

Determinanty a matice v theorii a praxi

8. Speciální determinanty

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část první. (Czech).
Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 34–77.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403277>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

8. SPECIÁLNÍ DETERMINANTY.

V matematice i ve vědách užitých se často setkáváme s determinanty, jejichž struktura jeví (obyčejně na první pohled) zřejmé zákonitosti. Hodnoty takových determinantů lze pak vhodnými obraty vyjádřiti zpravidla ve velmi jednoduchém tvaru. V tomto paragrafu si uvedeme nejznámější z těchto speciálních determinantů; cesty, jichž tu bude při výpočtech užito, nejsou ovšem jediné, jimiž lze dospěti k cíli. V mnoha z uvedených případů existují ještě jiné, často jednodušší obraty — zvolil jsem zde ty, které pokládám z vlastních zkušeností za přístupné také počítajícím technikům, v jejichž řadách by bylo dostatečné zvládnutí theorie i praxe determinantů svrchovaně žádoucí.

a) *Determinant Vandermondeův*

má tvar

$$V_n = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (23)$$

a jeho hodnota se počítá podle vzorce

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1) \dots \\ \dots (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}). \quad (23')$$

Důkaz. Od každého sloupce determinantu V_n odečteme sloupec předchozí násobený x_1 ; tím se hodnota V_n , jak víme, nezmění, determinant však bude míti prvou řádku 1, 0, 0, 0, ..., 0, ostatní řádky pak budou $1, x_\nu - x_1, x_\nu^2 - x_1 x_\nu, x_\nu^3 - x_1 x_\nu^2, \dots, x_\nu^{n-1} - x_1 x_\nu^{n-2}$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$). Rozvedeme-li nyní determinant podle elementů prvního řádku a vytkneme pak z jednotlivých řádek společné faktory, dostaneme

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1).$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-2} \\ 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Determinant zde vystupující je zcela obdobný původnímu, pouze jeho stupeň je $n - 1$ a základní prvky $x_2, x_3, \dots, x_n$. Naložíme s ním stejně jako dříve s V_n a dostaneme

$$\begin{aligned} V_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots \\ &\dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots (x_n - x_2). \end{aligned}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1, & x_3, & x_3^2, & \dots, & x_3^{n-3} \\ 1, & x_4, & x_4^2, & \dots, & x_4^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Další aplikací postupu už dvakrát užitého dospějeme nakonec k vyjádření:

$$\begin{aligned} V_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \dots \\ &\dots (x_n - x_2)(x_4 - x_3) \dots (x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

To však je pouze jiný tvar vzorce (23'), jehož platnost je tím dokázána.

Poznámky. 1. Pokládáme-li Vandermondeův determinant za funkci proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, tedy $V_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pak tato funkce mění při libovolné permutaci svých proměnných očividně nejvýše své znaménko. Funkcím této vlastnosti se říká alternující.

2. Vandermondeův determinant má stěžejní roli v pojmu diskriminantu algebraické rovnice.

3. Pro $n = 3$ byl determinant (23) po prvé studován Vandermondem (*Résolution des équations*, 1770) a pro obecné n Cauchym.

b) *Determinant persymetrický* (také orthosymetrický).

Je to determinant n -tého stupně, zbudovaný z elementů $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ tak, že jeho obecný prvek $a_{ik} = c_{i+k-2}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$). Označíme jej znakem P_n , takže

$$P_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, & c_3, & \dots, & c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \dots, & c_n \\ c_2, & c_3, & c_4, & c_5, & \dots, & c_{n+1} \\ c_3, & c_4, & c_5, & c_6, & \dots, & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}, & c_n, & c_{n+1}, & c_{n+2}, & \dots, & c_{2n-2} \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Zavedeme-li si postupné difference veličin c , podle schematu

$$\begin{array}{cccccccccccc} \Delta_0^{(0)} & = & c_0, & c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \dots, & c_{2n-6}, & c_{2n-5}, & c_{2n-4}, & c_{2n-3}, & c_{2n-2} \\ & \Delta_1^{(1)}, & \Delta_2^{(1)}, & \Delta_3^{(1)}, & \Delta_4^{(1)}, & \dots, & \Delta_{2n-5}^{(1)}, & \Delta_{2n-4}^{(1)}, & \Delta_{2n-3}^{(1)}, & \Delta_{2n-2}^{(1)} \\ & & \Delta_2^{(2)}, & \Delta_3^{(2)}, & \Delta_4^{(2)}, & \dots, & \Delta_{2n-4}^{(2)}, & \Delta_{2n-3}^{(2)}, & \Delta_{2n-2}^{(2)} \\ & & & \Delta_3^{(3)}, & \Delta_4^{(3)}, & \dots, & \Delta_{2n-3}^{(3)}, & \Delta_{2n-2}^{(3)} \\ & & & & \Delta_4^{(4)}, & \dots, & \Delta_{2n-2}^{(4)} \\ & & & & & \dots, & & & & & & & \end{array} \quad (25)$$

kde každá z diferencí je rovna rozdílu veličiny stojící nad ní vpravo minus veličina stojící nad ní vlevo, lze dokázat tuto skutečnost:

Persymetrický determinant veličin $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ je roven persymetrickému determinantu jejich diferencí $\Delta_0^{(0)}, \Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \dots, \Delta_{2n-2}^{(2n-2)}$.

Důkaz. Na determinant (24) aplikujeme serii úprav, z nichž každá mění pouze jeho tvar (nikoli hodnotu, v. věty 4. a 5., jakož i poznámky k nim) a skládá se vždy ze dvou kroků. Prvá úprava spočívá v tom, že od každého sloupce P_n mimo první odečteme sloupec předchozí a v determinantu tak vzniklém pak od každé řádky vyjma prvou odečteme řádku předchozí. Dostaneme determinant $P_n^{(1)}$, který po-

drobíme druhé úpravě: Ode všech sloupců mimo první dva odečteme vždy sloupec předchozí a potom ode všech řádků třetím počínaje odečítáme vždy řádek předchozí. Na determinant $P_n^{(2)}$ takto vzniklý aplikujeme úpravu třetí: Každý sloupec čtvrtým počínaje zmenšíme o elementy sloupce předchozího a pak naložíme obdobně s každým řádkem až na první tři. Vyjde nám determinant

$$P_n^{(3)} = \begin{vmatrix} \Delta_0^{(0)} & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \dots & \Delta_{n-1}^{(3)} \\ \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \Delta_4^{(4)} & \dots & \Delta_n^{(4)} \\ \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \Delta_4^{(4)} & \Delta_5^{(5)} & \dots & \Delta_{n+1}^{(5)} \\ \Delta_3^{(3)} & \Delta_4^{(4)} & \Delta_5^{(5)} & \Delta_6^{(6)} & \dots & \Delta_{n+2}^{(6)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n-1}^{(3)} & \Delta_n^{(4)} & \Delta_{n+1}^{(5)} & \Delta_{n+2}^{(6)} & \dots & \Delta_{2n-2}^{(6)} \end{vmatrix}.$$

Takto postupujíce dostaneme po $n - 1$ krocích původní determinant P_n ve tvaru $P_n^{(n-1)}$, t. j. právě v tom tvaru, o němž mluví svrchu uvedená věta.

Doporučuji čtenáři provést tuto úpravu obecně užitím obecné indukce podle vzoru důkazu věty 1.

Poznámky. 1. Tvoří-li veličiny $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ aritmetickou řadu stupně $(n - 1)$ -ho (takže je řada n -tých diferencí nulová), má jejich persymetrický determinant hodnotu

$$P_n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} [\Delta_{n-1}^{(n-1)}]^n; \quad (26)$$

tvoří-li řadu stupně nižšího, než $(n - 1)$ -ho, je $P_n = 0$. Tyto skutečnosti jsou přímým důsledkem vyjádření P_n pomocí diferencí veličin $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$.

2. Persymetrické determinanty jsou důležité v theorii invariantů a rovnic algebraických (Sturmův teorém, diskriminant). Zvláště podrobně se jimi zabývali *Sylvester* (Philos. Trans. 1853) a *Hankel*.

c) Cyklický determinant.

Je zvláštním případem determinantu persymetrického, z něhož jej dostaneme, platí-li $c_{n+\nu} = c_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-2$). Má tedy tvar

$$C_n = \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2, & \dots, & c_{n-3}, & c_{n-2}, & c_{n-1} \\ c_1, & c_2, & c_3, & \dots, & c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0 \\ c_2, & c_3, & c_4, & \dots, & c_{n-1}, & c_0, & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-2}, & c_{n-1}, & c_0, & \dots, & c_{n-5}, & c_{n-4}, & c_{n-3} \\ c_{n-1}, & c_0, & c_1, & \dots, & c_{n-4}, & c_{n-3}, & c_{n-2} \end{vmatrix}. \quad (27)$$

O determinantu C_n platí věta:

Bud' polynom $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$; determinant C_n lze vyjádřiti ve tvaru

$$C_n = (-1)^{[(n-1)(n-2)]} \cdot f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n), \quad (28)$$

kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ značí kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$.

Důkaz. Ukážeme napřed, že determinant C_n je dělitelný výrazem $f(x)$, je-li jen $x^n - 1 = 0$. Používající nějakého kořene x této rovnice upravme C_n tak, že k jeho prvnímu sloupci přičteme x -násobný druhý, x^2 -násobný třetí, ..., až x^{n-1} -násobný poslední. Ostatní sloupce necháme beze změny, takže $(\nu + 1)$ -vý řádek bude míti na prvním místě výraz

$$\begin{aligned} & c_\nu + c_{\nu+1}x + c_{\nu+2}x^2 + \dots + c_{n-2}x^{n-\nu-2} + c_{n-1}x^{n-\nu-1} + \\ & + c_0x^{n-\nu} + c_1x^{n-\nu+1} + \dots + c_{\nu-1}x^{n-1} = \\ & = \frac{1}{x^\nu} (c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \dots + \\ & + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0x^n + c_1x^{n+1} + \dots + c_{\nu-1}x^{n+\nu-1}) = \\ & = \frac{1}{x^\nu} (c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1} + c_{\nu+2}x^{\nu+2} + \dots + \\ & + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1} + c_0 + c_1x + \dots + c_{\nu-1}x^{\nu-1}) = \\ & = \frac{1}{x^\nu} f(x), \end{aligned}$$

na ostatních místech pak stojí prvky $c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{r-1}$.

