci zlatého řezu atd.

O následujících třech knihách *Základů* se hovoří jako o knihách aritmetických; podávají totiž nejdůležitější vlastnosti přirozených čísel. Tyto výsledky jsou zde vyloženy v geometrické podobě, přirozená čísla jsou prezentována úsečkami celočíselné délky.

V sedmé knize (22 definic, 39 vět) jsou definována čísla sudá, lichá, sudo-sudá, sudo-lichá, licho-lichá, prvočísla, čísla složená, čísla navzájem nesoudělná apod., poslední definice zavádí čísla dokonalá. Prezentované výsledky se týkají dělitelnosti; je zde uveden algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou a tří čísel, který dnes nese Eukleidovo jméno, různá tvrzení o soudělných a nesoudělných číslech, poměrech a úměrách (často se o těchto výsledcích hovoří jako o aritmetické teorii proporcí), o rozkladech složených čísel, nejmenším společným násobku atd.

V osmé knize (27 vět) jsou uvedeny výsledky o geometrické řadě, čtvercových a krychlových číslech apod.

¹⁸ Údaje o počtu definic, postulátů, axiomů a vět se vztahují k tzv. kritické verzi *Základů*, o které bude řeč v dalším textu.

V deváté knize (36 vět) nalezneme nejprve další výsledky o čtvercových a krychlových číslech. Další část této knihy je věnována zejména prvočísłům. Důležitými výsledky je věta o jednoznačnosti rozkladu složeného čísla, věta o nekonečném množství prvočísel, věta popisující dokonalá čísla. V deváté knize je i řada jednoduchých výsledků o číslech sudých, lichých, sudo-sudých, sudo-lichých atd.

Desátá kniha (16 definic, 111 vět) je nejdělsí a nejobtížnější knihou *Základů*; obsahuje teorii iracionalit, která pochází od Theodóra z Kyrény a Theaitéta z Athén. Nejprve jsou zavedeny souměřitelné a nesouměřitelné veličiny a veličiny souměřitelné a nesouměřitelné v dvojmocích; o souměřitelných a nesouměřitelných veličinách je dále uvedena řada výsledků, studovány jsou speciální iracionality, Eukleidés jich zavádí třináct typů.

Poslední tři knihy jsou stereometrické. Jedenáctá kniha (28 definic, 39 vět) je věnována základům prostorové geometrie (vzájemná poloha přímek, přímky a roviny, rovin, rovnoběžnost, kolmost, úhly, rovnoběžnostěny a hranoly a jejich základní vlastnosti atd.).

Dvanáctá kniha (18 vět) začíná větami o poměrech obsahů mnohoúhelníků a kruhů; následují věty o poměrech objemů jehlanů, kuželů, válců a koulí; tato kniha využívá Eudoxovu exhaustivní metodu.

Třináctá kniha *Základů* (18 vět, apendix) pojednává nejprve o zlatém řezu, vlastnostech pravidelných mnohoúhelníků (pětíúhelník, šestíúhelník, desetiúhelník) a o vpisování pravidelných mnohoúhelníků do kruhu. Kniha vrcholí konstrukcemi pěti pravidelných mnohostěnů, kterým je opsána koule, a srovnáním délek hran těchto těles; v apendixu je pak ukázáno, že další pravidelné mnohostěny neexistují. Za autora výsledků, které zde Eukleidés prezentoval, je považován Eudoxos (prvních pět vět) a Theaitétos z Athén.

Čtrnáctá a patnáctá kniha.

K třinácti knihám Eukleidových *Základů* bývaly přidávány ještě dvě knihy, čtrnáctá a patnáctá, které však nejsou dílem Eukleidovým.

Čtrnáctá kniha je věnována dalším vlastnostem pravidelných mnohostěnů; jde o vztahy délek hran pravidelných mnohostěnů, které jsou vepsány do téže koule, a o vztahy povrchů těchto těles. Důležitou roli zde opět hraje zlatý řez. Autorem této knihy je Hypsiklés z Alexandrie (2. pol. 2. stol. n. l.).

Hypsiklova práce je zajímavá i z historického hlediska. Z jejího úvodu vyplývá, že Apollónios z Pergé napsal traktát o porovnání dvacetistěnu a dvanáctistěnu, které jsou vepsány do koule stejného poloměru, Hypsiklés tyto výsledky rozpracoval a dokončil.

