Integrální počet II

Kapitola VIII. Nevlastní integrály

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 308--363.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402055

KAPITOLA VIII

NEVLASTNÍ INTEGRÁLY

Čtenář si možná vzpomíná, jak jsme v **J I**, kap. VIII, zavedli „nevlastní" integrály, vycházejíce z Riemannova integrálu. Podobné zobecnění provedeme v této kapitole, vycházejíce z Lebesgueova integrálu v $\mathbf{E}_1$. Obsah a cíl této kapitoly je podobný jako v předešlé kapitole: získati praxi v počítání integrálů, tentokráte též integrálů nevlastních, mezi nimiž je mnoho integrálů důležitých v klasické analyse. Po stránce theoretické nezíská zde čtenář mnoho nového. O zaokrouhlené a značně obecné theorii (Perronově), obsahující tyto „nevlastní integrály", se čtenář může poučiti v kap. XII.

§ 1. Definice a podmínka konvergence. Omezíme se v této kapitole na integrál v $\mathbf{E}_1$, a to na případ, že integračním oborem jest interval. Vzpomeňme si, jak jsme definovali Lebesgueův integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

kde reálná funkce f je měřitelná v (a, b) (definice 10 v kap. III): Sestrojili jsme

$$I_1 = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad I_2 = \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

a definovali jsme integrál (1) jakožto hodnotu rozdílu $I_1 - I_2$, *má-li tento rozdíl smysl.* To je dosti podstatné omezení; je to asi takové omezení (pokud jde o konečnou hodnotu I), jako kdybychom se u konvergentních řad omezili na řady absolutně konvergentní, t. j. takové řady, kde řada všech členů kladných je konvergentní a rovněž řada všech členů záporných. A přece víme, že je možno rozumným způsobem definovati součet některých řad, které nejsou absolutně konvergentní. Pokusíme se nyní zavésti podobné zobecnění u pojmu Lebesgueova integrálu. Napřed probereme dva jednoduché případy.

Případ I. Budiž $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$ (takže b je buďto konečné nebo $+\infty$). Budeme říkati, že (pro funkci f v intervalu (a, b)) *nastává případ I, jestliže pro každé $\beta \in (a, b)$ konverguje Lebesgueův integrál*

$$(3) \qquad I(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

(jistě je tedy f měřitelná v každém takovém intervalu (a, β) a tedy i v (a, b), ježto lze psáti

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, \beta_n), \text{ kde } a < \beta_n < b, \ \lim_{n\to\infty} \beta_n = b) .$$

Jestliže existuje konečná limita

$$(4) \qquad \lim_{\beta \to b-} I(\beta) ,$$

nazveme tuto limitu zobecněným integrálem funkce f od a do b, znak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; t. j. klademe

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta\to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

a říkáme, že zobecněný integrál (1) konverguje.

Může se státi, že existuje *Lebesgueův* integrál od a do b, a potom platí ovšem (5) podle pozn. 8 v kap. V, § 5. Tedy: Konverguje-li Lebesgueův integrál od a do b, konverguje také zobecněný integrál a oba integrály mají touž hodnotu. Existuje-li však Lebesgueův integrál od a do b a má hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$, je limita v (5) nekonečná a zobecněný integrál nekonverguje. Nemůže tedy nastati kolise tím, že jsme pro konvergentní zobecněný integrál zavedli totéž označení jako pro Lebesgueův integrál. Ovšem může se státi, že Lebesgueův integrál od a do b neexistuje a že přes to existuje konečná limita v (5), t. j. že zobecněný integrál konverguje; zobecněnému integrálu, který není Lebesgueovým, říkáme nevlastní.

Pro početní praxi je často výhodno, jak víme, vyšetřovati též integrály komplexní funkce reálné proměnné; to učiníme i zde, a prosím proto čtenáře, aby definici zobecněného integrálu — jak ji zde podávám — rozuměl tak, že se připouští též komplexní f. Tedy i pro komplexní $f = g + ih$ definujeme zobecněný integrál v „případě I" rovnicí (5), takže i nyní konverguje zobecněný integrál $\int_a^b (g(x) + $ $+ \mathrm{i}\, h(x))\, \mathrm{d}x = K$ tehdy a jen tehdy, konvergují-li oba zobecněné integrály ve výrazu $L = \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x + \mathrm{i} \int_a^b h(x)\, \mathrm{d}x$, načež $K = L$. V dalším poznamenávám, které výsledky platí pro komplexní funkce. Většinou jde (pokud se výsledek nedá přímo dokázati pro komplexní funkce) o zcela triviální věci: výsledek odvozený pro reálné funkce se aplikuje zvlášť na reálnou i imaginární část.

Pro nezáporné (a rovněž pro nekladné) měřitelné funkce existuje ovšem (1) vždy jakožto Lebesgueův integrál (ovšem ne nutně konvergentní); skutečného zobecnění tedy můžeme dosáhnouti pouze u integrálů (1), kde f — pokud je reálná — nabývá jak kladných tak záporných hodnot. Zároveň je zřejmo (a to i pro komplexní f): konverguje-li zobecněný integrál (1), je tento integrál nevlastním tehdy a jen tehdy, jestliže $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x = +\infty$,[1]) načež v případě reálného f je nutně $\int_a^b f^+(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f^-(x)\, \mathrm{d}x = +\infty$; neboť kdyby jen jeden z nich byl $+\infty$, byla by limita v (5) nutně $\pm\infty$. Slovem „integrál" budu v této kapitole rozuměti konvergentní zobecněný integrál; jde-li o Lebesgueův integrál (konvergentní nebo ne), poznamenám to zvláště.

Před chvílí jsme řekli, že konvergentní integrál (1) je Lebesgueovým integrálem tehdy a jen tehdy, když také $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$ konverguje: proto se Lebesgueovým konvergentním integrálům říkává také **absolutně konvergentní** a nevlastním integrálům **neabsolutně konvergentní**.

Aby integrál (1) byl konvergentní, je nutno a stačí, aby funkce $I(\beta)$ z (3) měla vlastní limitu pro $\beta \to b-$. Použijeme-li Bolzano-Cauchyovy podmínky (**D II**, věta 73 (pro konečné b), obecněji věta 144), vidíme, že platí tato

---

[1]) To je totiž právě nutná a postačující podmínka pro to, aby Lebesgueův integrál funkce f od a do b nekonvergoval.

Věta 110.[2]) *Nechť pro každé $\beta \in (a, b)$ konverguje Lebesgueův integrál* (3). *Potom integrál* (5) (*zobecněný*) *konverguje tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $B \in (a, b)$ tak, že*

$$(B < \beta' < \beta'' < b) \Rightarrow |I(\beta'') - I(\beta')| < \varepsilon\,,$$

t. j. tak, že

(6) $$(B < \beta' < \beta'' < b) \Rightarrow \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

Poznámka 1.[2]) Věta 110 se týkala konvergence zobecněného (ať Lebesgueova či nevlastního) integrálu. Píši-li v (6) $|f|$ místo f, dostávám obdobnou větu pro Lebesgueův integrál: Nechť pro každé $\beta \in (a, b)$ konverguje Lebesgueův integrál (3). Potom integrál (5) je konvergentním Lebesgueovým integrálem tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $B \in (a, b)$ tak, že

(7) $$(B < \beta' < \beta'' < b) \Rightarrow \int_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon\,.$$

Důkaz. Vyslovená podmínka je nutná a postačující pro to, aby existovala konečná limita $\lim\limits_{\beta\to b-} \int_a^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x$, t. j. aby konvergoval $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$, což je nutně integrál Lebesgueův.

Příklad 1. Vyšetřeme konvergenci integrálu

(8) $$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \text{ reálné})\,.$$

Ježto

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \simeq x^{1-\alpha} \text{ pro } x \to 0+\,,$$[3])

vidíme toto: pro $\alpha \geqq 2$ je

$$I_1(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = +\infty \text{ (Lebesgueův integrál)}\,,$$

---

[2]) Platí i pro komplexní f.

[3]) Symbol $f(x) \simeq g(x)$ pro $x \to 0+$ značí, že $\lim\limits_{x\to 0+} (f(x) : g(x)) = 1$. Viz kap. VII, § 1, pozn. 7.

kdežto pro $\alpha < 2$ je $I_1(\alpha)$ konvergentní Lebesgueův. Nerovnost $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leqq \frac{1}{x^\alpha}$ dále zaručuje, že pro $\alpha > 1$ je

$$I_2(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy: Pro $\alpha > 1$ existuje $I(\alpha)$ jako *Lebesgueův* integrál, a to pro $1 < \alpha < 2$ konvergentní, pro $\alpha \geqq 2$ má hodnotu $+\infty$.

Jde ještě o hodnoty $\alpha \leqq 1$. Především ukažme, že v tomto případě *neexistuje* $I(\alpha)$ jako *Lebesgueův* integrál. Pro každé celé $n > 0$ je totiž v tomto případě (uvědomte si znamení funkce $\sin x$)

$$(-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \geqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

takže

$$\int_\pi^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^+ dx \geqq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = +\infty,$$

$$\int_\pi^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^- dx \geqq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty.$$

Ale pro $0 < \alpha \leqq 1$ je $I(\alpha)$ přes to konvergentní, ovšem jako *nevlastní* integrál. Neboť funkce $x^{-\alpha}$ je klesající a kladná, takže podle 2. věty o střední hodnotě ve tvaru (71) (na konci kap. V) je pro $0 < B < \beta' < \beta'' < +\infty$:

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \right| = \left| \frac{1}{\beta'^\alpha} \int_{\beta'}^{\xi} \sin x\, dx \right| \leqq \frac{2}{\beta'^\alpha} < \frac{2}{B^\alpha}; \tag{9}$$

volím-li B tak, že $2B^{-\alpha} = \varepsilon$, bude levá strana v (9) menší než ε; t. j. podmínka věty 110 je splněna. (Všimněte si důležité úlohy 2. věty o střední hodnotě pro vyšetřování „neabsolutně konvergentních" integrálů; budeme se s ní stále setkávat.)

Pro $\alpha \leqq 0$ nemůže však $I(\alpha)$ konvergovati ani jakožto nevlastní integrál. Neboť pro každé celé $n > 0$ máme nyní (ježto $x^{-\alpha} \geqq 1$ pro $x \geqq 1$)

$$\left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx \right| \geqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2 ,$$

takže podmínka věty 110 není splněna: je-li $0 < \varepsilon \leqq 2$, neexistuje příslušné B. Snadno se dokáže (proveďte to jako cvičení), že pro $\alpha \leqq 0$ neexistuje ani nevlastní limita

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx .$$

Případ II.[4]) Budiž opět $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$ (takže a je buďto konečné číslo nebo $-\infty$). Budeme říkati, že *nastává případ II* (pro funkci f a pro interval (a, b)), *jestliže pro každé* $\alpha \in (a, b)$ *konverguje Lebesgueův integrál*

$$(10) \qquad J(\alpha) = \int_\alpha^b f(x) \, dx .$$

Jestliže $J(\alpha)$ *má konečnou limitu pro* $\alpha \to a+$, nazveme tuto limitu opět zobecněným integrálem a značíme ji opět znakem

$$(11) \qquad \int_a^b f(x) \, dx .$$

Jestliže konverguje (11) jakožto Lebesgueův integrál, je zobecněný integrál roven Lebesgueovu, takže zde rovněž nenastává kolise. Ale také mezi definicemi zobecněného integrálu ve smyslu případu I a případu II nenastává kolise. Jestliže totiž pro funkci f nastává v (a, b) současně případ I i II, zvolme $c \in (a, b)$, načež jistě konverguje

[4]) Stále připouštím komplexní f.

integrál Lebesgueův od a do c i od c do b, takže konverguje i Lebesgueův integrál od a do b a zobecněný integrál ve smyslu případu I i ve smyslu případu II se rovná Lebesgueovu integrálu. (Čtenář se možná podivil, že jsme — na rozdíl od Lebesgueova integrálu — nezavedli zde pojem zobecněného integrálu pro případ, že limita $\lim I(\beta)$ (viz (3)) nebo $\lim J(\alpha)$ (viz (10)) je $+\infty$ nebo $-\infty$;[5]) důvod najde v cvič. 1.) Také v případě II nazveme nevlastním takový zobecněný integrál, který není Lebesgueovým. Platí zde ovšem také věta obdobná větě 110 (a rovněž poznámka obdobná poznámce 1):

Věta 111.[6]) *Nechť Lebesgueův integrál (10) je konvergentní pro každé $\alpha \in (a, b)$. Potom zobecněný integrál od a do b je konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $A \in (a, b)$ tak, že*

$$a < \alpha' < \alpha'' < A \Rightarrow \left| \int_{\alpha'}^{\alpha''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon .$$

Další poznámky v tomto případě II by byly jistě zbytečné.

V případech I, II jsme měli v intervalu (a, b) jen jeden „nepříjemný" bod, a to jeden z krajních bodů. Vezměme nyní o něco obecnější případ (na nějž se omezíme v této kapitole), kde takových bodů je v (a, b) konečný počet.

Definujme:[6]) *Interval (a, b) $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$ nazvu „vhodným" pro funkci f, jestliže v něm nastává buďto případ I nebo II, t. j. jestliže buďto konverguje integrál (Lebesgueův) $\int_a^\beta f(x)\,dx$ pro každé $\beta \in (a, b)$ nebo konverguje integrál (Lebesgueův) $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ pro každé $\alpha \in (a, b)$.*[7])

Zřejmě každý částečný interval „vhodného" intervalu je opět „vhodný".