Obsahují tedy všechny elementy prvního sloupce v takto tvarově pozměněném determinantu C_n výraz $f(x)$, který lze proto vytknouti jako činitel před determinant (v. větu 4.), takže je C_n skutečně dělitelno hodnotou $f(x)$, je-li jenom x kořenem rovnice $x^n - 1 = 0$. Protože pak má tato rovnice n kořenů $x_1, x_2, \dots, x_n$, je C_n dělitelno každým z výrazů $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ a dá se tedy psáti ve tvaru

$$C_n = C \cdot f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n).$$

Abychom získali určitý názor o veličině C , představme si, že všechny veličiny $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ jsou fyzikální s touže dimensí t (na př. cm, sec a pod.); je tedy $c_\varrho = t\gamma_\varrho$, $\varrho = 0, 1, 2, \dots, n-1$, kde γ_ϱ je číslo bez rozměru. Determinant C_n nabude tvaru $t^n \Gamma_n$, výrazy $f(x_r)$ tvaru $t\varphi(x_r)$, kde Γ_n a $\varphi(x_r)$ jsou čísla snadno představitelného tvaru (proved' podrobně!); veličina C má neznámý rozměr t^ξ , takže přejde v novou $t^\xi \Gamma$. Posléze psané vyjádření C_n tedy nabude tvaru

$$t^n \Gamma_n = t^\xi \Gamma \cdot t^n \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n),$$

z čehož vyplývá pro ξ hodnota 0, takže C je bez rozměru; je to tedy konstanta neobsahující žádný z prvků $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$.

Abychom tuto konstantu určili, uvažujme o speciálním případě determinantu C_n , kdy $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{n-2} = 0$, $c_{n-1} = 1$. Pak je $f(x_r) = c_{n-1} x_r^{n-1} = x_r^{n-1}$ a determinant C_n má všechny prvky nulové, až na elementy vedlejší diagonály, které jsou vesměs rovny 1. Je tedy v tomto zvláštním případě

$$C_n = (-1)^{[n(n+3)]},$$

takže máme pro hodnotu C vztah

$$(-1)^{[n(n+3)]} = C(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}.$$

Z theorie rovnic však je známo, že v našem případě jest

$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}$ a proto vychází
(provésti podrobně!)

$$C = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n+3)]-(n-1)(n+1)} = (-1)^{\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)]},$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Pěkným způsobem lze determinant C_n vypočísti, násobíme-li jej determinantem Vandermondeovým ($x_1, x_2, \dots, x_n$ značí stále kořeny rovnice $x^n - 1 = 0$)

$$I = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots, & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \dots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Doporučuji provést podrobně!

d) *Kontinuant*

je determinant tvaru:

$$K_n = \begin{vmatrix} b_1, & a_2, & 0, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ -1, & b_2, & a_3, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -1, & b_3, & a_4, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & b_4, & a_5, \dots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1, & b_5, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \dots, b_{n-1}, & a_n \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \dots, -1, & b_n \end{vmatrix}. \quad (29)$$

Vedle označení K_n uijeme pro tento determinant také názorného symbolu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ a rozvedeme jej (užitím Laplaceovy věty) podle prvních ν sloupců. Z těchto ν sloupců je možno vybrati celkem tyto nenulové ν -řadové determinanty:

Determinant obsahující elementy řádků 1, 2, ..., ν -tého; je to zřejmě $(b_1, b_2, \dots, b_\nu)$ a patří k němu v K_n doplněk $(b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \dots, b_n)$.

Determinant ze řádků o pořadových číslech $1, 2, \dots,$

$\nu - 1, \nu + 1$. Má hodnotu $-(b_1, b_2, \dots, b_{\nu-1})$ a patří k němu doplněk $-a_{\nu+1}(b_{\nu+2}, b_{\nu+3}, \dots, b_n)$.

Determinant ze řádků 2, 3, ..., $\nu + 1$; není třeba jej brát v úvahu, protože k němu patří nulový doplněk.

Máme tedy pro daný kontinuant redukční vztah

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (b_1, b_2, \dots, b_\nu) \cdot (b_{\nu+1}, \dots, b_n) + a_{\nu+1}(b_1, b_2, \dots, b_{\nu-1})(b_{\nu+2}, \dots, b_n); \quad (30)$$

$$\nu = 1, 2, \dots, n.$$

Pro $\nu = n - 1$ dostáváme odtud přímo rekurentní relaci pro K_n ve tvaru

$$K_n = b_n K_{n-1} + a_n K_{n-2}; \quad K_0 = 1. \quad (31)$$

Poznámky. 1. Pro $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 1$ máme t. zv. jednoduchý kontinuant (*Sylvester*, Philos. Magazine, 1853). Je-li mimoto také ještě $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, máme případ zvláště jednoduchý. Vzorec (31) zní pak

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}, \quad (31')$$

takže pro řadu $K_1, K_2, K_3, \dots$ dostáváme

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (31'')$$

Je to známá řada *Fibonacciova* (Lionardo Pisanus, naroz. 1175).

2. Budiž $a_2 = a_3 = \dots = a_n = b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$ a $n = 2\nu$. Tu nabude vzorec (30) tvaru

$$K_{2\nu} = K_\nu^2 + K_{\nu-1}^2. \quad (30')$$

Srovnej s tím vnitřní strukturu řady (31'').

3. Sblížené hodnoty řetězového zlomku

$$b_1 + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

jsou zlomky, jejichž čitatele i jmenovatele lze vyjádřit ve tvaru (29). Ověřte na př. pro $n = 5$.

e) *Determinant reciproký*

k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ je determinant a , jehož obecný prvek a_{ik} je roven doplňku A_{ik} elementu a_{ik} v determinantu A . Je to tedy determinant

$$a = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Jeho hodnotu najdeme nejsnáze tak, že jej násobíme původním determinantem A . Výsledkem bude determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ takový, že

$$c_{ik} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn}; \\ i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Podle vzorců (12) jest však $c_{ik} = 0$ pro všechna $i \neq k$ a pouze elementy hlavní $c_{ii} = A$, takže má $|c_{ik}|$ všechny prvky nulové, až na elementy hlavní úhlopříčky. Ty jsou navzájem stejné a rovny A , takže máme $|c_{ik}| = a \cdot A = A^n$ a odtud v případě $A \neq 0$

$$a = A^{n-1}. \quad (33)$$

Tento vzorec zůstává v platnosti i pro $A = 0$, jak ukážeme později.

Také pro výpočet minorů determinantu a reciprokého k A lze udati poměrně jednoduché pravidlo. Libovolný minor m determinantu a budiž sestaven z elementů řádků s pořadovými čísly $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ a sloupců $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ a m_1 budiž jeho minor přidružený v a . Násobme si po řádcích determinant A s tím, který vznikne z a , když hlavní elementy subdeterminantu m_1 nahradíme vesměs číslem 1, ostatní pak prvky determi-

nantu a stojící v řádcích, z nichž je vzat m_1 , nulami. Výsledkem bude (v. věta Laplaceova) součin $(-1)^{S(i)+S(k)}m_1A$ ve tvaru determinantu $|c_{\rho\sigma}|$; $\rho, \sigma = 1, 2, \dots, n$, pro jehož obecný element máme

$$c_{\rho\sigma} = \sum_{\nu=1}^n a_{\rho\nu} \alpha_{\sigma\nu}; \quad (a)$$

zde je $\alpha_{\sigma\nu}$ obecný prvek determinantu, jímž A násobíme a jehož konstrukci jsme právě popsali. Pokud je σ rovno některému z čísel $i_1, i_2, \dots, i_r$, jest $\alpha_{\sigma\nu} = A_{\sigma\nu}$, takže máme vzorec $c_{\rho\sigma} = \sum_{\nu=1}^n a_{\rho\nu} A_{\sigma\nu}$ pro $\sigma = i_1, i_2, \dots, i_r$ a ve smyslu vztahů (12) lze psáti:

$$\begin{aligned} c_{\sigma\sigma} &= A, \quad c_{\rho\sigma} = 0 \text{ pro } \rho \neq \sigma; \\ \rho &= 1, 2, \dots, n, \quad \sigma = i_1, i_2, \dots, i_r. \end{aligned} \quad (b)$$

Jestliže je σ rovno některému z čísel $i_1, i_2, \dots, i_{n-r}$ zůstavších v řadě $1, 2, \dots, n$ po vyškrtání čísel $i_1, i_2, \dots, i_r$, tedy na př. $\sigma = i_\lambda$, je pouze $\alpha_{i_\lambda i_\lambda} = 1$, jinak $\alpha_{i_\lambda \nu} = 0$; $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-r}$ jsou čísla zbyvší v řadě $1, 2, \dots, n$ po vyškrtání $k_1, k_2, \dots, k_r$. Máme tedy

$$c_{\rho i_\lambda} = a_{\rho \kappa_\lambda}; \quad \rho = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n-r. \quad (c)$$

Je tudíž dotčený součin vyjádřen determinantem n -řadovým této vnitřní struktury: Ve sloupcích s pořadovými čísly $i_1, i_2, \dots, i_r$ jsou všechny elementy rovny nule, až na hlavní, mající vesměs hodnotu A . V ostatních sloupcích stojí elementy původního determinantu A v pořadí udaném vzorci (c). Rozvedením podle sloupců $i_1, i_2, \dots, i_r$ pak nacházíme výsledek

$$m = A^{r-1} \cdot (-1)^{S(i)+S(k)} \begin{vmatrix} a_{i_1 \kappa_1} & a_{i_1 \kappa_2} & \dots & a_{i_1 \kappa_{n-r}} \\ a_{i_2 \kappa_1} & a_{i_2 \kappa_2} & \dots & a_{i_2 \kappa_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{n-r} \kappa_1} & a_{i_{n-r} \kappa_2} & \dots & a_{i_{n-r} \kappa_{n-r}} \end{vmatrix}, \quad (34)$$

který lze zřejmě vysloviti takto: A^{1-r} -násobná hodnota r -řadového minoru m determinantu a reciprokého k A je rovna doplňku v determinantu A onoho minoru, který je v A s m stejnoolehly.

Poznámka. Determinanty tohoto druhu se zabýval už Cauchy. S jejich aplikacemi se setkáváme na př. v analytické geometrii.

f) *Determinant orthogonální.*

Determinant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nazýváme orthogonálním, platí-li mezi jeho elementy vztahy

$$\begin{aligned} a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \dots + a_{rn}a_{sn} &= 0 \\ \text{pro } r \neq s; \quad r, s &= 1, 2, \dots, n \\ a_{r1}^2 + a_{r2}^2 + \dots + a_{rn}^2 &= A_r^2 \\ \text{pro } r &= 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (35)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou při tom určitá čísla (ve zvláštním případě rovna 1).

