Geometria proiettiva differenziale. I

Capitolo VII. Condizioni d'integrabilità e superficie proiettivamente applicabili

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Geometria proiettiva differenziale. I. (Italian). Bologna: Zanichelli, Nicola, 1926. pp. [335]--388.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402438

Capitolo VII.

CONDIZIONI D' INTEGRABILITÀ E SUPERFICIE PROIETTIVAMENTE APPLICABILI

---

§ 63. — Condizioni d' integrabilità delle equazioni fondamentali.

A) Equazioni preliminari.

Al Cap. II § 14 *A)* e *C)* abbiamo visto che, fissato comunque il fattore arbitrario delle coordinate omogenee x del punto mobile di una superficie S non sviluppabile, valgono le *equazioni fondamentali*

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs}\, x_i + \alpha_{rs} X + p_{rs}\, x\,, \tag{1}$$

$$X_i = l_i x + \Sigma m^r_i\, x_r\,, \tag{1 bis}$$

e le formole duali

$$\xi_{rs} = - \Sigma a^i_{rs}\, \xi_i + a_{rs}\, \Xi + \pi_{rs}\, \xi\,, \tag{2}$$

$$\Xi_i = \lambda_i\, \xi + \Sigma \mu^r_i\, \xi_r\,. \tag{2 bis}$$

Di più, abbiamo trovato al Cap. II § 14 *B)* e *C)* e § 16 *C)* alcune relazioni fra i coefficienti, e precisamente le

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&\Sigma a^{rs} a_{rsi} = 0\,,\\
&\Sigma a^{rs} p_{rs} = \Sigma a^{rs} \pi_{rs} = 0\,,\\
&p_{rs} = p_{sr}\,,\ \pi_{rs} = \pi_{sr}\,,\ m_{rs} = m_{sr}\,,\ \mu_{rs} = \mu_{sr}\,,\\
&m_{rs} = \pi_{rs} - (K + J)\, a_{rs}\,,\ \mu_{rs} = p_{rs} - (K + J)\, a_{rs}\,,\\
&l_i + \lambda_i + K_i + J_i = 0\,,\\
&\pi_{rs} - p_{rs} = \Sigma a_{rs-i}^{\;i}\ (*).
\end{aligned}
$$

Queste equazioni esprimono, in particolare, i coefficienti delle (2) e $(2)_{\text{bis}}$ mediante quelli di (1) e $(1)_{\text{bis}}$: basta adunque occuparci delle (1) e $(1)_{\text{bis}}$. Già al luogo citato abbiamo osservato che, derivando covariantemente le (1), possiamo ottenere i valori dei coefficienti di $(1)_{\text{bis}}$ espressi mediante le a_{rs}, a_{rst}, p_{rs}: ora faremo questo calcolo. Del resto i valori delle m_{rs} si trovano già dalle (3), cosicchè soltanto le espressioni di l_i saranno nuove. Deriviamo adunque covariantemente le (1). Si ottiene, tenendo conto delle (1) stesse,

$$
\begin{aligned}
x_{rst} = {}& \Sigma x^i \left[a_{rsit} + \sum_k a_{rs}^k a_{ikt} + p_{rs} a_{it} + a_{rs} m_{ti}\right] + \\
&+ a_{rst} X + \left(\sum_i a_{rs}^i p_{it} + a_{rs} l_t + p_{rst}\right) x\,.
\end{aligned}
$$

Se ne deduce, ricordando che $\vartheta^{st} + \vartheta^{ts} = 0$,

$$
\begin{aligned}
\Sigma \vartheta^{st} x_{rst} = {}& \Sigma x^i \left[\Sigma \vartheta^{st} a_{rsit} + \Sigma \vartheta^{st} a_{rs}^k a_{ikt} + \right.\\
&\left. + \Sigma \vartheta^{st} a_{it} p_{rs} + \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} m_{ti}\right] + \\
&+ (\Sigma \vartheta^{st} a_{rs}^i p_{it} + \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} l_t + \Sigma \vartheta^{st} p_{rst})\, x\,.
\end{aligned}
$$

Ma dal Cap. VI, § 57, $(3)_{\text{ter}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ si ha

$$
\Sigma \vartheta^{st} a_{rs}^i p_{it} = \Sigma b_r^{it} p_{it}\,,\quad \Sigma \vartheta^{st} a_{rs}^k a_{ikt} = \Sigma b_r^{it} a_{ikt} = J \vartheta_{rk}\,,
$$

(*) Cfr. Cap. VI, § 58, (3). Si ricordi che $\Sigma a_{rs-i}^{\;i} = \Sigma A_{ik} a_{rski}$.

e dal Cap. II § 1 $E)$

$$x_{112} - x_{121} = -(12\,,\,12)\,x^2 = -KAx^2,$$

$$x_{212} - x_{221} = (12\,,\,12)\,x^1 = KAx^1,$$

ossia

(4) $$\Sigma\,\vartheta^{st}\,x_{rst} = K\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\,x^i.$$

Dunque

$$\Sigma\,x^k\,[\Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rsit} + (K+J)\,\vartheta_{ri} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{it}\,p_{rs} + a_{rs}\,m_{ti})] +$$

$$+ (\Sigma\,b_r^{it}\,p_{it} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rs}\,l_t + \Sigma\,\vartheta^{st}\,p_{rst})\,x = 0\,.$$

I punti x, x^1, x^2 essendo linearmente indipendenti, seguono le relazioni

(5) $$\Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rsit} + (K+J)\,\vartheta_{ri} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{ti}\,p_{rs} + a_{rs}\,m_{ti}) = 0\,,$$

(6) $$\Sigma\,b_r^{it}\,p_{it} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,(a_{rs}\,l_t + p_{rst}) = 0\,.$$

$B)$ **Trasformazione delle (5).**

Le equazioni ora dedotte si possono trasformare. Cominciamo con le (5): noi non ne dedurremo niente di nuovo, ma ritroveremo soltanto una parte delle (3), e precisamente le

$$m_{rs} = m_{sr}\,,\quad \Sigma\,a^{rs}\,\pi_{rs} = 0\,,\quad \pi_{rs} - p_{rs} = \Sigma\,a_{rs\underline{\ }i}{}^{i}\,.$$

Moltiplicando la (5) per a_{ir} e sommando rispetto a i ed r, si ottiene, osservando che $\Sigma\,a^{ir}\,\vartheta_{ri} = \Sigma\,a^{ir}\,a_{rsit} = 0$,

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,a^{ir}\,a_{ti}\,p_{rs} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,a^{ir}\,a_{rs}\,m_{ti} = 0\,,$$

ossia

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,p_{ts} + \Sigma\,\vartheta^{st}\,m_{ts} = 0.$$

Essendo $p_{12} = p_{21}$, risulta confermato che $m_{12} = m_{21}$. Moltiplicando invece la (5) per ϑ^{ir} ed osservando che $\Sigma\,\vartheta^{ir}\,a_{rsit} = 0$, si ottiene

$$2\,\varepsilon(K+J) + \Sigma\,\vartheta^{ir}\,\vartheta^{st}\,a_{ti}\,p_{rs} + \Sigma\,\vartheta^{ir}\,\vartheta^{st}\,a_{rs}\,m_{ti} = 0\,,$$

oppure, scambiando nel terzo termine i con r ed s con t,

$$2\varepsilon(K+J)+\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta^{st}a_{ti}(p_{rs}+m_{rs})=0.$$

Ora dal Cap. VI, § 56, (2) e (4) si deduce

$$\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta^{st}a_{ti}=\Sigma\vartheta^{ir}\vartheta_{ki}a^{ks}=\varepsilon a^{rs},$$

cosicchè risulta

$$2(K+J)=-\Sigma a^{rs}(p_{rs}+m_{rs})=-\Sigma a^{rs}m_{rs}.$$

Posto adunque

$$m_{rs}=\pi_{rs}-(K+J)a_{rs}\ (*)$$

risulta confermato che $\Sigma a^{rs}\pi_{rs}=0$.

Introducendo le π_{rs} al posto delle m_{rs} nelle (5), si ottiene, osservando che $\Sigma\vartheta^{st}a_{rs}a_{ti}=\vartheta_{ri}$,

$$\Sigma\vartheta^{st}a_{rsit}+\Sigma\vartheta^{st}a_{ti}p_{rs}+\Sigma\vartheta^{st}a_{rs}\pi_{ti}=0.$$

Dimostriamo che quest'equazione equivale all'ultima delle (3). A tale scopo moltiplichiamola per $du_i\,Du_r$. Ricordando le (3) e $(3)_{\text{quater}}$ del Cap. VI § 56 risulta

$$\Sigma\vartheta^{st}a_{rsit}\,du_i\,Du_r+\Sigma p_{rs}\,Du_r\,Du_s-\varepsilon\Sigma\pi_{ti}\,du_t\,du_i\ .$$

E basta, per giungere al risultato voluto, osservare che

$$\Sigma p_{rs}\,Du_r\,Du_s=\varepsilon\Sigma p_{rs}\,du_r\,du_s\ (**).$$

C) Calcolo delle l_i.

Invece dalla (6), come abbiamo enunciato, possiamo trarre il valore delle l_i. Moltiplicandola per $a^{rh}\vartheta_{hk}$ e sommando rispetto a h e r si deduce

$$\Sigma\vartheta_{hk}b^{hit}p_{it}+\Sigma\vartheta^{st}\vartheta_{sk}l_t+\Sigma\vartheta^{st}\vartheta_{hk}a^{rh}p_{rst}=0,$$

donde la formola cercata

$$l_i=\Sigma a_i^{rs}p_{rs}-\varepsilon\Sigma\vartheta_{ik}\vartheta^{st}a^{kr}p_{rst}\ . \tag{7}$$

(*) Sappiamo che le π_{rs} così definite son quelle che compaiono nelle (2).

(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (6), e § 58, (3) e $(3)_{\text{bis}}$.

Essendo $a_i^{rs} = \Sigma\, \vartheta^{hr}\, b_{ih}^s = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta^{hr}\, \vartheta^{ks}\, a_{ihk}$, possiamo scriverla anche

$$(7)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned} l_1 &= -\frac{1}{A}\left[a_{111}\, p_{22} - 2\, a_{112}\, p_{12} + a_{122}\, p_{11} + \right.\\ &\qquad \left. + a_{12}\,(p_{112} - p_{121}) - a_{11}\,(p_{122} - p_{221})\right],\\ l_2 &= -\frac{1}{A}\left[a_{112}\, p_{22} - 2\, a_{122}\, p_{12} + a_{222}\, p_{11} + \right.\\ &\qquad \left. + a_{22}\,(p_{112} - p_{121}) - a_{12}\,(p_{122} - p_{221})\right]. \end{aligned}$$

Naturalmente, il calcolo correlativo conduce alle

$$(7)_{\text{ter}} \qquad \lambda_i = -\Sigma\, a_i^{rs}\, \pi_{rs} - \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a^{kr}\, \pi_{rst}\,.$$

Il confronto di (7) e $(7)_{\text{ter}}$ conduce alla formola

$$(8) \qquad l_i - \lambda_i = \Sigma\, a_i^{rs}\,(p_{rs} + \pi_{rs}) - \Sigma\, a_{i-rs}^{rs} \ (*).$$

come ora dimostreremo.

Sottraendo la $(7)_{\text{ter}}$ dalla (7) otteniamo dapprima

$$l_i - \lambda_i = \Sigma\, a_i^{rs}\,(p_{rs} + \pi_{rs}) - \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a^{kr}\,(p_{rst} - \pi_{rst})$$

sicchè bisogna provare soltanto che

$$\Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a^{kr}\,(p_{rst} - \pi_{rst}) = \varepsilon\, \Sigma\, a_{i-rs}^{rs}\,.$$

Ora, derivando covariantemente l'ultima delle (3), otteniamo

$$p_{rst} - \pi_{rst} = -\Sigma\, a_{rs-pt}^{p} = -\Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a_{s-pt}^{kp}$$

cosicchè

$$\Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a^{kr}\,(p_{rst} - \pi_{rst}) = -\Sigma\, \vartheta_{ik}\, \vartheta^{st}\, a^{kr}\, a_{rs-pt}^{p}.$$

(*) Si ricordi che $\Sigma\, a_{i-rs}^{rs} = \Sigma\, A_{rh}\, A_{sk}\, a_{ihkrs}\,.$

Ora dalle $(3)_{\text{ter}}$ e $(3)_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 57 si deduce

$$-\Sigma\,\vartheta_{ik}\,\vartheta^{st}\,a_{s-pt}^{kp} = -\Sigma\,\vartheta_{ik}\,b_{\_\_pt}^{tkp} = \varepsilon\,\Sigma\,a_{i-pt}^{pt}\,,$$

sicchè

$$\Sigma\,\vartheta_{ik}\,\vartheta^{st}\,a^{kr}\,(p_{rst} - \pi_{rst}) = \varepsilon\,\Sigma\,a_{i-pt}^{pt}\,,$$

che è la formola che si voleva dimostrare.

