List 7: Adelboldovi o příčině rozdílu mezi geometrickým a aritmetickým výpočtem obsahu rovnostranného trojúhelníku

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 134–144.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402414

List 7[1]

Ad Adelboldum de causa diversitatis arearum trigoni aequilateri geometrice arithmeticeve expensi[2] 41, 11

Gerbertus Adelboldo nunc usque dilecto semperque diligendo 43, 14
fidei integritatem integritatisque constantiam. 43, 15

1. In his geometricis figuris, quas a nobis sumpsisti, erat trigonus quidam aequilaterus, cujus erat latus XXX pedes, cathetus XXVI, secundum collationem lateris et catheti area CCCXC.
Hunc eumdem trigonum si absque ratione catheti secundum ari- 44, 1
thmeticam regulam metiaris, scilicet ut latus unum in se multiplicetur eique multiplicationi lateris unius numerus adjiciatur, et ex hac summa medietas sumatur, erit area CCCCLXV. Videsne, qualiter hae duae regulae dissonent? Sed et illa geometricalis,
quae per rationem catheti aream in CCCXC pedes metiebatur, 44, 5
subtilius est a me discussa, et catheto suo non nisi XXV et quinque septimas unius concedo, et areae CCCLXXXV et quinque septimas. Et sit tibi regula universalis in omni trigono aequila-
tero cathetum inveniendi; lateri semper septimam deme, et sex 44, 10
reliquas partes catheto concede.

2. Ut quod dicitur melius intelligas, in minoribus numeris libet exemplificare. Do tibi trigonum in latere VII pedum longitudinem
habentem. Hunc per geometricalem regulam sic metior. Tollo 45, 1
septimam lateri et senarium, qui reliquus est, do perpendiculo.

[1] Tento list patří s největší pravděpodobností mezi pozdní Gerbertovy texty. Bubnov a Riché ho datují mezi roky 997–999 – viz [Bub], s. 41; [GeEC], s. 700–701. Pratt Lattin se pokusila dobu vzniku upřesnit na Gerbertův chystaný odchod z Ravenny do Říma, kde se nedlouho poté stal papežem – viz [GeEE], s. 299, 301.

[2] Latinský text je převzat z [Bub], s. 41–45. Název byl přidán již v Pezově vydání tohoto dopisu, které převzala i edice v *PL* (viz [GeAd], c. 151), Bubnov jej jen mírně upravil.

[3] Adelbold z Utrechtu (zemř. 1026) nejprve působil v Lutychu (byl Notkerovým studentem), poté v Lobbes (spolupracoval s Herigerem) a od roku 1010 byl s přispěním císaře Jindřicha II. jmenován biskupem v Utrechtu. Věnoval se komentování Boethia, pod jeho jménem je dochován spis o nebeské sféře či texty o hudbě.

[4] Patrně se jedná o kolekci geometricko-zeměměřických textů, která byla sestavena zřejmě v 7. století a která zahrnovala mimo jiné texty z pseudo-Boethiovy *Geometrie*, výtahy z geometrických kapitol z Isidora Sevillského a Cassiodora či určité pasáže z dalších antických nebo raně středověkých tematicky obdobně orientovaných textů, včetně fragmentů z Eukleida. Může jít o konvolut, s nímž se Gerbert seznámil v Bobbiu, příp. o jiný svazek, který byl k dispozici v Ravenně. Srov. [Bub], s. 472–488.

[5] O trojúhelníku těchto rozměrů se nehovoří v *Geometrii*, která je připisována Gerbertovi, přestože se v něm řeší výška trojúhelníku – viz [Bub], s. 87–88. Trojúhelník o délce

Adelboldovi o příčině rozdílu mezi geometrickým a aritmetickým výpočtem obsahu rovnostranného trojúhelníku

Gerbert dosud a navěky milovanému Adelboldovi[3] přeje vytrvalost a neochvějnost ve víře.

1. Mezi geometrickými obrazci, které jsi od nás dostal,[4] byl také rovnostranný trojúhelník o délce strany 30 stop a výšce 26 stop; na základě srovnání strany a výšky je jeho obsah 390 stop.[5] Pokud bys stejný trojúhelník, bez započítání výšky, měřil podle aritmetických pravidel,[6] tedy kdybys vynásobil stranu samu sebou, k součinu připočetl délku jedné strany a součet rozdělil na polovinu, získáš obsah 465 stop.[7] Vidíš, jak se tato dvě pravidla liší?