Hodnotu takového determinantu určíme snadno tím, že jej umocníme dvěma. Všechny elementy čtverce A^2 budou podle vzorců (35) nulové, až na prvky hlavní. Ty mají hodnoty $c_{ii} = A_i^2$, takže dostaneme

$$A^2 = A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2$$

a tedy dále

$$A = \pm A_1 A_2 \dots A_n. \quad (36)$$

S orthogonálními determinanty se zhusta setkáváme v analytické geometrii a v theorii kvadratických forem. Jejich podrobnějšími vlastnostmi se budeme zabývatí později.

g) *Determinant Hermiteův.*

Jsou-li hlavní prvky a_{ii} čísla reálná, každé dva sdružené prvky (t. j. a_{ki}, a_{ik}) pak čísla komplexně sdružená, nazýváme determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ Hermiteovým. Označíme-li, jak jest obvyklé, znakem $\bar{a}_{ik}$ číslo komplexně sdružené s a_{ik} , je tedy $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$ a Hermiteův determinant se objeví ve tvaru

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Hermiteův determinant má vždy reálnou hodnotu.

Důkaz. Nahradme v H_n všechny elementy jejich hodnotami komplexně sdruženými. Tím přejde, jak známo z nauky o komplexních číslech, veličina H_n (t. j. hodnota Hermiteova determinantu) ve svou komplexně sdruženou $\bar{H}_n$. Na druhé straně vznikne však uvedeným nahrazením determinant nový, jehož ν -tý sloupec je tentýž, jako byl dříve ν -tý řádek původního determinantu. Lze si tedy představit, že nový determinant $\bar{H}_n$ vznikl z daného H_n tím, že jsme v něm zaměnili řádky za sloupce a naopak. Takové dva determinanty mají však stejnou hodnotu (v. pozn. k definici 4.), takže dvě komplexně sdružená čísla $H_n, \bar{H}_n$ jsou si rovna. To je však možno jenom tenkrát, jsou-li obě reálná, čímž je věta dokázána.

Doplňky dvou sdružených prvků a_{ik}, a_{ki} v Hermiteově determinantu jsou determinanty o hodnotách komplexně sdružených.

Důkaz. Uvažujme napřed o subdeterminantech M_{ik} a M_{ki} ; ν -tý řádek prvního jest: $a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \dots, a_{\nu, k-1}, a_{\nu, k+1}, \dots, a_{\nu n}$ a ϱ -tý jeho sloupec: $a_{1\varrho}, a_{2\varrho}, \dots, a_{i-1, \varrho}, a_{i+1, \varrho}, \dots, a_{n\varrho}$.

U determinantu M_{ki} je pak ϱ -tý řádek: $a_{\varrho 1}, a_{\varrho 2}, \dots, a_{\varrho, i-1}, a_{\varrho, i+1}, \dots, a_{\varrho n}$ a ν -tý sloupec: $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{k-1\nu}, a_{k+1\nu}, \dots, a_{n\nu}$. Tato fakta platí, pokud je $\nu \leq i-1$, $\varrho \leq k-1$. Pro $\nu \geq i$, $\varrho \geq k$ musíme indexy ν , ϱ nahraditi o 1 většími, takže na př. bude ϱ -tý řádek minoru M_{ki} pro $\varrho \geq k$ míti tvar: $a_{\varrho+1,1}, a_{\varrho+1,2}, \dots, a_{\varrho+1,i-1}, a_{\varrho+1,i+1}, \dots, a_{\varrho+1,n}$. Vyměníme-li nyní v M_{ki} řádky a sloupce navzájem, zůstane M_{ki} , pokud jde o hodnotu, beze změny, jeho ν -tý sloupec se však stane ν -tým řádkem a ϱ -tý řádek ϱ -tým sloupcem. Bude tedy na př. pro $\nu \leq i-1$ řádek ν -tý tvarově změněného minoru M_{ki} : $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{k-1\nu}, a_{k+1\nu}, \dots, a_{n\nu}$. Protože pak byl původní determinant podle předpokladu Hermiteův, platí $a_{1\nu} = \bar{a}_{\nu 1}, a_{2\nu} = \bar{a}_{\nu 2}, \dots$ a lze tedy ν -tý řádek subdeterminantu M_{ki} psáti ve tvaru: $\bar{a}_{\nu 1}, \bar{a}_{\nu 2}, \dots, \bar{a}_{\nu, k-1}, \bar{a}_{\nu, k+1}, \dots, \bar{a}_{\nu n}$, takže je „komplexně sdružen“ s ν -tým řádkem subdeterminantu M_{ik} . Stejně lze tuto skutečnost ukázati i o sloupcích, z čehož je patrné, že M_{ki} dostaneme z M_{ik} jednoduše tak, že všechny prvky minoru M_{ik} nahradíme komplexně sdruženými. Jsou tedy dva sdružené minory M_{ik}, M_{ki} čísla komplexně sdružená a proto i doplňky A_{ik}, A_{ki} , jež z nich vzniknou násobením touže hodnotou $(-1)^{i+k}$. Tím je tvrzení dokázáno a plyne z něho na př. skutečnost, že determinant reciproký k Hermiteovu je opět typu Hermiteova.

Poznámky. 1. Speciálními typy determinantu právě probraného jsou determinant souměrný a polosouměrný, o nichž se zmíníme blíže ve zvláštních odstavcích.

2. Podrobněji studoval determinant H_n po prvé Hermite (Journ. f. Math., 1854).

h) *Determinant souměrný (symetrický).*

Jsou-li v Hermiteově determinantu *každé dva sdružené elementy stejné*, t. j. $a_{ik} = a_{ki}$, tudíž reálné, jmenuje se tento determinant symetrický. Doplňky dvou sdružených prvků jsou tu stejné (dokaž podrobně pomocí vlastností

obdobných doplňků v determinantu H_n), takže determinant reciproký k souměrnému je opět souměrný.

Čtverec každého determinantu je determinantem souměrným.

Důkaz. Podle věty 9. vzorce (14) je obecný element c_{ik} determinantu vzniklého zdvojnásobením $|a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \dots, n$:

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \dots + a_{in}a_{kn}; \quad (38)$$

je tedy roven elementu sdruženému c_{ki} a věta je tím dokázána.

Studiem souměrných determinantů se zabývali *Cayley* (Journ. f. Math., 1846) a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1877). Jsou důležité na př. v analytické geometrii ploch a v nebeské mechanice.

k) *Determinant polosouměrný.*

Specialisujeme Hermiteův determinant (37) tím způsobem, že hlavní elementy $a_{rr} = 0$, $r = 1, 2, \dots, n$, kdežto ostatní a_{rs} budou ryze imaginární: $a_{rs} = i\alpha_{rs}$, $a_{sr} = \bar{a}_{rs} = -i\alpha_{rs}$; vznikne tak determinant I_n , z jehož všech elementů vytýkáme faktor i a dostaneme

$$I_n = i^n Q_n, \quad (39)$$

kdež determinant

$$Q_n = \begin{vmatrix} 0, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12}, & 0, & \alpha_{23}, & \dots, & \alpha_{2n} \\ -\alpha_{13}, & -\alpha_{23}, & 0, & \dots, & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{1n}, & -\alpha_{2n}, & -\alpha_{3n}, & \dots, & 0 \end{vmatrix} \quad (40)$$

se nazývá polosouměrným determinantem reálných prvků α_{rs} .

Z rovnice (39) plyne pro Q_n první zajímavý důsledek: I_n je číslo reálné jakožto hodnota Hermiteova determinantu, Q_n je reálné jakožto hodnota determinantu s reálnými prvky.

Je-li n liché, je však i^n ryze imaginární, takže vztah (39) nutně žádá, aby $Q_n = 0$. Je tedy *polosouměrný determinant lichého stupně roven nule*.

O polosouměrných determinantech sudého stupně si později ukážeme, že jsou kladné a že se dají vyjádřit jako čtverce jistých celistvých racionálních funkcí svých prvků (t. zv. Pfaffiánů, čili polodeterminantů).

Označme si subdeterminanty dvou sdružených prvků a_{rs} , a_{sr} v determinantu I_n symboly M_{rs} , M_{sr} a korespondující minory polosouměrného determinantu Q_n znaky Q_{rs} , Q_{sr} . Z theorie Hermiteových determinantů víme, že čísla M_{rs} a M_{sr} jsou sdružená, t. j. $M_{sr} = \overline{M_{rs}}$; nyní však je patrně $M_{rs} = i^{n-1}Q_{rs}$, $M_{sr} = i^{n-1}Q_{sr}$ a právě uvedená rovnost se dá psáti ve tvaru $i^{n-1}Q_{sr} = (-i)^{n-1}Q_{rs} = (-1)^{n-1}i^{n-1}Q_{rs}$, čili

$$Q_{sr} = (-1)^{n-1}Q_{rs}. \quad (41)$$

Z tohoto vzorce vyplývá: *Determinant reciproký k polosouměrnému determinantu lichého stupně je souměrný, reciproký k polosouměrnému determinantu stupně sudého je opět polosouměrný.*

Polosouměrnými determinanty se zabývali na př. *Cayley*, *Mertens* a *Frobenius* (Journ. f. Math., 1849, 1877). Jejich nejznámější použití se týká řešení Pfaffova problému v theorii diferenciálních rovnic.

1) *Determinant vroubený.*

Připojíme-li k danému determinantu $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ na pravé straně r sloupců a dole r řádků tak, že připojené řady mají společné elementy nulové, dostaneme z něho determinant nový, který byl označen příléhavým jménem „vroubený“. Jde tedy o determinant

$$R_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \dots, & y_{nr} \\ x_{11}, & \dots, & x_{1n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ x_{21}, & \dots, & x_{2n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{r1}, & \dots, & x_{rn}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Při jeho výpočtu budeme rozeznávat tři případy:

$\alpha) r = n$; rozvedeme-li R_r podle posledních r řádků (v. věta 8.), dostaneme ihned vzorec

$$R_n = (-1)^n \cdot X \cdot Y, \quad (43)$$

kde značí X, Y determinanty z prvků $x_{\rho\sigma}, y_{\rho\sigma}$.