§ 64. — **Continuazione.**

A) **Condizioni d'integrabilità delle (1)$_{\text{bis}}$.**

Al § 63 abbiamo richiamato le equazioni fondamentali (1) e $(1)_{\text{bis}}$ e le relazioni (3) fra i coefficienti di esse a cui abbiamo aggiunto le formole (7) e (8) che dànno le l_i, deducendole dalle condizioni d'integrabilità delle (1). Per completare lo studio, dovremo ancora soltanto aggiungere le equazioni che si traggono dalle $(1)_{\text{bis}}$. A questo studio qui ci rivolgiamo scrivendo che $X_{ik} = X_{ki}$, ossia $\Sigma\,\vartheta^{ik}\,X_{ik} = 0$. Derivando covariantemente le (2) si trova tenendo conto delle (1)

$$X_{ik} = l_{ik}\,x + l_i\,x_k + \Sigma\,m_{irk}\,x^r + \\ + \Sigma\,m_i^r\,(\Sigma\,a_{rks}\,x^s + a_{rk}\,X + p_{rk}\,x)$$

ossia

$$X_{ik} = \Sigma\,x^r\,(l_i a_{rk} + m_{irk} + \Sigma\,a_{rk}^s\,m_{is}) + \\ + (l_{ik} + \Sigma\,m_i^r\,p_{rk})\,x + m_{ik}\,X.$$

Se ne deduce

$$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,X_{ik} = \Sigma\,x^r\,(\Sigma\,\vartheta^{ik}\,a_{rk}\,l_i + \Sigma\,\vartheta^{ik}\,m_{irk} - \Sigma\,b_r^{is}\,m_{is}) + \\ + (\Sigma\,\vartheta^{ik}\,l_{ik} + \Sigma\,\vartheta^{ik}\,m_i^r\,p_{rk})\,x\,.$$

Deve essere $\Sigma\,\vartheta^{ik}\,X_{ik} = 0$. Le relazioni che ci rimangono da scrivere sono pertanto

(1) $$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,a_{rk}\,l_i + \Sigma\,\vartheta^{ik}\,m_{irk} - \Sigma\,b_r^{is}\,m_{is} = 0\,,$$

(2) $$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,l_{ik} + \Sigma\,\vartheta^{ik}\,a^{rs}\,m_{ir}\,p_{ks} = 0\,.$$

B) Studio delle (1).

Dimostriamo che la (1) non dà niente di nuovo, ma soltanto permette di ritrovare la penultima delle (3) del § 63.

Dalle (6) del § 63 si deduce

$$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,a_{rk}\,l_i = \Sigma\,b_r^{is}\,p_{is} + \Sigma\,\vartheta^{ik}\,p_{rik}\,.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene

$(1)_{\text{bis}}$ $$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,(p_{rik} + m_{rik}) + \Sigma\,b_r^{ik}\,(p_{ik} - m_{ik}) = 0.$$

Dalla

$$m_{ri} = \pi_{ri} - (K + J)\,a_{ri}$$

si deduce

$$m_{rik} = \pi_{rik} - (K_k + J_k)\,a_{ri}\,,$$

cosicchè la $(1)_{\text{bis}}$ diventa, ricordando che $\Sigma\,b_r^{ik}\,a_{ik} = 0$,

$(1)_{\text{ter}}$ $$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,(p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma\,\vartheta^{ik}\,a_{ri}\,(K_k + J_k) + \Sigma\,b_r^{ik}\,(p_{ik} - \pi_{ik}) = 0\,.$$

Moltiplicando per $a^{rs}\,\vartheta_{st}$ e sommando rispetto ad s, si deduce

$$\Sigma\,\vartheta^{ik}\,\vartheta_{st}\,a^{rs}\,(p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma\,\vartheta^{ik}\,\vartheta_{it}\,(K_k + J_k) + \varepsilon\,\Sigma\,a_t^{ik}\,(p_{ik} - \pi_{ik}) = 0\,,$$

ossia

$(1)_{\text{quater}}$ $$K_t + J_t = -\,\varepsilon\,\Sigma\,\vartheta^{ik}\,\vartheta_{st}\,a^{rs}\,(p_{rik} + \pi_{rik}) - \Sigma\,a_t^{ik}\,(p_{ik} - \pi_{ik})\,.$$

Ora dalle (7) e $(7)_{\text{ter}}$ si deduce

$$l_t + \lambda_t = \Sigma\,a_t^{ik}\,(p_{ik} - \pi_{ik}) + \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{ik}\,\vartheta^{st}\,a^{ir}\,(p_{rst} + \pi_{rst})\,.$$

Eseguendo nell'ultimo termine la sostituzione $\begin{pmatrix} i & k & r & s & t \\ s & t & r & i & k \end{pmatrix}$ e confrontando con $(1)_{\text{ter}}$ si ritrova la penultima delle (3) del § 63, come abbiamo enunciato.

C) Studio della (2).

Resta infine la (2); noi dimostreremo che essa equivale alla

$$(3) \qquad \Sigma b^{rst}(p_{rst} + \pi_{rst}) + 2\Sigma b^{rst}_{-t}(p_{rs} + \pi_{rs}) = \Sigma b^{rst}_{-rst}.$$

Sostituendo nella (2) π_{ir} al posto di m_{ir}, essa diventa (*)

$$(2)_{\text{bis}} \qquad \Sigma \vartheta^{ik} l_{ik} + \Sigma \vartheta^{ik} a^{rs} p_{ks} \pi_{ir} = 0 \ (**) .$$

Per la penultima delle (3) del § 63 $\Sigma(l_i + \lambda_i)\, du_i = - dK - dJ$ è un differenziale esatto, cosicchè

$$\Sigma \vartheta^{ik} l_{ik} = - \Sigma \vartheta^{ik} \lambda_{ik} = \frac{1}{2} \Sigma \vartheta^{ik}(l_{ik} - \lambda_{ik})$$

e la $(2)_{\text{bis}}$ può scriversi

$$(2)_{\text{ter}} \qquad \Sigma \vartheta^{ik}(l_{ik} - \lambda_{ik}) = - \Sigma \vartheta^{ik} a^{rs}(p_{ir} + \pi_{ir})(p_{ks} - \pi_{ks}) .$$

Ora dall' ultima delle (3) del § 63 si deduce

$$\Sigma \vartheta^{ik} a^{rs}(p_{ks} - \pi_{ks}) = - \Sigma \vartheta^{ik} a^{rs} a_{ks-p}^{p} = - \Sigma \vartheta^{ik} a_{h-p}^{rp} .$$

e ricordando la formola $(3)_{\text{ter}}$ del Cap. VI § 57,

$$\Sigma(p_{ks} - \pi_{ks}) \vartheta^{ik} a^{rs} = \Sigma b^{irs}_{-s} ,$$

e sostituendo nella $(2)_{\text{ter}}$

$$(2)_{\text{quater}} \qquad \Sigma \vartheta^{ik}(l_{ik} - \lambda_{ik}) = - \Sigma b^{irs}_{-s}(p_{ir} + \pi_{ir}) .$$

Derivando covariantemente la (8) del § 63 si deduce

$$l_{ik} - \lambda_{ik} = \Sigma a_{i-k}^{rs}(p_{rs} + \pi_{rs}) + \Sigma a_i^{rs}(p_{rsk} + \pi_{rsk}) - \Sigma a_{i-rsk}^{rs}$$

(*) Si osservi che $\Sigma \vartheta^{ik} a^{rs} a_{ir} p_{ks} = \Sigma \vartheta^{ik} p_{ik} = 0$.

(**) Ciò si potrebbe scrivere anche

$$l_{12} - l_{21} = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{22} \\ \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

cosicchè

$$\Sigma\, \vartheta^{ik} (l_{ik} - \lambda_{ik}) = \Sigma\, b^{\underline{rsk}}{}_{k} (p_{rs} + \pi_{rs}) + \Sigma\, b^{rsk} (p_{rsk} + \pi_{rsk}) - \Sigma\, b^{\underline{rsk}}{}_{rsk}$$

onde, confrontando con $(2)_{\text{quater}}$, si deduce la formola cercata (3).

D) Esame delle condizioni d'integrabilità.

Abbiamo già trovato *tutte* le condizioni d'integrabilità delle equazioni fondamentali; esse sono le (3), (7) e $(7)_{\text{ter}}$ del § 63 e la (3) del § 64. Fra queste equazioni, ve ne sono *sei* che contengono l_1, l_2, λ_1, λ_2: la penultima delle (3), la (7) e la $(7)_{\text{ter}}$ (con $i = 1, 2$).

Noi possiamo *definire* le l_i e λ_i mediante quattro di esse o quattro combinazioni di esse, p. es. mediante la penultima riga delle (3) del § 63 e le (8) del § 63 ed otteniamo pertanto ancora due equazioni che non contengono più nè l_i nè λ_i. Esse sono evidentemente le $(1)_{\text{ter}}$ che possiamo mettere sotto la forma più semplice

$$(4) \qquad \Sigma\, \vartheta^{ik} (p_{rik} + \pi_{rik}) = \Sigma\, \vartheta^{ik} a_{ri} (K_k + J_k) + \Sigma\, b_r^{ik} a_{ik\underline{s}-s} \; (*).$$

Osserviamo ancora che nelle (3) e (4) compaiono i coefficienti

$$q_{rs} = p_{rs} + \pi_{rs}$$

della forma

$$\Sigma (p_{rs} + \pi_{rs})\, du_r\, du_s = P + \Pi$$

già considerata al Cap. II § 14 *B)*.

(*) Infatti, dall'ultima delle (3) del § 63 si deduce

$$\Sigma\, b_r^{ik} (p_{ik} - \pi_{ik}) = - \Sigma\, b_r^{ik} a_{ik-s}$$

onde sostituendo nella $(1)_{\text{ter}}$ si ricava la (4).

E) Teorema riassuntivo.

Prima di procedere, sarà opportuno enunciare un teorema che riassume i risultati finora ottenuti:

Una superficie S *non sviluppabile, ed il fattore arbitrariamente prescritto delle coordinate omogenee dei punti di essa sono individuati, a meno di una sostituzione lineare unimodulare, a coefficienti costanti, conoscendo le tre forme differenziali intrinseche*

$$F_2 = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s\,, \quad F_3 = \Sigma a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,,$$

$$\Sigma q_{rs}\, du_r\, du_s\,,$$

legate dalle identità (condizioni d'integrabilità) necessarie e sufficienti:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \Sigma a^{rs} a_{rst} &= 0\,, \\ \Sigma a^{rs} q_{rs} &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &\Sigma \vartheta^{ik} q_{rik} = \Sigma \vartheta^{ik} a_{ri} (K_k + J_k) - \Sigma b_r^{ik} a_{ik\underline{\ }s}^{\ \ s}\,, \\ &\Sigma b^{rst} q_{rst} + 2 \Sigma b^{rst}_{\underline{\ }t} q_{rs} = \Sigma b^{rst}_{\underline{\ }rst}\,. \end{aligned}$$

Le coordinate omogenee x *dei punti di* S *si calcolano integrando il primo gruppo di equazioni fondamentali*

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs} x_i + p_{rs} x + a_{rs} X\,,$$

$$X_i = l_i x + \Sigma m_i^r x_r\,,$$

sotto la condizione iniziale $(x\, x_1\, x_2\, X) = \sqrt{|A|}$.

Posto $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} (x\, x_1\, x_2)$, *le* ξ *(coordinate dei piani tangenti di* S*), si ottengono integrando il secondo gruppo di equazioni fondamentali* (*)

(*) Naturalmente, integrato il primo gruppo (p. es.) lo è anche il secondo.

$$\xi_{rs} = -\Sigma a^i_{rs}\,\xi_i + \pi_{rs}\,\xi + a_{rs}\,\Xi\,,$$

$$\Xi_i = \lambda_i\,\xi + \Sigma\,\mu^r_i\,\xi_r\,,$$

sotto la condizione iniziale $(\xi\,\xi_1\,\xi_2\,\Xi) = \varepsilon\sqrt{|A|}$.

I coefficienti delle equazioni fondamentali si calcolano dalle formole

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} & p_{rs} + \pi_{rs} = q_{rs} \quad , \quad p_{rs} - \pi_{rs} = -\Sigma\,a_{rs-i} \\ & m_{rs} = \pi_{rs} - (K + J)\,a_{rs}\,, \\ & \mu_{rs} = p_{rs} - (K + J)\,a_{rs} \\ & l_i + \lambda_i = -(K_i + J_i) \\ & l_i - \lambda_i = \Sigma\,a^{rs}_i\,q_{rs} - \Sigma\,a_{i-rs}^{\;rs}\,. \end{aligned}$$

Il lettore confronti le formole trovate con quelle del Cap. II, § 16 *D)* relative al caso particolare di linee coordinate asintotiche.

§ 65. — Trasformazione delle equazioni trovate per superficie non rigate. Caso di coordinate normali.

A) Il caso $J \neq 0$.