---

[5]) Zde ovšem míním reálné f.

[6]) Také pro komplexní f.

[7]) Komu se následující výklad zdá příliš rychlý, nechť si přečte § 2 z kap. VIII v **J I**, kde jsou provedeny úvahy téměř totožné (pouze místo z Lebesgueova se vychází z Riemannova integrálu; u Riemannova integrálu je bod $a = -\infty$ nebo $b = +\infty$ vždy „nepříjemný", u Lebesgueova integrálu nemusí být).

1. pomocná věta. *Budiž* (a, b) *„vhodný" interval,* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. *Potom platí: Zobecněný integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *konverguje tehdy a jen tehdy, konvergují-li všechny zobecněné integrály* $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x$ $(i = 1, \ldots, n)$, *načež*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Nechť v (a, b) nastává na př. případ I (případ II jest obdobný). Pro každé $\beta \in (a_{n-1}, a_n)$ platí (pro Lebesgueovy integrály)

$$\int_a^\beta = \int_{a_0}^{a_1} + \cdots + \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} + \int_{a_{n-1}}^{\beta};$$

limitní přechod $\beta \to b$ — dává ihned tvrzení.

Budiž nyní dán interval (a, b); jeho rozdělení $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ nazvu „vhodným" (pro funkci f), jestliže každý interval (a_{i-1}, a_i) je „vhodný". Zřejmě každé zjemnění „vhodného" rozdělení je „vhodné".

2. pomocná věta. *Buďte*

(12) $\quad a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b\,, \quad a = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = b$

$(n \geqq 1,\ m \geqq 1)$ *dvě „vhodná" rozdělení intervalu* (a, b) *(pro funkci* f*). Potom platí rovnice*

(13) $$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \int_{b_{j-1}}^{b_j} f(x)\,\mathrm{d}x$$

v tomto smyslu: Konvergují-li všechny zobecněné integrály[8]) *vlevo (resp. vpravo), konvergují též všechny zobecněné integrály vpravo (resp. vlevo) a platí rovnice* (13).

Důkaz. Sestrojím společné zjemnění

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = b$$

obou rozdělení (12) (za c_k vezmu na př. všechna a_i a všechna b_j). Použiji-li 1. pomocné věty na každý interval (a_{i-1}, a_i) (jenž je sjedno-

[8]) Jde o zobecněné integrály ve smyslu definice z případu I nebo II, tedy o konečná čísla.

cením některých (c_{k-1}, c_k)), dostanu, že levá strana v (13) má smysl tehdy a jen tehdy, má-li smysl symbol

$$\sum_{k=1}^{p} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,\mathrm{d}x\ ^{8}), \tag{14}$$

načež (14) má touž hodnotu jako levá strana v (13). A podobný vztah je mezi (14) a mezi pravou stranou v (13).

A nyní lze definovati:[9])

Budiž $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. *Budeme říkati, že zobecněný integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

konverguje, jestliže existuje rozdělení $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, *které je „vhodné“ pro funkci* f, *a jestliže konvergují (ve smyslu případů I, II) zobecněné integrály*

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{15a}$$

načež klademe

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{15b}$$

Definice je v pořádku. Neboť *předně* nezávisí hodnota pravé strany v (15b) na tom, které „vhodné“ rozdělení vezmu — to plyne z 2. pomocné věty. A *za druhé*: Nastává-li v (a, b) případ I nebo II, je již interval (a, b) (t. j. $a = a_0 < a_1 = b$) „vhodným“ rozdělením a naše obecná definice je ve shodě se speciálními definicemi, podanými v případech I, II. Také v obecném případě nazýváme konvergentní zobecněné integrály, které nejsou Lebesgueovými (neboli „absolutně konvergentními“), integrály nevlastními (neboli „neabsolutně konvergentními“).

Dalším obsahem této kapitoly je hlavně početní technika pro zobecněné integrály. Ovšem naše definice je dosti chudá, i když s ní v praxi často vystačíme: týká se jen případu, kdy těch „nepříjemných“ bodů je jen konečný počet. Obecnější a zaokrouhlenou theorii najde čtenář,

[9]) Též pro komplexní f.

kterého to zajímá, v kap. XII. V tomto paragrafu připojím ještě několik poznámek, týkajících se početní techniky.

Poznámka 2.[10]) Jsou-li c_1, c_2 konečná komplexní čísla, je

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx\,,$$

jestliže integrály (zobecněné) vpravo konvergují. Důkaz. Nastává-li na př. pro f i pro g případ I, platí rovnice pro Lebesgueovy integrály od a do β, kde $\beta \in (a, b)$, načež se přejde k limitě $\beta \to b\,-$. V obecném případě se napřed provede rozdělení intervalu (a, b), „vhodné" pro f i pro g.

Poznámka 3. Budiž $a < b < c$. Potom platí (pro zobecněné integrály)

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx\,, \tag{16}$$

jestliže konverguje buďto integrál vlevo nebo oba integrály vpravo.

Důkaz. Konverguje-li integrál vlevo, provede se „vhodné" rozdělení intervalu (a, c), k němuž se přidá ještě dělicí bod b. Konvergují-li integrály vpravo, provede se „vhodné" rozdělení intervalu (a, b) i intervalu (b, c); tato rozdělení dávají dohromady „vhodné" rozdělení intervalu (a, c). V obou případech se pak užije přímo definice.

Poznámka 4. Je-li $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a konverguje-li integrál od a do b, konverguje i integrál od α do β. To plyne zřejmě z pozn. 3.

Poznámka 5. Je-li $b < a$, definujeme opět pro zobecněné integrály

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\,,$$

konverguje-li integrál vpravo; a ovšem $\int_a^a f(x)\, dx = 0$. Podceňoval bych čtenáře, kdybych podrobně vykládal vlastnosti integrálu (15) pro $b \leqq a$. Poznamenávám jenom: (16) platí při jakémkoliv pořadí čísel a, b, c podle velikosti, jestliže konverguje buďto integrál, který má „největší" integrační interval, nebo oba ostatní integrály.

---

[10]) Poznámky 2—7 platí i pro komplexní f, g.

V dalším u integrálu předpokládám zpravidla mlčky, že dolní mez je menší než horní; kde je tomu jinak, pozná se to obyčejně ze souvislosti; kde hrozí nedorozumění, upozorním na to zvláště.

Poznámka 6. Konverguje-li zobecněný integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a je-li $a \leqq c \leqq b$, je funkce

$$I(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

spojitá a omezená v $\langle a, b\rangle$ (v případě na př. $b = +\infty$ rozumím spojitostí v tomto bodě, že

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = I(+\infty) = \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

podobně pro $a = -\infty$).[11]) Důkaz. Stačí vzíti funkci $I_0(x) = \int_a^x = \int_c^x + \int_a^c$. Nastává-li v (a, b) na př. případ I, je $I_0(x)$ (jakožto Lebesgueův integrál) spojitý v $\langle a, b\rangle$;[11]) spojitost zleva v bodě b plyne pak z definice $I_0(b) = \lim\limits_{x\to b-} I_0(x)$. V obecném případě rozdělíme $\langle a, b\rangle$ na „vhodné" intervaly a vidíme, že $I_0(x)$ je spojitá v každém z nich (pojímám je teď jako uzavřené), a tedy i v $\langle a, b\rangle$.

Také $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je tedy spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 7. Praktické výpočty provádíme obyčejně tak, že integrační interval rozdělíme ve „vhodné" intervaly (každý z nich tedy obsahuje nejvýše jeden nepříjemný bod, a to na kraji) a vyšetřujeme tyto intervaly každý zvlášť. Nejvýše někdy vyšetřujeme najednou interval (a, b), ve kterém jsou dva „nepříjemné" body na obou koncích. V tom případě bychom měli vzít bod $c \in (a, b)$ a vyšetřovati, zda existují vlastní limity ve výrazu

$$\lim_{\alpha\to a+} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to b-} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{17}$$

---

[11]) Viz kap. V, § 5, pozn. 8. Aby to souhlasilo i pro $c = \pm\infty$, je nutno klásti $\int_{+\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-\infty} = 0$.

ale místo toho můžeme vyšetřovati také existenci (a hodnotu) vlastní limity

$$(18) \qquad \lim_{\substack{\alpha \to a+ \\ \beta \to b-}} \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

jak by čtenář snadno nahlédl. Ale není třeba o tom mluvit, ježto vždy můžeme vyšetřovati (17) a vyhnouti se symbolu (18). Naopak, někdy raději nějaký dělicí bod přidáme. Nastává-li na př. v (a, b) případ II, zvolíme číslo $a' > a$ „blízko" čísla a a vyšetřujeme zvlášť interval (a, a') (ve kterém se někdy charakter funkce v blízkosti bodu a zřetelně projevuje) a zvlášť interval (a', b) (ve kterém jde o Lebesgueův integrál). Vezmeme v dalším dva příklady: integraci per partes a substituční methodu.

Poznámka 8. (Integrace per partes.) Budiž na př. $-\infty < a < b \leqq +\infty$; předpokládejme, že jsou dány funkce F, g[12]) s těmito vlastnostmi: Pro každé $\beta \in (a, b)$ je F absolutně spojitá v $\langle a, \beta\rangle$, $g \in \mathbf{L}(a, \beta)$. Zvolme libovolně $c \in \langle a, \beta)$ a konečné číslo k a klaďme

$$G(x) = \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t + k\,.$$

Podle věty 98 v kap. V je pro každé $\beta \in (a, b)$

$$(19) \qquad \int_a^\beta F(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)\,G(x)]_a^\beta - \int_a^\beta F'(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde integrály jsou konvergentní Lebesgueovy. Jestliže nyní pro dva ze tří členů v (19) existuje vlastní limita pro $\beta \to b-$, existuje i třetí vlastní limita a jest

$$(20) \qquad \int_a^b F(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to b-} F(\beta)\,G(\beta) - F(a)\,G(a) - \int_a^b F'(x)\,G(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde jde o konvergentní zobecněné integrály. Ostatně se tohoto postupu užívá i při Lebesgueových integrálech, nelze-li do (19) přímo dosaditi $\beta = b$ (viz třeba § 3, příkl. 9).

[12]) Obecně komplexní.

Příklad 2. Pro $0 < a < b < +\infty$, $0 < \alpha < 1$ je

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos b}{b^\alpha} + \frac{\cos a}{a^\alpha} - \alpha \int_a^b \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ježto $\alpha + 1 > 1$, dostáváme pro $b \to +\infty$ vpravo a tedy i vlevo vlastní limity; tedy konverguje zobecněný integrál

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos a}{a^\alpha} - \alpha \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{21}$$

Zajímavé je dvojí: 1. Nevlastní integrál vlevo byl převeden na Lebesgueův integrál vpravo. To se leckdy stává při použití integrace per partes. 2. Konvergenci nevlastního integrálu (21) jsme v příkl. 1 dokázali užitím 2. věty o střední hodnotě, zde užitím integrace per partes. Také toto není ojedinělý případ: tyto dvě methody mohou často zastupovati jedna druhou. Viz k tomu **J I**, kap. X, § 4, cvič. 9—10; viz též použití integrace per partes v důkazu věty 101.

Poznámka 9 (substituční methoda). Zde platí i pro konvergentní zobecněné integrály věta zcela obdobná větě z kap. VII, § 1, pozn. 1 (přitom φ je reálná, f může býti komplexní):

Budiž $\varphi(t)$ konečná funkce spojitá a buďto rostoucí nebo klesající v (α, β) $(-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty)$, $a = \lim_{t\to\alpha+} \varphi(t)$, $b = \lim_{t\to\beta-} \varphi(t)$. Nechť existuje spočetná množina $M \subset (\alpha, \beta)$, uzavřená v (α, β) a taková, že φ má v otevřené množině $(\alpha, \beta) \dot{-} M$ spojitou, konečnou a od nuly různou derivaci. Potom pro zobecněné integrály platí rovnice

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{22}$$

jakmile jeden z těchto zobecněných integrálů konverguje.

Výměnou horní a dolní meze je patrno, že (22) platí za příslušných předpokladů i pro $\alpha > \beta$.

Důkaz.[13]) I. Nechť konverguje integrál vlevo; sestrojme „vhodné" rozdělení $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = b$, položme $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_p = \beta$, a volme

[13]) Důkaz provedeme pro rostoucí φ; u klesajícího φ je $a > b$ a některé nerovnosti se obrátí.

γ_k $(0 < k < p)$ tak, že $\varphi(\gamma_k) = c_k$, tedy $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_p = \beta$. Vezměme interval (c_k, c_{k+1}) a nechť v něm pro funkci f nastává na př. případ I (případ II je obdobný). Zvolme δ $(\gamma_k < \delta < \gamma_{k+1})$ a položme $d = \varphi(\delta)$.[14]) Podle pozn. 1 v kap. VII, § 1 je

$$\int_{c_k}^{d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_k}^{\delta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{23}$$

(konvergentní Lebesgueovy integrály). Pro $\delta \to \gamma_{k+1}-$ je $d \to c_{k+1}-$ a podle předpokladů má levá strana v (23) konečnou limitu $\int_{c_k}^{c_{k+1}}$, touž limitu má tedy i pravá strana, t. j. konverguje

$$\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

a nyní stačí sečísti přes $k = 0, 1, \ldots, p-1$, abychom dostali (22).

