

# 10. ročník matematické olympiády

---

## V. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Rudolf Zelinka (editor): 10. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1960-1961. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962. pp. 46–172.

### **Terms of use:**

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404501>

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## V. Řešení úloh ze soutěže

### 1. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE A

1. a) Dokažte, že je-li  $0 < x < 1$ , potom platí

$$1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x} < \frac{1}{2}x^2. \quad (1)$$

b) Narýsujte (např. na milimetrový papír pomocí tabulky hodnot) graf funkcí  $y = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$  v intervalu  $(0, 1)$ ; za jednotku délky zvolte 20cm.

c) Vypočtete (na čtyři desetinná místa), o kolik se liší hodnoty pravé a levé strany dokazované nerovnosti v úloze a) pro  $x = \frac{1}{2}$ .

**Řešení.** a) Pro číslo  $x$  podle textu úlohy platí

$$0 < x < 1, \quad (2)$$

takže

$$1 - x > 0; \quad (3)$$

má tedy odmocnina v (1) smysl. Úpravami (1) dostaneme  $2 - x - x^2 < 2\sqrt{1-x}$  neboli

$$(2+x)(1-x) < 2\sqrt{1-x}. \quad (4)$$

Vzhledem ke vztahům (2), (3) jsou čísla  $2+x$ ,  $1-x$  kladná; proto obě strany ve (4) jsou kladná čísla; umocněním obou stran (4) na druhou dostáváme po úpravě  $x^4 + 2x^3 - 3x^2 < 0$  neboli

$$x^2(x+3)(x-1) < 0.$$



Tento vztah vzhledem ke (2) vskutku platí pro všechna uvažovaná  $x$ ; obrácením postupu dostaneme správnost vztahu (1), což jsme měli dokázat.

b) Položme  $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$ ; souřadnice bodů grafu první funkce budou  $[x, y = y_1]$ ,  $[x, y = y_2]$ . Grafem první funkce je oblouk paraboly (grafem funkce  $y = ax^2$ , jak známo, je parabola); dá se dokázat, že i grafem druhé funkce je oblouk paraboly. Sestavme tabulku hodnot ke každé z obou funkcí (sloupce označené  $\star$ ) jsou mimo uvažovaný interval):

| $x$   | $\star$ )<br>0 | 0,2  | 0,44 | 0,5   | 0,6  | 0,8  | $\star$ )<br>1 |
|-------|----------------|------|------|-------|------|------|----------------|
| $y_1$ | 0              | 0,02 | 0,08 | 0,125 | 0,18 | 0,32 | 0,5            |

| $x$                | $\star$ )<br>0 | 0,2  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,8  | $\star$ )<br>1 | Poznámka      |
|--------------------|----------------|------|------|------|------|------|----------------|---------------|
| $1 - \frac{1}{2}x$ | 1              | 0,9  | 0,8  | 0,75 | 0,7  | 0,6  | 0,5            | přesně        |
| $1 - x$            | 1              | 0,8  | 0,6  | 0,5  | 0,4  | 0,2  | 0              | přesně        |
| $\sqrt{1-x}$       | 1              | 0,89 | 0,77 | 0,70 | 0,63 | 0,44 | 0              | dolní hranice |
| $y_2$              | 0              | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,07 | 0,16 | 0,50           | horní hranice |

c) Pro  $x = 0,5$  mají funkce  $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y_2 = 1 - \frac{1}{2}x - \sqrt{1-x}$  hodnoty:

$$y_1 = \frac{1}{8} = 0,125,$$

$$y_2 = 1 - \frac{1}{4} - \sqrt{0,5} = 0,75 - \sqrt{0,5};$$

rozdíl

$$d = y_1 - y_2 = 0,125 - (0,75 - \sqrt{0,5}) = \sqrt{0,5} - 0,625.$$

Přitom je

$$0,707106 < \sqrt{0,5} < 0,707107,$$

tj.

$$0,707106 - 0,625 < d < 0,707107 - 0,625$$

neboli

$$0,082106 < d < 0,082107.$$

Je tedy

$$d = 0,0821 + k \cdot 10^{-5},$$

kde  $0 < k < 1$  je jisté reálné číslo, které nemá vliv na cifru 1 stojící na 4. desetinném místě.

2. Ak sú  $a, b, c$  dĺžky strán trojuholníka  $ABC$  a  $s$  jeho polovičný obvod, potom pre dĺžku  $u$  osi vnútorného uhla pri vrchole  $A$  tohto trojuholníka platí vzťah

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a);$$

dokážte.

Ak je trojuholník  $ABC$  pravouhlý s preponou  $BC$ , potom s použitím predchádzajúceho výsledku dokážte, že

$$u = \frac{1}{2}a \sqrt{2} \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

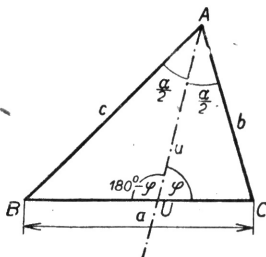
pričom je  $\omega$  veľkosť hociktorého z oboch ostrých uhlov trojuholníka  $ABC$ .

**Riešenie. I.** Zavedieme označenie podľa obr. 1. Po užití sinusovej vety na trojuholníky  $ABU$ ,  $ACU$  dostaneme

$$\frac{BU}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}; \quad \frac{CU}{b} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \quad (1)$$

Porovnaním vzťahov (1) dostaneme

$$\frac{BU}{CU} = \frac{c}{b}. \quad (2)$$



Obr. 1

Pretože je  $BU + CU = a$ , je podľa (2)  $\frac{c}{b} \cdot CU + CU = a$ , tj.

$$CU = \frac{ab}{b + c} \quad (3a)$$

a podobne (výmenou strán  $b$  a  $c$ )

$$BU = \frac{ac}{b + c}. \quad (3b)$$

Teraz použijeme kosínusovou vetu na trojuholníky  $ABU$ ,  $ACU$ ; podľa vzorcov (3a), (3b) je

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= u^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} - 2u \frac{ab}{b+c} \cdot \cos \varphi, \\ c^2 &= u^2 + \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + 2u \frac{ac}{b+c} \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

pretože  $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ . Rovnosti (4) vynásobíme po rade číslami  $c$ ,  $b$  a sčítame. Dostaneme

$$bc(b+c) = u^2(b+c) + \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} (b+c). \quad (5)$$

Rovnosť (5) delíme kladným číslom  $b+c$  a po úprave dostaneme

$$u^2 = bc \left( 1 - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} \right). \quad (6)$$

Vzťah (6) je jeden tvar hľadaného vzorca. Môžeme ho ďalej upraviť takto:

$$u^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] \quad (7)$$

Pretože je

$$\begin{aligned} (b+c)^2 - a^2 &= (b+c+a)(b+c-a) = \\ &= 2s(2s-2a) = 4s(s-a), \end{aligned}$$

kde  $s$  znamená dĺžku polovičného obvodu trojuholníka, dostaneme z rovnosti (7) rovnosť

$$u^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a), \quad (*)$$

čo je už hľadaný vzorec.

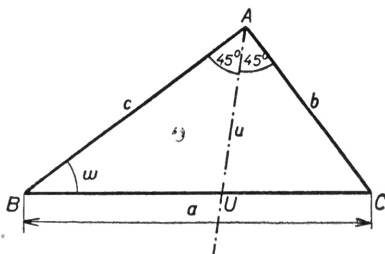
II. Nech je teraz  $\sphericalangle CAB = 90^\circ$ . Pri odvodení vzťahu (\*) vyjdeme zo vzorca (6). Ak je  $\omega = \sphericalangle ABC$ , je  $\sin \omega = \frac{b}{a}$ ,  $\cos \omega = \frac{c}{a}$ . (Vid' obr. 2.) Dosadíme do (6)  $b = a \sin \omega$ ,  $c = a \cos \omega$  a postupne dostaneme

$$u^2 = a^2 \sin \omega \cos \omega \left( 1 - \frac{a^2}{a^2 (\sin \omega + \cos \omega)^2} \right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \left( 1 - \frac{1}{1 + \sin 2\omega} \right),$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \sin 2\omega \frac{\sin 2\omega}{1 + \sin 2\omega},$$

$$u^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\omega}{(\sin \omega + \cos \omega)^2}.$$



Obr. 2

Pretože je  $\omega < 90^\circ$ , je  $\sin \omega > 0$ ,  $\cos \omega > 0$ ,  $\sin 2\omega > 0$ , a teda

$$u = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin \omega + \cos \omega},$$

čo je už vzorec (\*) z druhej časti úlohy. Pretože pre

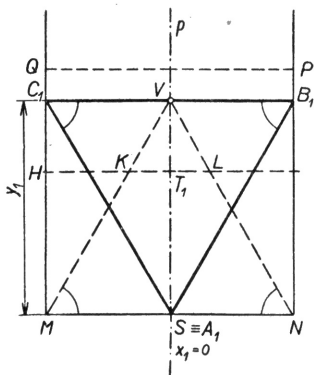
$0 < \omega < 90^\circ$  je  $\sin(180^\circ - 2\omega) = \sin 2\omega$ ,  
 $\sin(90^\circ - \omega) = \cos \omega$ ,  $\cos(90^\circ - \omega) = \sin \omega$ ,  
 vyplýva z predchádzajúceho vzorca, že platí pre obidva  
 ostré uhly  $\omega$ ,  $90^\circ - \omega$  pravouhlého trojuholníka  $ABC$ .

