

Determinanty a matice v teorii a praxi

4. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 23–27.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403289>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

4. SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH.

Soustavu m rovnic pro neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^n a_{i\nu} x_{\nu} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (23)$$

a předpokládáme, že *není homogenní*, t. j., že aspoň jedno z čísel $b_1, b_2, \dots, b_m$ je různé od nuly.

Připojíme-li k matici soustavy ještě $(n+1)$ -ní sloupec tvořený čísly $b_1, b_2, \dots, b_m$, dostaneme t. zv. matici rozšířenou a platí pak o řešitelnosti soustavy (23) tato všeobecná

věta 7. (Frobeniova): Nutná a postačující podmínka pro řešitelnost soustavy (23) je ta, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnotu.

Důkaz. Je-li soustava řešitelná, ukazují rovnice (23), že $(n+1)$ -ní sloupec rozšířené matice je lineární kombinací prvních n jejích sloupců, takže jsou opravdu hodnoty obou matic, o nichž věta Frobeniova mluví, stejné (v. věta 11, část první).

Mají-li naopak obě matice stejnou hodnotu h , pak také matice

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{21}, & \dots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad a \quad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{21}, & \dots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \dots & a_{mn} \\ b_1, & b_2, & \dots & b_m \end{array} \right\|$$

mají tutéž hodnotu h a v první z nich lze nalézt podle věty 1. právě h nezávislých řádků, jichž jsou všechny její ostatní řádky lineárními kombinacemi. Těchto h řádků je

ovšem nezávislých také, když je počítáme k matici druhé a ježto také tato má hodnotu h , je každý její další řádek lineární kombinací oněch h spolu nezávislých. Také řádek $b_1, b_2, \dots, b_m$ je tedy jejich lineární kombinací a tudíž také lineární kombinací všech řádků matice první. To však značí (v. definici lineární kombinace, vzorec v prvním (11) dílu), že je soustava (23) řešitelná.

Případ, kdy soustava (23) nemá řešení, necháváme stranou a obrátíme se k tomu, kdy obě matice, o nichž mluví věta 7., mají stejnou hodnotu h , takže rovnice (23) jsou řešitelné. Jak určíme jejich řešení?

Zavedeme-li si také pro soustavu (23) pojem redukované soustavy — děje se to doslova tak, jako při systému rovnic homogenních — můžeme ihned udati jedno řešení rovnic (23) a to tímto způsobem: V redukované soustavě změníme pořadí neznámých tak, aby byl splněn předpoklad (5) (označíme je v tomto pořadí opět znaky $x_1, x_2, \dots, x_n$), neznámým $x_{h+1}, \dots, x_n$ přidělíme zcela libovolné číselné hodnoty a vypočítáme pak Cramerovým pravidlem hodnoty zbylých neznámých $x_1, x_2, \dots, x_h$. Soustava

$$x_1, x_2, \dots, x_h \quad (24)$$

vypočteno při libovolně zvolených $x_{h+1}, \dots, x_n$ je pak řešením také oněch rovnic (23), které nepatří k uvažovanému redukovanému systému, protože je každá z nich lineární kombinací rovnic soustavy redukované.

Lze nyní ukázat, že všechna možná řešení systému (23) vůbec lze zbudovati z čísel (24) a z řešení homogenního systému, vzniklého tím, že v rovnicích (23) položíme všechna b_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) rovna nule. Dokážeme si totiž

větu 8. Obecné řešení systému (23) získáme, když k obecnému řešení příslušné soustavy homogenní přičteme nějaké speciální řešení rovnic (23).

Důkaz. Budiž $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ obecné řešení homogenní soustavy, o níž mluví věta 8. a položme $X_1 = \xi_1 + x_1$,

$X_2 = \xi_2 + x_2, \dots, X_n = \xi_n + x_n$, kde je $x_1, x_2, \dots, x_n$ speciální řešení rovnic (23), na př. řešení (24). Pak jest

$$\sum_{v=1}^n a_{iv} X_v = \sum_{v=1}^n a_{iv} (\xi_v + x_v) = \sum_{v=1}^n a_{iv} \xi_v + \sum_{v=1}^n a_{iv} x_v = 0 + b_i = b_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

takže je $X_1, X_2, \dots, X_n$ řešením systému (23). Zbývá ještě dokázat, že vůbec každé řešení rovnic (23) lze takto vyjádřit. Je-li však $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ zcela libovolné řešení těchto rovnic, položme $\bar{X}_1 - x_1 = \bar{\xi}_1, \bar{X}_2 - x_2 = \bar{\xi}_2, \dots, \bar{X}_n - x_n = \bar{\xi}_n$. Potom platí

$$\sum_{v=1}^n a_{iv} \bar{\xi}_v = \sum_{v=1}^n a_{iv} (\bar{X}_v - x_v) = \sum_{v=1}^n a_{iv} \bar{X}_v - \sum_{v=1}^n a_{iv} x_v = b_i - b_i = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

takže je $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n$ řešením homogenní soustavy příslušné k rovnicím (23) a jest $\bar{X}_1 = \bar{\xi}_1 + x_1, \bar{X}_2 = \bar{\xi}_2 + x_2, \dots, \bar{X}_n = \bar{\xi}_n + x_n$.