Supponendo $J \neq 0$, escludendo cioè il caso di superficie rigate, possiamo mettere le equazioni trovate sotto un'altra forma. Essendo $\Sigma\,a^{rs}\,q_{rs} = 0$ possiamo porre allora

$$(1)\qquad q_{rs} = \Sigma\,\tau_i\,a^i_{rs} = \Sigma\,\tau^i\,a_{rsi}$$

introducendo così, al posto della forma quadratica $\Sigma\,q_{rs}\,du_r\,du_s$ la forma lineare

$$(2)\qquad T = \Sigma\,\tau_i\,du_i\,.$$

Ricordando la formola (1) del Cap. VI § 58, otteniamo, derivando covariantemente la (1):

$$(1)_{\text{bis}} \qquad q_{rst} = \Sigma \tau_{it}\, a^i_{rs} + \frac{1}{2}\, \frac{J_t}{J}\, \Sigma a^i_{rs}\, \tau_i +$$

$$+ \varepsilon \Sigma \vartheta_{tq}\, \psi^q \,.\, \Sigma b^i_{rs}\, \tau_i \,.$$

Dal Cap. VI, § 57 $(3)_{\text{bis}}$ e $(5)_{\text{ter}}$ e § 58 (1), si deduce

$$\Sigma b^{ik}_r\, a_{ik\overset{s}{-}s} = \frac{1}{2}\, \Sigma b^{ik}_r\, a^s_{ik}\, \frac{J_s}{J} + \varepsilon \Sigma b^{ik}_r\, b^s_{ik}\, \vartheta_{st}\, \psi^t =$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma b^{ik}_r\, a_{iks}\, \frac{J^s}{J} + \Sigma b^{ik}_r\, a_{ikt}\, \psi^t = \Sigma \vartheta_{rs} \left(\frac{1}{2}\, J^s + J\psi^s\right).$$

Dalle (1) e $(1)_{\text{bis}}$ e dal Cap. VI § 57 (3) e $(5)_{\text{ter}}$ e § 58 $(1)_{\text{bis}}$ si deduce

$$\Sigma b^{rst}_{\,-t}\, q_{rs} = \frac{1}{2} \Sigma b^{rst}\, \frac{J_t}{J}\, q_{rs} + \Sigma \vartheta_{tq}\, a^{rst}\, \psi^q\, q_{rs} =$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma b^{rst}\, a^i_{rs}\, \tau_i\, \frac{J_t}{J} + \Sigma b^{rst}\, \psi_t\, a^i_{rs}\, \tau_i = \Sigma \vartheta^{ti}\, \tau_i \left(\frac{1}{2} J_t + J\psi_t\right),$$

$$\Sigma \vartheta^{ik}\, q_{rik} = \Sigma \vartheta^{ik}\, a^t_{ri}\, \tau_{tk} + \frac{1}{2} \Sigma \vartheta^{ik}\, a^t_{ri}\, \frac{J_k}{J}\, \tau_t + \varepsilon \Sigma \vartheta^{ik}\, \vartheta_{kq}\, \psi^q\, b^t_{ri}\, \tau_t =$$

$$= \Sigma b^{ik}_r\, \tau_{ik} + \frac{1}{2} \Sigma b^{ik}_r\, \frac{J_i}{J}\, \tau_k + \Sigma b^{ik}_r\, \psi_i\, \tau_k \,,$$

$$\Sigma b^{rst}\, q_{rst} = \Sigma b^{rst}\, a^i_{rs}\, \tau_{it} + \frac{1}{2}\, \Sigma a^i_{rs} b^{rst}\, \frac{J_t}{J}\, \tau_i + \Sigma a^{rst}\, b^i_{rs}\, \psi_t\, \tau_i =$$

$$= J \Sigma \vartheta^{ti} (\tau_{it} + \psi_i\, \tau_t) + \frac{1}{2} \Sigma \vartheta^{ti}\, J_t\, \tau_i \,.$$

Di più (*)

$$
(3) \quad \begin{aligned}
\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }rst} = \Sigma \Big[& \frac{1}{2}\frac{J_{rst}}{J} + \psi_{rst} + 3\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right) + \\
& + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right)\Big] b^{rst}.
\end{aligned}
$$

Sostituendo nelle (II) del § 64, si trovano le equazioni equivalenti

$$
\Sigma b_i^{rs}\left[\tau_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\tau_r\right] =
$$

$$
= \Sigma \vartheta^{rk} a_{ri}(K_k + J_k) + J\Sigma\vartheta_{ir}\left(\frac{1}{2}\frac{J^r}{J} + \psi^r\right),
$$

$$
J\Sigma\vartheta^{rs}\left[\tau_{rs} + \left(\frac{3}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\tau_r\right] = -\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }rst},
$$

dove si può sostituire a $\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }rst}$ il valore (3).

(*) Infatti, dalla (1)$_{\text{bis}}$ del Cap. VI § 58 si deduce successivamente

$$
\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }r} = \frac{1}{2}\Sigma b^{rst}\frac{J_r}{J} + \Sigma\vartheta_{ri}\psi^i a^{rst} = \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)b^{rst},
$$

$$
\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }rs} = \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)b^{rst}_{\underline{\ \ }s} + \Sigma\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)b^{rst} =
$$

$$
= \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\right]b^{rst},
$$

$$
\Sigma b^{rst}_{\underline{\ \ }rst} = \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs} + \left(\frac{1}{2}\frac{J_r}{J} + \psi_r\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_s}{J} + \psi_s\right)\right]b^{rst}_{\underline{\ \ }t} +
$$

$$
+ \Sigma\left[\frac{1}{2}\frac{J_{rst}}{J} + \psi_{rst} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{J_{rs}}{J} + \psi_{rs}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{J_t}{J} + \psi_t\right)\right]b^{rst},
$$

onde la formola del testo.

B) Nuovo enunciato per le coordinate normali.

Le equazioni precedenti si semplificano e diventano particolarmente utili usando le forme normali ($J = -1$). Per comodità del lettore diamo qui un enunciato completo:

Una superficie non rigata S *determina tre forme differenziali intrinseche ed invarianti*

$$\varphi_2 = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s\,,$$

$$\varphi_3 = \Sigma\, a_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,,$$

$$T = \Sigma\, \tau_i\, du_i\,,$$

legate dalle identità

$$\Sigma\, a^{rs}\, a_{rst} = 0 \qquad (t = 1\,,\, 2)$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{A^2} \begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &\Sigma\, a_i^{rs}\,(\tau_{rs} + \psi_s\,\tau_r) = \psi_i - K_i\,, \quad (i = 1\,,\, 2) \\ &\Sigma\, \vartheta^{rs}\,(\tau_{rs} + \psi_s\,\tau_r) = \Sigma\, b^{rst}\,(\psi_{rst} + 3\,\psi_{rs}\,\psi_t + \psi_r\,\psi_s\,\psi_t)\,, \end{aligned}$$

dove K *è la curvatura di* φ_2 *e le* ψ *son definite dalle*

$$a_{rstl} = \varepsilon\, \Sigma\, \vartheta_{lk}\, \psi^k\,.\, b_{rst}\,,$$

dove le ϑ *sono definite dalle* $(1)_{\text{bis}}$ *a pag.* 298, § 56.

Viceversa, date le tre forme differenziali φ_2, φ_3, T, *soddisfacenti alle* (A) *e* (B), *esiste la superficie* S *corrispondente ed è completamente determinata a meno di collineazioni* (*). *Le coordinate normali* x *dei punti di* S *si ottengono integrando il sistema*

(*) Ad una superficie correlativa alla *S* corrispondono le forme φ_2, $-\varphi_3$, $-T$.

$$
(\mathrm{C}_1) \qquad
\begin{aligned}
x_{rs} &= \Sigma a^i_{rs}\, x_i + a_{rs}\, X + p_{rs}\, x\,, \\
X_i &= l_i\, x + \Sigma m^r_i\, x_r
\end{aligned}
$$

sotto la condizione iniziale $(x x_1 x_2 X) = \sqrt{|A|}$; *le coordinate normali* ξ *dei piani tangenti di* S *si ottengono integrando il sistema analogo*

$$
(\mathrm{C}_2) \qquad
\begin{aligned}
\xi_{rs} &= -\Sigma a^i_{rs}\, x_i + a_{rs}\, \Xi + \pi_{rs}\, \xi\,, \\
\Xi_i &= \lambda_i\, \xi + \Sigma \mu^r_i\, \xi_r\,,
\end{aligned}
$$

sotto la condizione iniziale $(\xi \xi_1 \xi_2 \Xi) = \varepsilon \sqrt{|A|}$. *Del resto le* x *e le* ξ *sono legate dalle*

$$
\xi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x x_1 x_2) \quad , \quad x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} (\xi \xi_1 \xi_2).
$$

I coefficienti delle (C_1) *e* (C_2) *si determinano dalle equazioni*

$$
(\mathrm{D}) \qquad
\begin{aligned}
p_{rs} + \pi_{rs} &= \Sigma a_{rsi}\, \tau^i\,, \\
p_{rs} - \pi_{rs} &= \Sigma a_{rsi}\, \psi^i\,, \\
m_{rs} &= \pi_{rs} + (1 - K)\, a_{rs}\,, \\
\mu_{rs} &= p_{rs} + (1 - K)\, a_{rs}\,, \\
l_i + \lambda_i &= -K_i\,, \\
l_i - \lambda_i &= \tau_i - \Sigma a^{rs}_i (\psi_{rs} + \psi_r \psi_s) \ (*).
\end{aligned}
$$

(*) $\quad a^{rs}_{i-r} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{rp} \psi^p b^{rs}_i$ [Cap. VI, § 58, (1)]

$$= \Sigma a^s_{ip} \psi^p = \Sigma a^{ps}_i \psi_p \ \text{[Cap. VI, § 57 (3) bis]},$$

onde

$$a^{rs}_{i-rs} = \Sigma a^{ps}_i \psi_{ps} + \Sigma a^{ps}_{i-s} \psi_p\,,$$

e per la stessa equazione precedente (che si può scrivere $\Sigma a^{ps}_{i-s} = \Sigma a^{pq}_i \psi_q$)

$$a^{rs}_{i-rs} = \Sigma a^{ps}_i (\psi_{ps} + \psi_p \psi_s).$$

Inoltre $\Sigma a^{rs}_i q_{rs} = \Sigma a^{rs}_i a_{trs} \tau^t = \Sigma a_{it} \tau^t = \tau_i$ [Cap. VI, § 57, (5)].
Indi si deduce subito la formola del testo dall' ultima delle (III) a pag. 345.

§ 66. — Nuova trasformazione delle equazioni trovate per il caso di coordinate normali.

A) Introduzione della funzione ausiliaria σ.

Le relazioni fra le forme φ_2, φ_3 e T si scompongono in due gruppi: il gruppo (A) dice soltanto che φ_3 è coniugata a φ_2, e che φ_2 e φ_3 son forme *normali;* il *secondo* gruppo (B), relativo alle τ_i, si può porre in una forma assai elegante con l'introduzione di una nuova incognita ausiliaria σ col metodo che ora andiamo a spiegare. Per brevità, poniamo

(1) $$B = \Sigma b^{rst}_{\_\_rst} = \Sigma b^{rst} (\psi_{rst} + 3\psi_{rs}\psi_t + \psi_r\psi_s\psi_t).$$

Essendo $J = -1 \gtrless 0$, ogni sistema covariante a due indici è combinazione lineare di

$$a_{rs}\,,\quad \vartheta_{rs}\,,\quad \Sigma\nu_k\,a^k_{rs}$$

dove ν_k è un sistema covariante ad un indice.

Quindi possiamo porre

$$\tau_{rs} + \psi_s\tau_r = \sigma a_{rs} + \alpha\vartheta_{rs} + \Sigma\nu_k\,a^k_{rs}\,.$$

In apparenza introduciamo, oltre σ, tre altre incognite α, ν_1, ν_2, ma esse si determinano subito. Infatti moltiplicando la precedente con a^{rs}_i oppure con ϑ^{rs} si trova rispettivamente, per le (B) del § 65,

$$\psi_i - K_i = \Sigma\nu_k\,a^{rs}_i\,a^k_{rs} = \Sigma\nu_k\,a^{kp}\,a^{rs}_i\,a_{rsp}$$

$$= \Sigma\nu_k\,a^{kp}\,a_{ip} = \nu_i \quad (*)\,,$$

$$B = \alpha\Sigma\vartheta^{rs}\vartheta_{rs} = -2\varepsilon\alpha \quad (**).$$

(*) Cfr. Cap. VI, § 57, (5).
(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (2).

Quindi: *L'incognita ausiliaria* σ, *di cui faremo uso, è quella definita da*

$$\tau_{rs} + \psi_s \tau_r = -\frac{\varepsilon}{2} B \vartheta_{rs} + \Sigma a^i_{rs} (\psi_i - K_i) + \sigma a_{rs} \tag{2}$$

dove B è definita dalla (1). E queste equazioni (2) possono sostituire le (B) da cui siamo partiti. In altre parole, *date le forme* φ_2, φ_3 [*soddisfacenti alle* (A)] *e la forma* T, *affinchè esista una superficie corrispondente è necessario e sufficiente che valgano le* (2) *con qualche valore di* σ.

B) **Studio delle (2).**

Cerchiamo le *condizioni d'integrabilità di queste equazioni* (2) *quando come incognite si assumano le* τ_r.

Derivando covariantemente le (2), si deduce tenendo conto delle (2) stesse (*)

$$\tau_{rst} + (\psi_{st} - \psi_s \psi_t) \tau_r - \sigma_t a_{rs} + \sigma \psi_s a_{rt} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} B \psi_s \vartheta_{rt} - \frac{\varepsilon}{2} B_t \vartheta_{rs} + \Sigma a^i_{rs} (\psi_{it} - K_{it}) -$$

$$- \psi_s \Sigma a^i_{rt} (\psi_i - K_i) + \varepsilon \Sigma \vartheta_{tq} \psi^q . \Sigma b^i_{rs} (\psi_i - K_i).$$

Moltiplicando con ϑ^{st} si trova (**)

$$\Sigma \vartheta^{st} \tau_{rst} + H \tau_r - \Sigma \vartheta^{st} a_{rs} \sigma_t + \sigma \Sigma \vartheta^{st} a_{rt} \psi_s =$$

$$= -\frac{1}{2} B \psi_r - \frac{1}{2} B_r + \Sigma b^{it}_r (\psi_{it} - K_{it}) + 2 \Sigma b^{is}_r \psi_s (\psi_i - K_i).$$

Ora le identità (4) del § 63 valgono qualunque sia il sistema covariante x_i, (anche se x_i non sono *derivate*, come ivi si suppo-

(*) Si ricordi la (1) del Cap. VI § 58, (in cui $J = -1$).