**3.** Je dán čtverec  $MNPQ$ . Uvažujme všetky rovnostranné trojuholníky  $ABC$ , ktoré majú tyto dvě vlastnosti:

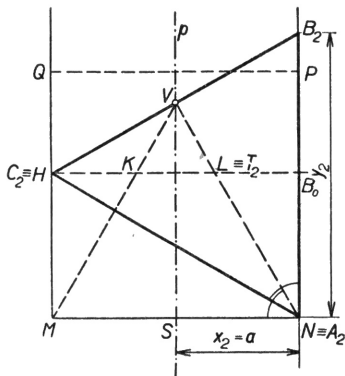
- (1) Vrchol  $A$  leží na úsečke  $MN$ .
- (2) Vrcholy  $B, C$  leží po řadě na polopřímkách  $NP$ ,  $MQ$ .

Zjistěte, který útvar je geometrickým místem:

a) vrcholů  $B$ ; b) středů úseček  $BC$ ; c) těžišť trojúhelníků  $ABC$ . Potom sestrojte ten z trojúhelníků  $ABC$ , jehož těžiště padne na úsečku  $MP$ .

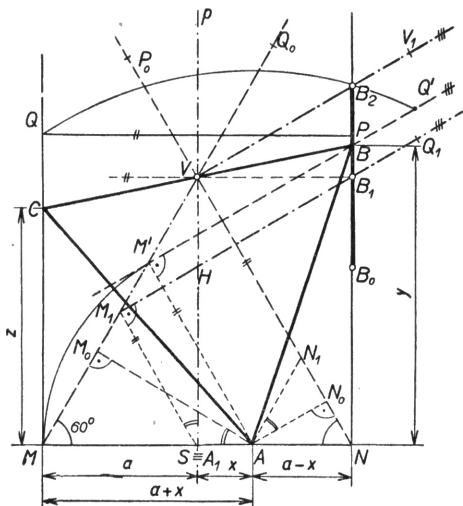


Obr. 3



Obr. 4

Případy, že je  $A \equiv S$  nebo  $A \equiv N$  jsou jednoduché, jak je vidět z obr. 3, 4.



*Obr. 5*

a) Bod  $B$  v obr. 5 dostaneme otočením bodu  $C$  okolo bodu  $A$  o  $60^\circ$  v záporném smyslu; toto otáčení označme

$\Omega$  a otáčení obrácené nazveme  $\Omega'$ . S bodem  $C$  se přitom otáčí i polopřímka  $MQ$  do polohy  $M'Q'$ , takže bod  $B$  je společným bodem polopřímek  $M'Q'$ ,  $NP$ . Protože v otáčení  $\Omega$  platí  $AM' = AM$ ,  $\sphericalangle MAM' = 60^\circ$ , je trojúhelník  $MAM'$  rovnostranný, takže bod  $M'$  leží uvnitř strany  $MV$  rovnostranného trojúhelníka  $MNV$  sestrojeného v polorovině  $MNP$  (bod  $V$  padne na přímku  $p$ ). Přesněji řečeno, jestliže bod  $A$  probíhá úsečku  $SN$ , probíhá bod  $M'$  úsečku  $M_1V$ , kde  $M_1$  je střed strany  $MV$  trojúhelníka  $MNV$  (viz obr. 5). Protože pro každou polohu bodu  $A$  je úhel  $\sphericalangle MAM' = 60^\circ$ , jsou přímky  $AM'$  rovnoběžné s přímkou  $SM_1$  pro všechny polohy bodu  $A$ ; jsou tedy rovnoběžné i polopřímky  $M'Q'$ , které stojí kolmo na  $AM'$ . Polopřímky  $M'Q'$  leží tedy v pásu rovnoběžek  $M_1Q_1$ ,  $VV_1$ , které stojí kolmo k přímce  $SM_1$  (počátky  $M'$  padnou na úsečku  $M_1V$ ). Společná část pásu rovnoběžek  $M_1Q_1$ ,  $VV_1$  s polopřímkou  $NP$  je jistá úsečka  $B_1B_2$ . Jak patrně z obr. 5 je vzdálenost bodu  $B_2$  od přímky  $MN$  větší o délku úsečky  $VH$  než  $NB_1$ , kde  $H$  je společný bod přímky  $p$  s polopřímkou  $M_1Q_1$ ; zřejmě je  $\sphericalangle VM_1Q_1 = 30^\circ = \sphericalangle M_1VS$ , takže  $VH = M_1H = SM_1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$  (neboť úhel  $\sphericalangle M_1SV = 30^\circ$ ), tj.  $VH = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MS = \frac{1}{3}\sqrt{3}a$ . Dále je  $SV = \frac{1}{2}MN$ .  $\sqrt{3} = a/\sqrt{3}$ . Je tedy  $NB_2 = VH + SV = \frac{4}{3}\sqrt{3}a$ , neboť  $NB_1 = SV = a/\sqrt{3}$  (bod  $B_1$  je právě o délku  $VH$  blíže k přímce  $MN$ ); viz též obr. 3, 4. Obráceně od každého bodu  $B$  vnitřku úsečky  $B_1B_2$  obráceným postupem přes bod  $M'$



vnitřku úsečky  $M_1V$  a otočením  $\Omega'$  okolo bodu  $A$  můžeme dospět k bodu  $C$  polopřímky  $MQ$ .

*Výsledek I.* Geometrickým místem bodů  $B$ , odpovídajícím bodům  $A$  úsečky  $SN$ , je úsečka  $B_1B_2$ , ležící v polopřímce  $NP$ ; přitom je  $NB_1 = a\sqrt{3}$ ;  $NB_2 = \frac{4}{3}a\sqrt{3}$ ,  $MN = 2a$ . Probíhá-li pak bod  $A$  celou úsečkou  $MN$ , vyplní bod  $B$  úsečku  $B_0B_2$  o středu  $B_1$ .

b) Střed  $O$  úsečky  $BC$  dostaneme otočením bodu  $C$  kolem bodu  $A$  v záporném smyslu otáčení o úhel velikosti  $30^\circ$  a stejnolehlostí s konstantou  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  (viz vzorec pro výšku rovnostranného trojúhelníka). Toto otáčení převede polopřímku  $MQ$  v polopřímku  $M_0Q_0$ , kde bod  $M_0$  je zřejmě patou kolmice vedené bodem  $A$  na přímku  $MV$ ; přímky  $MV$ ,  $M_0Q_0$  tedy splývají. Podobným způsobem dostaneme bod  $O$  z bodu  $B$ ; příslušné otáčení o úhel velikosti  $30^\circ$  má kladný smysl a polopřímku  $NP$  převádí v polopřímku  $N_0P_0$ , ležící v přímce  $NV$ . Společný bod polopřímek  $M_0Q_0$ ,  $N_0P_0$  je společným bodem přímek  $MV$ ,  $NV$ , tj. bod  $V$ ; je tedy  $O \equiv V$ .

*Výsledek II.* Geometrickým místem středů úseček  $BC$  je jediný bod  $V$ , tj. vrchol rovnostranného trojúhelníka  $MNV$ , který leží v polorovině  $MNP$ .

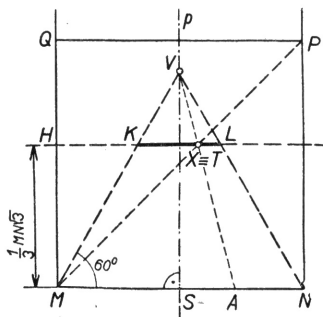
c) Těžiště  $T$  trojúhelníka  $ABC$  splňuje vztah  $\frac{VT}{VA} = \frac{1}{3}$ , bod  $T$  je tedy obrazem bodu  $A$  ve stejnolehlosti se středem  $V$  a koeficientem  $\frac{1}{3}$ . Obrazy bodů úsečky  $MN$  vyplní úsečku  $KL$  rovnoběžnou s přímkou  $MN$  (viz obr. 6);

vzdálenost přímek  $KL$ ,  $MN$  je  $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN$ . Tu je  $HK = \frac{1}{3} \cdot MN$ ,  $HL = \frac{2}{3}MN$ . Úhlopříčka  $MP$  čtverce  $MNPQ$  protne přímku  $HK$  v bodě  $X$ , jehož vzdálenost od bodu  $H$  je  $HX = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot MN \doteq 0,577MN$ . Platí však

$$\frac{1}{3} < 0,577 < \frac{2}{3};$$

proto bod  $X$  náleží úsečce  $KL$ . Obráceně, ze zvoleného bodu  $X$  na úsečce  $KL$  odvodíme snadno vrchol  $A$  a další vrcholy  $B$ ,  $C$  rovnostranného trojúhelníka  $ABC$ .

*Výsledek III.* Těžiště vyplní úsečku  $KL$ , jejíž konstrukce je patrna z obr. 6.