$\beta)$ $r > n$; věta 8. ukazuje ihned, provádíme-li opět rozvoj podle posledních r řádků, že jest

$$R_r = 0. \quad (44)$$

$\gamma) r < n$; rozvádíme opět podle posledních r řádků. Obecný člen tohoto rozvoje bude

$$(-1)^{nr+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r} \cdot \begin{vmatrix} x_{1\nu_1} & x_{1\nu_2} & \dots & x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1} & x_{2\nu_2} & \dots & x_{2\nu_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r\nu_1} & x_{r\nu_2} & \dots & x_{r\nu_r} \end{vmatrix} \cdot$$

kde $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_r$ jsou libovolná čísla vybraná z řady $1, 2, \dots, n$ a $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{n-r}$ čísla, která v ní po tomto vybrání zbudou. Je zřejmo, že celý rozvoj determinantu R_r bude mít $\binom{n}{r}$ sčítanců právě uvedeného tvaru.

Druhý determinant, vystupující jako faktor v obecném členu rozvoje, rozvedme dále podle posledních r sloupců. Obecný člen tohoto druhého rozvoje bude mít tvar

$$(-1)^{r(n-r)+\frac{1}{2}[r(r+1)]+\varrho_1+\varrho_2+\dots+\varrho_r} \cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \dots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \dots, & y_{\varrho_2 r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \dots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} a_{\tau_1 \sigma_1}, & a_{\tau_1 \sigma_2}, & \dots, & a_{\tau_1 \sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2 \sigma_1}, & a_{\tau_2 \sigma_2}, & \dots, & a_{\tau_2 \sigma_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\tau_{n-r} \sigma_1}, & a_{\tau_{n-r} \sigma_2}, & \dots, & a_{\tau_{n-r} \sigma_{n-r}} \end{vmatrix},$$

kde $\varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_r$ a $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-r}$ jsou čísla stejných vlastností, jako dříve systémy (ν) a (σ) . Takových členů bude celkem $\binom{n}{r}$, takže se obecný člen původního rozvoje dá psát ve tvaru

$$(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)-r} \cdot \begin{vmatrix} x_{1\nu_1}, & x_{1\nu_2}, & \dots, & x_{1\nu_r} \\ x_{2\nu_1}, & x_{2\nu_2}, & \dots, & x_{2\nu_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r\nu_1}, & x_{r\nu_2}, & \dots, & x_{r\nu_r} \end{vmatrix}.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} y_{\varrho_1 1}, & y_{\varrho_1 2}, & \dots, & y_{\varrho_1 r} \\ y_{\varrho_2 1}, & y_{\varrho_2 2}, & \dots, & y_{\varrho_2 r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{\varrho_r 1}, & y_{\varrho_r 2}, & \dots, & y_{\varrho_r r} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{\tau_1 \sigma_1}, & \dots, & a_{\tau_1 \sigma_{n-r}} \\ a_{\tau_2 \sigma_1}, & \dots, & a_{\tau_2 \sigma_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{\tau_{n-r} \sigma_1}, & \dots, & a_{\tau_{n-r} \sigma_{n-r}} \end{vmatrix}, \quad (a)$$

kde $S(\nu) = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r$, $S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_r$.

Sloupce o pořadových číslech $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ a řádky s pořadovými indexy $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ určují svými společnými prvky v determinantu A minor, jehož jest poslední faktor členu (a) minorem přidruženým — označíme jej znakem $M_{(\nu)(\varrho)}$. Výraz $(-1)^{S(\nu)+S(\varrho)} M_{(\nu)(\varrho)}$ označme symbolem $A_{(\nu)(\varrho)}$; je to ve smyslu definice 5. doplněk minoru určeného společnými prvky řad, z nichž jsou vybrány subdeterminanty $X_{(\nu)}$, $Y_{(\varrho)}$ ve vztahu (a).

Máme tedy v případě $r < n$ výsledek

$$R_r = (-1)^r \Sigma X_{(\nu)} Y_{(\varrho)} \cdot A_{(\nu)(\varrho)}. \quad (45)$$

Součet zde vystupující má podle předchozích úvah celkem $\binom{n}{r}^2$ sčítanců.

Pěkným příkladem aplikace poznatků o vroubených determinantech je skutečný výpočet součinu dvou matic, jehož výměr jsme podali v definici 6. Postupujeme při tom zcela obdobně, jako při důkazu věty 9. o násobení dvou determinantů, pouze místo determinantu tam užitého vezme-me v úvahu obecnější:

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Způsobem naprosto stejným, jaký byl volen ve větě 9., docházíme k výsledku, že řádkový součin obou matic $\|a_{ik}\|$, $\|b_{ik}\|$, t. j. determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, jak byl definován výměrem 6., souvisí s hodnotou determinantu C_1 vztahem

$$|c_{ik}| = (-1)^{m(m+n)} C_1.$$

Upravme nyní determinant C_1 tak, že jeho $(m + \nu)$ -tý řádek přemístíme na místo ν -té a to postupně pro $\nu = 1, 2, \dots, n$. Determinant C_2 , který tím dostaneme, je pak vroubený typu (42) a má v našem případě tvar jednoduchý:

$$C_2 = (-1)^{mn} C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

rozepíšeme takto:

$$\overline{R}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n}, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn}, & 0 \\ x_1, & \dots, & x_n, & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n}, & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & \dots, & a_{nn}, & y_n \\ x_1, & \dots, & x_n, & 0 \end{vmatrix} = At + R_1; \quad (49)$$

R_1 nalezneme snadno ze vzorce (45).

2. Jsou-li společné elementy vroubících řádků a sloupců nikoli nuly, nýbrž tvoří matici o řádcích $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1r}; t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2r}; \dots; t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rr}$, máme případ determinantu ovroubeného obecně — označíme jej znakem $\bar{R}_r$. Takovýto determinant můžeme vždycky převést na tvar, kde vroubící řádky tvoří prvních r řádků a vroubící sloupce prvních r sloupců, takže subdeterminant $T = |t_{ik}|; i, k = 1, 2, \dots, r$ stojí v tomto determinantu — označme jej Φ_r — vlevo nahoře. Na determinant Φ_r lze aplikovati větu Sylvesterovu a máme

$$\Phi_r \cdot T^{n-1} = |S_{\lambda\nu}|; \lambda, \nu = 1, 2, \dots, n,$$

kde jest

$$S_{\lambda r} = \begin{vmatrix} t_{11}, & \dots, & t_{1r}, & x_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r1}, & \dots, & t_{rr}, & x_{rr} \\ y_{\lambda 1}, & \dots, & y_{\lambda r}, & a_{\lambda r} \end{vmatrix}. \quad (50)$$

Protože pak jest $\Phi_r = \bar{R}_r$ (dokáže se snadno pomocí věty 3.), dávají vztahy (50) přímo vzorec pro výpočet obecně vroubeného determinantu. Snadno lze tento výpočet provést ovšem jen pro malé hodnoty n, r .

Obecné pravidlo pro výpočet determinantu obecně vroubeného je značně složité. Najdeme je, používající pravidel o násobení determinantů a o determinantech reciprokových k daným, takto: Determinant obecně vroubený

$$\bar{R}_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & y_{11}, & y_{12}, & \dots, & y_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, & y_{21}, & y_{22}, & \dots, & y_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}, & y_{n1}, & y_{n2}, & \dots, & y_{nr} \\ x_{11}, & x_{12}, & \dots, & x_{1n}, & t_{11}, & t_{12}, & \dots, & t_{1r} \\ x_{21}, & x_{22}, & \dots, & x_{2n}, & t_{21}, & t_{22}, & \dots, & t_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{r1}, & x_{r2}, & \dots, & x_{rn}, & t_{r1}, & t_{r2}, & \dots, & t_{rr} \end{vmatrix} \quad (51)$$

násobíme novým

$$U = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \dots, & A_{1n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ A_{21}, & A_{22}, & \dots, & A_{2n}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn}, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & T_{11}, & T_{12}, & \dots, & T_{1r} \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & T_{21}, & T_{22}, & \dots, & T_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & T_{r1}, & T_{r2}, & \dots, & T_{rr} \end{vmatrix},$$

kde A_{ik} , T_{is} značí doplňky prvků a_{ik} , t_{is} v determinantech $A = |a_{ik}|$, $T = |t_{is}|$. Dostaneme

$$U \cdot \bar{R}_r = \begin{vmatrix} A, & 0, & \dots, & 0, & (y_1 T_1), & (y_1 T_2), & \dots, & (y_1 T_r) \\ 0, & A, & \dots, & 0, & (y_2 T_1), & (y_2 T_2), & \dots, & (y_2 T_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & A, & (y_n T_1), & (y_n T_2), & \dots, & (y_n T_r) \\ (x_1 A_1), & (x_1 A_2), & \dots, & (x_1 A_n), & T, & 0, & \dots, & 0 \\ (x_2 A_1), & (x_2 A_2), & \dots, & (x_2 A_n), & 0, & T, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_r A_1), & (x_r A_2), & \dots, & (x_r A_n), & 0, & 0, & \dots, & T \end{vmatrix},$$

při čemž symbol $(x_s A_r)$ je zkratka za výraz: $x_{s1} A_{r1} + x_{s2} A_{r2} + \dots + x_{sn} A_{rn}$ a analogicky $(y_s T_r) = y_{s1} T_{r1} + y_{s2} T_{r2} + \dots + y_{sr} T_{rr}$.

Determinant $U \cdot \bar{R}_r$ rozvedeme podle prvních n řádků. Z řady čísel 1, 2, ..., n , $n+1$, ..., $n+r$ vezmeme libovol-

ných n : $1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{n-\kappa} \leq n < n+1 \leq n+\varrho_1 < \dots < n+\varrho_\kappa \leq n+r$ a zvolíme je za pořadová čísla sloupců minoru determinantu $U \cdot \bar{R}_r$, jehož řádky jsou tvořeny z prvních n řádek determinantu $U \cdot \bar{R}_r$. Rozvedeme-li tento minor podle prvních $n - \kappa$ sloupců (rozmyslete si věc ve smyslu úvah paragrafu 3. podrobně), nahlédneme snadno, že jeho hodnota je vyjádřena číslem

[illegible]

$\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_x$ jsou čísla, která zbudou v řadě $1, 2, \dots, n$ po vyškrtání čísel $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-x}$.