II. Nechť konverguje v (22) integrál vpravo; sestrojme „vhodné" rozdělení $\alpha = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_p = \beta$, položme $c_0 = a$, $c_p = b$, $c_k = \varphi(\gamma_k)$ pro $0 < k < p$, takže $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_p = b$. Vezměme interval (γ_k, γ_{k+1}) a nechť v něm pro funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ nastává na př. případ I. Zvolme d $(c_k < d < c_{k+1})$ a najděme δ tak, že $\varphi(\delta) = d$.[15]) Podle pozn. 1 v kap. VII, § 1 platí opět (23) (s konvergentními Lebesgueovými integrály). Pro $d \to c_{k+1}-$ je $\delta \to \gamma_{k+1}-$ a podle předpokladu má v (23) pravá strana konečnou limitu $\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}}$, touž limitu má tedy i levá strana, t. j. $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a platí (24). A nyní sečtu přes $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Místo věty z kap. VII, § 1, pozn. 1 jsme ovšem mohli na zobecněné integrály přenésti také obecnější větu 104.

Příklad 3. Rostoucí funkce e^t zobrazuje $(-\infty, +\infty)$ na $(0, +\infty)$. Substituce $x = e^t$ dává tedy

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin e^t\,\mathrm{d}t\,,$$

ježto integrál vlevo konverguje (viz příklad 1).

[14]) Tedy $c_k < d < c_{k+1}$.
[15]) Tedy $\gamma_k < \delta < \gamma_{k+1}$.

Poznámka 10. Nezapomínejme ovšem, že v jednoduchých případech máme k disposici na př. též větu 55 z **J I**, ve které se nepožaduje monotonie funkce φ. Tato věta by se dala ostatně značně zobecnit.

Cvičení

1. Pro $-1 < c < 1$ je (Lebesgueovy integrály)

$$\int_{-1}^{c} \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\infty\,, \quad \int_{c}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx = +\infty\,.$$

Kdybychom tedy v případech I, II připouštěli též nekonečné hodnoty pro integrál i pro jeho limitu, mohli bychom tento příklad považovati za případ I i za případ II. Je však

$$\lim_{c\to 1-} \int_{-1}^{c} \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\infty\,, \quad \lim_{c\to -1+} \int_{c}^{1} \frac{x}{1-x^2}\,dx = +\infty\,,$$

a naše definice integrálu od -1 do 1 by selhala.

§ 2. Vyšetřování konvergence zobecněných integrálů.

Pokud jde o nevlastní integrály, bývá vyšetřování delikátnější než u Lebesgueových integrálů.

Příklad 1. Vyšetřujme konvergenci integrálu

$$\int_{2}^{+\infty} \lg^{\beta} x \,.\, \sin x \,\frac{dx}{x^{\alpha}} \quad (\alpha, \beta \text{ reálná})\,. \tag{25}$$

Je-li $\alpha > 0$, je funkce $f(x) = x^{-\alpha} \lg^{\beta} x$ v jistém intervalu $(a, +\infty)$ kladná a klesající (ježto pro dosti velká x je $f'(x) < 0$). Použití 2. věty o střední hodnotě dává pro $a < b < c < +\infty$

$$\left|\int_b^c f(x) \sin x\,dx\right| = f(b) \left|\int_b^{\xi} \sin x\,dx\right| \leqq 2f(b)\,.$$

Ježto $\lim\limits_{b\to+\infty} f(b) = 0$, je splněna podmínka věty 110 a tedy (25) pro $\alpha > 0$ konverguje. Dokažte, že (25) konverguje také ještě pro $\alpha = 0$, $\beta < 0$, ale že nekonverguje v žádném ze zbývajících případů. Dokažte, že (25) je konvergentním Lebesgueovým integrálem tehdy a jen tehdy, je-li buďto $\alpha > 1$, nebo $\alpha = 1$, $\beta < -1$. (Postup podobný jako v příkl. 1, § 1.)

Podobnost postupu v příkl. 1, § 1 a v příkl. 1, § 2 vede k otázce, nevězí-li za tím nějaká obecná methoda. Tomu je vskutku tak, jak ukazuje tato věta:

Věta 112. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. *Budiž* f *nezáporná, omezená a nerostoucí v* (a, b). *Nechť*

$$\int_a^{b'} g(x)\, dx \tag{26}$$ [16]

je konvergentním Lebesgueovým integrálem pro každé $b' \in (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^{b} f(x)\, g(x)\, dx \tag{27}$$

konverguje, jestliže je splněna jedna z těchto dvou podmínek:

I. (26) *je omezenou funkcí proměnné* b' *v* (a, b) *a současně je* $\lim_{x \to b-} f(x) = 0$.

II. $\int_a^b g(x)\, dx$ *konverguje.*

Důkaz stačí provésti pro reálné g. Zkoumejme, zda je splněna podmínka věty 110. Pro $a < b' < b'' < b$ je

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\, g(x)\, dx\right| = f(b') \left|\int_{b'}^{\xi} g(x)\, dx\right| \quad (b' \leqq \xi \leqq b'') . \tag{28}$$

V případě I je $\lim_{b' \to b-} f(b') = 0$, a druhý integrál v (28) je menší než jistá konstanta. V případě II je $f(b')$ menší než jistá konstanta, a druhý integrál má tuto vlastnost: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $B \in (a, b)$ tak, že pro $B < b' \leqq \xi < b$ je

$$\left|\int_{b'}^{\xi} g(x)\, dx\right| < \varepsilon .$$

---

[16]) g smí býti komplexní.

Příklad 2. Z věty 112, případ I plyne na př. konvergence integrálů

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2}\, dx \quad (a \text{ reálné}, b > 0)\,,$$

$$I_2 = \int_a^{+\infty} \frac{\sin (x + x^2)}{x^\lambda}\, dx \quad (a > 0,\ \lambda > 0)\,,$$

$$I_3 = \int_a^{+\infty} f(x)\, e^{\sin x} \sin 2x\, dx \quad (a > -\infty)\,,$$

$$I_4 = \int_a^{+\infty} f(x)\, e^{\cos x} \sin (\sin x)\, dx \quad (a > -\infty)\,;$$

přitom v posledních dvou integrálech značí f funkci omezenou a nerostoucí v $(a, +\infty)$, pro kterou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Důkaz. A) $\left|\int_0^\gamma \sin ax\, dx\right| \leqq \frac{2}{|a|}$ $(a \neq 0)$ je omezenou funkcí proměnné γ; případ $a = 0$ je jasný.

B) Substituce $x + x^2 = z$ dává pro $a < \gamma < +\infty$

$$\int_a^\gamma \sin (x + x^2)\, dx = \int_A^\Gamma \frac{\sin z}{\sqrt{1 + 4z}}\, dz\,, \tag{29}$$

$$A = a + a^2\,, \quad \Gamma = \gamma + \gamma^2\,.$$

Ale

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{1 + 4z}}\, dz$$

konverguje podle věty 112, I; tedy integrál v (29) je omezená funkce proměnné Γ v intervalu $(A, +\infty)$.

C) Substituce $\sin x = t$ dává podle věty 55 v **J I**

$$2\int_a^\gamma e^{\sin x} \sin x \cos x\, dx = 2 \int_{\sin a}^{\sin \gamma} t e^t\, dt \leqq 2 \int_{-1}^{1} |t| e^t\, dt\,.$$

D) Funkce $g(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x)$ je lichá, tedy $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0$. Ale $g(x)$ má periodu 2π, a tedy (viz kap. VII, § 1, pozn. 4) $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} = 0$ pro každé α. Konečně je $|g(x)| \leqq e$. Budiž $a < b < +\infty$; interval (a, b) rozdělím na interval délky $2k\pi$ (k celé) plus interval délky menší než 2π. Tedy $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^{a+2k\pi} + \int_{a+2k\pi}^{b}$; zde je první integrál nula a absolutní hodnota druhého je nejvýše $2\pi e$. Tedy integrál od a do b je omezenou funkcí b.

Příklad 3. Budiž $0 < \mu \leqq \frac{1}{2}$; pro velká x je x^μ daleko větší než $|\sin x|$ a proto by se zdálo, že integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\mu + \sin x}\,dx^{17)}$$

se bude chovati asi jako

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx\,,$$

t. j. že konverguje (viz příkl. 1 v § 1). Ale není tomu tak, neboť pro $0 < b < +\infty$ je

$$(30) \quad \int_0^b \frac{\sin x}{x^\mu + \sin x}\,dx = \int_0^b \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx - \int_0^b \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}\,dx\,.$$

Integrand v posledním integrálu je nejméně roven $\frac{1}{2}x^{-2\mu}\sin^2 x$, jestliže $x > 1$ (dokonce, jak snadno zjistíte, pro všechna $x > 0$). Proto pro celé $n > 2$ je

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}\,dx \geqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^{2\mu}}\,dx \geqq$$

---

[17]) Uvažte, že $x^\mu + \sin x > 0$ pro $x > 0$.

$$\geqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx^{18}) \geqq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2 x\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4(k+1)},$$

což má pro $n \to \infty$ limitu $+\infty$. V (30) vpravo je tedy limita (pro $b \to \infty$) druhého integrálu $+\infty$, limita prvního je konečná (§ 1, příkl. 1), takže integrál vlevo má limitu $-\infty$.

§ 3. Výpočet zobecněných integrálů: elementární methody. Provedu řadu příkladů; jen jeden z nich (t. zv. Frullaniovy integrály) bude obecnějšího rázu. V příkladech se vedle nevlastních vyskytnou i konvergentní Lebesgueovy integrály.

Příklad 1. Nejjednodušší případ je tento: Máme počítati $\int_a^b f(x)\, dx$ $(a < b)$. Předpokládejme, že k $f(x)$ existuje v (a, b) primitivní funkce $F(x)$ a že Riemannův integrál $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$ existuje pro každé $\alpha \in (a, b)$, $\beta \in (a, b)$ (to platí na př., je-li f konečná a spojitá v (a, b)). Potom (věta 39 v **J I**) $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha)$ pro každé $\alpha \in (a, b)$, $\beta \in (a, b)$ a limitní přechod $\alpha \to a+$, $\beta \to b-$ řeší náš úkol. (V kap. XII zjistíme, že slova „Riemannův integrál... existuje" je možno nahraditi slovy „Lebesgueův integrál ... konverguje"; viz kap. XII, věta 178.)

Na př. funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ je v $(0, +\infty)$ spojitá a má tam primitivní funkci $x \sin \frac{1}{x}$. Tedy

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} - \lim_{x \to 0+} x \sin \frac{1}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

[18]) Je $2\mu \leqq 1$.

Příklad 2. Budiž f funkce (komplexní) taková, že $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ pro $x > 0$. Potom (za předpokladu, že integrál vlevo konverguje) je

$$(31) \qquad \int_0^{+\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 , \quad \int_0^{+\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = 0 .$$

Důkaz: Vezměme třeba první integrál (u druhého je to obdobné), rozdělme $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ a v posledním integrálu pišme $x = \frac{1}{z}$:

$$\int_1^{+\infty} = \int_0^1 f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z} = - \int_0^1 f(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} .$$

Na př.:[19])

$$\int_0^{+\infty} g\left(x - \frac{1}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 ,$$

je-li g lichá funkce a konverguje-li integrál;

$$\int_0^{+\infty} h(x^\alpha + x^{-\alpha}) \lg x \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 ,$$

konverguje-li integrál; na př.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lg x}{x^\alpha + x^{-\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 \text{ pro reálné } \alpha \neq 0 .$$

Podobně pro druhý integrál v (31).

Příklad 3.[20]) Je-li $A > 0$, $B > 0$ a konverguje-li integrál vlevo, je

$$(32) \qquad \int_0^{+\infty} f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} f(y^2)\, \mathrm{d}y .$$

---

[19]) g, h mohou být komplexní.
[20]) f smí být komplexní.

Důkaz. Substituce $Ax - \frac{B}{x} = y$ dává podle pozn. 9 v § 1

$$
(33) \qquad \begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right)\left(A + \frac{B}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \\
&= A \int_0^{+\infty} f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right)\mathrm{d}x + B \int_0^{+\infty} f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2},
\end{aligned}
$$

konvergují-li integrály vpravo. Ale první z nich konverguje a konvergence druhého se dokáže podle pozn. 9 v § 1 substitucí $x = \frac{B}{At}$:

$$
(34) \qquad B \int_0^{+\infty} f\left(\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = A \int_0^{+\infty} f\left(\left(-At + \frac{B}{t}\right)^2\right)\mathrm{d}t,
$$

což je totéž jako první integrál v (33) vpravo. Ježto $f(y^2)$ je sudá funkce, plyne (32), dosadíme-li do (33) podle (34).

Příklad 4. Pro $a > 0$, $b > 0$ plyne z příkl. 3 ihned

$$
\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(\sqrt{a}\,x - \sqrt{b}\,\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{ab}}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

(podle kap. III, § 7, příkl. 12).