Ovšem ta geometrická pravidla, podle nichž jsme se započítáním výšky stanovili obsah 390 stop, jsem rozebral dopodrobna,[8] a připouštím, že výška je 25 stop a $\frac{5}{7}$ stopy,[9] obsah pak 385 stop a $\frac{5}{7}$ stopy. A zde je obecné pravidlo pro určení výšky rovnostranného trojúhelníku: Odečteš-li sedminu strany, zbylých šest částí vždy určuje výšku.[10]

2. Abys to lépe pochopil, raději uvedu příklad s menšími čísly. Představ si trojúhelník o délce strany 7 stop. Jeho plochu podle geometrických pravidel změřím takto: Odečtu sedminu strany a zbylých šest částí mi určí

30 a výšce 26 stop je použit jako příklad např. v pseudo-Boethiově *Geometrii II* – viz [PBG], II, 4, s. 148, nebo v díle zvaném *Geometria incerti auctoris* – [Bub], s. 342–343.

6 Srov. [BoAr], II, 7–9, s. 114–117; resp. kap. 2.5.2 úvodní studie této knihy. Gerbert v textu hovoří o stopách, které je nutno v případě obsahu chápat jako stopy čtvereční – viz pozn. 13–15 k tomuto listu. Na metodu aritmetického výpočtu viz *Komentář* k tomuto dopisu.

7 Stejný postup s jinými hodnotami nabízí např. [PBG], II, 5, s. 149.

8 Není zcela zřejmé, na který text se zde Gerbert odkazuje – mohlo jít o dnes nedochované listy na toto téma, příp. o jiné pojednání týkající se uvedeného problému. V *Geometrii*, která je mu připisována, je geometrická metoda stanovení obsahu rovnostranného trojúhelníku pomocí délky strany a výšky trojúhleníku skutečně popsána i s konkrétními příklady – viz [Bub], s. 87–91 – je tedy možné, že Adelbolda upozorňuje na tuto pasáž.

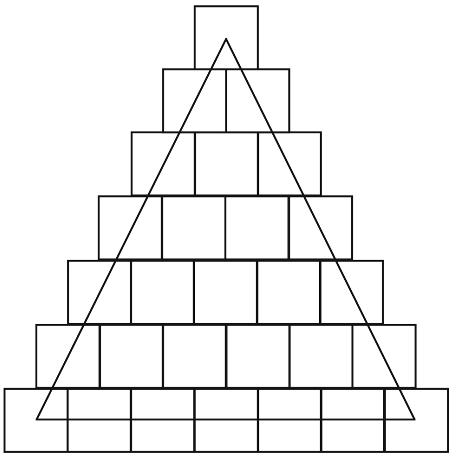
9 Jedná se o správné upozornění na skutečnost, že výška trojúhelníku o délce 30 stop je menší než 26 stop, zde je ovšem vyjádřena jen aproximativně a relativně dost nepřesně. Blíže viz *Komentář* k *Listu* 7. Poměrně neobvyklé pro raně středověké texty je, že zde Gerbert neužívá římských zlomků. V textu *Geometrie*, která je Gerbertovi přisuzována, jsou rozlišeny zlomky obvyklé (*minutiae usitatae*) a racionální (*minutiae intellectualles*) – viz [Bub], s. 64. Zatímco obvyklé zlomky jsou římské zlomky vycházející z dvanáctinového podílu, racionálními zlomky jsou zlomky v jakémkoli podílu, včetně zde uvedeného zlomku $\frac{5}{7}$. Užití takového zlomku Gerbertem může opětovně souviset s aritmetikou a proporcemi, neboť tento zlomek není ničím jiným, než poměrem 5 : 7, tzn. subsuperparcientním dělitelem – blíže viz kap. 2.4.1 úvodní studie této knihy.

10 Podrobněji viz *Komentář* k tomuto dopisu.

Per hoc latus duco, et dico: sexies septem, qui reddunt XLII. Ex his medietas XXI area est dicti trigoni.

Hunc eumdem trigonum si per arithmeticam regulam metiaris, et dicas: septies septem, ut fiant XLIX, latusque adjicias, ut sint LVI, dividasque, ut ad aream pervenias, XXVIII invenies. Ecce sic in trigono unius magnitudinis diversae sunt areae, quod fieri nequit.