Obr. 6

*Poznámka.* Řešení úlohy užitím výpočtu (geometricky opřeném o předchozí postup) je patrné z obr. 5: Nechť bod  $A$  je bodem úsečky  $SN$ ; označme  $x$  vzdálenost

bodů  $S, A$ , dále  $y, z$  vzdálenosti bodů  $B, C$  od přímky  $MN$ . Snadno zjistíme, že  $SV = \frac{1}{2}(y + z) = a/\sqrt{3}$ , kde  $2a = MN$ , čímž je odvozeno geometrické místo středů  $V$  úseček  $BC$ .

4. Necht'  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou velikosti úhlů trojúhelníka; označme

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma,$$

$$q = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1.$$

a) Je-li trojúhelník pravoúhlý, potom je  $p = q$ ; dokažte.

b) Je-li  $p = q$ , potom je trojúhelník pravoúhlý; dokažte.

c) Které největší hodnoty může nabýt číslo  $p$  pro pravoúhlé trojúhelníky?

**Řešení.** a) Předpokládejme, že jsme označení trojúhelníka  $ABC$  zařídili tak, že platí

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma < 180^\circ. \quad (1)$$

Vztah  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  užijeme zvláště ve tvaru

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma. \quad (2)$$

Je-li  $\gamma = 90^\circ$ , je

$$\sin \frac{1}{2}\gamma = \cos \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \gamma = 1, \cos \gamma = 0. \quad (3)$$

Utvořme výraz  $x = p - q$ ; platí postupně užitím vzorců pro součet funkcí, přičemž položíme

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos \gamma, \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sin \frac{1}{2}\gamma:$$

$$\begin{aligned}
 x &= (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin\gamma - [(\cos\alpha + \cos\beta) + \\
 &+ \cos\gamma + 1] = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1 - \\
 &- [2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 1] = \\
 &= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)[\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\gamma] = 0 \text{ [viz (3)]}.
 \end{aligned}$$

Platí  $x = 0$  neboli  $p = q$ , neboť poslední činitel je roven nule. Tím je tvrzení úlohy a) dokázáno.

b) Nechť platí  $p = q$  [předpokládejme, že platí (1)] neboli

$$\sin\alpha - \sin(90^\circ - \alpha) + \sin\beta - \sin(90^\circ - \beta) + \sin\gamma - \sin(90^\circ - \gamma) = 1.$$

Pomocí vzorce  $\sin x - \sin y$  pro rozdíl funkcí dostaneme

$$(\text{přitom } 2\cos 45^\circ = \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ):$$

$$\begin{aligned}
 2\cos 45^\circ \sin(\alpha - 45^\circ) + 2\cos 45^\circ \sin(\beta - 45^\circ) + \\
 + 2\cos 45^\circ \sin(\gamma - 45^\circ) = 1
 \end{aligned}$$

neboli

$$\sin(\alpha - 45^\circ) + \sin(\beta - 45^\circ) = \sin 45^\circ - \sin(\gamma - 45^\circ).$$

Pomocí vzorce  $\sin x + \sin y$  pro součet funkcí dostaneme

$$\begin{aligned}
 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) - 45^\circ] \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \\
 = 2\cos\frac{1}{2}\gamma \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma);
 \end{aligned}$$

odtud pomocí vztahu (2) dostaneme

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma),$$

tj.

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) [\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2}\gamma] = 0. \quad (4)$$

Platí

$$\begin{aligned} z &= \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \cos \frac{1}{2} \gamma = \\ &= -2\sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta + \gamma) \cdot \sin \frac{1}{4}(\alpha - \beta - \gamma); \end{aligned}$$

avšak

$$\alpha + \gamma = 180^\circ - \beta, \quad -\beta - \gamma = \alpha - 180^\circ,$$

proto

$$\begin{aligned} z &= -2\sin \frac{1}{4}(180^\circ - 2\beta) \sin \frac{1}{4}(2\alpha - 180^\circ) = \\ &= 2\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha). \end{aligned}$$

Po dosazení do (4) máme, že pro úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  vedle  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  platí

$$\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\beta) \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\gamma) = 0.$$

Protože úhly  $\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\gamma$  jsou ostré, platí nutně jeden ze vztahů  $\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$ , tj. trojúhelník je pravoúhlý.

c) Pro  $\gamma = 90^\circ$  je  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 45^\circ$ ; předpokládejme, že je  $0 < \alpha \leq \beta$ , takže je

$$0 \leq \beta - \alpha < 90^\circ. \quad (5)$$

Přitom je

$$p = \sin \alpha + \sin \beta + \sin 90^\circ =$$

$$2\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha) + 1 = 1 + \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha);$$

vzhledem k (5) je  $p$  při  $\gamma = 90^\circ$  maximální pro  $\beta - \alpha = 0$ , tj. pro  $\alpha = \beta = 45^\circ$ , tedy pro pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

5. Nájdite všetky prirodzené čísla  $n$ , pre ktoré je číslo  $2^n - 1$  druhou alebo vyššou mocninou (s celým exponentom) prirodzeného čísla.

**Riešenie.** *Rozbor.* Podľa textu úlohy máme nájsť prirodzené čísla  $n, m > 1, a$ , aby pre ne platilo

$$2^n - 1 = a^m. \quad (1)$$

*Prípad [1].* Nech je  $a = 1$ . Potom vzťah (1) má tvar  $2^n = 2$  pre všetky prirodzené čísla  $m$ . Z toho vyplýva, že nutne  $n = 1$ . Skutočne pre  $a = n = 1, m > 1$  (ľubovoľné) je vzťah (1) splnený.

*Prípad [2].* Nech je  $a > 1$ . Rozoznávajme možnosti [2a], [2b].

[2a] Nech je  $n = 1$ . Vzťah (1) má tvar  $1 = a^m$  a nemožno ho splniť, pretože pre všetky prirodzené  $m \geq 1, a > 1$  je vždy  $a^m > 1$ . Tým je táto možnosť vylúčená.

[2b] Nech je  $n > 1$ . V tomto prípade je  $2^n > 2$  párne číslo a  $2^n - 1$  číslo nepárne. Zo vzťahu (1) vyplýva, že číslo  $a$  je nutne nepárne (inak by číslo  $a^m$  nebolo nepárne). Rozoznávajme dve možnosti  $(\alpha), (\beta)$ :

$(\alpha)$  Nech je  $m > 1$  číslo párne. Položme  $a = 2k + 1, m = 2p$ , kde  $k, p$  sú prirodzené čísla. Po dosadení do (1) dostaneme  $2^n - 1 = [(2k + 1)^2]^p$  čiže

$$2^n - 1 = [4(k^2 + k) + 1]^p; \quad (2)$$

po umocnení dostaneme na pravej strane číslo tvaru

$4Q + 1$ , kde  $Q \neq 0$  je prirodzené číslo. Vzťah (1) možno teda uviesť na tvar

$$2^n = 4Q + 2. \quad (3)$$

Pretože je  $n > 1$ , je číslo  $2^n$  deliteľné štyrmi. Keďže pravá strana vzťahu (3) nie je štyrmi deliteľná, dospeli sme k sporu.

Zostáva m o ť n o s ť:

( $\beta$ ) Číslo  $m > 1$  je nutne nepárne. Vzťah (1) možno písať v tvare  $2^n = a^m + 1$  (kde je teda  $m \geq 2$ ). Na pravú stranu použijeme vzorec  $x^b + y^b = (x + y) \cdot P$ , kde  $P = x^{b-1} - x^{b-2}y + \dots - xy^{b-2} + y^{b-1}$ , ktorý platí pre všetky nepárne prirodzené čísla  $b \geq 3$ , pričom počet členov mnohočlena  $P$  je práve  $b$ .

Vzťah (1) potom prejde do tvaru

$$2^n = (a + 1) \cdot A, \quad (4)$$

kde  $A = a^{m-1} - a^{m-2} + \dots - a + 1$  je súčtom nepárneho počtu  $m$  nepárnych čísel. Je to teda nepárne číslo. Pritom pre prirodzené  $2 \leq k \leq m - 1$  je  $z_k = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a - 1) > 0$ . Keďže číslo  $A$  je súčtom aspoň jedného čísla  $z_k$  a čísla 1, je  $A > 1$ , teda  $A \geq 3$ . No, ľavá strana vo vzťahu (4) nie je deliteľná nepárnym číslom  $A \geq 3$ ; tým sme dosiahli spor.

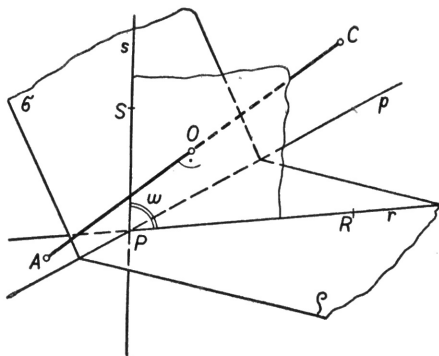
*Záver.* Jediné prirodzené číslo  $n$ , ktoré splňuje požiadavky úlohy, je číslo  $n = 1$  a dané číslo  $2^n - 1$  sa rovná 1.