Patnáctá kniha pojednává o dalších vlastnostech pravidelných mnohostěnů; jde spíše o tři fragmenty. První odpovídá na to, jak vepsat čtyřstěn do krychle, osmistěn do čtyřstěnu, osmistěn do krychle, krychli do osmistěnu a dvanáctistěn do dvacetistěnu. Ve druhém jsou určeny počty hran a vrcholů pravidelných mnohostěnů, třetí je věnován úhlům mezi jejich stěnami. Tato kniha byla napsána patrně v šestém století našeho letopočtu žáky Isidora z Milétu, který

se proslavil jako stavitel chrámu sv. Sofie v Konstantinopolu (dnes Istanbul); jako autor této knihy bývá někdy uváděn Damaskios z Damašku.

Více o čtrnácté a patnácté knize *Základů* a jejich možných autorech viz [Lo] a [Fe].

Legendy o Základech.

O vzniku *Základů*, podobně jako o Eukleidovi, kolovaly různé legendy.

Arabové tvrdili, že *Základy* sepsal jakýsi tesař Apollónios. Jeho práce se však později téměř celá ztratila a dochovaný zbytek nepostačoval pro ucelené studium. Alexandrijský král si podle této legendy přál naučit se geometrii ze srozumitelné práce. Zaslal proto trosky Apollóniova spisu známému geometru Eukleidovi a požádal ho, aby tento text prohlédl, opravil a doplnil. Eukleidés tak učinil a sepsal spis o třinácti knihách.¹⁹

Tuto legendu uváděl ještě ve třináctém století překladatel *Základů* Našir ad-Dín at-Ṭúsí. Legenda pravděpodobně vznikla chybným arabským překladem Hypsikovy předmluvy ke čtrnácté knize *Základů*, kde je zmiňováno jméno Apollónia (z Pergé) a jeho traktát o porovnání dvacetistěnu a dvanáctistěnu, jehož výsledky později rozpracoval právě Hypsiklés. Arabskými komentátory byla tato pasáž patrně zkomolena a tak vznikla legenda o tesaři Apollóniovi.

Význam Základů.

Eukleidovy *Základy* lze považovat za jeden z vrcholů řecké matematiky. Výrazně překonaly starší učební texty, staly se vzorem a autoritou na více než dva tisíce let.

Snad ještě významnější než obsah *Základů* je jejich struktura a forma, dodnes je lze považovat za učebnici deduktivního myšlení. Metoda, která byla v *Základech* prezentována, postupně pronikala do všech oblastí matematiky. Metodologický přínos *Základů* byl obrovský.

Poznamenejme ještě, že celými *Základy* prostupuje metoda *eukleidovských konstrukcí* (konstrukce pravítkem a kružítkem), jejichž principy jsou zformulovány již v úvodních postulátech.

Problematika Eukleidových *Základů* je v kontextu řecké matematiky podrobně studována v řadě monografií a časopiseckých prací. Některé jsou uvedeny v následujícím seznamu literatury.

¹⁹ Historka je uvedena např. v 1. dílu [He].

LITERATURA

- [Arc] Archibald R. C., *Outline of the History of Mathematics*, Supplement to the AMM **56** (1949), 114 pages.
- [Ar1] Artmann B., *Euclid's Elements and its prehistory*, *Aperion* **24** (1991), 1–47.
- [Ar2] Artmann B., *Euclid. The Creation of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [Ba] Rouse Ball W. W., *A short account of the history of mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
- [BF] Beckmann F., *Neue Gesichtspunkte zum Buch Euklids*, *Archive for History of Exact Sciences* **4** (1967), 1–144.
- [Be] Becker O., *Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der euklidischen Elemente*, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B* **3** (1936), 533–553.
- [Br] Bruins E. M., *Greek geometry and its logistic*, *Janus* **69** (1982), 253–282.
- [BT] Bultner-Thomas I., *Ciò che è originale e ciò che è derivato negli Elementi di Euclide*, *Accademia Nazionale dei Lincei, Quaderno No 184*, Rome, 1973.
- [Ee] von Eecke P., *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948.
- [Fe] Federoff E., *Un théorème des Éléments d'Euclide, exprimé en forme très-générale*, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2. série **18** (1894), 59–64.
- [Fo1a] Fowler D. H., *Book II of Euclid's Elements and pre-Eudoxan Theory of Ratios, I.*, *Archive for History of Exact Sciences* **22** (1980), 5–36.
- [Fo1b] Fowler D. H., *Book II of Euclid's Elements and pre-Eudoxan Theory of Ratios, II.*, *Archive for History of Exact Sciences* **26** (1982), 193–209.
- [Fo2] Fowler D. H., *Investigating Euclid's Elements*, *British Journal for the Philosophy of Science* **34** (1983), 57–70.
- [Fo3] Fowler D. H., *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements*, *Historia Mathematica* **19** (1992), 233–264.
- [Fr] Frenkian C. A., *Le postulat chez Euclid et chez les modernes*, Paris, 1940.
- [Go] Gow J., *A Short History of Greek Mathematics*, Cambridge, 1884.
- [He] Heath T. L., *A History of Greek Mathematics, Volume I, From Thales to Euclid*, Oxford, 1921.
- [HF] Herz-Fischler R., *A remark on Euklid II. 11*, *Historia Mathematica* **6** (1979), 418–422.
- [Kn1] Knorr W. R., *Euclid's tenth book: An analytic survey*, *Historia Scientiarum* **29** (1985), 17–35.
- [Kn2] Knorr W. R., *What Euclid meant: On the use of evidence in studying ancient mathematics*, in A. C. Bowen: *Science and Philosophy in Classical Greece*, Garland Press, New York and London, 1992, 119–163.
- [Kn3] Knorr W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht, Boston, Mass., 1975.
- [Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.
- [Kr] Kropp G., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, Zürich, 1969.
- [Lo] Loria G., *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Seconda edizione totalmente riveduta, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della real casa, Milano, 1914.
- [Ma] Maièrù L., *Il Quinto Postulato Euclideo da C. Clavio (1589) a G. Saccheri (1733)*, *Archive for History of Exact Sciences* **27** (1982), 297–334.
- [Mo] Morrow G. R., *A Commentary on the first Book of Euclid's Elements*, Univ. Press, Princeton, 1970.
- [Mu] Mueller I., *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, MIT Press Cambridge (Mass.), 1981.
- [Nel] Neuenchwander E., *Die ersten vier Bücher der Elemente Euklidis. Untersuchungen über den mathematischen Aufbau, die Zitierweise und die Entstehungsgeschichte*, *Archive for History of Exact Sciences* **9** (1972/73), 325–380.