Příklad 5.[20]) Nechť v (a, b) nastává pro funkci f případ I z § 1. Nechť konverguje

$$
(35) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\,.
$$

Zvolíme-li jakoukoliv posloupnost $b_1, b_2, \ldots$ takovou, že $a < b_n < b$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, plyne z (35) ovšem, že

$$
(36) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,.
$$

(Avšak z existence limity v (36) neplyne existence limity v (35); na př. $\int_0^\beta \cos x\,\mathrm{d}x = \sin\beta$ nemá limitu pro $\beta \to +\infty$, kdežto $\int_0^{n\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$ (n celé) má limitu 0 pro $n \to \infty$.)

Vypočtěme podle této poznámky

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx ;$$

konvergenci jsme zjistili již v § 1, příkl. 1. Volíme $b_m = (m + \frac{1}{2}) \pi$, takže

$$(37) \quad \begin{aligned} I &= \lim_{m \to \infty} \int_0^{(m+\frac{1}{2})\pi} = \lim_{m \to \infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} + \sum_{n=1}^{m} \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \right) = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx . \end{aligned}$$

Substituce $x = n\pi - t$ resp. $x = n\pi + t$ dává

$$\int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{n\pi} + \int_{n\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin t}{n\pi - t} \, dt + (-1)^n \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} \, dt .$$

Podle (37) je tedy

$$(38) \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x}{x} \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-1)^n \sin x \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right) dx .$$

Řada

$$(39) \quad s(x) = \frac{\sin x}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin x \left(\frac{1}{x + n\pi} + \frac{1}{x - n\pi} \right)$$

má v $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvergentní majorantu

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2\pi^2 - \frac{1}{4}\pi^2} ,$$

takže ji lze integrovat člen po členu. Podle (38), (39) je tedy $\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} s(x)\,.$ $.\,\mathrm{d}x = I$. Ale v kap. XIII, § 6, příkl. 3, vzorec (97) vypočteme, že je $s(x) = 1$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$, takže dostáváme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{40}$$

Odtud ihned pro reálné a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} a\,. \tag{41}$$

(Pro $a > 0$ substituce $x = at$ v (40), při změně znamení čísla a změní (41) také znamení, a pro $a = 0$ je zřejmě (41) rovno nule.)

Výpočet byl jednoduchý, ale poněkud umělý. Také vyžadoval hlubší pomůcky — jednoho výsledku z theorie Fourierových řad (kap. XIII). V §§ 4, 6, 8 vypočteme I ještě jinak.

Příklad 6. Vyšetřujme (a, b reálná)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(bod $x = 0$ zde nevadí, ježto $\cos ax - \cos bx \simeq \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\,x^2$ pro $x \to 0$). Počítejme pro $0 < \varepsilon < \Gamma < +\infty$ per partes

$$\int_\varepsilon^\Gamma \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{-\cos ax + \cos bx}{x}\right]_\varepsilon^\Gamma - \int_\varepsilon^\Gamma (a \sin ax - b \sin bx)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Limitní přechod $\varepsilon \to 0+$, $\Gamma \to +\infty$ dává v prvním členu vpravo nulu, v druhém integrály, známé z příkl. 5. Vychází

$$I = \tfrac{1}{2}\pi(|b| - |a|)\,.$$

Všimněme si, že jsme výpočet konvergentního Lebesgueova integrálu I převedli na výpočet nevlastního integrálu.

Příklad 7.[20]) Pro libovolná konečná kladná ε, Γ ($\varepsilon < \Gamma$) budiž $f \in \mathbf{L}(\varepsilon, \Gamma)$ (prozatím budiž f reálné); tedy také

$$I(\varepsilon, \Gamma) = \int_{\varepsilon}^{\Gamma} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x$$

je konvergentní Lebesgueův integrál, jsou-li a, b kladná. Vyšetřujme

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x \,. \tag{42}$$

Substitucí $ax = t$ resp. $bx = t$ dostáváme

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, \Gamma) &= \int_{a\varepsilon}^{a\Gamma} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_{b\varepsilon}^{b\Gamma} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t - \int_{a\Gamma}^{b\Gamma} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = f_{+\infty} \,, \tag{44}$$

potom podle 1. věty o střední hodnotě (viz pozn. 13 k větě 66 v kap. III — ta platí ovšem jen pro reálné f — ale viz konec tohoto příkladu)

$$\int_{a\Gamma}^{b\Gamma} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \mu \int_{a\Gamma}^{b\Gamma} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \mu \lg \frac{b}{a} \,, \tag{45}$$

$$\inf_{t \in (a\Gamma, b\Gamma)} f(t) \leqq \mu \leqq \sup_{t \in (a\Gamma, b\Gamma)} f(t) \,,$$

a limita výrazu (45) pro $\Gamma \to \infty$ je podle (44) $f_{+\infty} \lg \dfrac{b}{a}$. Jestliže však

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t \text{ konverguje} \,, \tag{46}$$

potom limita posledního integrálu v (43) pro $\Gamma \to +\infty$ je zřejmě rovna nule. Podobně: Limita předposledního integrálu v (43) pro $\varepsilon \to 0+$ je rovna $f_0 \lg \frac{b}{a}$, jestliže existuje vlastní

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = f_0 \,, \tag{47}$$

a je rovna nule, jestliže

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} \text{ konverguje .} \tag{48}$$

Tedy celkem: *Nechť* $f \in \mathbf{L}(\varepsilon, \Gamma)$ *pro libovolná konečná kladná* ε, Γ $(\varepsilon < \Gamma)$. *Potom platí při označení* (42), *kde* $a > 0$, $b > 0$:

I. Existují-li vlastní limity (44), (47), *je* $I = (f_0 - f_{+\infty}) \lg \frac{b}{a}$.

II. Existuje-li vlastní limita (47) *a platí-li* (46), *je* $I = f_0 \lg \frac{b}{a}$.

III. Existuje-li vlastní limita (44) *a platí-li* (48), *je*

$$I = -f_{+\infty} \lg \frac{b}{a} \,.$$

IV. Platí-li (46), (48), je $I = 0$.

Poslední případ je ostatně samozřejmý (proč?).

Integrály tohoto typu se nazývají Frullaniovy.

Podaný důkaz platil jen pro reálné f; ale výsledek platí i pro komplexní f (stačí aplikovat nalezený výsledek na reálnou a imaginární část f).

Příklad 8. Příklady Frullaniových integrálů $(a > 0,\ b > 0)$ — některé z nich jsou Lebesgueovy, některé nevlastní.

K případu I.

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{ax} + 1}{e^{ax} + 2} - \frac{e^{bx} + 1}{e^{bx} + 2} \right) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{3} \lg \frac{b}{a}$$

$$(f(x) = (e^x + 1) : (e^x + 2) \,, \quad f_0 = \tfrac{2}{3} \,, \quad f_{+\infty} = 1) \,.$$

$$\int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) \frac{dx}{x} = \lg \frac{b}{a} \,.$$

Zde $f(x) = e^{-x}$, $f_0 = 1$, $f_{+\infty} = 0$; ale také to lze pojímat jako případ II.

$$\int_0^{+\infty} (\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \pi \lg \frac{a}{b} .$$

Zde $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_0 = 0$, $f_{+\infty} = \frac{1}{2}\pi$; ale také to lze pojímati jako případ III.

K případu II.

$$\int_0^{+\infty} (\cos ax - \cos bx) \frac{dx}{x} = \lg \frac{b}{a} .$$

Zde $f(x) = \cos x$, $f_0 = 1$; $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ konverguje podle věty 112, I.

Vezměme ještě tento složitější příklad[21]) ($b_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n$):

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{a_1 \cos b_1 x + \ldots + a_n \cos b_n x}{x} dx \quad (n > 1) .$$

Je-li $a_1 + \ldots + a_n \neq 0$, nekonverguje integrál (vadí dolní mez — proč?). Je-li však $a_n = -a_1 - \ldots - a_{n-1}$, je

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \int_0^{+\infty} \frac{\cos b_i x - \cos b_n x}{x} dx = -\sum_{i=1}^{n} a_i \lg |b_i|^{22})$$

(součet Frullaniových integrálů). Speciální případ:[23])

$$\int_0^{+\infty} (1 - \cos ax) \cos bx \frac{dx}{x} =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\cos bx - \tfrac{1}{2} \cos (a + b) x - \tfrac{1}{2} \cos (a - b) x) \frac{dx}{x} =$$

$$= \lg \frac{\sqrt{|a^2 - b^2|}}{|b|} \text{ pro } b \neq 0,\ |a| \neq |b| .$$

[21]) b_i reálná.
[22]) Místo $\cos \alpha x$ lze psáti $\cos |\alpha| x$.
[23]) a, b reálná.

Příklad 9. Předkládám ještě — spíše jako cvičení se stručným návodem — příklady na integrály, jež lze substitucí nebo integrací per partes převésti na Frullaniovy.

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{\lg x} \, dx = \lg \frac{a}{b} \quad (a > 0,\ b > 0) \, .$$

Návod: Substituce $x = e^{-t}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} \, dx = ab \lg \frac{b}{a} \ (a > 0,\ b > 0) \, .$$

Návod: Integrace per partes. Poslední příklad ($a > 0$, $b > 0$):

$$I = \int_0^{+\infty} (e^{-ax} - e^{-bx} + x(a - b) \, e^{-bx}) \frac{dx}{x^2} \, .$$

Provedeme integraci per partes, napřed v mezích ε, Γ; dostaneme

$$- \left[\frac{1}{x} (e^{-ax} - e^{-bx} + x(a - b) \, e^{-bx}) \right]_\varepsilon^\Gamma +$$

$$+ \int_\varepsilon^\Gamma a(e^{-bx} - e^{-ax}) \frac{dx}{x} - b(a - b) \int_\varepsilon^\Gamma e^{-bx} \, dx \, .$$

Limitní přechod $\varepsilon \to 0+$, $\Gamma \to +\infty$ dává $I = a \lg \frac{a}{b} + b - a$.

§ 4. Zobecněné integrály funkcí závislých na parametru. Limita a spojitost. Vezměme napřed příklad.

Příklad 1. Položme

$$(49) \qquad I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx \quad (\alpha \geqq 0,\ \beta \text{ reálné}).$$

Pro $\alpha > 0$ je to konvergentní Lebesgueův integrál;[24]) pro $\alpha = 0$ je

[24]) Ježto $|\sin \beta x| \leqq |\beta x|$, nevadí dolní mez.

to, jak víme z § 1, příkl. 1, rovněž konvergentní integrál, který ovšem pro $\beta \neq 0$ je nevlastní. Vezměme napřed $\alpha > 0$ (α bude teď na chvíli pevné) a počítejme (49) derivováním podle parametru β. Formální derivování dává

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha, \beta)}{\mathrm{d}\beta} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} \cos \beta x \,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{50}$$

Ježto $|\mathrm{e}^{-\alpha x} \cos \beta x| \leqq \mathrm{e}^{-\alpha x}$ a ježto $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ je funkce nezávislá na parametru β, jež má konvergentní Lebesgueův integrál od 0 do $+\infty$, je podle věty 108 vzorec (50) vskutku správný. Z něho plyne

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C$$

v intervalu $-\infty < \beta < +\infty$, kde C je konstanta (t. j. číslo nezávislé na β — nevíme však ještě, zda závisí na α). Konstantu určím dosazením $\beta = 0$; ježto zřejmě $I(\alpha, 0) = 0$, vyjde $C = 0$, tedy

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{pro } \alpha > 0,\ \beta \text{ reálné}. \tag{51}$$

Zajímá nás nyní hodnota

$$I(0, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Zde již nemůžeme užíti vzorce (50) (ostatně integrál v (50) vůbec nemá smyslu pro $\alpha = 0$). Kdybychom mohli tvrdit, že

$$\lim_{\alpha \to 0+} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta), \tag{52}$$

dostali bychom z (51) ihned

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} \beta. \tag{53}$$

Ale vět 106, 107 o limitě a spojitosti nelze užíti, ježto jde pro $\alpha = 0$ o nevlastní integrál. Je tedy nutno ještě studovati otázku spojitosti, po příp. limity integrálu z funkce závislé na parametru v tom případě, že neexistuje „integrabilní majoranta“, a to dokonce i v případě nevlastních integrálů. To provedeme v následující větě a teprve potom dokončíme příklad 1.

Poznámka 1. Integrál (49) jsme mohli také počítat při pevném β derivováním podle α; vyjde ovšem opět (51). Integrační konstantu teď však nelze počítat dosazením vhodné hodnoty za α, nýbrž limitním přechodem pro $\alpha \to +\infty$ (podle věty 106). Doporučuji, aby si čtenář také tento výpočet provedl (je to o něco složitější než při derivování podle β).

Věta 113. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$; *budiž* (P, ϱ) *metrický prostor,* $A \subset P$, $\alpha_0 \in A'$ *(derivace v* P*). Budiž* f *komplexní funkce (její hodnoty budeme značit* $f(x, \alpha)$*, kde* $x \in \mathsf{E}_1$, $\alpha \in P$*). Budiž* F *komplexní funkce jedné reálné proměnné. Předpokládejme toto:*

I. Pro každé $b' \in (a, b)$ *je*

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_a^{b'} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{b'} F(x)\, dx \tag{54}$$

(kde všechny integrály značí konvergentní Lebesgueovy integrály).

II. Jest

$$\lim_{b' \to b-} \int_a^{b'} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{b} f(x, \alpha)\, dx \tag{55}$$

stejnoměrně v A[25]) *(kde vlevo jde o konvergentní Lebesgueovy integrály — integrál vpravo může být zobecněný).*

Potom jest

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_a^{b} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{b} F(x)\, dx \tag{56}$$

(kde jde o konvergentní zobecněné integrály).