Doplňěk tohoto subdeterminantu v determinantu $U \cdot \bar{R}_r$ je minor přidružený k němu v $U \cdot \bar{R}_r$ a násobený výrazem $(-1)^{1(n+1)+S(r)+\kappa n+S(e)}$. Tento minor je obsažen v posledních r řádcích a ve sloupcích s pořadovými čísly $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_\kappa, n + \bar{\varrho}_1, n + \bar{\varrho}_2, \dots, n + \bar{\varrho}_{r-\kappa}$, kde $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \dots, \bar{\varrho}_{r-\kappa}$ jsou čísla zůstávší v řadě $1, 2, \dots, r$ po vyškrtání čísel $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\kappa$. Rozvedeme-li tento minor podle posledních $r - \kappa$ sloupců, poznáme, že má hodnotu (proved' podrobně)

[illegible]

$$S(v) = v_1 + v_2 + \dots + v_{n-k}, \quad S(\varrho) = \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_k.$$

Po jednoduchém výpočtu dostaneme podle Laplaceovy věty vyjádření

$$U \cdot \bar{R}_r = \sum (-1)^x A^{n-x} T^{r-x}.$$

[illegible]

Determinanty, které se v tomto součinu vyskytují, jsou však podle definice 6. a vzhledem ke stavbě svých prvků každý součinem dvou matic: prvý vzniká násobením matic

$$\left\| \begin{matrix} x_{e_1 1}, & x_{e_1 2}, & \dots, & x_{e_1 n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{e_n 1}, & x_{e_n 2}, & \dots, & x_{e_n n} \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} A_{\bar{v}_1 1}, & A_{\bar{v}_1 2}, & \dots, & A_{\bar{v}_1 n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{\bar{v}_n 1}, & A_{\bar{v}_n 2}, & \dots, & A_{\bar{v}_n n} \end{matrix} \right\|$$

a má tedy podle vzorce (47) hodnotu

$$\Sigma \left| \begin{matrix} x_{e_1 \sigma_1}, & \dots, & x_{e_1 \sigma_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{e_n \sigma_1}, & \dots, & x_{e_n \sigma_n} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} A_{\bar{v}_1 \sigma_1}, & \dots, & A_{\bar{v}_1 \sigma_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ A_{\bar{v}_n \sigma_1}, & \dots, & A_{\bar{v}_n \sigma_n} \end{matrix} \right|, \quad (c)$$

kde se sčítá přese všech $\binom{n}{n}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ čísel $1, 2, \dots, n$.

Podobně najdeme pro druhý z determinantů vztahu (b) výraz

$$\Sigma \left| \begin{matrix} y_{\bar{v}_1 \lambda_1}, & \dots, & y_{\bar{v}_1 \lambda_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y_{\bar{v}_n \lambda_1}, & \dots, & y_{\bar{v}_n \lambda_n} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} T_{e_1 \lambda_1}, & \dots, & T_{e_1 \lambda_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ T_{e_n \lambda_1}, & \dots, & T_{e_n \lambda_n} \end{matrix} \right|, \quad (d)$$

při čemž se sčítání vztahuje na všechny $\binom{r}{n}$ kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n -té třídy z elementů $1, 2, \dots, r$.

Uvažme ještě, že jsou determinanty, vystupující jako druhé faktory ve výrazech (c) a (d), reciproké k jistým minorům determinantů A , T a že se proto dají vyjádřiti ve tvaru

$$A^{n-1} \cdot C_{\left(\begin{smallmatrix} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \\ \sigma_1, \dots, \sigma_n \end{smallmatrix} \right)} \text{ resp. } T^{n-1} \cdot D_{\left(\begin{smallmatrix} e_1, \dots, e_n \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \end{smallmatrix} \right)};$$

při tom je $C_{\left(\begin{smallmatrix} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \\ \sigma_1, \dots, \sigma_n \end{smallmatrix} \right)}$ doplňkem onoho subdeterminantu z A ,

jehož prvky jsou vzaty z řádků s pořadovými čísly $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ a ze sloupců o pořadových číslech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Podobný význam má determinant $D_{\left(\begin{smallmatrix} e_1, \dots, e_n \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \end{smallmatrix} \right)}$ vůči determinantu z T .

Dosadíme-li tyto všechny hodnoty a výsledky do relace (b), vychází nám tento vzorec pro výpočet $U \cdot \bar{R}_r$:

$$U \cdot \bar{R}_r = \Sigma (-1)^{\kappa} A^{n-1} T^{r-1} \cdot \left[\Sigma C_{\left(\begin{smallmatrix} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\kappa} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa} \end{smallmatrix} \right)} \cdot \begin{vmatrix} x_{\varrho_1 \sigma_1}, \dots, x_{\varrho_1 \sigma_{\kappa}} \\ \dots \dots \dots \\ x_{\varrho_{\kappa} \sigma_1}, \dots, x_{\varrho_{\kappa} \sigma_{\kappa}} \end{vmatrix} \cdot \right. \\ \left. \cdot \Sigma D_{\left(\begin{smallmatrix} \varrho_1, \dots, \varrho_{\kappa} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{\kappa} \end{smallmatrix} \right)} \cdot \begin{vmatrix} y_{\bar{v}_1 \lambda_1}, \dots, y_{\bar{v}_1 \lambda_{\kappa}} \\ \dots \dots \dots \\ y_{\bar{v}_{\kappa} \lambda_1}, \dots, y_{\bar{v}_{\kappa} \lambda_{\kappa}} \end{vmatrix} \right].$$

Protože však je podle theorie determinantů reciprokých $U = A^{n-1} T^{r-1}$, dostáváme pro výpočet obecně vroubeného determinantu $\bar{R}_r$ tento definitivní vzorec:

$$\bar{R}_r = \Sigma (-1)^{\kappa} \cdot \left[\Sigma C_{\left(\begin{smallmatrix} \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{\kappa} \\ \sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa} \end{smallmatrix} \right)} \cdot \begin{vmatrix} x_{\varrho_1 \sigma_1}, \dots, x_{\varrho_1 \sigma_{\kappa}} \\ \dots \dots \dots \\ x_{\varrho_{\kappa} \sigma_1}, \dots, x_{\varrho_{\kappa} \sigma_{\kappa}} \end{vmatrix} \cdot \right. \\ \left. \cdot \Sigma D_{\left(\begin{smallmatrix} \varrho_1, \dots, \varrho_{\kappa} \\ \lambda_1, \dots, \lambda_{\kappa} \end{smallmatrix} \right)} \cdot \begin{vmatrix} y_{\bar{v}_1 \lambda_1}, \dots, y_{\bar{v}_1 \lambda_{\kappa}} \\ \dots \dots \dots \\ y_{\bar{v}_{\kappa} \lambda_1}, \dots, y_{\bar{v}_{\kappa} \lambda_{\kappa}} \end{vmatrix} \right]. \quad (52)$$

Rozuměti jest mu takto: Poslední součet se provádí přes všechny kombinace $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\kappa}$ z elementů 1, 2, ..., r , takže má celkem $\binom{r}{\kappa}$ sčítanců; prostřední součet jde přes všech $\binom{n}{\kappa}$ kombinací $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\kappa}$ čísel 1, 2, ..., n . Má tedy výraz v lomené závorce celkem $\binom{r}{\kappa} \binom{n}{\kappa}$ sčítanců, z nichž každý má ještě volné indexy (t. j. takové, přes něž dosud nebylo sčítáno) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{\kappa}$ a $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{\kappa}$, jež jsou resp. libovolná kombinace κ -té třídy z prvků 1, 2, ..., n a z prvků 1, 2, ..., r . Přes všechny tyto kombinace jest pak nutno prováděti prvý součet, který tedy má při daném κ celkem $\left[\binom{n}{\kappa} \binom{r}{\kappa} \right]^2$ členů. Na konec pak všechny tyto výsledky sečteme pro $\kappa = 0, 1, 2, \dots$

Obšírně se zabýval teorií vroubených determinantů *Arnaldi* (Giorn. di Battaglini, 1896).

m) Determinant

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11}, & a_{12} + \lambda b_{12}, & \dots, & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21}, & a_{22} + \lambda b_{22}, & \dots, & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + \lambda b_{n1}, & a_{n2} + \lambda b_{n2}, & \dots, & a_{nn} + \lambda b_{nn} \end{vmatrix} \quad (53)$$

je polynomem n -tého stupně v λ a píšeme jej tedy ve tvaru

$$D(\lambda) = I_0 + I_1\lambda + I_2\lambda^2 + \dots + I_{n-1}\lambda^{n-1} + I_n\lambda^n. \quad (54)$$

Koeficient I , dostaneme zřejmě tak, že v ν sloupcích determinantu $D(\lambda)$ ponecháme jen druhé sčítance, kdežto ve zbývajících $n - \nu$ sloupcích jen sčítance první. To je možno provést celkem $\binom{n}{\nu}$ způsoby a dospíváme tím tedy k $\binom{n}{\nu}$ determinantům, které sečteny dají právě člen I, λ^ν . Tak je

na př. $I_0 = A$, $I_1 = \sum_{\sigma=1}^n A_{\sigma}$, $I_2 = \Sigma A_{\sigma\sigma}$, ..., $I_n = B$, při čemž

A_ρ je determinant vzniklý z A tak, že v něm nahradíme ρ -tý sloupec čísly $b_{1\rho}, b_{2\rho}, \dots, b_{n\rho}$; $A_{\rho\sigma}$ je determinant vzniklý z A nahrazením elementů sloupců ρ -tého a σ -tého těmi, jež má v těchto sloupcích determinant B atd. Ve vzorci (54) se tedy vyskytuje celkem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

n -řadových determinantů, odvozených z prvků determinantů A, B .

n) *Determinant*

$$D(t) = \begin{vmatrix} a_{11} + t, & a_{12} + t, & \dots, & a_{1n} + t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, & \dots, & a_{nn} + t \end{vmatrix} \quad (55)$$

je lineární funkcí t , jak se snadno přesvědčíme odečtením prvního sloupce ode všech následujících. Je tedy

$$D(t) = \alpha + \beta t.$$

Pro $t = 0$ máme ihned $\alpha = D(0) = A$; konstanta β je pak zřejmě $\beta = \frac{dD(t)}{dt}$. Podle věty 12., vzorce (15) však máme

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{cccc} a_{11} + t, & a_{12} + t, & \dots, & a_{1n} + t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} + t, & a_{i-1,2} + t, & \dots, & a_{i-1,n} + t \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \\ a_{i+1,1} + t, & a_{i+1,2} + t, & \dots, & a_{i+1,n} + t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + t, & a_{n2} + t, & \dots, & a_{nn} + t \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1}, & a_{i-1,2}, & \dots, & a_{i-1,n} \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \\ a_{i+1,1}, & a_{i+1,2}, & \dots, & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{array} \right| = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} \right) = \sum_{i,k} A_{ik}.$$

Máme tudíž výsledek

$$D(t) = A + t \sum_{i, k} A_{ik}. \quad (55,1)$$

Poznámky. 1. Determinant (55) můžeme pokládati za speciální případ $D(\lambda)$ — t. j. determinantu (53) — a napsati pak jeho hodnotu ihned podle vzorce (54). Učiňte tak!