- [Ne2] Neuenschwander E., *Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklidis*, Archive for History of Exact Sciences **14** (1975), 91–125.
- [Re] Rey A., *La Science dans l'Antiquité. L'Apogée de la science technique grecque l'essor de la mathématique*, Paris, 1948.
- [RDV] Rommevaux S., Djebbar A., Vitrac B., *Remarques sur l'Histoire du Texte des Éléments d'Euclide*, Archive for History of Exact Sciences **55** (2001), 221–295.
- [Ru] Rufini E., *La preistoria delle parallele e il postulato di Euclide*, Periodico di matematica **3** (1923), 11–17.
- [Sa1] Saito K., *Book II of Euclid's Elements in the Light of the Theory of Conic Sections*, Historia Scientiarum **28** (1985), 31–60.
- [Sa2] Saito K., *Compounded Ratio in Euclid and Apollonius*, Historia Scientiarum **31** (1986), 25–59.
- [Sa3] Saito K., *Duplicate ration in Book VI of Euclid's Elements*, Historia Scientiarum **32** (1993), 115–135.
- [Se] Seidenberg G., *Did Euclid's Elements, Book I, Develop Geometry Axiomatically?*, Archive for History of Exact Sciences **14** (1974/75), 263–295.
- [Sz] Szabò A., *Anfänge des euklidischen Axiomensystems*, Archive for History of Exact Sciences **1** (1960), 37–106.
- [SS] Schönberger L., Steck M., *In primum Euclidis elementorum librum commentarii. Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen*, Halle, 1945.
- [Tai] Taisbak C. M., *Coloured Quadrangles: Abuide to the Tenth Book of Euclid's Elements*, Opuscula Graecolatina 24, Museum Tusulanum Press, Copenhagen, 1982.
- [Ta1] Tannery P., *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide*, Bulletin des sciences mathématiques **8** (1884), 162–175.
- [Ta2] Tannery P., *La technologie des éléments d'Euclid*, Bulletin des sciences mathématiques **10** (1897), 17–28.
- [Tu] Turnbull H. W., *The Great Mathematicians*, London, 1929.
- [Vi] Vitrac B., *La Définition V. 8 des Éléments d'Euclide*, Centaurus **38** (1996), 97–121.
- [Wa] Waerden B. L. van der, *Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie*, Archive for History of Exact Sciences **18** (1978), 343–357.
- [Yo] Young G. De, *The Arithmetic Books of Euclid's Elements*, Ph.D. thesis, Harvard University, 1981.
- [Ze1] Zeuthen H. G., *Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité*, Oversigt over det K. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger **5** (1910), 395–435.
- [Ze2] Zeuthen H. G., *Sur les définitions d'Euclide*, Scientia **24** (1918), 256–269.
- [Ze3] Zeuthen H. G., *Histoire de mathématiques dans l'antiquité et le moyen age*, Paris, 1902.