Poznámka 2. O tom, zda je splněna podmínka I, se často můžeme přesvědčit podle věty 106. Na př. je I splněna, jestliže $f(x, \alpha)$ (při každém $\alpha \in A$) je měřitelnou funkcí x v (a, b), jestliže dále $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} f(x, \alpha) = F(x)$ pro skoro všechna $x \in (a, b)$ a jestliže dále ke kaž-

[25]) Místo A mohu psát $A \dot{-} (\alpha_0)$, poněvadž při tvoření limity si nevšímáme hodnot v bodě α_0.

dému $b' \in (a, b)$ existuje „integrabilní majoranta" $\varphi_{b'} \in L(a, b')$ — to znamená, že pro každé $\alpha \in A$ je $|f(x, \alpha)| \leqq \varphi_{b'}(x)$ skoro všude v (a, b'). Existuje-li taková majoranta i pro $b' = b$, plyne (56) přímo z věty 106. Neexistuje-li, musíme přidat na př. ještě podmínku II.

Poznámka 3. Podmínku II lze podle Bolzano-Cauchyovy podmínky pro stejnoměrnou konvergenci vysloviti také takto: „Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $B \in (a, b)$ tak, že

$$(\alpha \in A, B < b' < b'' < b) \Rightarrow \left|\int_{b'}^{b''} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,, \tag{57}$$

kde integrál jest Lebesgueův" [26]).

Proto budeme tuto podmínku také výrazněji vyjadřovati slovy:

Pro $b' \to b\,-$, $b'' \to b\,-$ konverguje Lebesgueův integrál $\int_{b'}^{b''} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ k nule stejnoměrně v A.

Poznámka 4. Formulace věty je přistřižena na případ I z § 1. Případu II odpovídá obdobná věta, kde ovšem v podmínce I jde o integrály od a' do b, a v podmínce II o stejnoměrnou konvergenci integrálu $\int_{a'}^{a''} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ pro $a' \to a\,+$, $a'' \to a\,+$ k nule (čtenář mně jistě dokonale rozumí bez dalších výkladů).

Důkaz věty 113 je velmi jednoduchý. Položme pro $b' \in (a, b)$, $\alpha \in A$:

$$\int_a^{b'} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \Phi(b', \alpha)\,, \quad \int_a^{b'} F(x)\,\mathrm{d}x = \Psi(b')\,,$$

$$\int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x = \Theta(\alpha)\,.$$

Podle podmínek I, II jest

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \Phi(b', \alpha) = \Psi(b') \text{ pro } b' \in (a, b)\,,$$

$$\lim_{b' \to b-} \Phi(b', \alpha) = \Theta(\alpha) \text{ stejnoměrně v } A\,.$$

[26]) Tato podmínka jest ekvivalentní s podmínkou II ovšem jen tehdy, je-li zaručena konvergence Lebesgueova integrálu od a do b' — ale ta je zaručena podmínkou I.

Podle věty 174, II v **D II** o záměnnosti limit platí tedy

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \Theta(\alpha) = \lim_{b' \to b-} \Psi(b')\,,$$

kde limity jsou vlastní.[27] Ale to je právě rovnice (56).

Poznámka 5. Věta 113 tedy vlastně není větou integrálního počtu; jde v ní pouze o záměnnost dvou limitních přechodů: jednak $b' \to \to b\,-$, jednak $\alpha \to \alpha_0$, $\alpha \in A$. Aby tato záměnnost byla zaručena, předpokládali jsme v (55) stejnoměrnou konvergenci. Víme však (viz **D II**, Dodatek, § 3), že ve větách o záměnnosti limitních přechodů lze nahraditi stejnoměrnou konvergenci slabšími podmínkami. Tímto způsobem by se dala věta 113 ještě trochu zobecnit.

V praxi je často výhodnější tento tvar věty 113:

Věta 114. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$; *budiž* (P, ϱ) *metrický prostor,* $A \subset P$. *Budiž* f *komplexní funkce (její hodnoty budeme značit* $f(x, \alpha)$, *kde* $x \in \mathsf{E}_1$, $\alpha \in P$).

První část věty:

Předpokládejme

I. Že konvergentní Lebesgueův integrál

$$\Phi(b', \alpha) = \int_a^{b'} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x \tag{58}$$

je pro každé $b' \in (a, b)$ *spojitou funkcí* α *v bodě* α_0 *vzhledem k* A.

II. Že pro $b' \to b\,-$, $b'' \to b\,-$ *Lebesgueův integrál* $\int_{b'}^{b''} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x$ *konverguje k nule stejnoměrně v* A.

Potom zobecněný integrál

$$\Phi(\alpha) = \int_a^{b} f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x \tag{59}$$

je funkcí spojitou v bodě α_0 *vzhledem k* A.

[27]) Úplný prostor (Q, σ) z věty 174, II (**D II**), v němž leží limity, je zde totiž **K** (konečná komplexní čísla).

Druhá část věty:

Jestliže místo I předpokládáme, že konvergentní Lebesgueův integrál $\Phi(b', \alpha)$ je pro každé $b' \in (a, b)$ spojitý v A, potom dostáváme, že zobecněný integrál $\Phi(\alpha)$ je spojitý v A.

Důkaz první části: Budiž předně $\alpha_0 \in AA'$. Z I plyne

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_a^{b'} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{b'} f(x, \alpha_0)\, dx\,,$$

takže předpoklady věty 113 jsou splněny pro $F(x) = f(x, \alpha_0)$. Věta 113 tedy dává

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \Phi(\alpha) = \lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \alpha \in A}} \int_a^{b} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{b} f(x, \alpha_0)\, dx = \Phi(\alpha_0)\,,$$

což je naše tvrzení. Je-li však $\alpha_0 \in A \dot{-} A'$ (t. j. α_0 je isolovaným bodem A), je $\Phi(\alpha)$ spojitá vzhledem k A v bodě α_0, jakmile $\Phi(\alpha_0)$ existuje. Ale tato existence (ve smyslu konvergentního zobecněného integrálu od a do b) je zaručena, ježto jsou splněny podmínky I a II.

Druhá část věty plyne pak okamžitě, užijeme-li první části na každý bod α_0 množiny A.

Dokončení příkladu 1. Vezměme pevně $\beta \neq 0$ a vyšetřujme funkci parametru α

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx \tag{60}$$

pro $\alpha \geqq 0$. Ve větě 114 (druhá část) klademe tedy $a = 0$, $b = +\infty$, $A = \langle 0, +\infty)$. Integrál od 0 do b' $(0 < b' < +\infty)$ je spojitou funkcí α v A podle věty 107, neboť $e^{-\alpha x} \dfrac{\sin \beta x}{x}$ má v $(0, b')$ „integrabilní majorantu" $|\beta|$. Podmínka II je též splněna, neboť pro $\alpha \geqq 0$, $0 < b' < b'' < +\infty$ je

$$\left| \int_{b'}^{b''} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx \right| = \frac{e^{-\alpha b'}}{b'} \left| \int_{b'}^{\xi} \sin \beta x\, dx \right| \leqq \frac{2}{b'|\beta|}\,,$$

což je odhad nezávislý na α. Tedy je (60) spojitou funkcí α v intervalu $\langle 0, +\infty)$, a tedy platí (52), a tedy i (53) (případ $\beta = 0$ je zřejmý).

Příklad 2. Pro $\alpha \geqq 0$, β reálné vyšetřujme

$$I_1(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 \, dx \,, \quad I_2(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \sin \beta x^2 \, dx \,.$$

Abychom mohli vyšetřovati oba integrály najednou, pišme

$$I(\alpha, \beta) = I_1 - iI_2 = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\beta)x^2} \, dx \,. \tag{61}$$

Vyšetřujme napřed $I(\alpha, \beta)$ jako funkci proměnné β při pevně daném $\alpha > 0$; $I(\alpha, \beta)$ je spojitou funkcí β v $(-\infty, +\infty)$ (integrabilní majoranta $\exp(-\alpha x^2)$). Dále máme

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = -i \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(\alpha + i\beta)x^2} \, dx \,.\text{[28]} \tag{62}$$

Integrace per partes, provedená na integrál v (62), dává ihned

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{-i}{2(\alpha + i\beta)} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\beta)x^2} \, dx = \frac{-i}{2(\alpha + i\beta)} I \,.$$

Tedy máme[29])

$$2(\alpha + i\beta) I \,.\, \frac{\partial I}{\partial \beta} + iI^2 = 0 \,, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (I^2 \,.\, (\alpha + i\beta)) = 0 \,.$$

Funkce (proměnné β) $I^2(\alpha, \beta) \,.\, (\alpha + i\beta)$ má tedy v intervalu $-\infty < \beta < +\infty$ derivaci rovnou nule a je tam tedy konstantní. Ježto pak pro $\beta = 0$ dostáváme (Laplaceův integrál)

$$I(\alpha, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{pro } \alpha > 0 \,, \tag{63}$$

dovedeme stanoviti hodnotu této konstanty:

$$I^2(\alpha, \beta) \,.\, (\alpha + i\beta) = \tfrac{1}{4}\pi \quad \text{pro } \alpha > 0 \,. \tag{64}$$

---

[28]) Integrabilní majorantou je $x^2 \exp(-\alpha x^2)$.

[29]) Formálně bychom byli hotovi psát (přihlížejíce jen k proměnné β) $\dfrac{dI}{I} = -\dfrac{i\, d\beta}{2(\alpha + i\beta)}$, $\lg I = -\tfrac{1}{2} \lg (\alpha + i\beta) + \lg C$, t. j. $I \,.\, \sqrt{\alpha + i\beta} = C$ (C značí konstantu vzhledem k β); ale je zde mnoho pochybných výkonů — než bych je podrobně rozebíral, raději je obejdu jednoduchým obratem.

Odtud vypočteme I, ale musíme dáti pozor, kterou z obou hodnot, vyhovujících rovnici (64), máme zvolit. Násobme (64) číslem $\alpha - i\beta$; vyjde

$$I^2(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha - i\beta) . \tag{65}$$

Definujme *reálná* čísla A, B rovnicí

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} (A - iB) ;^{30)} \tag{66}$$

podle (65) vyhovují A, B rovnici $(A - iB)^2 = \alpha - i\beta$, t. j.

$$A^2 - B^2 = \alpha , \quad 2AB = \beta . \tag{67}$$

Ježto $\alpha > 0$, je jistě $A \neq 0$ (podle první rovnice); vypočtu-li z druhé $B = \frac{1}{2}\beta A^{-1}$, dostanu, že platí

$$A^4 - \alpha A^2 - \tfrac{1}{4}\beta^2 = 0 . \tag{68}$$

Ježto $A \neq 0$ je reálné, je $A^2 > 0$ a z (68) plyne tedy

$$A^2 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \tag{69}$$

(kdybych totiž vzal u odmocniny znamení minus, nedostal bych kladné číslo). Z první rovnice (67) plyne pak

$$B^2 = \tfrac{1}{2}(- \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) . \tag{70}$$

Nyní musím odmocnit: ale které znamení zvolit? Ježto $I(\alpha, \beta)$ je (při pevném $\alpha > 0$) spojitá funkce β v $(-\infty, +\infty)$, je také A (podle (66)) spojitou funkcí. Ale současně je $A \neq 0$; tedy má $A(\alpha, \beta)$ pro všechna β[31]) totéž znamení; podle (63), (66) je však $A(\alpha, 0) > 0$, tedy je vždy $A(\alpha, \beta) > 0$ (pro $\alpha > 0$). Z druhé rovnice (67) plyne pak $\operatorname{sgn} B = \operatorname{sgn} \beta$, takže v (70) dovedeme vzíti náležitou odmocninu a dosazením do (66) obdržíme pro $\alpha > 0$

$$I_1(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \cdot \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} , \tag{71}$$

[30]) To jsou ovšem funkce: $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$.
[31]) Při pevném $\alpha > 0$.

$$I_2(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \sin \beta x^2 \, dx = \frac{\operatorname{sgn} \beta}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \cdot \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \, . \tag{72}$$

Až posud jsme postupovali podle vět 107, 108. Zkoumejme nyní integrály (71), (72) pro $\alpha = 0$. Ježto případ $\alpha = \beta = 0$ je triviální, zvolme pevně $\beta \neq 0$ a vyšetřujme integrál $I_1(\alpha, \beta)$ jako funkci α v intervalu $\langle 0, +\infty)$.[32] Integrál $\int_0^{b'} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 \, dx$ je zřejmě spojitou funkcí α pro každé konečné $b' > 0$, takže podmínka I věty 114 (druhá část) je splněna. Dále je pro $0 < b' < b'' < +\infty$, $\alpha \geqq 0$

$$\left| \int_{b'}^{b''} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 \, dx \right| = \left| \int_{b'}^{b''} \frac{1}{2x} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x^2 \, . \, 2x \, dx \right| =$$

$$= \frac{1}{2b'} e^{-\alpha b'^2} \left| \int_{b'}^{\xi} \cos \beta x^2 \, . \, 2x \, dx \right| \leqq \frac{1}{b'|\beta|} \, ,$$

neboť poslední integrand má primitivní funkci $\beta^{-1} \sin \beta x^2$. Tedy také podmínka II věty 114 je splněna.