3. Sed ne diutius mireris causam tibi diversitatis aperiam. Notum tibi esse credo, qui pedes longi, qui quadrati, qui crassi esse dicantur, quodque ad areas metiendas non nisi quadratos recipere solemus. Eorum quantulamcunque partem trigonus attingat, arithmeticalis regula eos pro integris computat. Depingere libet, ut manifestius sit, quod dicitur.



[Fig. 35a]

Ecce in hac descriptiuncula XXVIII pedes, quamvis non integri, habentur. Unde arithmeticalis regula pro toto partem accipiens cum integris dimidiatos recipit. Solertia autem geometricae disciplinae particulas latera excedentes abjiciens, recisurasque dimidiatas intra latera remanentes componens, quod lineis

[11] Termín *perpendiculum* znamená mj. kolmici; zde Gerbert užívá tohoto termínu ve stejném významu jako *cathetetus*, tedy pro označení výšky. Explicitní ztotožnění obou termínů lze nalézt i v dobových textech – viz např. [Bub], s. 522.

[12] Blíže viz *Komentář* k *Listu* 7.

[13] V Gerbertovi připisované *Geometrii* jsou nazývány *pedes linearis*, resp. *mensura linearis*, s jejich pomocí se vyjadřuje délka (*longitudo*) – viz [Bub], s. 55–56. Na vyobrazení uvedená ve zmíněném spisu viz *Komentář* k tomuto dopisu.

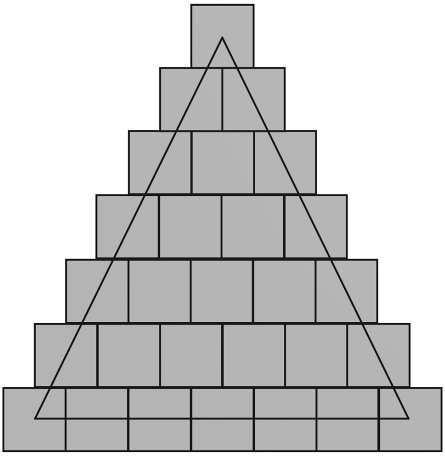
[14] *Geometrie* je nazývá *pedes constratus*, resp. *mensura constrata vel plena*, a užívají se k vyjádření délky i šířky (*latitudo*) – viz [Bub], s. 55–56. Na vyobrazení z *Geometrie* viz *Komentář* k tomuto dopisu.

výšku,[11] kterou vynásobím stranu trojúhelníku, tedy šest krát sedm, což dává 42. Polovina, tj. 21, tvoří obsah uvedeného trojúhelníku.

Pokud bys plochu téhož trojúhelníku měřil pomocí aritmetických pravidel, počítal bys: Sedm krát sedm, tedy 49, plus délka strany, dostaneš 56 a dělíš dvěma; tak dospěješ k číslu 28 a máš obsah.

A vidíš, trojúhelník o stejné délce stran má rozdílné obsahy, což je přece nemožné.[12]

3. Ale aby ses příliš dlouho nedivil, objasním ti příčinu tohoto rozdílu. Jistě víš, co vyjadřují délkové stopy,[13] co čtvereční[14] a co kubické,[15] a také to, že pro výpočet plochy používáme pouze stopy čtvereční. Tyto, ať už vymezují jakkoli malou část trojúhelníku, jsou podle aritmetického pravidla vyjádřeny celými čísly. Pro větší názornost to raději nakreslím [obr. 35].



[Obr. 35b – Aritmetická vizualizace rovnostranného trojúhelníku s délkou strany 7 stop]

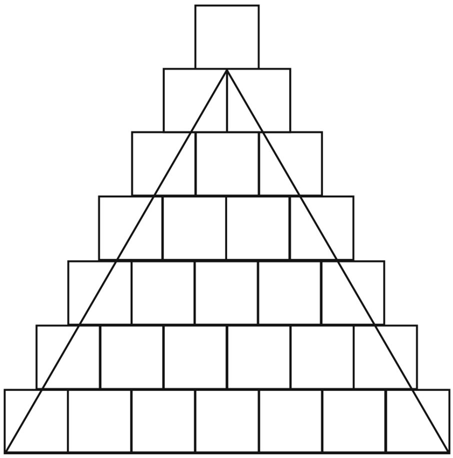
Na tomto obrázku je 28 stop, jakkoli všechny nejsou [do trojúhelníku zahrnuty] celé. Podle aritmetického pravidla však i část je chápána jako celek, a tak i poloviny jsou vyjadřovány celými čísly.[16] Podle moudrého učení geometrie však počítáme pouze plochu vymezenou stranami trojúhelníku, tedy odečteme části přesahující jeho strany, přičemž do výpočtu zahrneme polovinu odečtených částí, které do trojúhelníku patří.[17]

