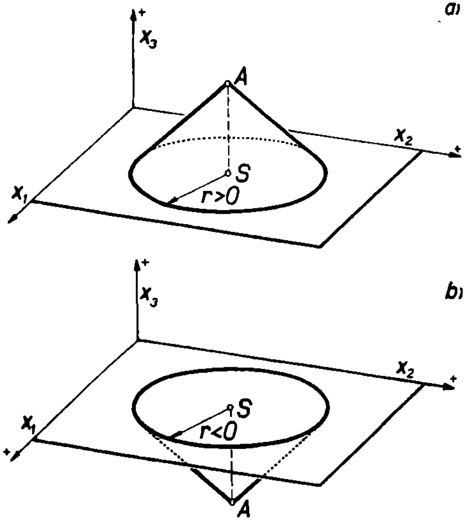
7. kapitola

VÝZNAM VÍCEROZMĚRNÝCH PROSTORŮ

Geometrie vícerozměrných euklidovských prostorů má v matematice značné uplatnění. Její souvislost s algebrou jsme neustále sledovali na předcházejících stránkách; v závěru předcházející kapitoly při odhadu počtu vrcholů n-rozměrné krychle jsme poznali i její bezprostřední vztah k aritmetice dvojkové soustavy. Kdybychom však chtěli přistoupit k přímé interpretaci euklidovských prostorů na jiných příkladech z matematiky, potřebovali bychom ovšem další výklady z těchto partií matematiky. Euklidovské prostory nám tedy ve skutečnosti jen pomohly k základní orientaci ve vícerozměrné geometrii, ale právě svou jednoduchostí nám výborně pomohly. Není jistě třeba zdůrazňovat, že kdybychom měření v prostoru prováděli užitím jiných (složitějších) vzorců, než byly vzorce (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) a (5,1), byl by výklad složitější. Pro první orientaci našich čtenářů ve vícerozměrné geometrii slouží tedy Euklidova geometrie nejlépe, proto jsme ji zde zvolili. Pokud však sledujeme přímé aplikace vícerozměrných prostorů v geometrii, nacházíme sice některé jednoduché modely vícerozměrných prostorů, ale ty nejsou euklidovské. Ukážeme si je v této kapitole, ale čtenář nesmí být zklamán, když v nich nepůjde o měření ve smyslu Euklidovy geometrie. I tak řada pojmů i způsob myšlení z předcházejících kapitol se nám zde vyplatí. V některých příkladech půjde dokonce o geometrii, v níž vůbec žádné měření vzdáleností neprovádíme — o tzv. geometrii projektivní. Ale poskytne nám to konkrétní představy nadrovin i jiných pojmů, s nimiž jsme se dříve setkali.

Ruku v ruce s vytvořením pojmu vícerozměrného prostoru došlo v minulém století k rozšíření pojmu souřadnic. Souřadnice znamenaly původně číselné údaje, které charakterizovaly polohu bodu v rovině nebo v prostoru. Ale nejen body, nýbrž i jiné geometrické útvary lze charakterizovat číselnými údaji. Zkoumejme například množinu všech kružnic v rovině. Jak jednotlivé kružnice mezi sebou rozlišíme? Naskýtá se tu několik možností. Zvolme nejjednodušší z nich, založenou na tom, že každá kružnice v rovině je dána svým středem S a poloměrem $r > 0$. Polohu středu S vystihneme v rovině jeho souřadnicemi s_1, s_2, jak to známe z kapitoly 2. Volbou čísel s_1, s_2 a r je tedy v rovině stanovena jediná kružnice a obráceně, každé kružnici v rovině je tímto způsobem přiřazena jediná trojice těchto čísel. Přitom různým kružnicím odpovídají různé trojice čísel s_1, s_2, r, a tato čísla můžeme volit nezávisle na sobě. Je vidět, že tato tři čísla mají pro určení kružnice v rovině stejný význam, jaký mají souřadnice pro určení bodu, a proto jim můžeme dát název *souřadnice kružnice*.