Tedy: při pevném $\beta \neq 0$ jsou I_1, I_2 spojitými funkcemi α v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a limitní přechod $\alpha \to 0+$ v (71), (72) dává

$$\int_0^{+\infty} \cos \beta x^2 \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2|\beta|}} \, , \tag{73}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin \beta x^2 \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2|\beta|}} \operatorname{sgn} \beta \, . \tag{74}$$

Substituce $x = \sqrt{t}$ dává rovnicím (73), (74) tvar

$$\int_0^{+\infty} \cos \beta t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \operatorname{sgn} \beta \, . \int_0^{+\infty} \sin \beta t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2|\beta|}} \, , \tag{75}$$

---

[32]) Čtenář nechť sleduje, že tytéž úvahy platí pro I_2.

při čemž (73), (74), (75) platí pro všechna reálná $\beta \neq 0$. Integrálům (73), (74), (75) se říká *Fresnelovy integrály.*

Příklad 3. Jestliže do $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt$ zavedeme novou integrační proměnnou x rovnicí $t = cx$ ($c > 0$), dostaneme ihned

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} x^{s-1}\, dx = \Gamma(s) \frac{1}{c^s} \tag{76}$$

pro $c > 0$, $s > 0$. Ukážeme, že *vzorec* (76) *platí i pro komplexní* c, *je-li* $\Re c > 0$, $s > 0$;[33]) *v případě* $0 < s < 1$ *platí* (76) *i pro ryze imaginární* $c \neq 0$. Substituci $t = cx$ nelze zde provést, ježto kladným t neodpovídají reálná x.

Důkaz. Budiž $a > 0$, b reálné, $s > 0$ a vyšetřujme

$$I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x} x^{s-1}\, dx\,. \tag{77}$$

Derivováním dostaneme

$$I'(b) = -\,i \int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x} x^s\, dx$$

(integrabilní majoranta $e^{-ax} x^s$).

Integrací per partes obdržíme

$$I'(b) = -\frac{is}{a + ib} I(b)\,. \tag{78}$$

Násobme $(a + ib)^s$; dostaneme[34]) $(a + ib)^s I'(b) + is(a + ib)^{s-1} I(b) = 0$, neboli $\frac{d}{db}\left((a + ib)^s I(b)\right) = 0$, t. j. $I(b) = k(a + ib)^{-s}$, kde k nezávisí na b; dosazením $b = 0$ dostaneme (76).

Zbývá případ $a = 0$. Budiž v (77) $b \neq 0$ pevné, $0 < s < 1$ a vyšetřujme tento integrál jako funkci a pro $a \geqq 0$; dokážeme spojitost této funkce v $\langle 0, +\infty)$. V každém omezeném intervalu $0 < x < A$ máme integrabilní majorantu x^{s-1}. Jde ještě o podmínku II z věty 114.

---

[33]) Při počítání s mocninami o imaginárním základu nebo mocniteli dbejte toho, co bylo řečeno v kap. VII, § 1, pozn. 5.

[34]) Také bychom mohli rovnici (78) integrovati podle návodu z kap. VII, § 7.

Užijme 2. věty o střední hodnotě na integrál reálné a imaginární části. Ježto $0 < s < 1$, je $e^{-ax}x^{s-1}$ klesající v intervalu $0 < x < +\infty$. Pro $0 < x_1 < x_2$ je tedy pro $a \geqq 0$

$$|\int_{x_1}^{x_2} e^{-ax} \cos bx \,.\, x^{s-1}\, dx| =$$

$$= e^{-ax_1}x_1^{s-1} \,|\int_{x_1}^{\xi} \cos bx\, dx| \leqq \frac{2}{|b|\, x_1^{1-s}},$$

což konverguje k nule stejnoměrně v intervalu $0 \leqq a < +\infty$ (pravá strana je menší než ε ($\varepsilon > 0$) pro $x_1 > B$, kde $B > 0$, $\dfrac{2}{|b|\, B^{1-s}} = \varepsilon$).

Tedy integrál (77) je vskutku při pevném $b \neq 0$ a $0 < s < 1$ spojitou funkcí a v $\langle 0, +\infty)$. Limitním přechodem $a \to 0+$ v (76) (kde $c = a + ib$) dostaneme, že (76) platí i pro $a = 0$ (neboť funkce $f(c) = c^s$ je spojitá, majíc podle komplexní proměnné c dokonce derivaci sc^{s-1}, pokud není $c \leqq 0$).

Rozepišme ještě (76) na reálnou a imaginární část. Pišme (pro $a > 0$) $c = a + bi = re^{i\varphi}$, kde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$. Potom $c^{-s} = r^{-s}e^{-is\varphi}$, takže pro $s > 0$, $a > 0$ máme

$$(79) \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \,.\, x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}s} \cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right),$$

$$(80) \quad \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, (a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}s} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)$$

a konečně pro $a = 0$, $b > 0$, $0 < s < 1$ máme $c^{-s} = (bi)^{-s} = b^{-s}e^{-\frac{1}{2}\pi si}$, takže

$$(81) \quad \int_0^{+\infty} \cos bx \,.\, x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, b^{-s} \cos(\tfrac{1}{2}\pi s),$$

$$(82) \quad \int_0^{+\infty} \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, b^{-s} \sin(\tfrac{1}{2}\pi s),$$

$$(83) \quad \int_0^{+\infty} e^{ibx}x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, b^{-s}e^{\frac{1}{2}\pi is}.$$

Poznámka 6. Integrály (79) až (83), které jsme tak snadno vypočetli, obsahují řadu integrálů, které jsme již dříve vypočetli s větší námahou. Především z (81), (82) pro $s = \frac{1}{2}$ obdržíme ihned Fresnelovy integrály (75). Za druhé: z (76) pro $s = \frac{1}{2}$ plyne (pro $a > 0$)

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}(\cos bx - i \sin bx)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a + ib}}\,,$$

načež substitucí $x = t^2$ dostanete snadno (71), (72). Za třetí: Dokážeme, že integrál

$$f(s) = \int_0^{+\infty} \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx$$

je při pevném $b > 0$ spojitou funkcí s v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Neboť pro tato s je

$$|\sin bx \,.\, x^{s-1}| \leqq |\sin bx \,.\, x^{-1}| \leqq b \text{ pro } 0 < x \leqq 1\,,$$
$$|\sin bx \,.\, x^{s-1}| \leqq 1 \text{ pro } x > 1\,,$$

takže máme „majorantu" (nezávislou na s) $1 + b$. Podle věty 107 je tedy $\int_0^A \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx$ při konečném $A > 0$ spojitou funkcí s v $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Stačí ještě dokázati stejnoměrnou konvergenci k nule. Jest pro $1 < < A' < A'' < +\infty$

$$\left|\int_{A'}^{A''} \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx\right| = A'^{s-1}\left|\int_{A'}^{\xi} \sin bx\, dx\right| \leqq \frac{2}{b\sqrt{A'}}$$

pro $0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}$. Z věty 114 plyne tedy spojitost funkce $f(s)$ v $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Ještě snáze plyne (přímo z věty 107) spojitost funkce

$$g(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \,.\, x^{s-1}\, dx$$

$(a > 0, b > 0)$ v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, neboť „majoranta" $(1 + b)\, e^{-ax}$ má konvergentní integrál od 0 do $+\infty$. Lze tedy v (82), (80) přejíti k limitě $s \to 0+$; užijeme-li ještě spojitosti funkce Γ (kap. VII, § 4, příkl. 1), dostáváme pro $a > 0$, $b > 0$ vzorce (53), (51):

$$\int_0^{+\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = \lim_{s\to 0+} \Gamma(s)\, b^{-s} \sin(\tfrac{1}{2}\pi s) = \lim_{s\to 0+} \frac{\Gamma(s+1)}{s} \sin(\tfrac{1}{2}\pi s) =$$
$$= \Gamma(1) \lim_{s\to 0+} \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi s)}{s} = \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \frac{dx}{x} = \lim_{s\to 0+} \Gamma(s)\,(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}s} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0+} \Gamma(1 + s) \frac{\sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)}{s} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\,.$$

Vidíte, kolik výsledků je obsaženo v nenápadném vzorci (76). S důležitostí funkce $\Gamma(s)$ se v klasické analyse setkáváme na každém kroku.

Jako cvičení ukažte, že rovnice (82), (80) platí i pro $-1 < s < 0$; přitom definujeme $\Gamma(s)$ rovnicí $\Gamma(s) = \Gamma(s + 1) : s$ (dosud jsme totiž nedefinovali $\Gamma(s)$ pro $s < 0$ — to učiníme obecně až v kap. XVIII). Návod: integrujte per partes.

Cvičení

V příkl. 3 jsme pro jednoduchost předpokládali, že s bylo reálné; nyní ukážeme, že (76) platí za příslušných předpokladů i pro komplexní s. Čísla a, b, σ, t jsou v následujících cvičeních reálná.

1. Je-li $a > 0$, $\sigma > 0$, je

$$I(a, b, \sigma, t) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+ib)x} x^{\sigma+it-1}\, dx = \frac{\Gamma(\sigma + it)}{(a + ib)^{\sigma+it}}\,.$$

Návod: Uvažte, že $x^{it} = \exp(it \lg x)$ má absolutní hodnotu 1. Důkaz probíhá jako v příkl. 3 (v integrabilní majorantě hraje σ roli dřívějšího s).

2. Pro $b \neq 0$, $0 < \sigma < 1$ je

$$I(0, b, \sigma, t) = \int_0^{+\infty} e^{-ibx} x^{\sigma+it-1}\, dx = \frac{\Gamma(\sigma + it)}{(ib)^{\sigma+it}}\,.$$

Návod: Při pevně zvolených b, σ, t ($b \neq 0$, $0 < \sigma < 1$) jde o spojitost $I(a, b, \sigma, t)$ jakožto funkce a v intervalu $0 \leqq a < +\infty$.

Při konečné horní integrační mezi by nebylo obtíží, jde tedy jen o stejnoměrnou (vzhledem k proměnné a) konvergenci integrálu

$$\int_{x_1}^{x_2} e^{-(a+ib)x} x^{\sigma+it-1}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} e^{-ax} e^{i(-bx+t\lg x)} x^{\sigma-1}\, dx$$

k nule (pro $x_1 \to +\infty$, $x_2 \to +\infty$). Vezměme třeba reálnou část:

$$K = \int_{x_1}^{x_2} e^{-ax} x^{\sigma-1} \cos(bx - t \lg x)\, dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} e^{-ax} \frac{x^{\sigma-1}}{b - \frac{t}{x}} \frac{d}{dx} \sin(bx - t \lg x)\, dx .$$

Zde e^{-ax} je nerostoucí ($a \geqq 0$), $\dfrac{x^\sigma \,.\, \operatorname{sgn} b}{bx - t}$ je (derivujte!) klesající pro všechna $x > x_0$, kde x_0 nezávisí na a. Pro $x_0 < x_1 < x_2 < +\infty$ najdeme potom snadno z 2. věty o střední hodnotě

$$|K| \leqq \left| \frac{2x_1{}^\sigma}{bx_1 - t} \right| ,$$

z čehož vzhledem k $b \neq 0$, $\sigma < 1$ plyne hledaná stejnoměrná konvergence.

§ 5. Integrace posloupností a řad. Velmi důležitý speciální případ věty 113 je ten, že parametr α probíhá jen celé kladné hodnoty a že $\alpha_0 = +\infty$; místo α potom obyčejně píšeme n, místo $f(x, n)$ píšeme $f_n(x)$, takže jde o posloupnost funkcí. Za prostor (P, ϱ) ve větě 113 bereme tedy $\mathbf{E}_1^*$ (s „redukovanou metrikou" ϱ^*, viz **D II**, kap. VI, § 4).[35]) Věta 113 nabude tedy tohoto tvaru:

Věta 115. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$; *buďte* F, f_n ($n = 1, 2, \ldots$) *komplexní funkce jedné reálné proměnné. Předpokládejme:*

I. Pro každé $b' \in (a, b)$ *je*

(84) $$\lim_{n \to \infty} \int_a^{b'} f_n(x)\, dx = \int_a^{b'} F(x)\, dx .$$

II. Integrál $\int_{b'}^{b''} f_n(x)\, dx$ *konverguje pro* $b' \to b-$, $b'' \to b-$ *k nule stejnoměrně vzhledem k* n. *T. j. ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $B \in (a, b)$ *tak, že*

(85) $$(n \text{ celé}, n > 0, B < b' < b'' < b) \Rightarrow \left|\int_{b'}^{b''} f_n(x)\, dx\right| < \varepsilon .$$

---

[35]) Kdo se na to už dobře nepamatuje, může místo $f_n(x)$ psáti $f\left(x, \dfrac{1}{n}\right)$, vzíti za A množinu všech čísel $\dfrac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) a psáti $\alpha \to 0$, $\alpha \in A$.

Při tom integrály v I, II značí konvergentní Lebesgueovy integrály. Potom platí (s konvergentními zobecněnými integrály)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{86}$$

Poznámka 1. Nejčastější případ je ten, že $F(x) = \lim f_n(x)$ skoro všude v (a, b) a že se podmínka I ověřuje podle věty 65 (existence integrabilní majoranty pro interval (a, b')).