(**) Cfr. Cap. VI, § 56, (2), § 57, (3)$_{ter}$, § 60 (1).

neva) (*); dunque

$$\Sigma\,\vartheta^{st}\,\tau_{rst} = K\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\,\tau^i$$

e la precedente può scriversi

$$\Sigma\,(\vartheta_{tr}\,K + a_{tr}\,H)\,\tau^t - \Sigma\,\vartheta^{st}\,a_{rs}\,(\sigma_t + \sigma\,\psi_t) =$$

$$= -\frac{1}{2}(B_r + B\,\psi_r) + \Sigma\,b_r^{st}\,(\psi_{st} + 2\,\psi_s\,\psi_t - K_{st} - 2\,\psi_s\,K_t) = 0.$$

Moltiplicando per $\Sigma\,a^{rk}\,\vartheta_{hi} = \Sigma\,\vartheta^{rk}\,a_{ki}$ (**) e sommando rispetto a r, si ottiene

$$\sigma_i + \sigma\,\psi_i + \Sigma(\varepsilon\,\vartheta_{ki}\,H + a_{ki}\,K)\,\tau^k = \tag{3}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2}\,\Sigma\,\vartheta^{rk}\,a_{ik}\,(B_r + B\,\psi_r) + \Sigma\,a_i^{st}\,(\psi_{st} + 2\,\psi_s\,\psi_t - K_{st} - 2\,\psi_s\,K_t).$$

Le cercate condizioni d' integrabilità hanno condotto alle equazioni (3) *nelle* σ_i. *Dobbiamo ora scrivere la condizione di integrabilità di queste. Troviamo la*

$$3\,H\,\sigma + \Sigma\,(a^{rs}\,H_s + \vartheta^{rs}\,K_s)\,\tau_r = \tag{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\Sigma a^{rs}\,(B_{rs} + 2\,\psi_r\,B_s) + \frac{1}{2}\,B\,(K + 2 - \Phi) +$$

$$+ 3\,\Theta' + 3\,\Psi' - \Sigma\,b^{rst}\,(K_{rst} + 4\,K_{rs}\,\psi_t +$$

$$+ 2\,K_r\,\psi_{st} + 4\,K_r\,\psi_s\,\psi_t) \text{ (***)}.$$

(*) Infatti esse si dimostrano nello stesso modo nel caso generale; del resto, ne è facilissima la verifica in coordinate asintotiche.

(**) Per l'uguaglianza delle due espressioni, cfr. Cap. VI, § 56, (4).

(***) Derivando covariantemente le (3) si deduce tenendo conto delle (2) e (3)

$$\sigma_{ir} + \sigma\,(\psi_{ir} - \psi_i\,\psi_r + K a_{ir} - \varepsilon H\,\vartheta_{ir}) + \Sigma\,(a_{ki}\,K_r + \varepsilon\,\vartheta_{ki}\,H_r)\,\tau^k -$$

$$- \Sigma\,[\varepsilon H\,(\vartheta_{kr}\,\psi_i + \vartheta_{ki}\,\psi_r + K\,(a_{kr}\,\psi_i + a_{ki}\,\psi_r)\,]\,\tau^k =$$

§ 67. — Deformazione proiettiva.

A) Il problema fondamentale.

Ora ci rivolgeremo al problema importante:

Dato un elemento lineare proiettivo $\frac{F_3}{F_2}$, *riconoscere se esiste qualche superficie corrispondente e, nel caso affermativo, determinarle tutte.* Date le ricerche del Cap. IV § 40, possiamo omettere il caso $J = 0$; sappiamo che in tal caso esistono sempre delle superficie *(rigate)* corrispondenti (dipendenti da una funzione arbitraria che è la j di *l. c.*) Possiamo quindi supporre $J = -1$ sicchè il problema si enuncia: *date le forme* φ_2 *e* φ_3 *soddisfacenti alle* (A) *del* § 65 *B*, *riconoscere se le equazioni* (B) del § 65 *nelle incognite* τ_1, τ_2 *ammettono qualche soluzione e, nel caso affermativo, determinarne tutte le soluzioni.* Ora noi abbiamo visto, al § 66 *A*, che le equazioni (B) sono equivalenti alle (2) del § 66 che contengono oltre τ_1 e τ_2 l' incognita ausiliaria σ. Noi abbiamo calcolato le condizioni d' integrabilità delle (2), che sono le (3) del § 66.

$$= -\frac{\varepsilon}{2} \Sigma \vartheta^{sh} a_{ik} (B_{rs} + B_r \psi_s + B \psi_{sr}) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \psi_i \Sigma \vartheta^{sk} a_{rk} (B_s + B \psi_s) + \frac{\varepsilon}{2} B (K \vartheta_{ir} - H a_{ir}) +$$

$$+ \Sigma a_i^{st} (\psi_{str} + 4 \psi_s \psi_{tr} - K_{str} - 2 \psi_{sr} K_t - 2 \psi_s K_{tr}) -$$

$$- \psi_i \Sigma a_r^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t) +$$

$$+ \varepsilon \Sigma \vartheta_{rq} \psi^q \Sigma b_i^{st} (\psi_{st} + 2 \psi_s \psi_t - K_{st} - 2 \psi_s K_t) -$$

$$- K \Sigma a_{ir}^s (\psi_s - K_s) - \varepsilon H \Sigma b_{ir}^s (\psi_s - K_s).$$

Dobbiamo scrivere che $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, ossia che $\Sigma \vartheta^{ir} \sigma_{ir} = 0$. Moltiplicando pertanto la precedente con ϑ^{ir} e sommando rispetto ad i e r, si ottiene la formola (4) del testo, se si ricordano le formole Cap. VI, § 56 (2) e (4), § 57 (3)$_{\text{ter}}$ e (3)$_{\text{quater}}$, § 59 (1) e § 60 (1), e la formola (1) del § presente.

Notiamo che le (2) e (3) insieme esprimono tutte le derivate di τ_1, τ_2 e σ come polinomi lineari (non omogenei) delle τ_1, τ_2 e σ stesse. Come condizione d'integrabilità delle (3) abbiamo trovato la (4) del § 66, che ha la forma

$$(\alpha) \qquad \lambda\sigma + \lambda_1\tau_1 + \lambda_2\tau_2 = \mu,$$

λ, λ_1, λ_2 e μ essendo funzioni note. E noi non continueremo il calcolo effettivo giacchè le formole si complicano troppo; ma è facile continuarlo in ogni caso particolare. Derivando la (4) e tenendo conto delle (2) e (3), si ottengono evidentemente due ulteriori relazioni della stessa forma (α); da ciascuna di esse si derivano nello stesso modo due ulteriori relazioni della stessa forma, e così di seguito. È quindi chiaro che cinque casi sono possibili:

1° le relazioni della forma (α) che si trovano nel modo ora descritto sono *contradditorie*. È questo il caso generale (*), se si scelgono a caso le forme φ_2 e φ_3; *non esiste nessuna superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$;

2° dalle relazioni della forma (α) si trovano valori ben determinati di τ_1, τ_2 (e quindi anche di σ). *Esiste* (a meno di collineazioni) *una sola superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$, *proiettivamente indeformabile. La terza forma fondamentale si calcola dall'elemento lineare proiettivo mediante sole operazioni razionali e derivazioni;*

3° le relazioni della forma (α) si riducono a due linearmente indipendenti sicchè esse si possono ridurre alla forma

$$\tau_2 = a\tau_1 + b, \quad \sigma = c\tau_1 + d \ (**).$$

dove a, b, c, d son funzioni conosciute.

(*) Infatti, l'elemento lineare proiettivo dipende essenzialmente da *due* funzioni arbitrarie di u e v, p. es. dalle solite β e γ, mentre una *superficie* dipende solo da *una* funzione arbitraria di due argomenti.

(**) Se le relazioni della forma (α) dessero un valore determinato per τ_1, basta sostituire τ_2 a τ_1; se poi dessero valori determinati per τ_1 e τ_2, anche il valore di σ sarebbe determinato.

Sostituendo nelle (2) e (3) si ricavano due sole relazioni della forma

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial u} = m_1 \tau_1 + n_1 \quad , \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial v} = m_2 \tau_1 + n_2 \, ,$$

dove m_1, m_2, n_1, n_2 hanno valori conosciuti.

Tali equazioni formano evidentemente un sistema completamente integrabile, e τ_1 se ne ricava mediante quadrature. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente* (riguardando come identiche due superficie collineari) *da un parametro. La terza forma fondamentale si calcola dall' elemento lineare proiettivo con quadrature.* La terza forma è del tipo

$$\Sigma \tau_i \, du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c \Sigma \chi_i \, du_i$$

con c costante arbitraria ;

4° la relazione (4) del § 66 non è soddisfatta identicamente, ma tutte le ulteriori relazioni della forma (α) son conseguenza algebrica di essa. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente da due costanti arbitrarie.* La terza forma è

$$\Sigma \tau_i du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c_1 \Sigma \chi_i^1 \, du_i + c_2 \Sigma \chi_i^2 \, du_i \, ,$$

con due costanti arbitrarie c_1 e c_2;

5° la relazione (4) del § 66 è identicamente soddisfatta. Le (2) e (3) del § 66 formano un sistema completamente integrabile. *Le superficie di elemento lineare proiettivo* $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ *dipendono essenzialmente da tre costanti arbitrarie.* La terza forma è

$$\Sigma \tau_i du_i = \Sigma \tau_i^0 \, du_i + c_1 \Sigma \chi_i^1 \, du_i + c_2 \Sigma \chi_i^2 \, du_i + c_3 \Sigma \chi_i^3 \, du_i$$

con tre costanti arbitrarie. Determineremo al § 69 tutte le superficie di questa classe.

Notiamo che dall' analisi fatta risulta :

Se una superficie è proiettivamente deformabile, essa fa parte di *una famiglia continua di superficie che dipende da uno, due, o tre parametri* (*), *tutte proiettivamente applicabili fra di loro.*

B) Il sistema coniugato di deformazione proiettiva.

Sia $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ l'elemento lineare proiettivo di due superficie S, $\overline{S}$ applicabili ma non omografiche (**) e siano $\Sigma \tau_i \, du_i$, $\Sigma \overline{\tau}_i \, du_i$ le terze forme fondamentali di esse. Poniamo

$$\tau_i - \overline{\tau}_i = \chi_i .$$

Il Cartan, nella Memoria già citata al Cap. VI § 61, ha trovato il significato geometrico delle linee definite dall' equazione differenziale

$$\Sigma b^i_{rs} \chi_i \, du_r \, du_s = 0 . \tag{1}$$

Esse formano evidentemente un sistema coniugato (che si può ridurre ad un sistema d' asintotiche contato due volte) che Cartan dice il *sistema coniugato di deformazione proiettiva* (***). L' equazione (1) si può scrivere anche (cfr. la (1) del § 65)

$$\Sigma (q_{rs} - \overline{q}_{rs}) \, du_r \, Du_s = 0 \tag{1 bis}$$

Per ogni sistema di valori (u, v) i piani osculatori delle curve corrispondenti di S e $\overline{S}$ nei due punti (u, v) formano due stelle omografiche. Possiamo quindi (in ∞^3 modi) sostituire a $\overline{S}$ una superficie $S'(u, v)$ ad essa collineare (variabile al variare di u, v)

(*) riguardando come identiche due superficie collineari.

(**) Più precisamente, la corrispondenza fra S e $\overline{S}$ che si ottiene facendo corrispondersi i punti che appartengono a valori uguali di u e v, non sia proiettiva. S e $\overline{S}$ possono invece essere omografiche in virtù di un' altra corrispondenza puntuale fra di esse, anzi identiche.

(***) Se una superficie ammette ∞^1 deformate proiettive, essa possiede un solo sistema coniugato di deformazione proiettiva. Essa ne può possedere invece ∞^1 o ∞^2 se è proiettivamente deformabile in ∞^2 o in ∞^3 modi.

tale che nel punto (u, v) una curva qualsiasi di S e la curva corrispondente di $S'(u, v)$ abbiano lo stesso piano osculatore (e la stessa tangente).

Si fissi comunque per ogni valore di (u, v) una tale superficie $S'(u, v)$. Siano $P_1, P_2, P_3 \ldots$ punti fissi nello spazio, e $P'_1(u, v)$, $P'_2(u, v)$, $P'_3(u, v) \ldots$ quelli che vi corrispondono nell'omografia che porta $\overline{S}$ in $S'(u, v)$. Si fissi ad arbitrio una relazione $f(u, v) = 0$ e sia C la curva corrispondente di S. Posto $f(u, v) = 0$, anche i punti $P'_1(u, v)$, $P'_2(u, v) \ldots$ descrivono delle curve, e per ogni valore fisso di (u, v) le tangenti a tutte queste curve incontrano una tangente ben determinata (data la relazione $f(u, v) = 0$) t di S in (u, v). Allora ed allora soltanto che C soddisfa alla (1), t è la tangente a C. Lascio al lettore la facile dimostrazione (*).

C) Superficie R e R_0.

Se $\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s \gtrless 0$, ossia se si tratta proprio di un sistema coniugato, la superficie dicesi *superficie* R e le due congruenze delle tangenti alle curve del sistema coniugato di deformazione proiettiva diconsi *congruenze* R. Le superficie e congruenze R furono studiate per la prima volta, da un punto di vista del tutto diverso, dallo Tzitzéica nel 1911, ed importanti risultati su di esse son stati trovati, oltre che da Tzitzéica, da Demoulin e da Ionas. Di questo si è già parlato al Cap. V § 52 e § 54.

Se $a^{rs} \chi_r \chi_s = 0$ sicchè il sistema coniugato di deformazione proiettiva si riduce ad un sistema di asintotiche contato due volte la superficie si dirà *superficie* R_0.