6. Jsou dány dvě různoběžné roviny  $\varrho, \sigma$  a úsečka  $AC$ , která nemá s žádnou z obou rovin  $\varrho, \sigma$  společný bod a která není kolmá k průsečnici rovin  $\varrho, \sigma$ .

Sestrojte rovnoramenný rovnoběžník (kosočtverec nebo čtverec)  $ABCD$  těchto vlastností:

- (1) Body  $A, C$  jsou jeho protější vrcholy.
- (2) Bod  $B$  leží v rovině  $\varrho$  a bod  $D$  leží v rovině  $\sigma$ .

Proveďte prostorové řešení úlohy a diskusi řešitelnosti.



Obr. 7

**Řešení** (viz obr. 7). Označme  $p$  průsečnici rovin  $\varrho, \sigma$ . Podle textu úlohy neplatí  $p \perp AC$ ; proto rovina  $\omega \perp AC$ , která prochází středem  $O$  úsečky  $AC$ , je s přímkou  $p$  různoběžná (tj. má s ní jediný společný bod). Kdyby platilo  $p \parallel \omega$ , existovala by přímka  $p' \parallel p$



jdoucí bodem  $O$  a ležící v rovině  $\omega$ ; pak by ale bylo  $p' \perp AC$  a  $p \perp AC$ , což je proti znění úlohy.

Je-li  $ABCD$  hledaný rovnostranný rovnoběžník, je  $BD \perp AC$ , takže body  $B, D$  i s přímkou  $BD$  leží v rovině  $\omega$ . Označme  $r, s$  průsečnice roviny  $\omega$  po řadě s rovinami  $\varrho, \sigma$ . Bod  $O$  leží v jednom ze čtyř dutých úhlů, v něž rovinu  $\omega$  dělí různoběžky  $r, s$  (přímky  $r, s$  jsou jistě různé, protože přímka  $p$  protíná rovinu  $\omega$  v bodě  $P$ , jímž procházejí i přímky  $r, s$ ); tento úhel označme  $\angle RPS$ . Tím je úloha převedena na planimetrickou úlohu **U**: „V rovině  $\omega$  je dán dutý úhel  $\angle RPS$  a uvnitř tohoto úhlu bod  $O$ . Na polopřímkách  $RP, PS$  určete po řadě body  $B, D$  tak, aby úsečka  $BD$  měla střed  $O$ .“ Odtud *konstrukce*:

Sestrojíme středem  $O$  úsečky  $AC$  rovinu  $\omega \perp AC$  a označíme  $P$  její průsečík s přímkou  $p$  a  $r, s$  průsečnice dvojic rovin  $\omega, \varrho$  a  $\omega, \sigma$ . Označme  $\angle RPS$  ten z dutých úhlů, v něž přímky  $r, s$  dělí rovinu  $\omega$ , uvnitř něhož leží bod  $O$  (takový úhel je zřejmě jediný); přitom body  $R, S$  leží po řadě v rovinách  $\varrho, \sigma$ . Nyní v rovině  $\omega$  rozřešíme úlohu **U**, a to takto (obr. 8): Označme  $r', s'$  obrazy přímek  $r, s$  v souměrnosti o středu  $O$  a  $B, D$  průsečíky dvojic různoběžek  $r, s'$  a  $s, r'$ .

Protože bod  $O$  leží uvnitř úhlu  $\angle RPS$ , existuje rovnoběžník omezený přímkami  $r \parallel r', s \parallel s'$  o středu  $O$  a bod  $O$  pól jeho úhlopříčky  $BD$ . Přitom přímka  $BD$  leží v rovině  $\omega \perp AC$ , takže je  $BD \perp AC$ . Ve čtyř-

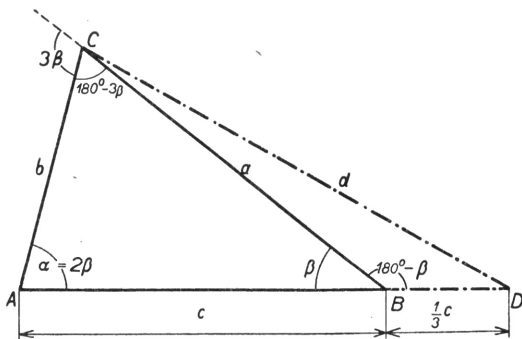


**Riešenie.** Vonkajší úhol pri vrchole  $C$  trojuholníka  $ABC$  je  $\alpha + \beta = 3\beta < 180^\circ$ , t.j.

$$\beta < 60^\circ. \quad (1)$$

Označme  $CA = b$ ,  $CB = a$ ,  $CD = d$ . Veľkosti úsečiek  $a$ ,  $b$  určíme použitím sinusovej vety z trojuholníka  $ABC$ . Je (obr. 9)

$$b = c \frac{\sin \beta}{\sin 3\beta}, \quad a = c \frac{\sin 2\beta}{\sin 3\beta}. \quad (2)$$



Obr. 9

Platí

$$\begin{aligned} \sin 3\beta &= \sin(2\beta + \beta) = \sin 2\beta \cos \beta + \cos 2\beta \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta \cos^2 \beta + (1 - 2\sin^2 \beta) \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta (1 - \sin^2 \beta) + \sin \beta (1 - 2\sin^2 \beta) = \\ &= 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta; \end{aligned}$$

čiže

$$\sin 3\beta = 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta.$$

Po dosadení do (2) dostaneme

$$b = \frac{c}{3 - 4\sin^2\beta}, \quad a = \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta}. \quad (3)$$

Aby sme určili veľkosť úsečky  $d$ , použijeme na trojuholník  $BCD$  kosínusovú vetu. Vzhľadom k (3) dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 &= 4c^2 \frac{\cos^2\beta}{(3 - 4\sin^2\beta)^2} + \frac{c^2}{9} - \\ &- 2 \cdot \frac{2c\cos\beta}{3 - 4\sin^2\beta} \cdot \frac{c}{3} \cdot \cos(180^\circ - \beta) \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [36\cos^2\beta + (3 - 4\sin^2\beta)^2 + \\ &+ 12\cos^2\beta(3 - 4\sin^2\beta)] = \\ &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} [81 - 144\sin^2\beta + 64\sin^4\beta] = \\ &= \frac{c^2}{9(3 - 4\sin^2\beta)^2} (9 - 8\sin^2\beta)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Vzhľadom k (1) je  $0 < \sin\beta < \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  a teda

$$3 - 4\sin^2\beta > 3 - 4 \cdot \frac{3}{4} = 0. \quad (5)$$

Pretože je  $\sin^2\beta < 1$ , je zrejmé

$$9 - 8\sin^2\beta > 0. \quad (6)$$

Výsledok (4) možno vzhľadom k (5) a (6) upraviť takto:

$$d = \frac{c}{3(3 - 4\sin^2\beta)} (9 - 8\sin^2\beta).$$

Odtiaľ a z (3) dostávame

$$\begin{aligned}d - b &= \frac{c}{3(3 - 4 \sin^2 \beta)} [(9 - 8 \sin^2 \beta) - 3] = \\&= \frac{2c(3 - 4 \sin^2 \beta)}{3(3 - 4 \sin^2 \beta)} = \frac{2c}{3},\end{aligned}$$

takže je

$$d - b = \frac{2}{3}c.$$

Tým je úloha vyriešená.

Riešila Marta Kasalická,  
3. g tr. SVVŠ,  
Zátkova ul., České Budějovice.

2. Určete parametr  $p$  tak, aby funkce

$$y = \frac{6x - 6}{x^2 - 2x + p} \quad (1)$$

byla definována pro všechna reálná čísla  $x$  a aby pro  $x = 2$  nabývala své největší hodnoty.

Načrtněte přibližný graf funkce a dokažte o něm, že je středově souměrný podle bodu  $X \equiv [1, 0]$ .

**Řešení I.** Aby funkce (1) byla definována pro všechna reálná čísla  $x$ , nesmí být trojčlen  $x^2 - 2x + p$  roven nule pro žádné  $x$ . Rovnice  $x^2 - 2x + p = 0$  nesmí mít tedy reálné kořeny, tj. její diskriminant  $4 - 4p$  musí být záporný; musí platit  $4 - 4p < 0$  neboli

$$p > 1. \quad (2)$$

Pro  $p > 1$  skutečně je

$$x^2 - 2x + p = (x - 1)^2 + (p - 1) > 0,$$

neboť je  $(x - 1)^2$  nezáporné číslo a  $p - 1 > 0$ .

Označme  $f(x)$  hodnotu zlomku na pravé straně (1) pro dané reálné číslo  $x$ . Aby funkce (1) pro  $x = 2$  nabývala své největší hodnoty, je nutné, aby platilo  $f(2) > f(2 + k)$  pro všechna reálná čísla  $k \neq 0$ ; máme tedy určit, pro která čísla  $p$  platí vztah

$$\frac{6}{p} > \frac{6(1 + k)}{k(2 + k) + p},$$

jestliže je  $k \neq 0$ . Dokázali jsme již, že oba jmenovatelé v této nerovnosti jsou kladná čísla; ekvivalentními úpravami dospějeme ke vztahu

$$k^2 + 2k > pk. \quad (3)$$

Rozeznávejme  $k > 0$  a  $k < 0$ .