Příklady.

12. Řešte, je-li to možno, rovnice

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &+ 3x_4 = 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= \varrho. \end{aligned} \quad (25)$$

Aby soustava byla řešitelná, je nutno a stačí, aby matice soustavy a matice rozšířená měly stejnou hodnot. Protože však má matice soustavy hodnot $h = 2$ (v. př. 1.), musí také matice rozšířená mít hodnot 2 a to také stačí. Prvé dva řádky této matice jsou lineárně nezávislé, takže je nutno určit ϱ tak, aby poslední řádek byl lineární kombinací prvních dvou. Z příkladu 1. však už známe koeficienty této

lineární kombinace — jsou to čísla $-1, 1, 2$ — a proto je nutno, aby $(-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2\rho = 0$, t. j. $\rho = \frac{3}{2}$.

Redukovaná soustava je

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_4 &= 2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= -1; \end{aligned}$$

x_3, x_4 jsou zcela libovolná, takže je obecně

$$\begin{aligned} 44x_1 &= 10 + 8x_3 - 32x_4 \\ 44x_2 &= -19 + 20x_3 - 14x_4. \end{aligned}$$

Zvolíme-li si ku př. $x_3 = x_4 = 0$, dostáváme jedno řešení rovnic (25), ve kterých ovšem je $\rho = \frac{3}{2}$, ve tvaru:

$$x_1 = \frac{5}{22}, x_2 = -\frac{19}{44}, x_3 = x_4 = 0. \quad (25')$$

Obecné řešení homogenní soustavy příslušné k soustavě (25) jsme už našli v příkladě 10., vzorce (21'') a proto mají rovnice (25) podle věty 8. obecné řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{22} + 8(\lambda_3 - 4\lambda_4), x_2 = -\frac{19}{44} + 2(10\lambda_3 - 7\lambda_4), \\ x_3 &= 44\lambda_3, x_4 = 44\lambda_4; \end{aligned} \quad (25'')$$

λ_3, λ_4 jsou libovolná reálná čísla.

13. Provedeme výpočet hodnoty determinantu reciprokého k nulovému. V oddílu prvním jsme bez důkazu vyslovili poznatek, že i v tomto případě je v platnosti vzorec (33); přihlídneme nyní blíže k poměrům, které zde mohou nastati.

První možný případ, že je $A = 0$ a že má hodnost $h \leq n - 2$, je triviální. V reciprokém determinantu a jsou pak všechny prvky — to jsou, nehledě k znaménkům, $(n - 1)$ -řadové minory determinantu A — rovny nule, tedy a samo, v souhlase se vzorcem (33) z dílu prvního, rovno nule a to tak, že je také jeho hodnost nulová.

Zajímavý je druhý možný případ, kdy nulový determinant A má hodnost $h = n - 1$. Potom je fundamentální systém soustavy

$$\sum_{v=1}^n a_{iv} x_v = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

tvořen jediným nezávislým (t. j. nenulovým) řešením — označíme je

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n.$$

Každé jiné řešení — tedy také n řešení

$$A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{rn}, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

lze pak z onoho fundamentálního lineárně zkombinovati; existují tedy konstanty λ_r (ne všechny nulové) tak, že jest

$$A_{rs} = \lambda_r \xi_s, \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (26)$$

Pak ale dostáváme pro libovolný dvouřadový minor determinantu a vztah

$$\begin{vmatrix} A_{rs} & A_{rt} \\ A_{us} & A_{ut} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_r \xi_s & \lambda_r \xi_t \\ \lambda_u \xi_s & \lambda_u \xi_t \end{vmatrix} = \lambda_r \lambda_u \xi_s \xi_t \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (26')$$

Výsledek vyslovíme takto:

Determinant reciproký k nulovému má hodnotu rovněž nulovou. Jeho hodnota je buď nula nebo 1 podle toho, zdali hodnota původního determinantu byla menší než $n - 1$ nebo rovna $n - 1$.