Il Cartan ha dimostrato che *le superficie* R *dipendono da sei funzioni arbitrarie di un argomento.* Ci limitiamo ad enunciare questo risultato (**). *Le superficie* R_0 *dipendono da cinque funzioni arbi-*

(*) L'enunciato del Cartan è formalmente diverso. Egli dà pure un'altra proprietà cinematica del sistema coniugato di deformazione proiettiva (v. l. c. pagg. 278-279).

(**) Mem. cit., pagg. 280 e 290-292.

trarie di un argomento. Questo risultato, dovuto pure al Cartan (*) sarà dimostrato tosto in modo molto semplice.

D) **Deformazione proiettiva di una superficie data.**

Al principio di questo § abbiamo supposto che sia dato un elemento lineare proiettivo $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$ senza sapere a priori se esiste qualche superficie corrispondente. Ora supponiamo invece che *sia data una superficie* (non rigata) e che si voglia *riconoscere se essa è proiettivamente deformabile e, in caso affermativo, determinarne tutte le deformate proiettive.* In altre parole, ora supponiamo nota una soluzione particolare (τ_1, τ_2, σ) delle (2) del § 66 e vogliamo ricercare le eventuali ulteriori soluzioni $(\overline{\tau_1}, \overline{\tau_2}, \overline{\sigma})$. Posto

$$\tau_i - \overline{\tau_i} = \chi_i \quad , \quad \sigma - \overline{\sigma} = \varkappa \, ,$$

possiamo introdurre χ_i e $\varkappa$ come nuove incognite. Alle (2) del § 66 corrispondono evidentemente le equazioni omogenee

$$\chi_{rs} + \psi_s \chi_r = a_{rs} \varkappa . \tag{2}$$

Come condizioni d'integrabilità delle (2) otteniamo, come si vede ormai senza calcolo dalle (3) del § 66,

$$\varkappa_i + \varkappa \chi_i + \Sigma(\varepsilon \vartheta_{ki} H + a_{ki} K) \chi^k = 0 , \tag{3}$$

e condizione d'integrabilità di queste è (cfr. (4) del § 66)

$$3 H \varkappa + \Sigma (a^{rs} H_s + \vartheta^{rs} K_s) \chi_r = 0 . \tag{4}$$

Una superficie è proiettivamente deformabile allora ed allora soltanto che le (2) ammettono qualche soluzione, oltre la soluzione evidente $\chi_1 = \chi_2 = \varkappa = 0$.

(*) Mem. cit. pagg. 294-5.

Ogni soluzione delle (2) soddisfa pure alle (3) e (4). Derivando la (4) e tenendo conto delle (2) e (3) si arriva a due ulteriori relazioni lin. om. fra χ_1, χ_2 e $\varkappa$ ecc. La superficie è indeformabile se così si arriva a tre relazioni lin. indipendenti, ecc. Ci limiteremo a trattare il caso particolare di superficie R_0.

Per una superficie R_0, oltre alle (2), deve essere soddisfatta anche la

$$\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s = \Sigma \chi_r \chi^r = 0 . \tag{5}$$

Derivandola covariantemente si deduce

$$\Sigma \chi_{rs} \chi^r = 0 .$$

Moltiplicando (2) per χ^r risulta pertanto $\chi_1 \varkappa = \chi_2 \varkappa = 0$ ossia $\varkappa = 0$. Ora dalla (5) segue (*) che

$$\Sigma \vartheta_{ki} \chi^k = \omega \Sigma a_{ki} \chi^k , \quad \omega = \pm 1$$

sicchè la (3) dà $(H + \omega K) \chi_i = 0$ ossia

$$H + \omega K = 0 , \quad \omega = \pm 1 . \tag{6}$$

Una superficie è R_0 *allora ed allora soltanto che è soddisfatta la* (6) (**).

Infatti noi abbiamo appunto dimostrato che per ogni superficie R_0 vale la (6). Viceversa, se è soddisfatta la (6), la superficie è R_0 ossia le (2) ammettono una soluzione con $\Sigma a^{rs} \chi_r \chi_s = 0$. Infatti tutte le condizioni d'integrabilità delle

$$\chi^r + \omega \Sigma \vartheta^{rs} \chi_s = 0 \quad , \quad \chi_{rs} + \psi_s \chi_r = 0 \tag{7}$$

son soddisfatte, se vale la (6); lascio la facile dimostrazione al lettore.

(*) Basta sostituire ψ_i con χ_i nel ragionamento che ci condusse alla prima delle formole (6) del Cap. VI § 59.

(**) Invece il fatto che una superficie sia R non può esprimersi coll'annullare un invariante dell'elemento lineare proiettivo.

Da questo risultato si deduce subito che le superficie R_0 si ottengono integrando un'equazione alle derivate parziali del quinto ordine. Infatti se $z = f(x, y)$ è l'equazione di una superficie in coordinate non omogenee, l'espressione dell'invariante $H + \omega K$ contiene derivate di f fino al quinto ordine.

§ 68. Teoremi varii sulle superficie R e R_0.

A) Elemento lineare riferito alle asintotiche.

L'elemento lineare proiettivo di una superficie R o R_0 si può mettere sotto una forma notevole. A tale scopo osserviamo che dalle (B) del § 65 *B* seguono le relazioni equivalenti alle (2) del § 67

$$\Sigma a_i^{rs}(\chi_{rs} + \psi_s \chi_r) = 0 \quad , \quad \Sigma \vartheta^{rs}(\chi_{rs} + \psi_s \chi_r) = 0 .$$

Scegliendo le asintotiche come linee coordinate, esse diventano

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial u} + \frac{\gamma_u}{\gamma}\chi_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial v} + \frac{\beta_v}{\beta}\chi_2 = 0 ,$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial v} + \frac{\partial \log\beta\gamma^2}{\partial u}\chi_1 = \frac{\partial \chi_2}{\partial u} + \frac{\partial \log\beta^2\gamma}{\partial v}\chi_2 = 0 ,$$

oppure

$$\frac{\partial}{\partial u}(\gamma\chi_1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}(\beta\chi_2) = 0 ,$$

(1)

$$\beta\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma^2\chi_2) = \gamma\frac{\partial}{\partial v}(\beta^2\gamma\chi_1) = 0.$$

Le prime due dànno

$$\beta\chi_2 = U \quad , \quad \gamma\chi_1 = V$$

con U funzione della sola u e V funzione della sola v, sicchè l' equazione del sistema coniugato di deformazione proiettiva è

$$\Sigma\, b^i_{rs}\, \chi_i\, du_r\, du_s = -\,\omega\,(U du^2 - V dv^2) = 0.$$

La forma quadratica qui scritta essendo (impropriamente) intrinseca, si può, scegliendo convenientemente il parametro u, supporre $U^2 = 1$, a meno che sia $U = 0$ (*); e similmente, scegliendo v in modo opportuno, si può rendere $V^2 = 1$.

Se la superficie è R_0 possiamo quindi supporre (**), scegliendo convenientemente il parametro v, che sia $U = 0$, $V = \pm 1$ oppure

$$\chi_2 = 0 \quad , \quad \chi_1 = \pm \frac{1}{\gamma}.$$

Sostituendo nella terza delle (1) si deduce $\beta_v = 0$, e cambiando anche il parametro u si arriva ad avere

$$\beta = 1. \tag{2}$$

Scegliendo opportunamente i parametri u, v *delle asintotiche* (***) *di una superficie* R_0 *l' elemento lineare proiettivo assume la forma canonica*

$$\varphi_2 = 2\gamma\, \mathrm{du}\, \mathrm{dv} \quad , \quad \varphi_3 = \gamma\, \mathrm{du}^3 + \gamma^2\, \mathrm{dv}^3 \tag{2 bis}$$

in cui $\beta = 1$. *Viceversa, se* $\beta = 1$, *la superficie è* R_0 (****).

Notiamo che si poteva dedurre questo risultato più rapidamente scrivendo la (6) del § 67 in coordinate asintotiche.

(*) Si noti che $UV \gtrless 0$ per una superficie R e $UV = 0$ per una superficie R_0.

(**) scambiando eventualmente u con v.

(***) Il sistema coniugato di deformazione proiettivo si riduce alle asintotiche $v =$ costante.

(****) Infatti le (1) sono allora soddisfatte ponendo

$$\chi_1 = \frac{1}{\gamma}, \quad \chi_2 = 0.$$

Se invece la superficie è *R*, possiamo scegliere i parametri delle asintotiche in modo che sia

$$U^2 = V^2 = 1 \,, \quad \text{ossia} \quad \chi_1 = \pm \frac{1}{\gamma} \quad , \quad \chi_2 = \pm \frac{1}{\beta} \,;$$

anzi, ricordando che le χ_i non sono definite che a meno d'un fattor costante, possiamo supporre:

$$\chi_1 = \frac{1}{\gamma} \quad , \quad \chi_2 = \alpha \frac{1}{\beta} \quad , \quad \alpha^2 = 1.$$

La terza delle (1) dà poi la condizione di Demoulin

(3) $$\gamma_u = \alpha \beta_v \quad , \quad \alpha^2 = 1$$

sicchè $\beta du + \alpha\gamma dv = \alpha df$ è un differenziale esatto.

Viceversa se valgono le (3), la superficie è *R*, le (1) essendo soddisfatte ponendo $\chi_1 = \frac{1}{\gamma}$, $\chi_2 = \alpha \frac{1}{\beta}$.

Vale pertanto il teorema: *Scegliendo opportunamente i parametri* u, v *delle asintotiche di una superficie* R, *l'elemento lineare proiettivo assume la forma canonica*

(3) bis $$\begin{aligned} \varphi_2 &= 2\alpha f_u f_v du dv \\ \varphi_3 &= f_u f_v (\alpha f_u du^3 + f_v dv^3) \end{aligned} \qquad \alpha = \pm 1$$

in cui $\gamma_u = \pm \beta_v$. *Viceversa se* $\gamma_u = \pm \beta_v$ *la superficie è* R (*).

B) Un teorema per le superficie R_0 o R.

Se si conoscono le equazioni in termini finiti delle asintotiche di una superficie R_0, *la riduzione dell'elemento lineare proiettivo alla forma canonica* (2) bis *si effettua con quadrature.* Ciò segue senz'altro

(*) È $\alpha = 1$ ($\alpha = -1$) se il sistema coniugato di deformazione proiettiva è reale (immaginario).

dal procedimento che ci ha servito a stabilire la forma canonica. Ma vale ancora il teorema: *Data comunque una superficie* R_0 *bastano due quadrature ad ottenere l'equazione in termini finiti di quel sistema di asintotiche cui si riduce il sistema coniugato di deformazione proiettiva, anzi addirittura il parametro* v *delle forme canoniche* $(2)_{\text{bis}}$. Infatti, è in coordinate canoniche

$$\pm \Sigma b_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s = dv^2$$

cosicchè, determinate le χ_i con quadratura dalle (7) del § 67,

$$v = \int \sqrt{|\Sigma b_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s|} \text{ (*)}.$$

Data comunque una superficie R *la riduzione dell' elemento lineare proiettivo alla forma canonica* $(3)_{\text{bis}}$ *e quindi anche la determinazione delle equazioni in termini finiti delle asintotiche e del sistema coniugato di deformazione proiettiva non richiede che quadrature.* Infatti da ciò che si è detto al § 67 A risulta subito che le χ_i si possono avere dalle (2) del § 67 con quadrature.

D' altra parte, in parametri canonici è

$$\Sigma a_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s + \omega \Sigma b_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s = 2 \alpha \, du^2 ,$$

$$\Sigma a_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s - \omega \Sigma b_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s = 2 \, dv^2 ;$$

e le espressioni a sinistra essendo note, si hanno anche u e v con quadrature.

(*) Come esercizio, il lettore deduca direttamente in coordinate curvilinee generali che $\sqrt{|\Sigma b_{rs}^i \chi_i \, du_r \, du_s|}$ è un differenziale esatto, se $H + \omega K = 0$, facendo uso delle (7) del § 67.

§ 69. — Le superficie proiettivamente deformabili in ∞^3 modi (*).

A) **Preliminari.**

Abbiamo visto al § 67 che una superficie S *non rigata* si può deformare proiettivamente *al più* in ∞^3 modi. Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga è che sia soddisfatta identicamente la (4) del § 67; il che richiede

$$H = 0 \quad , \quad K = \text{costante}. \tag{1}$$

Le superficie cui è dedicato il § attuale son quindi le *superficie isotermo-asintotiche per cui la forma normale* φ_2 *ha curvatura costante.* Ma se è dato soltanto un elemento lineare proiettivo $\varphi_3 : \varphi_2$ soddisfacente alle (1), affinchè esista una (e quindi ∞^3) superficie corrispondente, deve essere identicamente soddisfatta la (4) del § 66 (**) cioè deve essere ancora

$$-\frac{1}{2}\Sigma a^{rs}(B_{rs} + 2\psi_r B_s) + \frac{1}{2} B(K + 2 - \Phi) + 3\Theta' + 3\Psi' = 0.$$

dove B è definita dalla (1) del § 66.

Ora conseguenza delle (1) è l'identità (***)

$$\Sigma a^{rs}(B_{rs} + 2\psi_r B_s) + B\Phi + 3K(\Theta' + \Psi') = 0\,, \tag{2}$$

sicchè la precedente si riduce a

$$K + 2)(B + 3\Theta' + 3\Psi') = 0. \tag{3}$$

(*) I risultati di questo §, tranne l'osservazione che le superficie con $H = K + 2 = 0$ son quelle con asintotiche di complessi lineari son dovute al Cartan, Mem. cit., pagg. 301-307.

(**) Cfr. § 67 *A*.

(***) Ci possiamo accontentare di verificare la (2) in coordinate particolari.