[15] Gerbertovi připisovaná *Geometrie* je označuje jako *pedes solidus*, resp. *mensura solida*, které navíc v geometrickém umění označují vedle délky a šířky ještě hloubku, tzn. tloušťku (*crassitudo*) či výšku (*altitudo*) – viz [Bub], s. 55–56. Na figurativní zobrazení těchto číselných reprezentací viz kap. 2.5 úvodní studie této knihy.

[16] Podrobněji viz *Komentář*.

[17] Gerbert zde hovoří o čtverečních stopách (na obrazcích připojených k dopisu se jedná o čtverce), které jakoukoli svou částí zasahují vně trojúhelníku. Pokud do prostoru vymezeného stěnami trojúhelníku nezasahují vůbec, nejsou do výpočtu zahrnuty, pokud jen určitou svou částí, pak se počítá jejich polovina. Přehledněji viz obr. 36 a *Komentář* k tomuto dopisu.

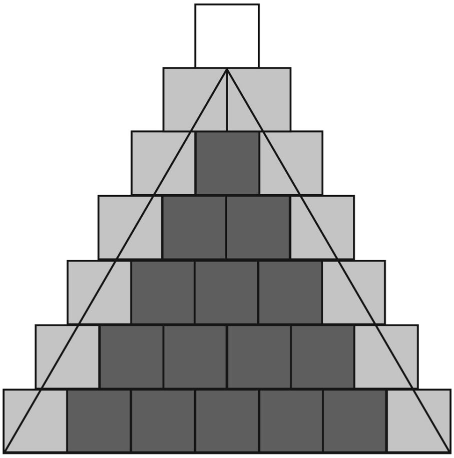
clauditur, hoc tantum computat. Nam in hac descriptiuncula, quam septenarius per latera metitur, si perpendiculum quaeras, senarius est. Hunc per VII ducens quasi quadratum imples, cujus sit frons VI pedum, latus VII, et aream ejus sic in XLII pedes constituis. Hunc si dimidiaveris, trigonum in XXI pedes relinquis. 45, 25



[Fig. 36a]

Ut lucidius intelligas, oculos appone et mei semper memento.

Ptáš-li se, jaká je výška zobrazeného trojúhelníku, jehož strana měří sedm stop, je to 6 stop. Tu vynásobíš sedmi, čímž trojúhelník doplníš na čtyřúhelník o výšce 6 a straně 7 stop, a tak vypočteš jeho obsah, což je 42 stop. Když je dělíš dvěma, dostaneš 21 stop, tedy obsah trojúhelníku (obr. 36).[18]



[Obr. 36b – Geometrické znázornění rovnostranného trojúhelníku s délkou strany 7 stop]

Abys to jasněji pochopil, podívej se na to a přitom si vždy vzpomeň na mne.

[18] Tento výpočet byl Gerbertem v tomto dopise již jednou prezentován – ve druhé části.

Komentář

List 7 se věnuje jako jediný z Gerbertových dopisů také geometrické problematice, konkrétně odlišnosti v číselných hodnotách, jakými se vyjadřuje obsah rovnostranného trojúhelníku podle geometrie a aritmetiky. Nejprve v první části adresátovi připomíná zaslaný obrazec rovnostranného trojúhelníku, který měl délku strany 30 stop, takže jeho výška je 26 stop, což pomocí geometrického výpočtu obsahu trojúhelníku činí 390 čtverečních stop (7, 6–8; 43, 16–18). Stejný obrazec však podle aritmetické teorie figurálních čísel lze vyjádřit číslem 465 (7, 9–12; 43, 19–44, 3). Ani jedna hodnota není shledána jako oprávněná – Gerbert upřesňuje výšku tohoto trojúhelníku a uvádí obecné pravidlo k jejímu nalezení (7, 13–19; 44, 4–10). Následně v druhé části uvádí jednodušší příklad rovnostranného trojúhelníku s délkou strany 7 stop a vymezuje hodnoty jeho obsahu podle geometrických a aritmetických pravidel (7, 20–30; 44, 11–45, 8). Na závěr v třetí části poskytuje vysvětlení rozdílu obou hodnot, když vše prezentuje nejen verbálně, ale výklad rovněž doplňuje o dvě názorná schémata (7, 31–47; 45, 9–25).