**P ř í p a d [1].** Necht' je  $k > 0$ ; potom ze (3) plyne pro číslo  $p$  požadavek  $k + 2 > p$ , který musí platit pro libovolné  $k > 0$ , tj. musí být

$$p \leq 2. \quad (3')$$

**P ř í p a d [2].** Necht' je  $k < 0$ ; ze (3) podobně dostáváme požadavek  $k + 2 < p$  neboli

$$p \geq 2. \quad (3'')$$

Má-li být  $f(2)$  maximum, musí platit (3) pro všechna reálná  $k \neq 0$  neboli musí být  $p = 2$  [viz (3'), (3'')], tj. jedná se o funkci

$$y = \frac{6(x-1)}{x^2 - 2x + 2}. \quad (1')$$

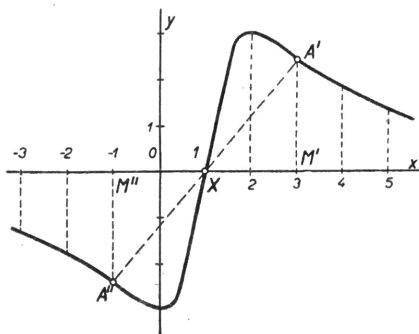
Ta pro  $x = 2$  nabývá hodnoty 3; to je maximum naší funkce, jak plyne z obrácení postupu v případech [1], [2].

II. Nyní dokažme, že graf funkce (1') je středově souměrný podle bodu  $X \equiv [1, 0]$  neboli, že platí  $f(1+k) = -f(1-k)$ , kde  $k \neq 0$ ; přitom je  $f(1) = 0$ .

Dosaďme do (1) jednak  $x = 1+k$ , jednak  $x = 1-k$ ; dostaneme

$$f(1+k) = \frac{6k}{k^2+1},$$

$$f(1-k) = -\frac{6k}{k^2+1}$$



Obr. 10

Tím je důkaz proveden, nebo body  $[1 + k, f(1 + k)]$ ,  $[1 - k, f(1 - k)]$  jsou souměrně sdružené ve středové souměrnosti o středu  $X$ .

Na základě toho snadno sestojíme graf (obr. 10), k jehož sestojení užijeme tabulky:

|     |   |   |     |     |     |     |
|-----|---|---|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | 1 | 2 | 3   | 4   | 5   | 1,5 |
| $y$ | 0 | 3 | 2,4 | 1,8 | 113 | 2,4 |

Řešil Tomáš Jech,  
žák 3. tř. SVVŠ Jana Nerudy,  
Praha 1 — Malá Strana, Hellichova ul. 3.

**II. Náčrt jiného řešení.** Jako v přechozím řešení usoudíme, že nutně platí  $p > 1$ . První derivace funkce (1) je

$$y' = \frac{6x^2 + 12x + 6p - 12}{(x^2 - 2x + p)^2}. \quad (6)$$

Má-li funkce (1) pro  $x = 2$  maximum, pak podle známých vět pro  $x = 2$  platí  $y' = 0$ . Avšak jmenovatel ve zlomku pravé strany (6) je pro  $p > 1$  pro všechna  $x$  kladný, proto je nutně pro  $x = 2$  čitatel tohoto zlomku roven nule; po dosazení  $x = 2$  dostáváme, že nutně je  $6(p - 2) = 0$  neboli

$$p = 2.$$



Pro  $p = 2$  funkce (1) zní

$$y = \frac{6(x-1)}{(x-1)^2 + 1}. \quad (7)$$

Pro  $x = 2$  ze (7) dostáváme

$$f(2) = 3. \quad (8)$$

Pro  $x \neq 2$  položíme  $x = 2 + k$ , kde  $k \neq 0$  je libovolné číslo; je

$$f(1+k) = \frac{6(1+k)}{(1+k)^2 + 1}. \quad (9)$$

Pomocí (8) a (9) dostaneme

$$f(2) - f(1+k) = \frac{3k^2}{(1+k)^2 + 1},$$

což je kladné číslo pro všechna  $k \neq 0$ ; pro  $x = 2$  má tedy funkce (7) vskutku maximum.

Souměrnost grafu se dokáže jako v předchozím řešení.

Řešení podal Michal Kretschmer,  
žák 3. tř. SVVŠ,  
Praha 10 — Vršovice, Omská ul. 1300.

**3.** Určíte všechny dvojice prirodzených čísel, kterých nejmenší společný násobek je o pět větší ako ich najväčší spoločný deliteľ.

**Riešenie.** Nech je  $D$  najväčší spoločný deliteľ hľadaných čísel  $r, s$ , o ktorých môžeme predpokladať, že je

$$r \geq s. \quad (1)$$

Predovšetkým je

$$r = r_1 D, \quad s = s_1 D, \quad (2)$$

kde  $r_1, s_1$  sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, o ktorých vzhľadom k (1) platí

$$r_1 \geq s_1. \quad (3)$$

Označme  $n$  najmenší spoločný násobok čísel  $r, s$ , takže podľa známej vety platí

$$n = r_1 s_1 D. \quad (4)$$

Podľa textu úlohy má byť  $n = D + 5$ , takže po dosadení do (4) dostaneme

$$r_1 s_1 D = D + 5$$

čiže

$$r_1 s_1 = 1 + \frac{5}{D}.$$

Číslo  $r_1 s_1$  je prirodzené a preto je nutne  $\frac{5}{D}$  tiež prirodzené číslo, čiže je buď  $D = 1$  alebo  $D = 5$ .

**P r í p a d [1].** Nech je  $D = 1$ , takže vzhľadom k (5) máme  $r_1 s_1 = 6$ . Je teda buď  $r_1 = 6, s_1 = 1$  a teda vzhľadom k (2)

$$r = 6, \quad s = 1 \quad (6)$$

alebo  $r_1 = 3, s_1 = 2$  a teda vzhľadom k (2)

$$r = 3, \quad s = 2. \quad (7)$$

P r í p a d [2]. Nech je  $D = 5$ , takže vzhľadom k (5) máme  $r_1 s_1 = 2$  čiže  $r_1 = 2$ ,  $s_1 = 1$  a teda vzhľadom k (2)

$$r = 10, \quad s = 5. \quad (8)$$

Tým sú všetky možnosti vyčerpané.

*Záver.* Požiadavkám úlohy vyhovujú jedine dvojice čísel 6,1; 3,2 a 10,5.

Riešenie podali: Alexander Groda,  
žiak 3. tr. SVVŠ.

Kollárova 5, Praha 8 — Karlín a  
Ján Lusk,  
žiak 3. tr, SVVŠ,  
České Budějovice, Zátkova ul. 29.

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$ , o jehož odvěsnách platí  $CB < CA$ . Určete množinu všech bodů  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , pro něž platí zároveň tyto vztahy:

$$XA \geq XB \geq XC, \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3,$$

kde  $x_1, x_2, x_3$  po řadě značí vzdálenosti bodu  $X$  od stran  $BC, CA, AB$  trojúhelníka  $ABC$ .

**Řešení** (viz označení v obr. 11). Při řešení úlohy uijeme těchto vět:

**Věta U.** Bud' dán dutý úhel  $\sphericalangle CAB$ ; označme  $X$  libovolný bod tohoto úhlu a  $x_2, x_3$  po řadě jeho vzdálenosti od přímek  $AC, AB$ . Potom množinou všech

bodů  $X$ , o nichž platí  $x_2 \geq x_3$ , je ostrý úhel  $\sphericalangle BAK$ , kde polopřímka  $AK$  je osou daného úhlu  $\sphericalangle BAK$ .

**Věta V.** Bud' dána úsečka  $AB$ ; označme  $o_3$  její osu. Množinou všech bodů v rovině, o nichž platí  $XA \geq XB$  (včetně nulových vzdáleností), je polorovina  $o_3B$ .

**Věta W.** Je-li  $\sphericalangle BCM$  daný dutý úhel a prochází-li polopřímka  $CK$  vnitřkem tohoto úhlu, protne polopřímka  $CK$  úsečku  $BM$  v jejím vnitřním bodě.

Řešení úlohy rozdělme na části I, II; v první části vyšetříme množinu všech bodů  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , o nichž platí  $XA \geq XB \geq XC$ , v druhé části dokončíme řešení úlohy.

I. Označme po řadě  $o_1, o_2, o_3$  osy stran  $a, b, c$  daného trojúhelníka  $ABC$ , dále  $M', M'', M$  středy těchto stran,  $AK, BK, CK$  osy jeho vnitřních úhlů, při čemž  $K$  je střed kružnice trojúhelníku  $ABC$  vepsané (o něm víme, že leží uvnitř trojúhelníka). Podle textu úlohy platí

$$a < b; \quad (1)$$

proto o ostrých úhlech  $\alpha, \beta$  trojúhelníka  $ABC$  platí

$$0 < \alpha < 45^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (2)$$

Z věty **V** vyplývá: Každý bod  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , o němž platí  $XA \geq XB$ , leží v polorovině  $o_3B$ ; každý bod  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , o němž platí  $XB \geq XC$ , leží v polorovině  $o_1C$ . Bod  $X$ , o němž platí

$$XA \geq XB \geq XC, \quad (3)$$

leží zároveň v pravém úhlu  $\sphericalangle BCA$  a v ostrém úhlu  $\sphericalangle QMM'$ , kde  $Q$  je průsečík přímek  $AC$ ,  $o_3$ ; úhel  $\sphericalangle QMM'$  je totiž společnou částí polorovin  $o_1C$  a  $o_3B$ . Než stanovíme, co body  $X$  vyplní, provedme dvě va-  
šetřování:

[1] Platí  $o_1 \parallel AC$ , neboť je  $AC \perp CB$ ,  $o_1 \perp CB$ .