Tím dáváme slovu souřadnice širší význam, než jaký měl na mysli R. Descartes, který mluvil jen o souřadnicích bodu. Nikterak při tom nevadí, že jsme v našem případě při volbě třetí souřadnice kružnice omezeni podmínkou $r > 0$, i tak probíhá tato souřadnice nekonečně mnoho reálných čísel. Uvidíme za chvíli, že ani toto omezení není nutné, ale než k tomu přikročíme, uvědomíme si už teď, že *všechny kružnice v rovině tvoří trojrozměrný prostor*. To je v souhlase s tím, že každá taková kružnice má tři souřadnice. Slovem prostor zde tedy nazýváme množinu všech kružnic v rovině a každou jednotlivou kružnici bodem toho prostoru. Máme tak nový konkrétní příklad trojrozměrného prostoru; protože však v něm prozatím nemluvíme o měření vzdáleností, nemůžeme říci, zdali je to prostor euklidovský nebo ne.



Obr. 9

Je zřejmé, že jménem *prostor* nebo *bod* toho prostoru označujeme zde něco docela jiného, než si nezasvěcenci pod těmito názvy představují. Matematikové si už dávno zobecnili tyto pojmy čistě pro své účely a dávají dnes jméno prostor nejrůznějším souborům všelijakých útvarů, jež pak nazývají body takového prostoru.

Právě naznačený vztah kružnic v rovině k bodům trojrozměrného prostoru vede k zajímavé a důležité metodě, kterou lze kružnice v rovině zobrazit do bodů euklidovského trojrozměrného prostoru E_3. Má-li kružnice a výše popsané souřadnice s_1, s_2, r, můžeme sestrojit v prostoru E_3

bod A (a_1; a_2; a_3) tak, že $a_1 = s_1$, $a_2 = s_2$, $a_3 = r$. Zřejmě dvěma různým kružnicím a, b jsou tímto předpisem přiřazeny dva různé body A, B v prostoru E_3. Toto zobrazení si snadno představíme na obr. 9a), b). Ve středu S kružnice a sestrojíme kolmici k rovině této kružnice a naneseme na ní od bodu S délku $AS = r$; tím je poloha bodu A určena. Můžeme také říci, že bod A je vrcholem rotační kuželové plochy, která danou kružnicí a prochází, a jejíž povrchové přímky svírají s rovinou této kružnice úhel 45^0. Význam tohoto zobrazení je zřejmý; různé úlohy o kružnicích v rovině dají se tak řešit pomocí těchto rotačních kuželových ploch. Každá úloha z geometrie kružnic v rovině převádí se touto cestou na úlohu z geometrie bodů v trojrozměrném prostoru E_3. Stává se, že tato prostorová úloha se snáze řeší než sama úloha o kružnicích v rovině. Prostorové řešení zobrazíme nakonec zpět do geometrie kružnic v rovině. Pro úplnost řešení se však musí brát zřetel i na ty body A v prostoru, jejichž třetí souřadnice není kladná. To se dociluje tím, že zavádíme pojem orientovaných kružnic v rovině. Kladně orientovanou kružnicí rozumíme kružnici s kladným poloměrem a záporně orientovanou kružnici se záporným poloměrem. Kladně orientovanou kružnici si často znázorňujeme tím, že ji probíháme proti pohybu hodinových ručiček, zápornou kružnici probíháme tak jako hodinové ručičky. Přidáme-li k tomu ještě všechny body v rovině jakožto kružnice s poloměrem rovným nule, máme úplné zobrazení všech bodů v prostoru E_3 do orientovaných kružnic v rovině; třetí souřadnice r není pak omezena žádnou podmínkou a probíhá i zde množinu všech reálných čísel.