7, 7–8 (43, 17–18):

Z matematického hlediska je zdejší výpočet v pořádku. Obsah rovnostranného trojúhelníku lze vypočítat podle vzorce:

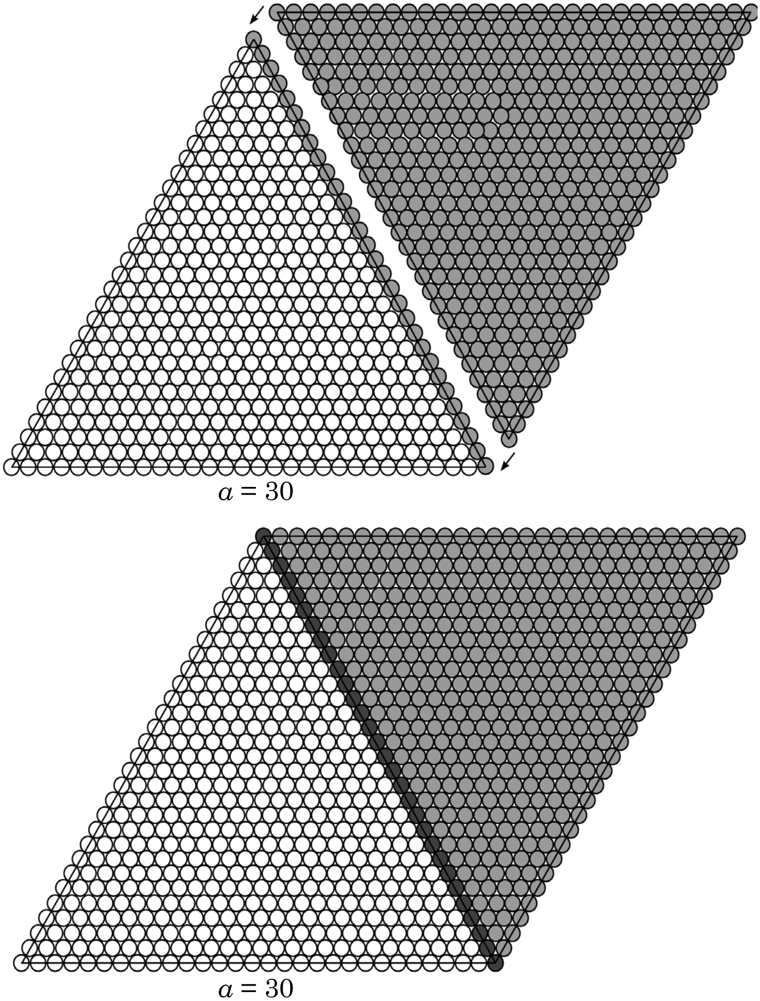
[41] $S = \frac{a \cdot v}{2}$; kde a je délka strany a v je výška trojúhelníku.

Výpočet je proto správný, neboť pokud $a = 30$ a $v = 26$, pak platí, že:

[41′] $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{30 \cdot 26}{2} = \frac{780}{2} = 390.$

7, 9–12 (43, 19–44, 3):

Aritmetika uvažuje o obsahu trojúhelníku odlišně, neboť jde o figurální reprezentaci daného útvaru pomocí jednotek. Počet bodů, které by reprezentovaly jakýkoli trojúhelník, lze zjistit tak, že je zdvojnásobena délka strany trojúhelníku, čímž vznikne čtyřúhelník, který v sobě bude zahrnovat dva uvedené trojúhelníky. V místě, kde se oba trojúhelníky spojí, tzn. jedna strana každého z obou trojúhelníků, se budou body vzájemně překrývat, proto je nutno přičíst k výsledku součinu ještě jednou délku strany zkoumaného trojúhelníku. Získaný součet pak stačí vydělit dvěma, tzn. opětovně vytvořit ze čtyřúhelníku dva trojúhelníky. Výsledek bude odpovídat počtu bodů, které reprezentují plochu daného trojúhelníku. Nákres tohoto příkladu nabízí obr. 37.