[2] Platí  $MA = MB = MC$ , (4)

neboť  $M$  je středem kružnice opsané trojúhelníku  $ABC$ . Je tedy trojúhelník  $MAC$  rovnoramenný a  $o_2$  je jeho osa souměrnosti; odtud plyne:  $\sphericalangle CMM'' = \sphericalangle AMM'' = \beta$  (neboť v trojúhelníku  $AMM''$  je  $\sphericalangle A = \alpha$ ,  $\sphericalangle M'' = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle M = \beta$ ). Úhel  $\sphericalangle QMM'' = \alpha$ , takže je  $\sphericalangle XMM'' > \sphericalangle QMM''$  [viz (2)]; leží tedy polopřímka  $MQ$  v úhlu  $\sphericalangle CMM''$  a tím bod  $Q$  uvnitř úsečky  $CM''$ . Body  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , o nichž platí (3) tedy vyplní lichoběžník  $CQMM'$  o větší základně

$$MM' = \frac{1}{2}b. \quad (5)$$

II. Z věty **U** vyplývá: Každý bod  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , pro nějž platí  $x_1 \geq x_2$ ,

leží v ostrém úhlu  $\sphericalangle ACK$ ; (6)

každý bod  $X$  trojúhelníka  $ABC$ , pro nějž platí  $x_2 \geq x_3$ ,

leží v ostrém úhlu  $\sphericalangle BAK$ . (7)

Označme  $L$  průsečík osy  $CK$  úhlu  $\sphericalangle BCA$  s přímkou  $o_1$ . Podle (4) je trojúhelník  $MBC$  rovnoramenný a platí

lichoběžník  $CQML$ . (8)

The diagram illustrates the Mohr's circle method for finding principal stresses. A right-angled triangle ABC is shown, where AC is horizontal and BC is vertical. Point M is located on AC such that CM = 1/2 b. A vertical line through M intersects AB at L and BC at M'. Another point N is on AC such that AN = 1/2 a. A line through N intersects AB at P and BC at K. A dashed line through M and N is perpendicular to AB at Q. Angles are labeled: alpha at M between MN and MP; beta at M between ML and MP; gamma/2 at A between AN and AP; and 45 degrees at C between MC and CK. Principal stress directions are indicated by dashed lines o1 (horizontal), o2 (vertical), and o3 (diagonal). Shaded regions represent areas related to the stress distribution.

$CQML$  [viz (8)] a úhlu  $\sphericalangle BAK$  [viz (7)]. Polopřímka  $AK$  leží uvnitř úhlu  $\sphericalangle CAB$  neboli úhlu  $\sphericalangle QAM$  a podle věty **W** má s úsečkou  $QM$  společný bod  $P$ , který leží mezi body  $Q, M$ . Dále bod  $K$  (střed kružnice vepsané trojúhelníku  $ABC$ ) jistě leží uvnitř trojúhelníka

$ABC$ ; dokážeme však, že bod  $K$  padne dovnitř úsečky  $CL$ .

V trojúhelníku  $KBC$  platí  $\sphericalangle B = \frac{1}{2}\beta$ ,  $\sphericalangle C = 45^\circ$ ; polovina ostrého úhlu  $\beta$  je však menší než  $45^\circ$ , takže je  $\sphericalangle B < \sphericalangle C$ . Proti většímu úhlu  $\sphericalangle C$  trojúhelníka  $KBC$  leží větší strana, tj. je  $KC < KB$  a podle věty **V** (užité pro ostrou nerovnost) padne bod  $K$  dovnitř polopřímky  $o_1C$ , a tím nutně dovnitř úsečky  $CL$ ; tím je důkaz proveden.

Bod  $P$  tedy leží uvnitř úsečky  $QM$  a bod  $K$  leží uvnitř úsečky  $CL$ ; proto společnou částí lichoběžníka  $CQML$  a úhlu  $\sphericalangle BAK$  je čtyřúhelník (vypuklý)  $KPML$ .

V našem vyšetřování jsme se opírali o věty **U**, **V**, které jednají o množinách *všech bodů* jisté vlastnosti. Proto je čtyřúhelník  $KPML$  množinou všech bodů, které splňují požadavky úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno.

### 3. ÚLOHY III. KOLA KATEGORIE A

1. Je dána posloupnost

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, . . . .

Vypočítejte její tisící člen.

**Řešení.** Členy dané posloupnosti zařadme do skupin podle tohoto vzoru:

|                       |   |      |         |     |                  |
|-----------------------|---|------|---------|-----|------------------|
| Členy<br>posloupnosti | 1 | 2, 2 | 3, 3, 3 | ... | $n, n, \dots, n$ |
| Index skupiny         | 1 | 2    | 3       | ... | $n$              |

Všimněme si toho, že index skupiny udává zároveň skupinu a počet členů, které má skupina. Prvních  $n$  skupin obsahuje

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

členů dané posloupnosti.

Jestliže tisící člen dané posloupnosti se nachází v  $n$ -té skupině, je  $s_n \geq 1000$   
neboli

$$\frac{1}{2}n(n + 1) \geq 1000;$$

po úpravě dostaneme pro číslo  $n$  požadavek

$$n^2 + n - 2000 \geq 0. \quad (1)$$

Po rozkladu levé strany této nerovnosti dostaneme

$$(n - n_1)(n - n_2) \geq 0, \quad (2)$$

kde  $n_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8001}) > 0$ ,  $n_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{8001}) < 0$ ;  
je tedy  $n - n_1 > 0$ , a proto musí platit

$$n \geq n_1. \quad (3)$$



Avšak  $90 > \sqrt[3]{8001} > 89$ ; proto je

$$n_1 > \frac{-1 + 89}{2} = 44, \quad n_1 < \frac{-1 + 90}{2} = 44,5.$$

Vztah (3) tedy platí pro všechna přirozená čísla  $n$  větší nebo rovná číslu 45, tj. tisící člen je ve skupině  $s_{45}$ , a je tedy roven číslu 45.

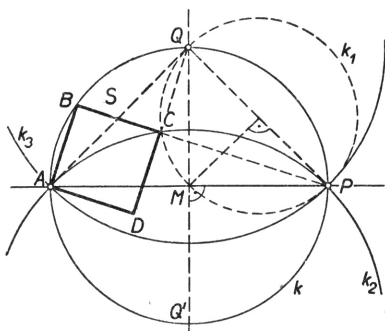
Podle řešení Michala Kretschmera,  
11.b SVVŠ,  
Omská 1300, Praha 10 a  
Svatopluka Fučíka,  
11.b SVVŠ J. K. Tyla,  
Hradec Králové.

**2.** Daný je pravouhlý rovnoramenný trojúhelník  $APQ$  s preponou  $AP$ . Zostrojte štvorec  $ABCD$  tak, aby priamky  $BC$ ,  $CD$  prechádzali po rade bodmi  $P$ ,  $Q$ . Vyjadrite dĺžku strany štvorca  $ABCD$  pomocou dĺžky  $a$  odvesny daného trojúhelníka.

**Riešenie.** Označme  $k \equiv (M, MA)$  kružnicu opísanú trojúhelníkom  $APQ$ . Rozoznávajme tieto dva prípady: [1] Bod  $B$  leží vo vnútri polroviny  $APQ$ . [2] Bod  $B$  leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine  $APQ$ .

**Prípad [1].** Rozbor (obr. 12). Je  $\angle ABC = 90^\circ$  a bod  $B$  leží vo vnútri štvrtkružnice  $AQ$  (inak priamka  $CD$  neprechádza bodom  $Q$ ). Bod  $C$  zrejme leží vo vnútri

úsečky  $BP$ . Označme  $S$  spoločný bod úsečiek  $AQ$ ,  $PB$ . V pravouhlom trojuholníku  $PSQ$  je  $C$  päta výšky  $QC$ , je teda  $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$  a  $\triangle AQD \cong \triangle QPC$  (usu), lebo je  $AQ = QP = a$ . Platí teda:  $AD = QC = b$ . Ďalej platí  $b = DC = AD$  (pretože  $ABCD$  je štvorec). Musí preto platiť:  $QC = DC$ . Je teda  $C$  stred úsečky  $QD$  a  $S$  stred úsečky  $AQ$  (je  $CS \parallel AD$  a  $CS$  je stredná prieka v trojuholníku  $AQD$ ).