2. Pro $a_{ik} = 0$, $i \neq k$, je $A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$, $A_{ik} = 0$, $A_{ii} = \frac{A}{a_{ii}}$, takže v tomto speciálním případě jest

$$D(t) = ta_{11}a_{22} \dots a_{nn} \left(\frac{1}{t} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} \right). \quad (55,2)$$

Jsou-li zvláště všechna $a_{ii} = a$, máme

$$D(t) = a^{n-1}(a + nt). \quad (55,3)$$

p) *Determinant n-řadový*

$$D_n(x; a, b) = \begin{vmatrix} x, & a, & a, & \dots, & a, & a \\ b, & x, & a, & \dots, & a, & a \\ b, & b, & x, & \dots, & a, & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b, & b, & b, & \dots, & x, & a \\ b, & b, & b, & \dots, & b, & x \end{vmatrix} \quad (56)$$

upravíme odečtením každého sloupce od následujícího na tvar

$$D_n(x; a, b) = \begin{vmatrix} x, & a-x, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ b, & x-b, & a-x, & \dots, & 0, & 0 \\ b, & 0, & x-b, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b, & 0, & 0, & \dots, & x-b, & a-x \\ b, & 0, & 0, & \dots, & 0, & x-b \end{vmatrix};$$

rozvedením podle prvků prvního řádku dostaneme

$$D_n(x; a, b) = x \cdot \begin{vmatrix} x-b, & a-x, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & x-b, & a-x, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & x-b, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & x-b, & a-x \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & x-b \end{vmatrix} + b(x-a) \cdot \begin{vmatrix} 1, & a-x, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 1, & x-b, & a-x, & \dots, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x-b, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 0, & 0, & \dots, & x-b, & a-x \\ 1, & 0, & 0, & \dots, & 0, & x-b \end{vmatrix},$$

kde oba determinanty jsou $(n - 1)$ -řadové. První má hodnotu $(x - b)^{n-1}$, druhý pak označíme znakem Δ_{n-1} a odvodíme pro něj rekurentní relaci. Rozvedením podle první řádky najdeme ihned

$$\Delta_m = (x - b)^{m-1} + (x - a) \cdot \Delta_{m-1}, \quad (57)$$

z čehož vypočteme

$$\Delta_m = \sum_{\mu=0}^{m-1} (x - a)^\mu (x - b)^{m-\mu-1}. \quad (57,1)$$

Užitím těchto výsledků dostáváme pak definitivní výraz pro hodnotu determinantu (56):

$$D_n(x; a, b) = x(x - b)^{n-1} + b(x - a) \cdot \sum_{r=0}^{n-2} (x - a)^r (x - b)^{n-r-2}. \quad (56,1)$$

Často bývají uváděny speciální případy právě řešeného úkolu. Tak na př. jest

$$D_n(x; a, a) = [x + (n - 1) a] (x - a)^{n-1},$$

$$D_n(0; a, b) = (-1)^{n-1} ab \sum_{r=0}^{n-2} a^r b^{n-r-2} \text{ a pod.}$$

Poznámky. 1. Jistým zobecněním případu (56) je determinant

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} x_1, & a, & a, & \dots, & a, & a \\ b, & x_2 & a, & \dots, & a, & a \\ b, & b, & x_3, & \dots, & a, & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b, & b, & b, & \dots, & x_{n-1}, & a \\ b, & b, & b, & \dots, & b, & x_n \end{vmatrix}. \quad (58)$$

Zcela analogickým způsobem jako u (56) nacházíme vzorec

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b) = x_1 B_2 + b \sum_{q=1}^{n-1} A_q B_{q+2}; A_q = \prod_{r=1}^q (x_r - a),$$

$$B_\sigma = \prod_{\tau=\sigma}^n (x_\tau - b), B_{n+1} = 1. \quad (58,1)$$

2. Determinant

$$E_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & a, & a, & \dots, & a, & a, & a \\ x_1, & a, & a, & a, & \dots, & a, & a, & a \\ b, & x_2, & a, & a, & \dots, & a, & a, & a \\ b, & b, & x_3, & a, & \dots, & a, & a, & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b, & b, & b, & b, & \dots, & a, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, & \dots, & x_{n-2}, & a, & a \\ b, & b, & b, & b, & \dots, & b, & x_{n-1}, & a \end{vmatrix} \quad (59)$$

rozvedeme podle elementů prvního sloupce a dostaneme

$$\begin{aligned} E_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; a, b) &= \\ &= (a - x_1) E_{n-1}(x_2, \dots, x_{n-1}; a, b), \end{aligned} \quad (59,1)$$

takže bude

$$\begin{aligned} E_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; a, b) &= \\ &= a(a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (59,2)$$

3. Determinant

$$\bar{D}_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b) = \begin{vmatrix} a, & a, & \dots, & a, & a, & x_1 \\ a, & a, & \dots, & a, & x_2, & b \\ a, & a, & \dots, & x_3, & b, & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a, & x_{n-1}, & \dots, & b, & b, & b \\ x_n, & b, & \dots, & b, & b, & b \end{vmatrix} \quad (60)$$

vznikne z determinantu (58) takto: Nejprve vyměníme v (58) poslední sloupec postupně se všemi předchozími, až se dostane na místo prvé, t. j. celkem $n - 1$ výměn. V determinantu tak vzniklém vyměníme opět poslední sloupec se všemi předchozími, až se stane sloupcem druhým; celkem je to $n - 2$ výměn. Tak pokračujeme, až po celkovém počtu

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n - 1)$$

výměn dostaneme z $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b)$ právě determinant (60). Podle věty 3. tedy máme

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b), \quad (60,1)$$

při čemž je $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n; a, b)$ dáno vzorcem (58,1).

4. Hodnotu determinantu

$$I = \begin{vmatrix} 1, & 2, 3, \dots, n-1, n \\ 2, & 3, 4, \dots, n & 1 \\ 3, & 4, 5, \dots, 1, & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1, n, 1, \dots, n-3, n-2 \\ n, & 1, 2, \dots, n-2, n-1 \end{vmatrix} \quad (61)$$

najdeme takto: přičteme všechny sloupce k prvnímu; všechny prvky tohoto prvního sloupce budou pak míti tutéž hodnotu $\frac{1}{2}n(n+1)$, kterou z nich vytkneme. V determinantu takto vzniklém odečteme od každého řádku druhým počínající řádek předchozí a dostaneme determinant $\bar{D}_{n-1}(1-n, 1-n, \dots, 1-n; 1, 1)$, jehož hodnota je podle (60,1) rovna $(-1)^{1(n-1)(n-2)}D_{n-1}(1-n, 1-n, \dots, 1-n; 1, 1)$. Ze vzorce (58,1) však nacházíme

$$D_{n-1}(1-n, 1-n, \dots, 1-n; 1, 1) = (-1)^{n-1} \cdot n^{n-2},$$

takže konečně bude

$$I = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{1}{2}(n+1) n^{n-1}. \quad (61,1)$$

q) *Determinant Baltzeriiv*

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \dots, & a_{1,2n-1}, & a_{1,2n} \\ -a_{12}, & a_{11}, & -a_{14}, & a_{13}, & \dots, & -a_{1,2n}, & a_{1,2n-1} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \dots, & a_{2,2n-1}, & a_{2,2n} \\ -a_{22}, & a_{21}, & -a_{24}, & a_{23}, & \dots, & -a_{2,2n}, & a_{2,2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & a_{n4}, & \dots, & a_{n,2n-1}, & a_{n,2n} \\ -a_{n2}, & a_{n1}, & -a_{n4}, & a_{n3}, & \dots, & -a_{n,2n}, & a_{n,2n-1} \end{vmatrix}, \quad (62)$$

v němž jsou a_{i*} čísla reálná, upravíme tak, že sloupec 2ν -tý násobený imaginární jednotkou i přičteme k před-

chozímu a pak od řádku 2ν -tého odečteme i -násobný řádek $(2\nu - 1)$ -vý. To učiníme postupně pro $\nu = 1, 2, \dots, n$ a dostaneme

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & a_{14}, & \dots \\ 0, & a_{11} - ia_{12}, & 0, & a_{13} - ia_{14}, & \dots \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & a_{24}, & \dots \\ 0, & a_{21} - ia_{22}, & 0, & a_{23} - ia_{24}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

rozvedením podle řádků 2-ho, 4-ho, ..., $2n$ -ho vyjde

$$B_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & \dots, & a_{1,2n-1} + ia_{1,2n} \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & \dots, & a_{2,2n-1} + ia_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + ia_{n2}, & a_{n3} + ia_{n4}, & \dots, & a_{n,2n-1} + ia_{n,2n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} - ia_{12}, & a_{13} - ia_{14}, & \dots \\ a_{21} - ia_{22}, & a_{23} - ia_{24}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - ia_{n2}, & a_{n3} - ia_{n4}, & \dots \end{vmatrix},$$

takže je B_n součinem dvou čísel komplexně sdružených $M_n + iN_n$ (tak značíme hodnotu prvního determinantu) a $M_n - iN_n$, tedy:

$$B_n = M_n^2 + N_n^2, \quad (62,1)$$

kde M_n a N_n jsou dána vztahem

$$M_n + iN_n = \begin{vmatrix} a_{11} + ia_{12}, & a_{13} + ia_{14}, & \dots, & a_{1,2n-1} + ia_{1,2n} \\ a_{21} + ia_{22}, & a_{23} + ia_{24}, & \dots, & a_{2,2n-1} + ia_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + ia_{n2}, & a_{n3} + ia_{n4}, & \dots, & a_{n,2n-1} + ia_{n,2n} \end{vmatrix}. \quad (62,2)$$

Příklad. Provedeme zde výpočet velmi důležitý v technické praxi. Ze čtyř daných funkcí proměnné x ($\sinh x$, $\cosh x$ značí hyperbolické funkce)

$$\begin{aligned} y_1 &= \cosh x \cos x, & y_2 &= \cosh x \sin x, \\ y_3 &= \sinh x \cos x, & y_4 &= \sinh x \sin x \end{aligned}$$

a z jejich derivací vytvoříme determinant tak, že jeho první řádka obsahuje tyto funkce v pořadí právě napsaném, ve druhé řádce stojí první derivace oněch funkcí, třetí řádka obsahuje druhé derivace a poslední pak třetí derivace daných čtyř funkcí. Determinant takto sestavený se jmenuje Wronského determinantem funkcí y_1, y_2, y_3, y_4 a dostáváme pro něj

$$W = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2 + y_3, & y_1 + y_4, & y_1 - y_4, & y_2 + y_3 \\ -2y_4, & 2y_3, & -2y_2, & 2y_1 \\ -2(y_2 + y_3), & 2(y_1 - y_4), & -2(y_1 + y_4), & 2(-y_2 + y_3) \end{vmatrix},$$

t. j. po jednoduchých úpravách

$$W = 8 \cdot \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ -y_2, & y_1, & -y_4, & y_3 \\ y_4, & -y_3, & y_2, & -y_1 \\ y_3, & y_4, & y_1, & y_2 \end{vmatrix}.$$

Determinant, který tu figuruje, je jednoduchým případem determinantu (62). Podle vzorců (62,1) a (62,2) dostaneme po malém a snadném výpočtu pro něj hodnotu 1, takže je $W = 8$.