Obr. 37 – Bodová vizualizace aritmetického výpočtu obsahu rovnostranného trojúhelníku s nutností k dvojnásobku délky strany přičíst ještě jednu hodnotu délky strany

Získaný výsledek bude samozřejmě odpovídat potřebnému pořadí ve sledu trojúhelníkových čísel (viz řada [20] v kap. 2.5.2 v úvodní studii k této knize). Tedy u rovnostranného trojúhelníku o délce strany 30 to bude třicáté trojúhelníkové číslo – tj. 465, když prvním je kořen všech čísel, tedy jednička.

Gerbertem uvedený výpočet lze zapsat také takto:

[42] $$S_{Ar} = \frac{a^2 + a}{2}.$$

V tomto případě proto platí, že:

[42′] $S_{Ar} = \frac{30^2 + 30}{2} = \frac{900 + 30}{2} = \frac{930}{2} = 465.$

7, 13–19 (44, 4–44, 10):

Pro geometrii platí, že potřebuje k vyjádření obsahu trojúhelníku nejen délku strany, ale také výšku. Gerbert zde nabízí způsob nalezení výšky rovnostranného trojúhelníku, když zmiňuje, že výška odpovídá šesti sedminám délky strany takového trojúhelníku. Podle Gerberta lze tedy nalézt výšku podle vzorce:

[43] $v = \frac{6}{7}a.$

Toto pravidlo není přesné. Výšku rovnostranného trojúhelníku nalezneme nejsnaději následovně:

[44] $v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2;$

resp.:

[45] $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$

Zatímco podle pravidel [44] a [45] lze říci, že výška rovnostranného trojúhelníku přibližně odpovídá hodnotě násobku 0,866 strany trojúhelníku, tzn.

[46] $v \approx 0{,}866a;$

tak Gerbertem navrhovaný poměr 6 : 7 se pouze aproximativně blíží k této hodnotě:

[47] $v \approx 0{,}857a.$

Ve výsledku to znamená, že rovnostranný trojúhelník o délce strany 30 stop skutečně nemá výšku 26 stop, jak uvádějí dobové texty, ale pouze se této hodnotě přibližuje, což zde uvádí i Gerbert. Podle vzorců [44] a [45] platí, že výška tohoto trojúhelníku je přibližně 25,981 stop, kdežto podle Gerbertova návodu [43] by tato výška byla přibližně 25,714, tj. 25 a $\frac{5}{7}$ stop.

Z toho plynou i odlišné obsahy uvedeného trojúhelníku: V textech se hovoří o 390 stopách, Gerbert správně uvádí, že je to fakticky méně, ovšem jím uváděná hodnota s výpočtem výšky podle vzorce [43] je 385 a $\frac{5}{7}$ stop, tj. přibližně 385,714, což je nakonec více nepřesné než původních 390 stop, neboť výsledek, který nabízí výpočty podle výšky získané s využitím vzorečků [44] a [45] je přibližně 389,711 stop.

7, 20–25 (44, 11–45, 3):

Pro snadnější orientaci v celé problematice uvádí Gerbert jednodušší příklad s nižšími číselnými hodnotami. Výpočet výšky rovnostranného trojúhelníku o délce 7 stop je podle geometrických pravidel a s využitím Gerbertova vzorce [43] jednoduchý: Jelikož šest sedmin strany tvoří výšku, pak je-li strana dlouhá 7 stop, bude výška 6 stop. Podle vzorce [41] je pak obsah tohoto trojúhelníku 21 stop, neboť se jedná o polovinu součinu výšky a délky.

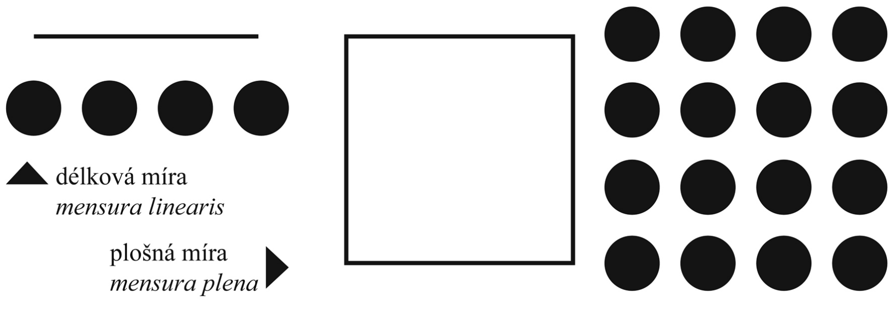
I v tomto případě platí, že se jedná pouze o aproximaci přesného výsledku, což je dáno způsobem výpočtu výšky trojúhelníku. Byla-li by pro její stanovení užita pravidla [44] a [45], byla by výška přibližně 6,062 stop. Z toho by pak byl získán obsah rovnostranného trojúhelníku podle vzorce [41], tj. přibližně 21,218 stop.