Příklad 1. Dokažme rovnici

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \frac{1}{n}\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{87}$$

(víme, že pravá strana je $\frac{1}{2}\pi$). Funkce $f_n(x) = \sin x : \left(x + \frac{1}{n}\sqrt{x}\right)$ má pro $x > 0$ za „majorantu" číslo 1 a za limitu funkci $F(x) = \sin x : x$. Podmínka I je tedy splněna $(0 < b' < +\infty)$. Dále je pro $n = 1, 2, 3, \ldots; 0 < b' < b'' < +\infty$

$$\left|\int_{b'}^{b''} \frac{\sin x}{x + \frac{1}{n}\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{b' + \frac{1}{n}\sqrt{b'}}\left|\int_{b'}^{\xi} \sin x\,\mathrm{d}x\right| < \frac{2}{b'}\,.$$

Tedy i podmínka II je splněna, a (87) platí.

Poznámka 2. Věta 115 se ovšem ihned přenáší na nekonečné řady $v_1(x) + v_2(x) + \ldots$; za $f_n(x)$ se prostě vezme n-tý částečný součet. Rovnice (86) má potom tvar

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{88}$$

(předpokládám splnění podmínek I, II). Ježto konvergují integrály funkcí f_{n-1}, f_n, konverguje i integrál funkce $v_n = f_n - f_{n-1}$ a tedy lze (88) psáti v obvyklém tvaru („integrace člen po členu")

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b v_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b v_k(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nejčastější případ je ovšem ten, že je (aspoň pro skoro všechna $x \in (a, b)$) $F(x) = v_1(x) + v_2(x) + \ldots$

§ 6. Derivování zobecněných integrálů podle parametru.

Věta 116. *Budiž* $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$; *budiž* I *interval (nezvrhlý) v* $\mathbf{E}_1$. *Budiž* f *komplexní funkce dvou reálných proměnných. Nechť dále platí:*

I. Pro každé $b' \epsilon (a, b)$ *a každé* $\alpha \epsilon I$ *konvergují Lebesgueovy integrály*

$$F(b', \alpha) = \int_a^{b'} f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x\,, \quad \int_a^{b'} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x \tag{89}$$

[36]

a jest

$$\int_a^{b'} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}F(b', \alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\,. \tag{90}$$

[37]

II. Pro $b' \to b-$, $b'' \to b-$ *konverguje integrál*

$$\int_{b'}^{b''} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x \tag{91}$$

[36]

k nule stejnoměrně v I.

III. Aspoň pro jedno $\alpha \epsilon I$ *konverguje zobecněný integrál*

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, \mathrm{d}x\,. \tag{92}$$

Potom zobecněný integrál (92) *konverguje pro všechna* $\alpha \epsilon I$ *a pro všechna* $\alpha \epsilon I$ *je*[36]

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, \mathrm{d}x\,. \tag{93}$$

(V (90) píši d a nikoliv ∂, dívaje se na b' jako na konstantu.)

Důkaz. Integrál (91) je roven

$$\frac{\mathrm{d}F(b'', \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} - \frac{\mathrm{d}F(b', \alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$$

---

[36]) V krajních bodech intervalu I (pokud patří k I) míním příslušnou jednostrannou derivaci. Pro další aplikace stačí ostatně případ omezeného otevřeného I.

[37]) Zda tato podmínka je splněna, pozná se často podle věty 108.

(podle I). Podle II[38]) existuje tedy vlastní limita

$$\lim_{b' \to b-} \frac{\mathrm{d}F(b', \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \Psi(\alpha) , \tag{94}$$

a to stejnoměrně v I. Podle III existuje vlastní limita

$$\lim_{b' \to b-} F(b', \alpha) = \Phi(\alpha) \tag{95}$$

aspoň pro jedno $\alpha \in I$. Podle pozn. 3 v kap. I, § 1 (viz tamže též pozn. [14])) existuje tedy vlastní limita (95) všude v I a všude v I jest

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \Psi(\alpha) ,$$

t. j. (podle (94), (90))

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \lim_{b' \to b-} \int_a^{b'} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, \mathrm{d}x = \int_a^{b} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, \mathrm{d}x .$$

Příklad 1. Pro reálné α a pro $\beta > 0$ položme

$$K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} \, \mathrm{d}x , \quad L(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

(β si budu myslit pevně zvoleno; α bude „parametrem"). Ježto integrand v K má konvergentní majorantu $(\beta^2 + x^2)^{-1}$, je K spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a je

$$|K(\alpha)| \leqq K(0) = \frac{\pi}{2\beta} . \tag{96}$$

Pro $0 < b' < +\infty$ lze provésti derivování podle věty 108:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_0^{b'} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{b'} \frac{-x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} \, \mathrm{d}x ,$$

ježto integrand vpravo má majorantu $\dfrac{x}{\beta^2 + x^2} < \dfrac{b'}{\beta^2}$.

[38]) Což je Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (v I) výrazu (90).

Tedy je splněna podmínka I z věty 116 (pro integrál $K(\alpha)$), a ovšem též podmínka III. Podmínka II plyne takto: Funkce $x : (\beta^2 + x^2)$ je klesající pro $x \geqq \beta$; pro $\beta < b' < b'' < +\infty$, $|\alpha| > \delta > 0$ je tedy

$$(97)\qquad \left|\int_{b'}^{b''} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx\right| = \frac{b'}{\beta^2 + b'^2}\left|\int_{b'}^{\xi} \sin \alpha x\,dx\right| \leqq \\ \leqq \frac{2b'}{\beta^2 + b'^2}\cdot\frac{1}{|\alpha|} < \frac{2b'}{\delta(\beta^2 + b'^2)}.$$

Podmínka II je tedy splněna pro $I = (\delta, +\infty)$, kde δ může být libovolné kladné číslo. Tedy je

$$(98)\qquad K'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx = -L(\alpha) \text{ pro } \alpha > 0\,.$$

Pro integrál $L(\alpha)$, který — jak ihned uvidíme — je nevlastní, nelze již užíti věty 116.[39]) Ale funkce $x : (\beta^2 + x^2)$ se pro velká x chová přibližně jako $1 : x$. Zkusme to tedy s výrazem ($\alpha > 0$)

$$L(\alpha) - \tfrac{1}{2}\pi = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = -\beta^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x\,dx}{x(\beta^2 + x^2)}\,.$$

Zde můžeme derivovat přímo podle věty 108:

$$(99)\qquad L'(\alpha) = -\beta^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx = -\beta^2 K(\alpha)\,,$$

neboť integrand má majorantu $(\beta^2 + x^2)^{-1}$. Podle (98), (99) je tedy

$$K''(\alpha) = \beta^2 K(\alpha) \text{ pro } \alpha > 0\,.$$

Podle známé věty o diferenciálních rovnicích (viz větu **B**) v kap. VII, § 7) je tedy jistě

$$(100)\qquad K(\alpha) = C_1 e^{\alpha\beta} + C_2 e^{-\alpha\beta} \text{ pro } \alpha > 0\,,$$

---

[39]) Kdybychom formálně derivovali $L(\alpha)$, dostali bychom formálně

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x\,dx - \beta^2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2}\,dx\,;$$

ale integrál vlevo vůbec nemá smyslu (ježto druhý integrál vpravo má a první nemá smysl).

kde C_1, C_2 jsou dvě konstanty (vzhledem k α; mohou záviseti na β). Kdyby bylo $C_1 \neq 0$, mělo by $|K(\alpha)|$ pro $\alpha \to +\infty$ limitu $+\infty$, ale to není možno podle (96). Tedy $C_1 = 0$,

$$K(\alpha) = C_2 e^{-\alpha\beta} \text{ pro } \alpha > 0 . \tag{101}$$

Ale $K(\alpha)$ je spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a $K(0) = \frac{\pi}{2\beta}$, takže limitní přechod $\alpha \to 0+$ v (101) dává $C_2 = \frac{\pi}{2\beta}$; ježto K je sudá funkce α, β, vychází

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{2|\beta|} e^{-|\alpha\beta|} \text{ pro reálná } \alpha, \beta \ (\beta \neq 0) . \tag{102}$$

Podle (98) a s přihlédnutím k tomu, že L je lichá funkce α a sudá funkce β, vychází

$$L(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha\beta|} . \operatorname{sgn} \alpha \tag{103}$$

pro reálná $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Poznámka 1. Integrál v (97) je v absolutní hodnotě nejvýše roven $\frac{2}{|\alpha| b'}$, jestliže $\beta < b' < b'' < +\infty$. Tedy při pevném $\alpha \neq 0$ a proměnném β konverguje tento integrál stejnoměrně k nule v intervalu $0 \leqq \beta \leqq 1$ (neboť potom hoření odhad platí pro $b' > 1$, $b' < b'' < +\infty$).[40]) Mimo to má integrand $\frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2}$ majorantu $|\alpha|$. Podle věty 114 je tedy $L(\alpha)$ při pevném $\alpha \neq 0$ spojitou funkcí β v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, takže ze (103) plyne pro $\beta \to 0+$, $\alpha \neq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} \alpha ;$$

tím je dán další (již čtvrtý) výpočet tohoto integrálu.

---

[40]) Podrobně: Integrál v (97) je v absolutní hodnotě menší než ε ($\varepsilon > 0$), je-li $b_0 < b' < b'' < +\infty$, kde $b_0 = \operatorname{Max}\left(1, \frac{2}{|\alpha| \varepsilon}\right)$.

§ 7. Integrace integrálů podle parametru (záměnnost integračního pořadí). Budiž f funkce dvou proměnných.[41]) Píšeme-li

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x \tag{104}$$

(zobecněný integrál), můžeme si položiti otázku, zda konverguje (zobecněný) integrál

$$\int_c^d F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}\alpha\,, \tag{105}$$

a jak tento integrál vypočísti, po případě jak studovati jeho vlastnosti. Víme již z kap. VII, § 11, že při tomto vyšetřování může býti velmi důležitá rovnice

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y \tag{106}$$

(že jsem místo α psal y, je ovšem lhostejné). Budeme se proto zabývati otázkou, kdy tato rovnice platí. Z Fubiniovy věty 74 víme toto: Jestliže existuje Lebesgueův integrál (nemusí ani býti konvergentní)

$$\iint\limits_{\substack{a<x<b\\ c<y<d}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (a < b,\, c < d)\,, \tag{107}$$

potom platí (106) a integrál (107) se rovná integrálům (106). Ale jestliže neexistuje integrál (107), nemusí rovnice (106) platit, jak ukazuje příklad 7 v kap. VII, § 3.

Naším cílem v následujícím paragrafu bude vyšetřovati platnost rovnice (106), a to i pro zobecněné integrály (konvergentní) — bez ohledu na to, zda integrál (107) existuje. Půjde nám přitom spíše o praktický návod[42]) než o odvozování obecných vět.

Poznámka 1. Pro $a < a' < b$ platí rovnice

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a'} \Big(\int_c^d \ldots\Big) + \int_{a'}^b \Big(\int_c^d \ldots\Big)\,, \tag{108}$$

$$\int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_a^{a'} \ldots\Big) + \int_c^d \Big(\int_{a'}^b \ldots\Big)\,, \tag{109}$$

[41]) f smí být komplexní v celém tomto paragrafu.
[42]) Ovšem bez újmy přesnosti!

pokud *pravé* strany mají konečnou hodnotu.[43]) To nám umožňuje v případě zobecněných integrálů rozdělit při vyšetřování integrační interval (ať už jde o „vnější“ nebo „vnitřní“ integraci) na „vhodné“ intervaly ve smyslu § 1, t. j. na intervaly, v nichž nastává případ I nebo II z § 1.

Poznámka 2. Rovněž je zřejmo (viz pozn. 4 v § 1): Konverguje-li $\int_a^b(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$ a je-li $a \leqq a' < b' \leqq b$, konverguje též $\int_{a'}^{b'}(\int_c^d f(x, y)\,.$ $.\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$. Ale pozor! Konverguje-li $\int_c^d(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$, nemusí konvergovati $\int_c^d(\int_{a'}^{b'} f(x, y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$.

Příklad: $\int_0^{+\infty}(\int_{-1}^{1} y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\,.\,\mathrm{d}x = 0$ (obě integrace jsou dokonce lebesgueovské), ale $\int_0^{+\infty}(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = +\infty$, $\int_0^{+\infty}(\int_{-1}^0 y\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x =$ $= -\infty$. V tomto příkladě levá strana v (109) má smysl, pravá nikoliv. Vidíme, že při „vnitřní“ integraci je nutno dát pozor.

§ 8. Příklady na výpočet integrálů užitím záměnnosti integračního pořadí. Pro případ, že lze užíti Fubiniovy věty, jsme již v kap. VII, § 11 ukázali, jak lze jednoduché integrály (Lebesgueovy) počítati užitím rovnice (106). Nyní tento postup zobecníme. Naznačím obecný princip a provedu jej na příkladech. Ve smyslu pozn. 1 v § 7 se omezím na „případ I“ a „případ II“, při čemž „případ II“ mohu vzhledem k symetričnosti nechati stranou.