Orientovaná kružnice se nazývá stručně *cykl* a právě popsané zobrazení cyklů roviny do bodů trojrozměrného prostoru se nazývá *cyklografie*. Vyplatí se přitom za „vzdálenost" dvou takových cyklů položit délku jejich společné tečny, tím rozumíme vzdálenost bodů dotyku společné tečny obou cyklů. Jde pak ve skutečnosti o studium jiného trojrozměrného prostoru než je prostor euklidovský. Cyklografie spadá svou povahou do deskriptivní geometrie a máme o ní v češtině pěknou knížku od profesora brněnské university dr. L. Seiferta (viz seznam literatury vzadu).

Podobně, jako jsme hovořili o kružnicích v rovině, můžeme hovořit o plochách kulových nebo jednoduše o koulích v prostoru. Obdobu cyklografie máme i zde. Každá koule má však čtyři souřadnice. Je totiž určena svým středem S a poloměrem r. Poloha středu S je v prostoru E_3 charakterizována třemi kartézskými souřadnicemi s_1, s_2, s_3 a poloměr r je čtvrtý číselný údaj charakterizující každou kouli. Řekneme tedy čtveřici čísel s_1, s_2, s_3, r opět *souřadnice koule* a *množina všech koulí v trojrozměrném prostoru* E_3 *je tak prvním naším konkrétním příkladem čtyřrozměrného prostoru*. Zavedeme-li i zde orientované koule tak, že kladně orientovaná koule má kladný poloměr a záporně orientovaná záporný poloměr, a přidáme-li k tomu i obyčejné body jako koule s nulovým poloměrem, můžeme každou kouli a o souřadnicích s_1, s_2, s_3, r zobrazit do bodu $A\,(a_1; a_2; a_3; a_4)$ předpisem $a_1 = s_1, a_2 = s_2, a_3 = s_3, a_4 = r$. Tím dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení koulí prostoru trojrozměrného do bodů čtyřrozměrného prostoru, které je obdobou cyklografie. Pojmy, které jsme ve 4. kapitole zavedli, můžeme si zde podepřít konkrétní představou. Tak všechny koule o témže poloměru, např. $r = 2$, vytvářejí nadrovinu v tomto čtyřrozměrném prostoru. Skutečně rovnice $r = 2$ je lineární a určuje tedy nadrovinu. Ukažme si i příklad roviny v tomto čtyřrozměrném prostoru všech koulí. Podle výkladů v kapitole 4 je rovina ve čtyřrozměrném prostoru určena dvěma lineárními rovnicemi, zde tedy např. rovnicemi*)

---

*) Nezapomeňme, že proměnné souřadnice teď značíme s_1, s_2, s_3, r.

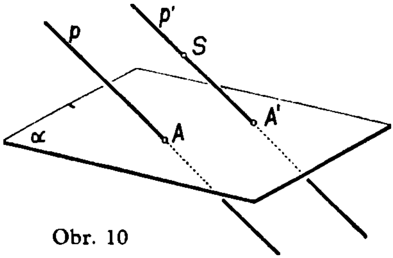
$$s_3 = 0, r = 2. \qquad (7,1)$$

Tato množina je tedy tvořena těmi koulemi v prostoru E_3, jejichž středy leží v rovině $x_3 = 0$ a jejichž poloměr je $r = 2$. Zkoumejme dále ty koule, jejichž středy leží na ose souřadné x_3 v našem daném prostoru E_3. Má-li takový střed S ležet na této souřadné ose, platí pro jeho kartézské souřadnice v prostoru E_3 rovnice