7, 26–30 (45, 4–8):

Ze stejných důvodů jako výše platí i zde, že je-li hledána aritmetická hodnota téhož obrazce, tzn. sedmé trojúhelníkové číslo, pak je nutno zdvojnásobit délku strany trojúhelníku, přičíst k ní ještě jednou hodnotu této strany a získaný součet rozdělit na půl. Podle vzorce [42] platí, že obsah rovnostranného trojúhelníku s délkou strany 7 stop je podle aritmetického výpočtu 28 stop, tzn. sedmým trojúhelníkovým číslem je 28.

7, 32 (45, 10):

Jelikož základní vymezení délkové a prostorové míry odpovídá pohybu bodu po čáře, resp. pohybu úsečky, tj. této čáry, do stran, doplnil autor *Geometrie*, která je připisována Gerbertovi, obrazový příklad délkové a prostorové míry – viz obr. 38, kde je zároveň využita bodová prezentace obou měr.



Obr. 38 – Délková a plošná míra

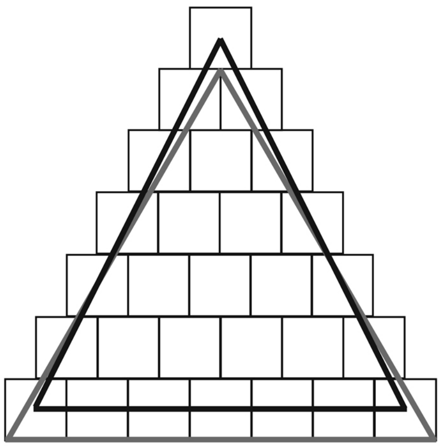
7, 38–40 (45, 15–17):

Podle figurální reprezentace číselných hodnot pomocí geometrických obrazců nehraje rozhodující roli strana daného útvaru, nýbrž body vyjádřený prostor, kterým jsou dané strany obrazně vyjádřeny. Proto aritmetický způsob figurálního uvažování o geometrických útvarech překračuje plochu vymezenou stranami daného obrazce. Názorně to lze vidět na obr. 35, který Gerbert nakreslil ve svém dopise Adelboldovi, ale také na obr. 38 (zvláště u plošné míry), v případě trojúhelníku o délce straně 7 stop, tzn. sedmé trojúhelníkové číslo, pak také na obr. 13.

7, 40–43 (45, 17–20):

Názorně tuto úvahu zachycuje obr. 36. V zásadě jde o to, že obsah rovnostranného trojúhelníku podle geometrické metody lze vypočítat tak, že ve figurální reprezentaci sečteme všechny čtvereční stopy (body), které jsou uvnitř trojúhelníků. V tomto konkétním případě je to 15 a na obr. 36a jsou vyznačeny nejtmavěji. Zcela stranou je ponechán čtverec, který zůstal mimo strany tohoto trojúhelníku (na obr. 36a je to bílý čtverec). Zbylé (na obr. 36a světlejší šedé) čtvereční stopy se sečtou a vydělí dvojkou – tj. 12 : 2 = 6. Na závěr se sečtou obě získané hodnoty (tj. 15 a 6), čímž vznikne obsah trojúhelníku.

Pro vlastní podobu zkoumaného trojúhelníku je důležité, že už délka strany (v tomto případě 7 stop) nepředstavuje podle geometrie a aritmetiky stejnou hodnotu – podle geometrie je to skutečně 7 stop, kdežto podle aritmetiky je to sedm bodových reprezentací. Rozdíl je patrný na obr. 39. Z toho také plyne, že geometrie skutečně počítá obsah trojúhelníku o délce strany 7 stop, jak je vymezen stranami tohoto trojúhelníku, kdežto aritmetika figurální ztvárnění téhož trojúhelníku, tj. na obr. 39 všechny zobrazené čtverce.



Obr. 39 – Odlišná podoba zkoumaného trojúhelníku podle aritmetického (černá) a geometrického umění (šedá)