Nel determinare le superficie corrispondenti, occorre trattare separatamente i casi $K=0$ e $K \neq 0$. Cominceremo col primo.

B) **Il caso** $K=0$.

Se $K=0$ possiamo scegliere, come ben si sa, i parametri u, v delle asintotiche in modo che sia

$$\varphi_2 = 2\,du\,dv \quad , \quad \beta\gamma = 1 \quad , \quad \omega = 1 .$$

L' equazione $H=0$ dà

$$\frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log \beta^2}{\partial u\, \partial v} = 0$$

sicchè si può porre

$$\beta = \sqrt{\frac{V}{U}} \quad , \quad \gamma = \sqrt{\frac{U}{V}} \tag{4}$$

con U funzione della sola u e V funzione della sola v, i due radicali avendo lo stesso segno (positivo o negativo). Bisogna ora verificare la (2) e vedere quali condizioni impone la (3). Ora si calcola facilmente, dal quadro di formole che chiude il Cap. VI (*)

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{U'}{U} \;,\quad \psi_2 = \frac{1}{2}\frac{V'}{V} \;,\quad \Phi = \frac{1}{2}\frac{U'V'}{UV} \;,$$

$$\Psi' = \sqrt{\frac{U}{V}} \cdot \frac{1}{8}\frac{U'^3}{U^3} - \sqrt{\frac{V}{U}} \cdot \frac{V'^3}{V^3} \;,$$

$$\psi_{11} = \frac{1}{2}\frac{U''}{U} - \frac{1}{2}\frac{U'^2}{U^2} \quad , \quad \psi_{22} = \frac{1}{2}\frac{V''}{V} - \frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2} \;,$$

(*) Le derivate di U e V sono indicate con apici.

$$\Theta' = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{4}\frac{U'U''}{U^2} - \frac{1}{4}\frac{U'^3}{U^3}\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{4}\frac{V'V''}{V^2} - \frac{1}{4}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$\psi_{111} = \frac{1}{2}\frac{U'''}{U} - \frac{3}{2}\frac{U'U''}{U^2} + \frac{U'^3}{U^3},$$

$$\psi_{222} = \frac{1}{2}\frac{V'''}{V} - \frac{3}{2}\frac{V'V''}{V^2} + \frac{V'^3}{V^3},$$

$$B = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U} - \frac{3}{4}\frac{U'U''}{U^2} + \frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^3}\right) -$$

$$- \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V} - \frac{3}{4}\frac{V'V''}{V^2} + \frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$B_1 = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U''''}{U} - \frac{U'U'''}{U^2} - \frac{3}{4}\frac{U''^2}{U^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}\frac{U'^2U''}{U^3} - \frac{15}{16}\frac{U'^4}{U^4}\right) -$$

$$- \frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(-\frac{1}{4}\frac{V'''}{V} + \frac{3}{8}\frac{V'V''}{V^2} - \frac{3}{16}\frac{V'^3}{V^3}\right),$$

$$B_2 = -\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V''''}{V} - \frac{V'V'''}{V^2} - \frac{3}{4}\frac{V''^2}{V^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{4}\frac{V'^2V''}{V^3} - \frac{15}{16}\frac{V'^4}{V^4}\right) +$$

$$+ \frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(-\frac{1}{4}\frac{U'''}{U} + \frac{3}{8}\frac{U'U''}{U^2} - \frac{3}{16}\frac{U'^3}{U^3}\right),$$

$$B_{12} = B_{21} = \frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(-\frac{1}{4}\frac{U''''}{U} + \frac{1}{2}\frac{U'U'''}{U^2} + \right.$$

$$+\frac{3}{8}\frac{U''^2}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^2U''}{U^3}+\frac{15}{32}\frac{U'^4}{U^4}\Bigg)-$$

$$-\frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(-\frac{1}{4}\frac{V''''}{V}+\frac{1}{2}\frac{V'V'''}{V^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\frac{V''^2}{V^2}-\frac{9}{8}\frac{V'^2V''}{V^3}+\frac{15}{32}\frac{V'^4}{V^4}\right).$$

Sostituendo nella formola (2) ne risulta confermata l'esattezza per il caso particolare $H=K=0$ studiato. La (3) equivale alla:

$$B+3\Theta'+3\Psi'=0\,;$$

e, sostituendovi i valori ora calcolati, essa diventa:

$$\sqrt{\frac{U}{V}}\cdot\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\sqrt{\frac{V}{U}}\cdot\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}=0$$

o semplicemente

$$U'''=V'''=a=\text{costante}\,,$$

cosicchè

$$(5)\qquad \begin{aligned} U&=au^3+b_1u^2+c_1u+d_1\,,\\ V&=av^3+b_2v^2+c_2v+d_2\,,\end{aligned}$$

dove a, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 son costanti qualunque, purchè non sia identicamente nè $U=0$, nè $V=0$.

C) **Continuazione. Formole finali relative al caso $K=0$.**

Per trovare le superficie corrispondenti dobbiamo ancora calcolare le τ_i dalle equazioni (B) del § 65. Vedremo che esse si possono integrare effettivamente in ∞^3 modi, come sappiamo a priori. Le citate equazioni (B) sono in coordinate asintotiche

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(\gamma\tau_1) = \beta\gamma\left(\psi_2 - \frac{\partial K}{\partial v}\right),\\
&\frac{\partial}{\partial v}(\beta\tau_2) = \beta\gamma\left(\psi_1 - \frac{\partial K}{\partial u}\right),\\
&\beta\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma^2\tau_2) - \gamma\frac{\partial}{\partial v}(\beta^2\gamma\tau_1) = \omega\beta^3\gamma^3 B.
\end{aligned}
$$

Sostituendo i valori di β, γ, ψ_1, ψ_2, K, esse diventano

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_1\right) = \frac{1}{2}\frac{V'}{V}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_2\right) = \frac{1}{2}\frac{U'}{U},
$$

$$
\sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right) - \sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right) = B.
$$

Le prime due dànno subito (essendo U_1 funzione della sola u e V_1 funzione della sola v)

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\tau_1 = \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u + V_1\right),\\
&\tau_2 = \sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v + U_1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right) = \frac{1}{2}\frac{U''}{U}v + \frac{(UU_1)'}{V},
$$

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right) = \frac{1}{2}\frac{V''}{V}u + \frac{(VV_1)'}{U},
$$

sicchè la terza diventa, sostituendo anche il valore di B

e moltiplicando con $\sqrt{UV}$,

$$\frac{1}{2}V''u+(VV_1)'-\frac{1}{2}U''v-(UU_1)'+\frac{1}{2}U'''-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^2}=0.$$

Ora dalle (5) vediamo che

$$\frac{1}{2}V''u-\frac{1}{2}U''v=b_2u-b_1v,$$

cosicchè la precedente diventa

$$(UU_1)'-\frac{1}{2}U'''+\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}-b_2u=$$

$$=(VV_1)'-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^2}-b_1v=e,$$

con e costante, da cui integrando,

$$UU_1=\frac{1}{2}U''-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}+\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1,$$

$$VV_1=\frac{1}{2}V''-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}+\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2,$$

con due nuove costanti f_1 e f_2. Sostituendo in (7) si trova

$$\tau_1=\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u+\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}+\frac{\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2}{V}\right),$$

(7) bis

$$\tau_2=\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1}{U}\right)$$

dove U e V sono i polinomi (5). Le formole (D) del § 65 B determinano subito tutti i coefficienti delle equazioni fondamentali.

$D)$ Il caso $K = \text{cost.} \neq 0$.

Studieremo in modo simile il caso $K \neq 0$. La forma φ_2 essendo di curvatura costante K, si può porre, com'è noto, nella forma

$$\varphi_2 = \frac{4}{K(u-v)^2}\, du dv,$$

cosicchè

$$(8) \qquad \beta\gamma = \frac{2}{K}\frac{1}{(u-v)^2} \quad , \quad \omega = sgn\, K.$$

La condizione $H = 0$ ossia $\dfrac{\partial^2 \log(\beta:\gamma)}{\partial u\, \partial v} = 0$ diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{K(u-v)^2 \beta^2}{2} = 0$$

cosicchè possiamo porre

$$(9) \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{V}{U}} \quad , \quad \gamma = \omega \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{U}{V}} \,,$$

dove U è funzione della sola u, V è funzione della sola v, e i due radicali hanno lo stesso segno.

Resta a verificare la (2) e vedere quali condizioni impone la (3). Dalle formole alla fine del Cap. VI si calcola facilmente

$$\theta_u = -\frac{2}{u-v} \quad , \quad \theta_v = \frac{2}{u-v} \quad , \quad \text{dove} \quad \theta = \log|a_{12}| = \log|\beta\gamma|$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v} \quad , \quad \psi_2 = \frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v} \,,$$

$$\Phi = \frac{K}{4}(u-v)^2 \frac{U'V'}{UV} + \frac{3K}{2}(u-v)\left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}\right) - 9K,$$

$$\psi_{11}=\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{1}{2}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{1}{u-v}\frac{U'}{U}-\frac{3}{(u-v)^2},$$

$$\psi_{22}=\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{1}{2}\frac{V'^2}{V^2}-\frac{1}{u-v}\frac{V'}{V}-\frac{3}{(u-v)^2},$$

$$\Psi'=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{1}{8}\frac{U'^3}{U^3}(u-v)^3-\frac{9}{4}\frac{U'^2}{U^2}(u-v)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{27}{2}\frac{U'}{U}(u-v)-27\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{1}{8}\frac{V'^3}{V^3}(u-v)^3+\frac{9}{4}\frac{V'^2}{V^2}(u-v)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{27}{2}\frac{V'}{V}(u-v)+27\right],$$

$$\Theta'=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{U'U''}{U^2}-\frac{1}{4}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{2}\frac{U''}{U}+2\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2-\frac{9}{2}\frac{U'}{U}(u-v)+9\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{1}{4}\frac{V'V''}{V^2}-\frac{1}{4}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{V''}{V}-2\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2-\frac{9}{2}\frac{V'}{V}(u-v)-9\right],$$

$$\psi_{111}=\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{2}\frac{U'U''}{U^2}+\frac{U'^3}{U^3}+\frac{1}{u-v}\left(3\frac{U''}{U}-3\frac{U'^2}{U^2}\right)+$$

$$+\frac{3}{(u-v)^2}\frac{U'}{U}-\frac{6}{(u-v)^3},$$

$$\psi_{222}=\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{2}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{V'^3}{V^3}-\frac{1}{u-v}\left(3\frac{V''}{V}-3\frac{V'^2}{V^2}\right)+$$

$$+\frac{3}{(u-v)^2}\frac{V'}{V}+\frac{6}{(u-v)^3}\,,$$

$$B=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U^2}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{2}\frac{U''}{U}+\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2+3\frac{U'}{U}(u-v)-6\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2+3\frac{V'}{V}(u-v)+6\right]\,,$$

$$B_1=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U''''}{U}-\frac{U'U'''}{U^2}-\frac{3}{4}\frac{U''^2}{U^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{4}\frac{U'^2U''}{U^3}-\frac{15}{16}\frac{U'^4}{U^4}\right)(u-v)^3-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{9}{4}\frac{V'V''}{V^2}+\frac{9}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^2\right.$$

$$\left.+\left(3\frac{V''}{V}-\frac{3}{2}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)+3\frac{V'}{V}\right]-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\frac{U'}{U}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\left(-\frac{1}{4}\frac{V'''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'V''}{V^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{3}{16}\frac{V'^3}{V^3}\right)(u-v)^3+$$

$$\left.+\left(-\frac{3}{4}\frac{V''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}\right)(u-v)^2-\frac{3}{2}\frac{V'}{V}(u-v)-3\right]\,,$$

$$B_2=-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V''''}{V}-\frac{V'V'''}{V^2}-\frac{3}{4}\frac{V''^2}{V^2}+\right.$$

$$+\frac{9}{4}\frac{V'^2 V''}{V^3}-\frac{15}{16}\frac{V'^4}{V^4}\Big)(u-v)^3+$$

$$+\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(-\frac{3}{2}\frac{U'''}{U}+\frac{9}{4}\frac{U'U''}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^2\right.$$

$$\left.+\left(3\frac{U''}{U}-\frac{3}{2}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)-3\frac{U'}{U}\right]+$$

$$+\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\frac{V'}{V}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\left(-\frac{1}{4}\frac{U'''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'U''}{U^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{3}{16}\frac{U'^3}{U^3}\right)(u-v)^3+$$

$$\left.+\left(\frac{3}{4}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}\right)(u-v)^2-\frac{3}{2}\frac{U'}{U}(u-v)+3\right],$$

$$B_{12}=B_{21}=\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{V'}{V}(u-v)+6\right)\sqrt{\frac{U}{V}}\left(-\frac{1}{4}\frac{U''''}{U}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{U'U'''}{U^2}+\frac{3}{8}\frac{U''^2}{U^2}-\frac{9}{8}\frac{U'^2U''}{U^3}+\frac{15}{32}\frac{U'^4}{U^4}\right)(u-v)^2-$$

$$-\omega\left(\frac{|K|}{2}\right)^{3/2}\left(\frac{U'}{U}(u-v)-6\right)\sqrt{\frac{V}{U}}\left(-\frac{1}{4}\frac{V''''}{V}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{V'V'''}{V^2}+\frac{3}{8}\frac{V''^2}{V^2}-\frac{9}{8}\frac{V'^2V''}{V^3}+\frac{15}{32}\frac{V'^4}{V^4}\right)(u-v)^2.$$

Dalle formole ora scritte si verifica facilmente che la (2) vale anche nel caso ora studiato. Resta studiare la (3); se $K+2=0$, essa è un'identità e comunque si scelgano U e V, le (6) son compatibili ed esistono le superficie corrispondenti. Noi sappiamo dal Cap. II § 18 *B)* che si tratta in questo caso di *superficie le cui asintotiche appartengono a complessi lineari;* esse furono oggetto di uno studio più approfondito al Cap. V §§ 47 e 49 dove si sono determinate anche le loro equazioni in termini finiti. Se invece $K+2 \neq 0$ la (3) impone nuove condizioni. Sostituendovi i valori di B, Θ', Ψ'', calcolati poco fa, e moltiplicando con $\sqrt{UV}$, essa diventa

$$(10) \quad \frac{1}{2} U'''(u-v)^3 - 6U''(u-v)^2 + 30U'(u-v) - 60U =$$

$$= \omega \left[\frac{1}{2} V'''(u-v)^3 + 6V''(u-v)^2 + 30V'(u-v) + 60V \right].$$

Operandovi con $\frac{\partial^6}{\partial u^3 \partial v^3}$ si ottiene

$$\frac{d^6 U}{du^6} = -\omega \frac{d^6 V}{dv^6} = \text{costante}$$

sicchè U e V son polinomi di sesto grado al più.