Obr. 12

*Konštrukcia* (obr. 12). Zostrojme stred  $S$  úsečky  $AQ$  a označme  $B \equiv P$  spoločný bod polpriamky  $PS$  a kružnice  $k$ . Označme  $C$  obraz bodu  $B$  v súmernosti so stredom  $S$ , takže platí  $SC = SB$ . Trojuholník  $ABC$  (kde  $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ) doplníme na rovnobežník  $ABCD$ , ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy, ako hneď dokážeme.

*Dôkaz.* Zo súmernosti so stredom  $S$  vyplýva, že

$\triangle SQC \cong \triangle SAB$  a teda  $\sphericalangle SCQ = 90^\circ$ . Preto strana  $CD$  rovnobežníka  $ABCD$  prechádza bodom  $Q$  a všetky jeho uhly sú pravé.

Ďalej je  $SA = SQ$  a teda aj

$$CD = CQ. \quad (1)$$

No,  $\triangle AQD \cong \triangle QPC$  (usu) — viď rozbor — a teda

$$CQ = DA. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyplýva, že  $CD = DA$  a teda rovnobežník  $ABCD$  má všetky strany i uhly rovnaké, t. j. je štvorec.

*Diskusia.* Bod  $S$  možno vždy zostrojiť a preto existuje práve jeden štvorec  $ABCD$  s vrcholom  $B$  vo vnútri polroviny  $APQ$ .

Z trojuholníka  $QSC$ , kde  $\sphericalangle QCS = 90^\circ$ ,  $SC = \frac{1}{2}b$ ,  $QC = AB = b$ , pomocou Pythagorovej vety dostaneme  $QS^2 = SC^2 + QC^2$  čiže

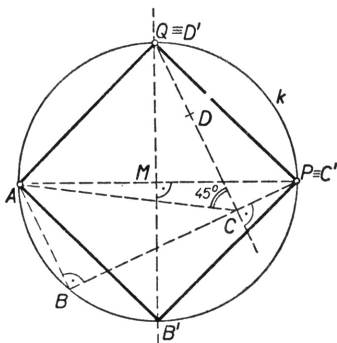
$$\frac{a^2}{4} = \frac{5}{4} b^2,$$

odkiaľ

$$b = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

**P r í p a d [2]** (obr. 13). Nech bod  $B$  leží vo vnútri polroviny opačnej k polrovine  $APQ$ . Pritom nutne padne na kružnicu  $k \equiv (M, MA)$  a uhol  $\sphericalangle ABP = 90^\circ$ . Bod  $C$  leží teda na geometrickom mieste bodov, z ktorých vidno úsečku  $AQ$  pod uhlom  $45^\circ$ . To je v našom

prípade väčší oblúk kružnice  $k \equiv (M, MA)$  s koncovými bodmi  $A, Q$ . Bod  $C \equiv B$  leží na  $PB$  a  $k$ , takže nutne je  $C \equiv P$  a teda aj  $D \equiv Q$ . Konštrukcia je samozrejماً (viď obr. 13 — na ňom štvorec  $AB'C'D'$ ). V tomto prípade je strana štvorca  $AB' = a$ .



Obr. 13

*Záver.* Úloha má práve dve riešenia.

Podľa riešenia Dušana Mikloša,  
3c tr. SVVŠ,  
Novohradská ul. Bratislava.

**Iné riešenie** (n á č r t — viď obr. 14). Ak je bod  $C$  rôzny od  $P, Q$ , potom je  
 $\sphericalangle PCQ = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle ACP = 135^\circ$  alebo  $\sphericalangle ACP = 45^\circ$ .  
Zostrojme kružnicu  $k_1$  nad úsečkou  $PQ$  ako priemerom



naslat) = vid stvorec  $AB \subset D$  na obl. 15.

první stárou rychlosti  $c_{1m}/v$ , druhý stárou rychlosti

$c_2$  m/vt. Kolikrát se potkají v době, v které první cyklista objede kruhovou dráhu  $n$ -krát?

Provedte výpočet pro  $c_1 = 10$ ,  $c_2 = 7$ ,  $n = 11$ .

**Řešení.** Označme  $T$  čas (ve vteřinách), který uplynul od vyjetí cyklistů až do jejich prvního střetnutí; dále označme  $o$  obvod kruhové dráhy.

Platí

$$Tc_1 + Tc_2 = o$$

neboli

$$T = \frac{o}{c_1 + c_2}. \quad (1)$$

Za dobu  $xT$ , kde  $x$  je přirozené číslo, dojde k  $x$  setkáním; označíme-li  $t$  čas od vyjetí cyklistů až do určitého okamžiku mezi  $x$ -tým a  $(x + 1)$ -tým setkáním, potom platí

$$xT \leq t < (x + 1)T. \quad (2)$$

Jestliže v okamžiku  $t$  objel 1. cyklista obvod právě  $n$ -krát, pak platí  $o \cdot n = c_1 t$  neboli

$$t = \frac{o \cdot n}{c_1}.$$

Po dosazení z (1), (3) do (2) máme

$$x \cdot \frac{o}{c_1 + c_2} \leq \frac{o \cdot n}{c_1} < (x + 1) \cdot \frac{o}{c_1 + c_2};$$

po znásobení číslem  $\frac{c_1 + c_2}{o}$  pro číslo  $x$  dostaneme

$$x \leq n \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1} < x + 1$$

neboli

$$x = \left[ n \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1} \right],$$

kde symbol  $[a]$  značí tzv. celistvou část čísla  $a$  (pro celá  $a$  je  $[a] = a$ , pro necelé  $a$  je  $[a]$  nejbližší celé číslo menší než  $a$ ).

V daném příkladě je

$$x = \left[ 11 \cdot \frac{17}{10} \right] = [18,7] = 18;$$

cyklista objel dráhu 11krát, cyklisté se setkali 18krát.

Řešil Antonín Lukš, 3.c tř.  
SVVŠ, tř. Jiřího z Poděbrad,  
Olomouc.

4. Je dán čtverec  $ABCD$ , jehož strana má délku 1. Vrchol  $X$  proměnného rovnostranného trojúhelníka  $XYZ$  leží na polopřímce  $AB$ , vrchol  $X$  na úsečce  $AD$ , vrchol  $Z$  na polopřímce  $DC$ .

Zjistěte, jak závisí délka strany trojúhelníka  $XYZ$  na vzdálenosti  $AX$ . Odtud vypočtěte, který z trojúhelníků  $XYZ$  má nejmenší a který má největší obsah.

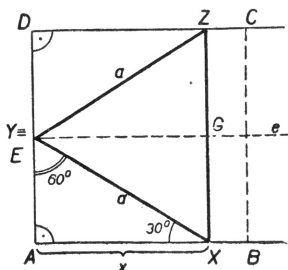
**Řešení** (viz obr. 15, 16). Omezíme se na případ, že bod  $Y$  probíhá úsečku  $ED$ , kde  $E$  je střed úsečky  $AB$  (to lze učinit vzhledem k souměrnosti o ose  $e$ , kde  $e \perp AD$  je osou úsečky  $AD$ ).

Označme  $AD = 1$ ,  $XY = YZ = ZX = a$ ,  $x$  vzdá-

lenost bodů  $A, X$ ,  $\sphericalangle A Y X = \alpha$ ; při našem omezení polohy bodu  $Y$  snadno v dalším ukážeme, že je  $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ .

Uvažujme dvě možnosti: [1] Je  $Y \equiv E$ ; [2]  $Y \neq E$  je bodem úsečky  $ED$ .

Případ [1]. Platí  $x = AX = AE \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  a obsah  $P$  trojúhelníka  $XYZ$  je  $P = \frac{1}{4}\sqrt{3}$  (viz obr. 15).



Obr. 15

Případ [2] (viz obr. 16). Označme  $G$  střed strany  $XZ$  trojúhelníka  $XYZ$ , dále  $F$  patu kolmice vedené bodem  $X$  na přímku  $DC$  a  $H$  střed úsečky  $XF$ .

Označme  $T$  bod uvnitř čtverce  $ABCD$  takový, že  $\sphericalangle TYA = 90^\circ$ ; bod  $G$  zřejmě leží uvnitř úhlu  $\sphericalangle AYT$ . Protože je  $\sphericalangle XYG = 30^\circ$ , je  $\sphericalangle A Y X < 60^\circ$ ; zřejmě platí  $30^\circ \leq \sphericalangle A Y X < 60^\circ$ .

Platí  $\sphericalangle YXF = \sphericalangle A Y X = \alpha$  (střídavé úhly); proto



polopřímka  $XF$  leží v úhlu  $\sphericalangle YXZ$ , takže bod  $H$  padne dovnitř úsečky  $EG$  a bod  $F$  dovnitř úsečky  $DZ$ .

Z trojúhelníka  $XZF$  (kde  $\sphericalangle F = 90^\circ$ ,  $XF = 1$ ) plyne

$$XZ = XF \cdot \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}$$

neboli

$$a = \frac{1}{\cos(60^\circ - \alpha)}. \quad (1)$$

Dále je

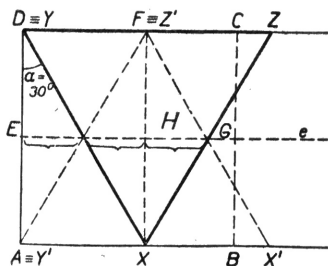
$$EG = YG \cdot \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \cos(60^\circ - \alpha);$$

po dosazení z (1) máme

$$EG = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (2)$$

takže bod  $G$ , který leží na přímce  $e$ , je též pro všechny trojúhelníky  $XYZ$  (i pro případ [1]). Snadno zjistíme, že o číslu  $x$  platí (viz obr. 15a, 16).