Budiž tedy $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, $-\infty \leqq c < d \leqq +\infty$ a nechť pro každé $\beta \in (a, b)$ platí rovnice[44])

$$\int_a^\beta(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x = \int_c^d(\int_a^\beta f(x, y)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y\,, \tag{110}$$

---

[43]) V (108) jde o integrál přes sjednocení dvou intervalů, v (109) o integrál součtu; viz § 1, pozn. 2 a 3.
[44]) f smí být komplexní.

při čemž tato hodnota budiž konečná a integrace v mezích a, β (t. j. „vnější" integrace vlevo a „vnitřní" vpravo) nechť jsou lebesgueovské; druhé dvě mohou býti zobecněné. Ptáme se, zda platí (106), t. j. zda (110) platí i pro $\beta = b$. Položme

$$\int_a^\beta f(x, y)\,\mathrm{d}x = F(y, \beta) \tag{111}$$

a předpokládejme, že pro skoro všechna $y \in (c, d)$ konverguje zobecněný integrál

$$\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x = F(y)\,, \tag{112}$$

t. j. že existuje vlastní limita

$$\lim_{\beta \to b-} F(y, \beta) = F(y)\,. \tag{113}$$

Dokážeme-li nyní, že platí rovnice

$$\int_c^d F(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\beta \to b-} \int_c^d F(y, \beta)\,\mathrm{d}y \tag{114}$$

s vlastní limitou vpravo (k tomu máme řadu kriterií, na př. věty 106, 113), bude tím dokázáno, že pravá strana v (110) má vlastní limitu (pro $\beta \to b-$)

$$\int_c^d \Bigl(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Bigr)\,\mathrm{d}y\,; \tag{115}$$

touž limitu má tedy i levá strana v (110), ale tato limita podle definice zobecněného integrálu je právě

$$\int_a^b \Bigl(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Bigr)\,\mathrm{d}x\,. \tag{116}$$

Tím je konvergence a rovnost integrálů (115), (116) dokázána.

Provedeme nyní několik závažných příkladů.

Příklad 1.[45])

$$I = \int_0^{+\infty} (\cos b_1 x - \cos b_2 x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,.$$

[45]) V příkladech 1, 2, 3 je vše reálné.

Bod 0 zde nevadí, ježto $\cos b_1x - \cos b_2x = \frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2)\, x^2 + \ldots$; I je Lebesgueův integrál. Ježto

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}y = \frac{\cos b_1x - \cos b_2x}{x^2}\,,$$

je

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Výměnou integračního pořadí dospějeme k integrálu (viz § 4, (53))

$$K = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

(117) $$= \int_{b_1}^{b_2} \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} y\, \mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{b_2} \operatorname{sgn} y\, \mathrm{d}y - \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{b_1} \operatorname{sgn} y\, \mathrm{d}y =$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi(|b_2| - |b_1|)\,.$$

Jde o to, zda je $I = K$. Ježto pro $x \neq 0$ je

$$\left| \frac{\sin xy}{x} \right| \leqq |y|\,,$$

lze zřejmě pro konečná $c > 0$, b_1, b_2 užíti Fubiniovy věty:

(118) $$\int_0^c \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_0^c \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

($|y|$ je „integrabilní majoranta" v oboru $(0, c) \times (b_1, b_2)$). Předpokládejme $b_1 < b_2$ (pro $b_1 > b_2$ stačí změnit znamení v I a vyměnit b_1 s b_2). Položme

$$F(c, y) = \int_0^c \frac{\sin xy}{x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \pm \int_0^c \frac{\sin x|y|}{x}\, \mathrm{d}x = \pm \int_0^{c|y|} \frac{\sin z}{z}\, \mathrm{d}z\,.$$

Ježto funkce $g(\alpha) = \int\limits_0^\alpha \frac{\sin z}{z}\, dz$ je spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a má pro $\alpha \to +\infty$ konečnou limitu $\frac{1}{2}\pi$ (a pro $\alpha \to -\infty$ ovšem limitu $-\frac{1}{2}\pi$), je $g(\alpha)$ omezená v $(-\infty, +\infty)$, a tedy *existuje konečné číslo C tak, že pro všechna reálná c, y jest*

$$|F(c, y)| = \left| \int\limits_0^c \frac{\sin xy}{x}\, dx \right| < C\,. \tag{119}$$

To si zapamatujme i pro příště. Funkce $F(c, y)$ mají tedy v intervalu (b_1, b_2) společnou „integrabilní majorantu" C; mimo to je ovšem pro každé y

$$\lim_{c \to +\infty} F(c, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx\,.$$

Podle věty 106 je tedy

$$\lim_{c \to +\infty} \int\limits_{b_1}^{b_2} F(c, y)\, dy = \int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\, dx \right) dy = K\,.$$

T. j. pravá strana v (118) má limitu K; a ovšem levá strana má limitu I. Tedy podle (117)

$$I = K = \tfrac{1}{2}\pi(|b_2| - |b_1|)\,.$$

Odtud plyne ještě na př. vzorec

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin px \sin qx}{x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos (p+q)\,x - \cos (p-q)\,x}{x^2}\, dx =$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi(|p+q| - |p-q|)\,.$$

Příklad 2.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\gamma^2 + x^2}\, dx \quad (\gamma > 0)\,.$$

Je to konvergentní Lebesgueův integrál. Jest

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma y} \sin xy \, \mathrm{d}y = \frac{x}{\gamma^2 + x^2} .$$

Tedy

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x ,$$

kde

$$f(x, y) = \frac{\cos x \sin xy}{x} \mathrm{e}^{-\gamma y} .$$

Záměna integračního pořadí nás vede k integrálu

$$K = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$(120) \quad = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma y} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin x(y+1) + \sin x(y-1)}{x} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma y} (\operatorname{sgn}(y+1) + \operatorname{sgn}(y-1)) \, \mathrm{d}y$$

(viz § 4, (53)). Pro $y > 1$ je poslední integrand roven $2\mathrm{e}^{-\gamma y}$, pro $0 < y < 1$ je roven nule, takže

$$(121) \qquad K = \frac{1}{2} \pi \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\gamma y} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\gamma} \mathrm{e}^{-\gamma} .$$

Jde o to, zda $I = K$. V omezeném integračním oboru by se dalo jistě užíti Fubiniovy věty. Ale dá se jí dokonce použíti pro obor $y > 0$, $0 < x < a$ při libovolném konečném $a > 0$. Neboť $|f(x, y)| \leqq y\mathrm{e}^{-\gamma y}$ pro $x \neq 0$, $y > 0$, a pro tuto nezápornou „majorantu" lze užíti Fubiniovy věty:

$$\iint_{\substack{0<x<a \\ y>0}} y\mathrm{e}^{-\gamma y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a y\mathrm{e}^{-\gamma y} \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = a \int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-\gamma y} \, \mathrm{d}y < +\infty ;$$

tedy konverguje i integrál (Lebesgueův) z $f(x, y)$ přes tento obor, a Fubiniova věta dává

$$\int_0^a \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a f(x, y)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \,. \tag{122}$$

Jde ještě o limitní přechod $a \to +\infty$. Položme

$$\int_0^a f(x, y)\, \mathrm{d}x = F(a, y)\,,$$

takže

$$\lim_{a \to +\infty} F(a, y) = \int_0^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x$$

(tento — zobecněný — integrál konverguje; viz výpočet v (120)). Mimo to

$$F(a, y) = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\gamma y} \int_0^a \frac{\sin x(y+1) + \sin x(y-1)}{x} \mathrm{d}x\,,$$

takže podle (119) v příkl. 1 jest

$$|F(a, y)| < C\mathrm{e}^{-\gamma y}, \text{ při čemž } \int_0^{+\infty} C\mathrm{e}^{-\gamma y}\, \mathrm{d}y < +\infty.$$

Tedy funkce $F(a, y)$ mají společnou „integrabilní majorantu“, takže podle věty 106 je

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(a, y)\, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\,.$$

Limitní přechod $a \to +\infty$ v (122) dává tedy ihned — jako v příkl. 1 —

$$I = K = \frac{\pi}{2\gamma} \mathrm{e}^{-\gamma}\,.$$

Příklad 3.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Hodnoty tohoto integrálu jsme použili v příkladech 1, 2; nyní ukážeme, že také tento integrál lze vypočísti záměnou integračního pořadí. Pro $x > 0$ jest $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$, a tedy

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dy\right) dx\,.^{46})$$

Položme

$$K = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dx\right) dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Jde o to, zda $I = K$.

Jest $|e^{-xy} \sin x| \leqq xe^{-xy}$ pro $x > 0$; užitím Fubiniovy věty na tuto nezápornou funkci máme pro konečné $a > 0$

$$\iint\limits_{\substack{0<x<a\\ y>0}} xe^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} xe^{-xy}\,dy\right) dx = \int_0^a dx < +\infty\,.$$

Tedy pro konečné $a > 0$ jest

$$\int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xy} \sin x\,dx\right) dy\,. \tag{123}$$

Položím-li zde

$$F(a, y) = \int_0^a e^{-xy} \sin x\,dx\,,$$

je

$$\lim_{a\to+\infty} F(a, y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dx\,,$$

a dále

$$F(a, y) = \frac{1 - e^{-ay}(y \sin a + \cos a)}{y^2 + 1}$$

---

[46]) Tato rovnice platí tehdy a jen tehdy, existuje-li integrál v titulu tohoto příkladu. My sice víme, že konverguje, ale nepotřebujeme to: jeho konvergence nám vyjde záměnou integračního pořadu.

pro $a > 0$. Pro $a > 0$, $y > 0$ je však

$$|\mathrm{e}^{-ay} \cos a| < 1 \,, \quad |\mathrm{e}^{-ay} y \sin a| < \mathrm{e}^{-ay} ay < C \,,$$

kde C je jistá konstanta (neboť funkce $u\mathrm{e}^{-u}$ je v $\langle 0, +\infty)$ spojitá a má pro $u \to +\infty$ limitu 0; tedy je tato funkce omezená v $\langle 0, +\infty)$, t. j. $u\mathrm{e}^{-u} < C$ pro všechna $u \geqq 0$). Tedy funkce $F(a, y)$ mají společnou integrabilní majorantu $\frac{2 + C}{y^2 + 1}$.[47]) Podle věty 106 je tedy

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(a, y)\, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \,;$$

t. j. pravá strana v (123) má limitu $K = \frac{1}{2}\pi$, a touž limitu má tedy i levá strana, t. j. I konverguje a jest $I = \frac{1}{2}\pi$.

Příklad 4. Fresnelovy integrály

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \,, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \sin x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \,.$$

Konvergence nám opět vyjde současně se záměnností. Abychom mohli oba integrály počítat najednou, položme

$$I = I_1 + \mathrm{i} I_2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \,. \tag{124}$$

Víme (Laplaceův integrál, viz kap. III, § 7, příkl. 12), že pro $x > 0$ je

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2 x}\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \,. \tag{125}$$

[47]) Proč počítáme tak přesně? Protože hrubý odhad

$$|F(a, y)| \leqq \int_0^a \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-ay}}{y} \leqq \frac{1}{y}$$

by nám nebyl nic platný: pravá strana nemá konvergentní integrál podle y od 0 do $+\infty$.

Proto platí

$$(126) \qquad I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-y^2+i)x} \, dy \right) dx$$

(lépe řečeno: (124) je ekvivalentní s (126)). Záměna integračního pořadí nás vede k integrálu

$$K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-y^2+i)x} \, dx \right) dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2 + i}{y^4 + 1} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, (1 + i) \, .$$

Jde ještě o to, zda je $I = K$. Jest $|e^{(-y^2+i)x}| = e^{-y^2 x}$, a užití Fubiniovy věty na tuto nezápornou funkci dává podle (125) pro konečné $a > 0$

$$\iint_{\substack{0<x<a \\ y>0}} e^{-y^2 x} dx \, dy = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2 x} \, dy \right) dx = \int_0^a \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} \, dx < + \infty \, ,$$

takže

$$(127) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{(-y^2+i)x} \, dy \right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{(-y^2+i)x} \, dx \right) dy \, .$$

Položme

$$F(a, y) = \int_0^a e^{(-y^2+i)x} \, dx \, .$$

Je-li $y > 0$, máme

$$\lim_{a \to +\infty} F(a, y) = \int_0^{+\infty} e^{(-y^2+i)x} \, dx \, .$$

Vypočteme pro $a > 0$, $y > 0$

$$(128) \qquad |F(a, y)| = \left| \frac{1 - e^{-a(y^2-i)}}{y^2 - i} \right| < \frac{2}{\sqrt{y^4 + 1}} \, ;$$

neboť $|e^{-a(y^2-i)}| = e^{-ay^2} < 1$.

Pravá strana v (128) je společná majoranta k funkcím $F(a, y)$, mající konvergentní integrál od 0 do $+\infty$.[48]) Proto podle věty 106 je

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} F(a, y)\, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-y^2+\mathrm{i})x}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

T. j. pravá strana v (127) má vlastní limitu K, touž limitu má tedy i levá strana, t. j. I konverguje a jest

$$I = K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1 + \mathrm{i})\,,$$

tedy

$$I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

---

[48]) Hrubý odhad

(129) $$|F(a, y)| \leqq \int_0^a \mathrm{e}^{-y^2 x}\, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-ay^2}}{y^2} < \frac{1}{y^2}$$

by opět vedl k majorantě y^{-2}, jež *nemá* konvergentní integrál od 0 do $+\infty$. Poznamenejme, že pro velká a je e^{-ay^2} blízko nuly, takže ze (129) nedostaneme žádnou lepší majorantu *nezávislou na a* než y^{-2}.