$$s_1 = 0, s_2 = 0. \qquad (7,2)$$

Ve čtyřrozměrném prostoru znamenají tyto dvě lineární rovnice opět rovinu. Celkem tedy máme v rovnicích (7,1) a (7,2) příklady dvou rovin ve čtyřrozměrném prostoru. První z nich si představíme jako množinu všech koulí téhož poloměru $r = 2$, jejichž středy leží v nějaké rovině α v E_3, druhou si představíme jako množinu všech koulí, jejichž středy leží na přímce a kolmé k rovině α v prostoru E_3. Je zřejmě jediná koule, jež vyhovuje oběma těmto představám; její střed je v průsečíku přímky a s rovinou α a její poloměr má velikost 2. To souhlasí s tím, že ve čtyřrozměrném prostoru dvě roviny (7,1) a (7,2) se protínají v jednom bodě. Zde je to bod M (0; 0; 0; 2), který je obrazem koule z prostoru E_3, jež má střed v počátku a poloměr 2. Tak bychom mohli pokračovat dále, nebudeme to však rozvádět. Spokojíme se upozorněním, že studium geometrie koulí v obyčejném prostoru, založené na myšlence zobrazení koulí do bodů prostoru čtyřrozměrného, je základem tzv. *kulové geometrie*.

Uveďme si ještě další příklad čtyřrozměrného prostoru. Mysleme si v obyčejném trojrozměrném prostoru E_3 nějakou přímku p a zvolme si rovinu α, která s přímkou p není rovnoběžná (viz obr. 10). Přímka p protíná rovinu α v bodě A. Vedle toho zvolme v prostoru bod S, který ne-leží v rovině α. Bodem S lze vést právě jednu rovnoběžku s přímkou p, označme ji p'. Přímka p' protíná rovinu α v bodě A'. Jsou-li rovina α i bod S pevně zvoleny, jsou tímto způsobem přímce p jednoznačně přiřazeny dva body



Obr. 10

A, A' v rovině α. Zavedeme-li v rovině α soustavu souřadnic tak, jak jsme to učinili v kapitole 2, má každý z bodů A, A' dvě souřadnice. Souřadnice bodu A označme jako obvykle a_1, a_2, souřadnice bodu A' podobně a_1', a_2'. Tím jsme přímce p přiřadili prostřednictvím bodů A, A' čtveřici čísel a_1, a_2, a_1', a_2'. Celý postup však lze obrátit. Jsou-li dána čtyři čísla a_1, a_2, a_1', a_2', sestrojíme nejdřív v rovině α body A $(a_1; a_2)$ a A' $(a_1'; a_2')$, pak sestrojíme přímku p' spojující body A', S a nakonec vedeme bodem A přímku p rovnoběžnou s přímkou p'. Tím jsme čtveřici čísel a_1, a_2, a_1', a_2' přiřadili jedinou přímku p v prostoru. Na základě toho můžeme čísla a_1, a_2, a_1', a_2' prohlásit za souřadnice přímky p. Říkáme, že *množina všech přímek ležících v obyčejném trojrozměrném prostoru je prostor čtyřrozměrný*. Budeme jí stručně říkat *přímkový prostor*.

K tomu je třeba připojit několik poznámek.

Náš příklad s přímkovým prostorem je poněkud choulostivější než byl prve příklad prostoru všech koulí. Stanovení našich souřadnic přímky p selže v tom případě, když přímka p je s rovinou α rovnoběžná. To však není podstatné, protože přímek rovnoběžných s rovinou α je „tak málo", že v otázce počtu rozměrů přímkového prostoru nehrají roli. Odstranění této vady je ostatně možné tím způsobem, že k rovině α přidáme tzv. body nevlastní (body v „nekonečnu") a že zavedeme v rovině takové souřadnice, jimiž lze i tyto body zvládnout.

V *přímkové geometrii* (to je obor, který studuje přímkový prostor) se obvykle zavádějí jiné souřadnice přímky než ty, které jsme zde zvolili my. Naše úvahy nejsou však novinkou pro toho, kdo v deskriptivní geometrii už poznal základy perspektivy nebo středového promítání vůbec. Skutečně, je-li rovina α v obr. 10 průmětna a bod S střed promítání, je bod A stopníkem přímky p a bod A' jejím úběžníkem. Svým stopníkem a úběžníkem je přímka jednoznačně určena, a na tom byl založen náš příklad.