Poznámka. Determinanty typu (62) počítal *Baltzer* (Gött. Nachr., 1887).

r) Determinant

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \binom{c+n-1}{1}, & \binom{c+n}{1}, & \dots, & \binom{c+2n-2}{1} \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n+1}{2}, & \dots, & \binom{c+2n-1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \dots, & \binom{c+3n-5}{n-2} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-2}{n-1}, & \dots, & \binom{c+3n-4}{n-1} \end{vmatrix} \quad (63)$$

upravíme — užívajíce vzorce $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ — tak, že od každého sloupce (vyjma první) odčítáme sloupec předcházející. Dostáváme

$$F(c, n) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots, 0 \\ \binom{c+n-1}{1}, & 1, & \dots, 1 \\ \binom{c+n}{2}, & \binom{c+n}{1}, & \dots, \binom{c+2n-2}{1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{c+2n-4}{n-2}, & \binom{c+2n-4}{n-3}, & \dots, \binom{c+3n-6}{n-3} \\ \binom{c+2n-3}{n-1}, & \binom{c+2n-3}{n-2}, & \dots, \binom{c+3n-5}{n-2} \end{vmatrix}$$

Abychom se mohli dále pohodlně vyjadřovati, označíme znakem Φ_{ν} subdeterminant přidružený v determinantu $F(c, n)$ tomu jeho minoru, který je složen ze společných elementů posledních ν řádků a prvních ν sloupců determinantu $F(c, n)$. Poslední rovnici lze pak psáti ve tvaru

$$F(c, n) = \Phi_{11}.$$

S minorem Φ_{11} naložíme stejně jako prve s determinantem $F(c, n)$ a najdeme $\Phi_{11} = \Phi_{22}$, takže jest $F(c, n) = \Phi_{22}$. Na Φ_{22} aplikujeme tentýž postup a dostaneme $\Phi_{22} = \Phi_{33}$; nakonec pak nalezneme $F(c, n) = \Phi_{n-1, n-1}$, z čehož plyne konečný výsledek

$$F(c, n) = 1. \quad (63,1)$$

Doporučuji čtenáři provést naznačený výpočet podrobně použitím úplné indukce.

Poznámka. Ve sbírkách různých matematických úloh se často vyskytuje speciální případ determinantu (63), totiž determinant $F(2 - n, n)$. Vznikne otočením Pascalova trojúhelníku z kombinačních čísel a má ovšem také hodnotu 1.

s) *Determinant*

$$U_r = \begin{vmatrix} \frac{1}{(m+r)!} & \frac{1}{(m+r-1)!} & \cdots & \frac{1}{m!} \\ \frac{1}{(m+r+1)!} & \frac{1}{(m+r)!} & \cdots & \frac{1}{(m+1)!} \\ \frac{1}{(m+r+2)!} & \frac{1}{(m+r+1)!} & \cdots & \frac{1}{(m+2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(m+2r-1)!} & \frac{1}{(m+2r-2)!} & \cdots & \frac{1}{(m+r-1)!} \\ \frac{1}{(m+2r)!} & \frac{1}{(m+2r-1)!} & \cdots & \frac{1}{(m+r)!} \end{vmatrix}, \quad (64)$$

kde m, r jsou čísla celá nezáporná, upravíme tím, že první řádek násobíme výrazem $(m+r)!$, druhý $(m+r+1)!$, ..., až poslední hodnotou $(m+2r)!$. Determinant A_r , který tím dostaneme, je tedy s U_r vázán vztahem

$$A_r = (m+r)! (m+r+1)! \dots (m+2r)! U_r$$

a má — píšeme-li místo $m+r$ symbol α — tvar

$$A_r = \begin{vmatrix} 1, \alpha, & \alpha(\alpha-1), & \dots, a_0 \\ 1, \alpha+1, & (\alpha+1)\alpha, & \dots, a_1 \\ 1, \alpha+2, & (\alpha+2)(\alpha+1), & \dots, a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1, \alpha+r-1, & (\alpha+r-1)(\alpha+r-2), \dots, a_{r-1} \\ 1, \alpha+r, & (\alpha+r)(\alpha+r-1), & \dots, a_r \end{vmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-r+1) \\ a_1 &= (\alpha+1)\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-r+2) \\ a_2 &= (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha \dots (\alpha-r+3) \\ &\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{r-1} &= (\alpha+r-1)(\alpha+r-2) \dots \alpha \\ a_r &= (\alpha+r)(\alpha+r-1) \dots (\alpha+1). \end{aligned}$$

Odečteme-li od každé řádky, druhou počínajíce, vždy řádku předchozí, najdeme pro determinant A_r vztah $A_r = r!A_{r-1}$, takže lze psát ihned

$$A_r = 1!2!3! \dots (r-1)!r!$$

a pro determinant U_r máme hodnotu

$$U_r = \frac{0! \quad 1! \quad \dots \quad r!}{(m+r)! (m+r+1)! \dots (m+2r)!}. \quad (64,1)$$

Poznámka. Determinant Zeipelův

$$Z(n, p; r) = \begin{vmatrix} \binom{n}{p}, & \binom{n}{p+1}, & \dots, & \binom{n}{p+r} \\ \binom{n+1}{p}, & \binom{n+1}{p+1}, & \dots, & \binom{n+1}{p+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n+r}{p}, & \binom{n+r}{p+1}, & \dots, & \binom{n+r}{p+r} \end{vmatrix} \quad (65)$$

se redukuje vytčením $n!$ z první, $(n+1)!$ ze druhé, ..., až $(n+r)!$ z poslední řádky a pak $\frac{1}{p!}$ z prvního, $\frac{1}{(p+1)!}$ z druhého, ..., $\frac{1}{(p+r)!}$ z posledního sloupce na tvar

$$Z(n, p; r) = \frac{n!(n+1)! \dots (n+r)!}{p!(p+1)! \dots (p+r)!} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(n-p)!}, & \frac{1}{(n-p-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p-r)!} \\ \frac{1}{(n-p+1)!}, & \frac{1}{(n-p)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p-r+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(n-p+r)!}, & \frac{1}{(n-p+r-1)!}, & \dots, & \frac{1}{(n-p)!} \end{vmatrix} \cdot$$

Determinant zde vystupující však dostaneme z determinantu (64), klademe-li v něm $n - p - r$ místo m . Podle vzorce (64,1) máme tedy

$$Z(n, p; r) = \frac{(n+r)! (n+r-1)! \dots n!}{(p+r)! (p+r-1)! \dots p!} \cdot \frac{r! (r-1)! \dots 0!}{(n-p+r)! (n-p+r-1)! \dots (n-p)!}. \quad (65,1)$$

Tomuto výrazu pro hodnotu Zeipelova determinantu lze dáti ještě jiný, v jistém směru přehlednější, tvar. Násobíme-li jej součinem zlomků

$$\frac{(n-1)! (n-2)! \dots (n-p+r+1)!}{(p-1)! (p-2)! \dots (r+1)!},$$

$$\frac{(p-1)! (p-2)! \dots (r+1)!}{(n-1)! (n-2)! \dots (n-p+r+1)!},$$

který je zřejmě roven 1, dostaneme

$$Z(n, p; r) = \frac{(n+r)! (n+r-1)! \dots (n-p+r+1)!}{(p+r)! (p+r-1)! \dots (r+1)!} \cdot \frac{(p-1)! (p-2)! \dots 1! 0!}{(n-1)! (n-2)! \dots (n-p+1)! (n-p)!},$$

což lze psáti ve tvaru

$$Z(n, p; r) = \frac{\binom{n+r}{r+1} \binom{n+r-1}{r+1} \dots \binom{n-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1} \binom{p+r-1}{r+1} \dots \binom{r+1}{r+1}}. \quad (65,2)$$

t) Determinant Sternüv

$$S_n = \left| \begin{array}{ccc} 1, & 1, & \dots, 1 \\ \binom{x_1}{1}, & \binom{x_2}{1}, & \dots, \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2}, & \binom{x_2}{2}, & \dots, \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-2}, & \binom{x_2}{n-2}, & \dots, \binom{x_n}{n-2} \\ \binom{x_1}{n-1}, & \binom{x_2}{n-1}, & \dots, \binom{x_n}{n-1} \end{array} \right| \quad (66)$$

upravíme tak, že třetí řádek násobíme číslem $2!$, čtvrtý číslem $3!$..., až poslední hodnotou $(n - 1)!$. Dostáváme tím Sternův determinant (66) vázaný vztahem

$$1! 2! 3! \dots (n-1)! S_n =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_1(x_1-1), & x_2(x_2-1), & \dots, & x_n(x_n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, & a_{n-1,n} \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix},$$

při čemž

[illegible]

Protože však platí

$$\begin{aligned} & (x - 1)(x - 2) \dots (x - m) = \\ & = x^m + a_1^{(m)}x^{m-1} + a_2^{(m)}x^{m-2} + \dots + \\ & \quad + a_{m-1}^{(m)}x + a_m^{(m)}, \end{aligned} \quad (\text{a})$$

kde $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots, a_{m-1}^{(m)}, a_m^{(m)}$ jsou t. zv. základní symetrické funkce čísel $1, 2, \dots, m-1, m$ (na jejich přesném tvaru pro naše účely nezáleží), lze determinant pro $1! 2! 3! \dots (n-1)! S_n$ psát ve tvaru

$$x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1}, & \frac{1}{x_2}, & \dots, & \frac{1}{x_n} \\ 1, & 1, & \dots, & 1 \\ f_1(x_1), & f_1(x_2), & \dots, & f_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-3}(x_1), & f_{n-3}(x_2), & \dots, & f_{n-3}(x_n) \\ f_{n-2}(x_1), & f_{n-2}(x_2), & \dots, & f_{n-2}(x_n) \end{vmatrix}, \quad (\text{b})$$

$$f_m(x) = x^m + a_1^{(m)}x^{m-1} + \dots + a_m^{(m)}.$$

Nyní však je možno vyjádřiti $f_m(x)$ jako součet z mocniny x^m a jisté lineární kombinace polynomů $f_{m-1}(x), f_{m-2}(x), \dots, f_1(x), 1$ (přesvědčte se o tom pro $m = 1, 2, 3, 4$ pomocí metody neurčitých součinitelů; obecně bude tato věc provedena ve druhé části tohoto spisu jako příklad na řešení soustavy lineárních rovnic)

$$\begin{aligned} f_m(x) = x^m + c_1 f_{m-1}(x) + c_2 f_{m-2}(x) + \dots + \\ + c_{m-1} f_1(x) + c_m. \end{aligned} \quad (\text{c})$$

Odečteme-li tedy od posledního řádku determinantu poslední napsaného vhodnou lineární kombinaci všech řádků předchozích druhým počínajíc, nabude tento poslední řádek tvaru $x_1^{n-2}, x_2^{n-2}, \dots, x_n^{n-2}$. Podobným způsobem lze řádek předposlední změnit ve tvar $x_1^{n-3}, x_2^{n-3}, \dots, x_n^{n-3}$ atd., takže nakonec dostáváme

$$\begin{aligned}
 & x_1 x_2 \dots x_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \dots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V_n,
 \end{aligned}$$

kde je V_n známý determinant Vandermondeův, jehož hodnota je stanovena vzorcem (23').