Di più posto $u=v$, la (10) si riduce a $U=-\omega V$, sicchè è necessariamente

$$(11) \quad \begin{aligned} U &= au^6 + bu^5 + cu^4 + du^3 + eu^2 + fu + g, \\ -\omega V &= av^6 + bv^5 + cv^4 + dv^3 + ev^2 + fv + g. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (10) si vede che le costanti a, b, c, d, e, f, g possono essere qualunque, purchè non sia identicamente $U=0$.

E) Le formole finali nel caso $K = \text{cost.} \neq 0$.

Per determinare le nostre superficie resta ancora di calcolare le τ_i sostituendo i valori di β, γ nelle (B) del § 65 B, ossia nelle (6) del § presente. Sostituendo per ora i valori di β, γ, ψ_1, ψ_2, esse diventano, K essendo costante,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{U}{V}}\,\tau_1\right] = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{u-v}\sqrt{\frac{V}{U}}\,\tau_2\right] = \omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v}\right),$$

$$\sqrt{\frac{V}{U}}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right]-\sqrt{\frac{U}{V}}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right]=$$

$$=\omega\cdot\frac{2}{K}\frac{1}{(u-v)^5}B.$$

Le prime due dànno

$$\tau_1=-\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{1}{2}\frac{V'}{V}+\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}+V_1(u-v)\right],$$

$$(12)\qquad \tau_2=\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{1}{2}\frac{U'}{U}-\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}-U_1(u-v)\right],$$

dove U_1 è funzione della sola u e V_1 funzione della sola v, sicchè

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{U}{V}}\tau_2\right]=\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{U}{V}\left[-\frac{(UU_1)'}{U}\frac{1}{(u-v)^2}+\right.$$

$$\left.+\left(2U_1+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}\right)\frac{1}{(u-v)^3}-3\frac{U'}{U}\frac{1}{(u-v)^4}+6\frac{1}{(u-v)^5}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{(u-v)^3}\sqrt{\frac{V}{U}}\tau_1\right]=\sqrt{\frac{2}{|K|}}\frac{V}{U}\left[-\frac{(VV_1)'}{V}\frac{1}{(u-v)^2}+\right.$$

$$\left.+\left(-2V_1-\frac{1}{2}\frac{V''}{V}\right)\frac{1}{(u-v)^3}-3\frac{V'}{V}\frac{1}{(u-v)^4}-6\frac{1}{(u-v)^5}\right]$$

e la terza equazione diventa, sostituendo anche il valore di B scritto a § 69 D e moltiplicando con $\omega\sqrt{\frac{|K|}{2}}\sqrt{UV}(u-v)^5$

$$\left[(UU_1)'+\frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{U'''}{U}-\frac{3}{4}\frac{U'U''}{U}+\frac{3}{8}\frac{U'^3}{U^2}\right)\right](u-v)^3+$$

$$+\left[-2UU_1-\frac{1}{2}U''+\frac{K}{2}\left(-\frac{3}{2}U''+\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U^2}\right)\right](u-v)^2+$$

$$+\frac{K+2}{2}\,.\,3U'(u-v)-3(K+2)U=$$

(13)

$$=\omega\left\{\left[(VV_1)'+\frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{V'''}{V}-\frac{3}{4}\frac{V'V''}{V}+\frac{3}{8}\frac{V'^3}{V^3}\right)\right](u-v)^3-\right.$$

$$-\left[-2VV_1-\frac{1}{2}V''+\frac{K}{2}\left(-\frac{3}{2}V''+\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V^2}\right)\right](u-v)^2+$$

$$\left.+\frac{K+2}{2}\,.\,3V'(u-v)+3(K+2)V\right\}.$$

Se $K+2=0$, quest' equazione diventa, dividendola per $(u-v)^2$

$$\left[(UU_1)'-\frac{1}{2}U'''+\frac{3}{8}\left(\frac{U'^2}{U}\right)'\right](u-v)-$$

$$-2UU_1+U''-\frac{3}{4}\frac{U'^2}{U}=$$

$$=\omega\left\{\left[(VV_1)'-\frac{1}{2}V'''+\frac{3}{8}\left(\frac{V'^2}{V}\right)'\right](u-v)+\right.$$

$$\left.+2VV_1-V''+\frac{3}{4}\frac{V'^2}{V}\right\}.$$

Se ne deduce facilmente:

$$UU_1=\frac{1}{2}U''-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}+Au^2+Bu+C,$$

(14)

$$VV_1=\frac{1}{2}V''-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}-\omega(Av^2+Bv+C).$$

I valori di τ_1, τ_2 sono quindi dati, nel caso di $K+2=0$, dalle (12) e (14).

Sia invece $K+2\neq 0$ sicchè valgono le (11). Poniamo

$$(15)\qquad \begin{aligned} UU_1 + \frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}U'' - \frac{3}{8}\frac{U'^2}{U}\right) &= U_2, \\ VV_1 + \frac{K}{2}\left(\frac{1}{2}V'' - \frac{3}{8}\frac{V'^2}{V}\right) &= V_2. \end{aligned}$$

La (13) diventa

$$(16)\qquad \begin{aligned} &U_2'(u-v)^3 + \left(-2U_2 - \frac{K+2}{4}U''\right)(u-v)^2 + \\ &+ 3\frac{K+2}{2}U'(u-v) - 3(K+2)U = \\ &= \omega\left[V_2'(u-v)^3 + \left(2V_2 + \frac{K+2}{4}V''\right)(u-v)^2 + \right. \\ &\left. + 3\frac{K+2}{2}V'(u-v) + 3(K+2)V\right]. \end{aligned}$$

Operandovi con $\dfrac{\partial^6}{\partial u^3 \partial v^3}$ si ricava, ricordando le (11),

$$U_2'''' = -\,\omega V_2''''$$

sicchè U_2 e V_2 son polinomi di quarto grado al più.

Sostituendo nella (16) si deduce tenendo conto delle (11):

$$(17)\qquad \begin{aligned} U_2 &= \left(\frac{3}{4}au + \frac{b}{2}\right)(K+2)u^3 + Au^2 + Bu + C, \\ -\,\omega V_2 &= \left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)v^3 + Av^2 + Bv + C. \end{aligned}$$

Le (12), (15) e (17) determinano le τ_i e le (D) del § 65 *B* dànno i coefficienti delle equazioni fondamentali.

F) **Teorema riassuntivo e osservazioni varie.**

Le superficie con $H = K + 2 = 0$ dipendono, come abbiamo visto, da due funzioni arbitrarie di un argomento. Per altri valori di K, le superficie che abbiamo determinate non dipendono che da costanti arbitrarie. Dato il valore della costante K (sia per fissare le idee $K \neq 0$), l'elemento lineare proiettivo contiene, secondo le (9) e (11), sette costanti arbitrarie. Ma tre sole di queste costanti sono essenziali. Infatti, i parametri di u, v sono stati fissati in principio del § 69 *D* soltanto a meno di sostituzioni della forma

$$\bar{u} = \frac{a_1 u + a_2}{a_3 u + a_4} \quad , \quad \bar{v} = \frac{a_1 v + a_2}{a_3 v + a_4}$$

con a_1, a_2, a_3, a_4 costanti arbitrarie. Quest'osservazione permette di ridurre il numero delle costanti di tre unità. Di più, le (9) mostrano che, moltiplicando le U e V per una stessa costante, l'elemento lin. proiettivo non cambia, cosicchè infine non restano che tre costanti essenziali. Come esercizio, il lettore provi che lo stesso vale anche se $K = 0$. Quindi:

Le superficie con ∞^3 deformate proiettive sono le superficie isotermo-asintotiche per cui la forma φ_2 ha curvatura K *costante. Se* $\mathrm{K} = -2$, *esse dipendono da due funzioni arbitrarie di un argomento e sono caratterizzate geometricamente dal fatto che tutte le loro asintotiche appartengono a complessi lineari. Per ogni valore di* K *diverso da* -2 *non esistono che ∞^3 classi di ∞^3 superficie, le superficie di ciascuna classe essendo proiettivamente applicabili fra di loro.*

Data comunque una superficie del tipo studiato al § presente si possono con quadrature ottenere le quantità u, v, U, V *della precedente discussione, e quindi anche determinare le equazioni in termini finiti delle asintotiche, delle curve di Darboux e di Segre.* Supponiamo in primo luogo $K \gtrless 0$.

Essendo $H = 0$, $\Sigma \psi_i du_i$ è un differenziale esatto. Precisamente è (cfr. § 69 *D*)

$$\Sigma \psi_i du_i = \left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U} - \frac{3}{u-v}\right) du + \left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \frac{3}{u-v}\right) dv \,,$$

sicchè una prima quadratura determina

$$\frac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3} = e^{\int \Sigma \psi_i \, du_i}.$$

Poi [§ 69 D, (9)]

$$\varphi_3 = \omega \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \omega \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3\right)$$

$$\varphi_3' = \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3}\left(-\sqrt{\frac{V}{U}}\, du^3 + \omega \sqrt{\frac{U}{V}}\, dv^3\right)$$

sicchè due ulteriori quadrature dànno

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{U}} = \frac{\omega}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{|K|}{2}} \int e^{-\frac{1}{3}\int \Sigma \psi_i \, du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 - \omega \varphi_3'},$$

$$\bar{v} = \int \frac{dv}{\sqrt[3]{V}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{\frac{|K|}{2}} \int e^{-\frac{1}{3}\int \Sigma \psi_i \, du_i} \sqrt[3]{\varphi_3 + \omega \varphi_3'}.$$

Notiamo che ciò basta per ottenere le equazioni in termini finiti delle asintotiche ($d\bar{u} = 0$, $d\bar{v} = 0$), delle curve di Darboux ($d\bar{u}^3 + \omega d\bar{v}^3 = 0$) e delle curve di Segre ($d\bar{u}^3 - \omega d\bar{v}^3 = 0$). Per determinare u e v, occorrono ulteriori quadrature. Sia $(\varphi_3)_0$ ciò che si ottiene da φ_3 dando a $\bar{v}$ un valore fisso scelto a piacere; le $\left[\frac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3}\right]_0$, v_0 e V_0 abbiano significato analogo; sarà:

$$(\varphi_3)_0 = \omega \left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(u-v)^3}{\sqrt{UV}}\right]_0 \frac{V_0}{(u-v_0)^6}\, du^3.$$

Poichè $\dfrac{\sqrt{UV}}{(u-v)^3}$ è noto, un'ulteriore quadratura determina $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{|u-v_0|}}$ e quindi u. Analogamente si ottiene v. Finalmente

$$U=\frac{du^3}{d\bar{u}^3}\quad,\quad V=\frac{dv^3}{d\bar{v}^3}.$$

Le cose si presentano più semplicemente se $K=0$. È (cfr. § 69 B)

$$\Sigma\psi_i du_i=\frac{1}{2}\frac{U'}{U}du+\frac{1}{2}\frac{V'}{V}dv,$$

$$\Sigma\psi_i Du_i=-\frac{1}{2}\frac{U'}{U}du+\frac{1}{2}\frac{V'}{V}dv,$$

cosicchè

$$\sqrt{UV}=e^{\int\Sigma\psi_i du_i}\quad,\quad\sqrt{\frac{V}{U}}=e^{\int\Sigma\psi_i Du_i}\quad;$$

il che determina U e V. Poi

$$\varphi_3=\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3+\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3,$$

$$\varphi_3'=-\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3+\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3,$$

cosicchè

$$u=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int e^{\frac{1}{3}\int\Sigma\psi_i Du_i}\sqrt[3]{\varphi_3-\varphi_3'},$$

$$v=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int e^{-\frac{1}{3}\int\Sigma\psi_i Du_i}\sqrt[3]{\varphi_3+\varphi_3'}.$$

Le equazioni in termini finiti delle curve di Darboux e Segre sono qui

$$\int \frac{du}{\sqrt[3]{U}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt[3]{V}} = \text{costante}.$$

In ciò che precede si è implicitamente ammesso che le asintotiche delle nostre superficie siano reali. Ma è agevole vedere che le formole trovate dànno, usando convenientemente l'immaginario, anche tutte le superficie con $H=0$, $K=\text{cost.}$ a linee asintotiche immaginarie. Se $K=0$, per arrivare ad una superficie reale, basta far assumere ai parametri u e v valori complessi coniugati, nella (5) prendere a reale, e b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2 complessi coniugati, e nella $(7)_{\text{bis}}$ prendere e reale, f_1, f_2 complessi coniugati. Se $K+$ $+2=0$, basta dare a u e v, U e V valori complessi coniugati. Se $K<0$, $K+2 \gtrless 0$, i parametri u e v devono assumere valori complessi coniugati, le costanti in (11) e quelle in (17) devono essere reali. Finalmente se $K>0$, occorre far assumere valori complessi coniugati a u e $-\dfrac{1}{v}$. La costante d in (11) deve essere reale, a e $-g$, b e f, c e $-e$ complesse coniugate. Nelle (17) B deve essere reale, A e $-C$ complessi coniugati.