Naznačme si ještě jednu problematiku, s níž se tu setkáváme. Čtyřrozměrný prostor nám zprostředkuje bezděčně příbuznost mezi přímkovou a kulovou geometrií. Je jisté, že každé geometrické vlastnosti nebo konstrukci ve čtyřrozměrném prostoru odpovídá patřičná vlastnost v přímkové geometrii a rovněž tak v kulové geometrii. Je však docela dobře myslitelné, že poměry v přímkové geometrii jsou názornější než v kulové, a že tedy přímkové útvary byly hlavně dřív lépe prostudovány než útvary kulové. Přeneseme-li takovou známou vlastnost přímkových útvarů do příslušného čtyřrozměrného prostoru, můžeme je obdobou cyklografie zobrazit dál na kulové útvary. Nejednou se stalo, že touto cestou byly skutečně objeveny nové zákony v kulové geometrii.

Uplatnění vícerozměrných prostorů je samozřejmě značné a není vázáno jen na euklidovské prostory, o nichž jsme hovořili. V některých prostorech nemá význam měření podle vzorce (5,1), který jsme uvedli zde. Dotkli jsme se toho u cyklografie. Je dokonce celé odvětví geometrie, tzv. projektivní geometrie, kde měření nezavádíme vůbec, kde studujeme jen otázky protínání čar, ploch a nadploch, spojování bodů apod. V tom případě mluvíme o *projektivních prostorech.*

Byly studovány i prostory s nekonečně mnoha rozměry a uplatnily se i ve fyzice. Při jejich studiu však už nevystačíme s algebrou a musíme vzít na pomoc matematickou analýzu.

Rovněž užití geometrie čtyřrozměrného prostoru ve fyzice je zcela přirozené. Fyzika totiž, aby charakterizovala nějaký jev, udává místo jevu i čas, v němž jev nastal. Totéž dělá i dějepis, jenže přitom nehovoří o čtyřech rozměrech; učíme se například, že Karel IV. založil v Praze universitu roku 1348. V těchto slovech je obsaženo místní i časové určení události. Fyzik sleduje zase například zablesknutí žárovky ve své pracovně. To je fyzikální jev, jehož místo je dáno polohou žárovky a lze je stanovit třemi délkovými souřadnicemi x, y, z, třeba vzdálenostmi žárovky od dvou sousedních stěn a od podlahy místnosti. Jenže celá místnost letí vesmírem, soustava těchto souřadnic x, y, z nemá v prostoru pevnou polohu, fyzik se nemá o co opřít. V jiné chvíli přijde jiné zablesknutí téže žárovky s týmiž souřadnicemi x, y, z, a přece to už bude jiný fyzikální jev než první zablesknutí. Aby fyzik oba tyto jevy rozlišil, připojí časový údaj. Jev, který ho zajímá, nastane v čase t a on tedy pro jeho charakterizaci užil čtyř čísel x, y, z, t. Nikterak mu nevadí, že první tři z těchto čísel se měří délkovou mírou a čtvrté na hodinkách. Ale fyzika na rozdíl od dějepisu užívá velmi hojně matematických metod. V relativistické fyzice se pak uvedená čtyři čísla x, y, z, t vyskytují v roli proměnných veličin; je proto pochopitelné, že fyzikové na ně aplikovali myšlenku proměnných souřadnic a využitkovali znalosti matematiků o prostoru čtyřrozměrném.

Zakončeme výrokem italského matematika T. Levi-Civity (1873—1941), který výborně vystihuje význam vícerozměrných prostorů: „Je dobře známo, že každé větě z algebry nebo z analýzy dá se přiřadit geometrická věta v podstatě stejného významu, jestliže příslušné proměnné interpretujeme jako souřadnice bodu v jakémsi — obyčejně vícerozměrném — prostoru. Přitom nejen že tyto geometrické věty se dají často jednodušeji formulovat než odpovídající jim tvrzení analytická, ale jsou také jasnější a názornější; nezřídka se dokonce stává, že leckterý problém se dá snáze řešit v geometrickém podání, takže tento způsob geometrické řeči není jen výraznou metodou výkladu, ale představuje i důležitý prostředek bádání.“