Pro výpočet Sternova determinantu tak dostáváme vztah

$$S_n = \frac{V_n}{1! 2! 3! \dots (n-1)!}, \quad (66')$$

$$\text{čili v jiném tvaru } S_n = \frac{V_n}{1^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 3^{n-3} \dots (n-1)}. \quad (66'')$$

Poznámka. Determinant Zeipelův (65) přechází pro $p = 0$ přímo v determinant (66), jehož hodnota je v tomto zvláštním případě 1. Totéž ovšem vychází ze vzorce (65,1), kdežto formule (65,2) se zde nedá bezprostředně aplikovati (nechceme-li se zvláště zmiňovati o jejím jmenovateli).

u) *Determinant E. Pascala*

$$R_n = \begin{vmatrix} a_{10}, & -t, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ a_{20}, & a_{21}, & -t, & \dots, 0, & 0 \\ a_{30}, & a_{31}, & a_{32}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0}, & a_{n-1,1}, & a_{n-1,2}, & \dots, a_{n-1,n-2}, & -t \\ a_{n0}, & a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, a_{n,n-2}, & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \quad (67)$$

rozvedeme podle elementů posledního sloupce a najdeme

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + t\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \dots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}),$$

při čemž je $\Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \dots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2})$ determinant analogického tvaru jako R_n , pouze je stavěn z jiných prvků (hlavní úhlopříčka je připsána v závorce). Rozvedeme jej opět podle elementů posledního sloupce, čímž nacházíme

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(a_{10}, a_{21}, \dots, a_{n-2,n-3}, a_{n,n-2}) &= \\ &= a_{n,n-2}R_{n-2} + t\Delta_{n-2}(a_{10}, a_{21}, \dots, a_{n-3,n-4}, a_{n,n-3}). \end{aligned}$$

Takto pokračující získáme pro determinant R_n konečně rekurentní relaci

$$R_n = a_{n,n-1}R_{n-1} + ta_{n,n-2}R_{n-2} + t^2a_{n,n-3}R_{n-3} + \dots + t^{n-3}a_{n3}R_3 + t^{n-2}a_{n1}R_1 + t^{n-1}a_{n0}. \quad (67')$$

Poznámky. Klademe-li ve vzorci (67') $a_{r\varrho} = \binom{2r}{2\varrho}$, $r = 1, 2, \dots, n$, $\varrho = 0, 1, 2, \dots, n-1$ a $t = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = R_n - \binom{2n}{2} R_{n-1} + \binom{2n}{4} R_{n-2} - \binom{2n}{6} R_{n-3} + \dots + \\ + (-1)^{n-2} \binom{2n}{2n-4} R_2 + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-2} R_1 + \\ + (-1)^n R_0, \end{aligned} \quad (67'')$$

kde položíme $R_0 = 1$. To však je rekurentní formule pro výpočet *Eulerových* čísel $E_0, E_1, E_2, \dots$, jež se vyskytují na př. při rozvoji funkce $\sec x$ v potenční řadu. Lze tedy *Eulerova* čísla vyjádřiti vzorcem

$$E_n = \begin{vmatrix} \binom{2}{0}, & 1, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ \binom{4}{0}, & \binom{4}{2}, & 1, & \dots, 0, & 0 \\ \binom{6}{0}, & \binom{6}{2}, & \binom{6}{4}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{2n}{0}, & \binom{2n}{2}, & \binom{2n}{4}, & \dots, \binom{2n}{2n-4}, & \binom{2n}{2n-2} \end{vmatrix}, \quad E_0 = 1. \quad (67''')$$

tuto vlastnost nemá. Jen mezi čísly $d, 2d, 3d, \dots, \frac{m}{d} \cdot d$ tedy najdeme ta, jež mají s m největší společný dělitel právě d . Kolik jich jest? Protože dvě čísla $\alpha d, \beta d$ (α, β celá kladná) mají největšího společného dělitele d , když a jen když jsou α, β nesoudělná, bude hledaný počet roven číslu $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$. Můžeme tedy vysloviti větu:

Je-li $m \geq 1$ celé číslo a d nějaký jeho dělitel, je v řadě $1, 2, 3, \dots, m-1, m$ celkem $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ čísel, která mají s m největšího společného dělitele právě d .

Tak je na př. v řadě $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$ celkem $\varphi(5) = 4$ čísla, která mají s číslem 15 největšího společného dělitele právě 3; jsou to čísla 3, 6, 9, 12.

Nechť jsou $d_1, d_2, \dots, d_\mu$ všechny možné dělitele čísla m (počítáme v ně také čísla 1, m). Vybereme-li z řady $1, 2, 3, \dots, m-1, m$ jakožto první skupinu všech těch $\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right)$ čísel, která mají s m největší společnou míru d_1 , jakožto druhou skupinu $\varphi\left(\frac{m}{d_2}\right)$ čísel, z nichž každé má s m největšího společného dělitele d_2 atd., dostaneme celkem μ skupin. Protože pak má každé z čísel $1, 2, 3, \dots, m-1, m$ s číslem m největší společnou míru buď d_1 , nebo $d_2, \dots$, jsou v těchto μ skupinách obsažena všechna čísla oné řady, takže jest

$$\varphi\left(\frac{m}{d_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{d_2}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{m}{d_\mu}\right) = m. \quad (69)$$

Číslo $m = 15$ má dělitele: $d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 15$, takže je μ rovno 4 a dostaneme 4 skupiny:

$\alpha)$ $\varphi\left(\frac{1}{1}^5\right) = \varphi(15) = 8$ čísel s 15 nesoudělných: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14;

$\beta)$ $\varphi\left(\frac{1}{3}^5\right) = \varphi(5) = 4$ čísla mající s 15 nejv. spol. míru 3: 3, 6, 9, 12;

$\gamma) \varphi(\frac{1}{5}) = \varphi(3) = 2$ čísla mající s 15 nejv. spol. míru 5: 5, 10;

$\delta) \varphi(\frac{1}{15}) = \varphi(1) = 1$ číslo mající s 15 nejv. spol. míru 15: 15.

Vzorci (69) je možno dáti ještě jednodušší tvar. Je-li totiž d dělitelem čísla m , je také číslo $\frac{m}{d}$ jeho dělitelem, jak patrně

ze vztahu $m = d \cdot \frac{m}{d}$. Jsou tedy veličiny $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \dots, \frac{m}{d_\mu}$ různí dělitelé čísla m a ježto je jich μ , jsou to právě všichni dělitelé čísla m , t. j. ony veličiny jsou jen jistou permutací dětelů $d_1, d_2, \dots, d_\mu$, takže lze vztah (69) psáti pohodlněji

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_\mu) = m. \quad (69')$$

Nyní už můžeme přikročiti k určení hodnoty determinantu (68). Utvořme si determinant $|a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, v němž je $a_{ik} = 0$, když i není dělitelno číslem k ; v opačném případě pak budiž $a_{ik} = 1$. Tento determinant má tedy tvar

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

a hodnotu zřejmě rovnou 1. Násobme jej po řádcích determinan-
tem

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{vmatrix} a_{11}\varphi(1) & a_{12}\varphi(2) & \dots & a_{1n}\varphi(n) \\ a_{21}\varphi(1) & a_{22}\varphi(2) & \dots & a_{2n}\varphi(n) \\ a_{31}\varphi(1) & a_{32}\varphi(2) & \dots & a_{3n}\varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\varphi(1) & a_{n2}\varphi(2) & \dots & a_{nn}\varphi(n) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \varphi(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}\varphi(1) & \varphi(2) & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}\varphi(1) & a_{32}\varphi(2) & \varphi(3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\varphi(1) & a_{n2}\varphi(2) & a_{n3}\varphi(3) & \dots & \varphi(n) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

o hodnotě $\Phi = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) \cdot \dots \cdot \varphi(n)$. Dostaneme tak determinant $|c_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, jehož obecný prvek c_{ik} bude

$$c_{ik} = a_{i1}a_{k1}\varphi(1) + a_{i2}a_{k2}\varphi(2) + \dots + a_{in}a_{kn}\varphi(n) = \\ = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu).$$

Nyní však jest $a_{i\nu}a_{k\nu}$ rovno nule pro všechna ν , která nejsou současně obsažena jak v čísle i , tak i v čísle k . Je-li však ν společným dělitelem čísel i, k , je $a_{i\nu}a_{k\nu} = 1$, takže

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^n a_{i\nu}a_{k\nu}\varphi(\nu) = \sum \varphi(\nu),$$

při čemž druhý součet jde jen přes ta ν , která jsou společným dělitelem čísel i, k , t. j. přes ta ν , která jsou děliteli největší společné míry (i, k) obou těch čísel. Je tedy podle vzorce (69') $c_{ik} = (i, k)$ a součin obou determinantů A, Φ je právě determinant S_n . Vychází tedy pro hodnotu Smithova determinantu výraz

$$S_n = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \dots \varphi(n). \quad (68')$$

Poznámka. Výpočet, který jsme tu naznačili, provedl po prvé *J. St. Smith* (Coll. math. papers, 161).