G) Quadro finale delle forme fondamentali delle superficie con $H=0$, $K=cost.$

1° $K=0$.

$$\varphi_2 = 2\,du\,dv\,,$$

$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3 + \sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3\,,$$

$$\mathrm{T} = \Sigma\,\tau_i du_i = \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\frac{1}{2}\frac{V'}{V}u + \frac{1}{2}\frac{V''}{V} - \frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2} + \right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2}b_1v^2+ev+f_2}{V}\Bigg)du+$$

$$+\sqrt{\frac{U}{V}}\left(\frac{1}{2}\frac{U'}{U}v+\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{\frac{1}{2}b_2u^2+eu+f_1}{U}\right)dv,$$

dove

$$U=au^3+b_1u^2+c_1u+d_1,$$

$$V=av^3+b_2v^2+c_2v+d_2.$$

2° $K=-2$ *(superficie con tutte le asintotiche di complessi lineari).*

$$\varphi_2=-\frac{2\,du\,dv}{(u-v)^2},$$

$$\varphi_3=\frac{1}{(u-v)^3}\left(-\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3+\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3\right),$$

$$\mathrm{T}=\Sigma\tau_i du_i=-\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}+\frac{1}{2}\frac{V'}{V}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{V''}{V}-\frac{3}{8}\frac{V'^2}{V^2}+\frac{Av^2+Bv+C}{V}\right)(u-v)\right]du+$$

$$+\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v}-\frac{1}{2}\frac{U'}{U}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{U''}{U}-\frac{3}{8}\frac{U'^2}{U^2}+\frac{Au^2+Bu+C}{U}\right)(u-v)\right]dv,$$

dove

A, B, C sono costanti,

U è funzione arbitraria di u,

V è funzione arbitraria di v.

3° $K(K+2) \neq 0$.

$$\varphi_2 = \frac{4\,du\,dv}{K(u-v)^2},$$

$$\varphi_3 = \omega\left(\frac{2}{|K|}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(u-v)^3}\left(\sqrt{\frac{V}{U}}\,du^3 + \omega\sqrt{\frac{U}{V}}\,dv^3\right),$$

$$\mathrm{T} = \Sigma\,\tau_i\,du_i = -\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{V}{U}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v} + \frac{1}{2}\frac{V'}{V} + \right.$$

$$+\left(-\frac{K}{4}\frac{V''}{V} + \frac{3K}{16}\frac{V'^2}{V^2} - \right.$$

$$\left.\left. -\,\omega\,\frac{\left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)v^3 + Av^2 + Bv + C}{V}\right)(u-v)\right] du -$$

$$-\,\omega\sqrt{\frac{2}{|K|}}\sqrt{\frac{U}{V}}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{u-v} - \frac{1}{2}\frac{U'}{U} + \right.$$

$$+\left(-\frac{K}{4}\frac{U''}{U} + \frac{3K}{16}\frac{U'^2}{U^2} + \right.$$

$$\left.\left. +\,\frac{\left(\frac{3}{4}av + \frac{b}{2}\right)(K+2)u^3 + Au^2 + Bu + C}{U}\right)(u-v)\right] dv,$$

dove

$$U = au^6 + bu^5 + cu^4 + du^3 + eu^2 + fu + g,$$

$$-\,\omega V = av^6 + bv^5 + cv^4 + dv^3 + ev^2 + fv + g,$$

$$\omega = sgn\,K.$$

§ 70. — Nuovo metodo per lo studio dei problemi precedenti.

A) Principio del metodo. (F)

Lo studio dei problemi precedenti in coordinate asintotiche porta allo studio del sistema (cfr. le (14) e (15) del Cap. II, § 16 *D*)

$$L_v = -(2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma)\,, \tag{1}$$

$$M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v) \tag{2}$$

$$\beta_{vvv} + \beta M_v + 2M\beta_v = \gamma_{uuu} + \gamma L_u + 2L\gamma_u\,. \tag{3}$$

Se la superficie non è rigata (caso già studiato al Cap. IV, § 40) potremmo introdurre una nuova incognita ausiliaria R, indicando con $\beta\gamma R$ i due membri della (3). Allora dalle (1), (2), (3) si potranno dedurre L_v, M_u, L_u, M_v come funzioni lineari di L, M, R. Dalle condizioni d'integrabilità $L_{uv} = L_{vu}$, $M_{uv} = M_{vu}$, troviamo delle equazioni lineari in R_u, R_v, di cui si debbono cercare le nuove condizioni di integrabilità. Questo metodo inizialmente concepito dal Fubini è di complicazione non inferiore al precedente, ed ha lo svantaggio di fare i calcoli in coordinate particolari, senza vedere chiaramente i fatti invariantivi, che invece sono posti in evidenza dal metodo precedente dovuto al Čech.

Esso diventa però semplice in qualche ricerca particolare, p. es. nella ricerca dei tipi, cui appartengono due superficie tra loro applicabili. A ciò dedichiamo il resto di questo Capitolo.

La forma lineare delle (1), (2), (3) dimostra che le sue soluzioni sono del tipo

$$L + \Sigma h_i P_i \quad , \quad M + \Sigma h_i Q_i$$

ove L, M sia una soluzione particolare, P_i, Q_i (*) sono soluzioni

(*) qui gli indici non indicano per nulla sistemi covarianti.

particolari del sistema *omogeneo*

$$(4) \qquad P_v = Q_u = 0 \quad , \quad \beta Q_v + 2Q\beta_v = \gamma P_u + 2P\gamma_u .$$

E perciò :

Se una superficie è deformabile, è deformabile in infiniti modi, al massimo in ∞^3 *modi (se restano arbitrarî i valori iniziali di* L , M , R).

Quando mai le (4) sono risolubili ? Cominciamo ad osservare che, se L, M ed L', M' sono due sistemi di soluzioni di (1), (2), (3), allora (Cap. II, § 16 D)

$$(L - L')du^2 + (M - M')dv^2$$

ha carattere intrinseco. Tali saranno perciò le forme

$$(5) \qquad P_i du^2 + Q_i dv^2$$

Per le (4) sarà P_i funzione della sola u, Q_i della sola v. Se la superficie è deformabile, ed esiste almeno una forma (5) non nulla, potremo cambiare i parametri delle u, v (e scambiare, eventualmente, le u, v) in guisa che la (5) considerata sia del tipo

$$dv^2 \qquad \text{oppure} \qquad du^2 + dv^2$$

cioè $\qquad P = 0 \ , \ Q = 1 \qquad$ oppure $\qquad P = Q = 1 .$

Nel primo caso possiamo ancora scegliere arbitrariamente il parametro u. Nel primo caso è, come si vede dalle (4) : $\beta_v = 0$, cioè β funzione della sola u. Cambiando il parametro u, potrò rendere $\beta = 1$.

Nel secondo caso è $\beta_v = \gamma_u$. Siamo nel caso di una superficie R. Quindi :

Una superficie deformabile non rigata o è una superficie R *di Tzitzéica, oppure si può per essa rendere* $\beta = 1$. *Ogni superficie di questi tipi è almeno deformabile in* ∞^1 *modi.* Vediamo quando essa è deformabile in ∞^3 modi.

B) Le superficie con $\beta = 1$ deformabili in ∞^3 modi.

Le (4) diventano

$$P_v = Q_u = 0 \quad , \quad Q_v = \gamma P_u + 2P\gamma_u .$$

Poichè P ne risulta funzione di u, Q di v, indicheremo P con la lettera U e Q con V, cosicchè avremo l'equazione

$$V' = \gamma U' + 2U\gamma_u. \tag{6}$$

Dobbiamo cercare quando, oltre alla soluzione $U = 0$, $V = 1$, ve ne sono altre due U_1 e V_1 ed U_2, V_2 *indipendenti linearmente.* Posto $U = U_i$ e $V = V_i$ in (6) per $i = 1, 2$, troviamo due equazioni lineari, che, risolute rispetto a γ ed a γ_u, danno

$$\gamma = \frac{V_1' U_2 - U_1 V_2'}{U_1' U_2 - U_1 U_2'} \quad , \quad 2\gamma_u = \frac{U_1' V_2' - V_1' U_2'}{U_1' U_2 - U_1 U_2'}.$$

Derivando la prima e confrontando con la seconda, si deduce

$$\gamma_u = -2\gamma_u - \gamma \frac{d}{du} \log(U_1' U_2 - U_1 U_2')$$

donde

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \, \partial v} = 0 .$$

E perciò $\gamma = U_3' V_3$, ove U_3 è funzione di u, V_3 di v. La (6) diventa

$$V' = U_3' V_3 U' + 2 U U_3'' V_3 ,$$

cioè

$$U_3' U' + 2 U U_3'' = h \qquad (h = \text{cost.}) ,$$

da cui si deduce appunto

$$U = \frac{hU_3 + k}{U_3'^2} \qquad (h \text{ , } k \text{ costanti}).$$

Se una superficie con $\beta = 1$ è deformabile in ∞^3 modi, allora γ è prodotto di una funzione della u *per una funzione della* v *e si ha* $\mathrm{K} = 0$.

Dovremo ora studiare le (3) in questo caso: cosa facile, ma qui inutile dopo i risultati del precedente §.

C) **Superficie con $\beta = 1$, $K \neq 0$, deformabili al più in ∞^2 modi.**

La (6) possegga ora *una sola* soluzione U, V (a meno di un fattore costante) con $U \neq 0$. Derivando rispetto ad u, troviamo

$$\gamma U'' + 3\gamma_u U' + 2U\gamma_{uu} = 0 .$$

Essendo $U \neq 0$, questa equazione in γ possederà due soluzioni indipendenti U_1', U_2' funzioni della sola u. E sarà

$$\gamma = U_1' V_1 + U_2' V_2 \tag{7}$$

ove le V_i sono funzioni della sola v. Nell'ipotesi $K \neq 0$, sia le U_1' ed U_2' che le V_1, V_2 saranno linearmente indipendenti. Dato γ, e scrittolo sotto la forma precedente, la U dovrà soddisfare alle

$$U_i' U'' + 3U_i'' U' + 2U_i''' U = 0 ,$$

cioè

$$U_i' U' + 2U_i'' U = h_i \quad , \quad (h_i \text{ costanti})$$

ossia

$$U_i'^2 U = h_i U_i + k_i \qquad (h_i,\ k_i \text{ costanti}). \tag{8}$$

Le due funzioni U_i sono dunque legate dalla

$$\frac{U_1'^2}{h_1 U_1 + k_1} = \frac{U_2'^2}{h_2 U_2 + k_2}. \tag{9}$$

Le superficie con $\beta = 1$, $K \neq 0$ *deformabili in* ∞^2 *modi sono, se esistono, quelle per cui* γ *ha il valore* (7), *dove le* U_1, U_2 *sono legate dalle* (9) (in cui, si noti, se $h_i \neq 0$, si può supporre, mutando $U_i + \frac{k_i}{h_i}$ in U_i, che $k_i = 0$).

Per il resto del calcolo assai facile, e che lasciamo al lettore, si devono discutere le (1), (2), (3).

D) **Le superficie R deformabili in ∞^3 modi.**

Le superficie R *deformabili in* ∞^2 *modi sono, se esistono, quelle per cui esiste una soluzione* (diversa da $U = V = \text{cost.}$) delle (4) cioè *della*

$$\beta V' + 2\beta_v V = \gamma U' + 2\gamma_u U. \tag{10}$$

Noi qui ci accontentiamo di studiare quelle deformabili in ∞^3 modi, cioè quelle per cui la (10) ammette due nuove soluzioni U_i, V_i $(i = 1, 2)$, che con la $U = V = 1$ formino un sistema di tre soluzioni indipendenti. Ponendo in (10) $U = U_i$ e $V = V_i$ si hanno due equazioni lineari in β, γ e $\beta_v = \gamma_u$. Risolvendole si trova il valore di $\frac{\beta_v}{\beta}$; da cui integrando si ha:

$$\beta^2 [U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2)] = U_3^3, \tag{11}$$

ove U_3 è una funzione della u. Così analogamente, risolvendo rispetto a $\frac{\gamma_u}{\gamma}$, integrando, indicando con V_3 una funzione della v, si trova:

$$\gamma^2 [V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2)] = V_3^3. \tag{11$_{\text{bis}}$}$$

Ma, dividendo l'un per l'altro i valori trovati di $\frac{\beta_v}{\beta}$ e $\frac{\gamma_u}{\gamma}$ (e ricordando che $\beta_v = \gamma_u$) si trova che

$$\frac{\beta}{U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2)} = \tag{11$_{\text{ter}}$}$$

$$= \frac{\gamma}{V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2)}.$$

Dividendo membro a membro le (11) e (11)$_{\text{bis}}$ e ricordando (11)$_{\text{ter}}$, si trova che

$$\beta : \gamma = U_3 : V_3,$$

cioè che *la superficie è isotermo-asintotica.*

La ricerca è p. es. ridotta allo studio della equazione non semplice

$$U_3 : V_3 = U_2'(V_1 - U_1) - U_1'(V_2 - U_2) :$$

$$: V_2'(V_1 - U_1) - V_1'(V_2 - U_2).$$

È inutile proseguire il calcolo, fatto per via più completa nelle pagine precedenti.