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}. \quad (3')$$



*Obr. 15a*



Mějme čísla  $x_1 > x_2$  taková, že

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad (5)$$

a označme  $y_1, y_2$  hodnoty funkce (4) po řadě pro  $x_1, x_2$ . Platí

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (\sqrt{3} - 2x_2)^2 - (\sqrt{3} - 2x_1)^2 = \\ &= 4(x_1 - x_2) \cdot (\sqrt{3} - x_2 - x_1) = \\ &= 4(x_1 - x_2)[(\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_2) + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_1)]. \end{aligned}$$

Vzhledem k (5) je  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_2 \geq 0$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{3} - x_1 > 0$  a tedy  $y_2 - y_1 < 0$  neboli  $y_2 > y_1$ , což jsme měli dokázat.

Minimum tedy nastane pro  $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , maximum pro  $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  a pro  $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$  (uvažujme trojúhelník  $Z'Y'X'$  souměrně sdružený s trojúhelníkem  $XYZ$  z obr. 15a vzhledem k ose  $e$  úsečky  $AD$ ).

Podle řešení Jana Luska,  
žáka 3.d tř. SVVŠ,  
České Budějovice.

#### 4. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE B

1. Závod dodává  $p$  procent svých výrobků pro vývoz, zbytek na domácí trh.

a) Závod dostane za úkol zvýšit vývoz o  $q\%$ , domácí dodávky o  $r\%$ . O kolik procent musí zvýšit celkem výrobu?

b) Závod zvýší celkovou výrobu o  $s\%$ ; z tohoto zvýšení dodá třikrát více vývozu než na domácí trh. O kolik procent vzrostly jeho dodávky pro vývoz a o kolik procent dodávky pro domácí trh?

**Řešení.** a) Označme  $n$  původní počet výrobků (v jistém období). Z toho připadlo vývozu  $\frac{p}{100}n$  výrobků, domácímu trhu  $\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$  výrobků. Při zvýšení výroby připadne vývozu  $\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n$  výrobků, domácímu trhu  $\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n$  výrobků. Je-li celková zvýšení výroby dáno  $x$  procenty, je zvýšené množství výrobků  $\left(1 + \frac{x}{100}\right)n$ . Podle podmínky úlohy a) je

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)\frac{p}{100}n + \left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right)n = \left(1 + \frac{x}{100}\right)n.$$

Znásobíme-li tuto rovnost číslem  $\frac{100}{n}$ , dostaneme

$$\left(1 + \frac{q}{100}\right)p + \left(1 + \frac{r}{100}\right)(100 - p) = 100 + x.$$

Po vynásobení

$$p + \frac{pq}{100} + 100 + r - p - \frac{pr}{100} = 100 + x,$$

a odtud

$$x = r + \frac{p}{100}(q - r). \quad (1)$$

Pro  $p = 40$ ,  $q = 20$ ,  $r = 25$  vyjde  $x = 23$ ,

b) V druhé úloze platí mezi čísly  $p$ ,  $s$  a  $q$ ,  $r$  (to jsou hledané počty procent zvýšení dodávek) podle (1) vztahu:

$$s = r + \frac{p}{100}(q - r) \quad (2a)$$

Vzrůst dodávek pro vývoz je  $\frac{q}{100} \cdot \frac{p}{100} n = \frac{pq}{100^2} n$  výrobků, vzrůst dodávek pro domácí trh je  $\frac{r}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right) n$  výrobků. Podle podmínky je

$$\frac{pq}{100^2} n = 3 \cdot \frac{r}{100} \left(1 - \frac{p}{100}\right) n.$$

Znásobíme-li tuto rovnici číslem  $\frac{100^2}{n}$ , vyjde

$$pq = 3r(100 - p). \quad (2b)$$

Rovnice (2a), (2b) tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé  $q$ ,  $r$ .

Rovnici (2a) znásobíme číslem 100, rovnici (2b) uspořádáme podle  $q$ ,  $r$ ; tím uvedeme soustavu na tvar:

$$\begin{aligned} pq + (100 - p)r &= 100s, \\ pq - 3(100 - p)r &= 0. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li  $r$ , dostaneme

$$q = \frac{75s}{p}, \quad (3a)$$

vyloučíme-li  $q$ , dostaneme

$$r = \frac{25s}{100 - p}. \quad (3b)$$

Vzorce (3a), (3b) dávajú řešení úlohy b).

2. Zostrojte trojuholník  $ABC$ , ak sú dané veľkosti výšok  $v_a$ ,  $v_b$  a veľkosť ťažnice  $t_a$ .

Udajte podmienky riešiteľnosti.

**Riešenie.** *Rozbor* (obr. 18–20). Musí zrejme platiť

$$v_a \leq t_a. \quad (1)$$

Nech sú  $M$ ,  $N$  po rade päty výšok trojuholníka  $ABC$  vedených bodmi  $A$ ,  $B$  a  $S$  stred strany  $BC$ , takže je

$$AM = v_a, BN = v_b, AS = t_a.$$

Opíšme kružnicu  $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$ . Táto sa dotýka priamky  $AC$  v bode  $T$ . Pritom je  $ST$  strednou priečkou v trojuholníku  $BCN$ , takže je  $T$  stredom úsečky  $CN$  alebo je  $N \equiv C \equiv T$  (viď obr. 20).

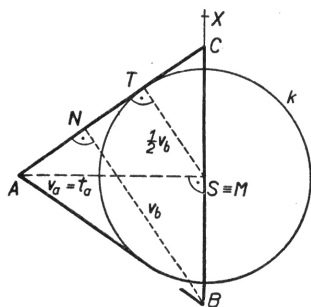
Pri konštrukcii treba rozoznávať dva prípady:

[1] Je  $v_a = t_a$ , t. j.  $M \equiv S$  (obr. 17);

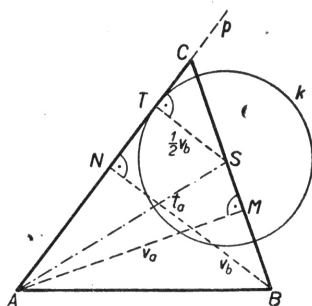
[2] je  $v_a < t_a$ , t. j.  $M \neq S$  (obr. 18–20).

**P r í p a d** [1] (viď obr. 17). Zvolme úsečku  $AS = t_a = v_a$ , uhol  $\sphericalangle ASX = 90^\circ$  a opíšme kružnicu  $k \equiv (S, \frac{1}{2}v_b)$ . Požadujeme, aby bod  $C$  padol do polroviny  $ASX$  čiže na polpriamku  $SX$ . Označme  $T$  dotykový bod dotýčnice vedenej z bodu  $A$  ku kružnici  $k$ , ktorý leží v polrovine  $ASX$ . Spoločný bod polpriamek  $AT$ ,  $SX$

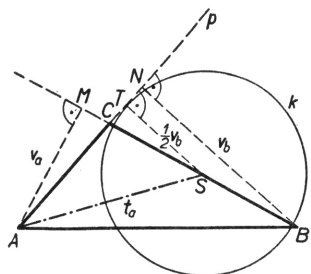
označme  $C$  a jeho obraz v súmernosti so stredom  $S$  nech je  $B$ . Potom je  $ABC$  hľadaný trojuholník.



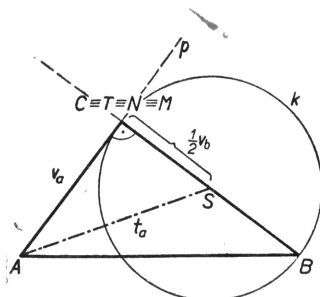
Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19



Obr. 20

Dôkaz konštrukcie nebudeme prevádzať, pretože sa zrejme jedná o rovnoramenný trojuholník s hlavným vrcholom  $A$ .

Podmienkou riešiteľnosti je, aby bod  $A$  ležal mimo kružnice  $k$  (nie na kružnici  $k$ ) čiže  $\frac{1}{2}v_b < v_a = t_a$ , t. j.

$$v_b > 2v_a = 2t_a. \quad (2)$$

**P r í p a d [2]** (viď obr. 18–20). Ak je  $t_a > v_a$ , zostrojme trojuholník  $ASM$  tak, aby platilo  $\sphericalangle AMS = 90^\circ$ ,  $AM = v_a$ ,  $AS = t_a$ . Ďalšia konštrukcia je takmer taká istá ako v prípade [1]. Označíme  $C$  priesečník priamky  $MS$  a dotýčnice  $p$  vedenej bodom  $A$  ku kružnici  $k$  a zostrojíme obraz  $B$  bodu  $C$  v súmernosti so stredom  $S$ . Potom trojuholník  $ABC$  splňuje požiadavky úlohy.

*Dôkaz a diskusia.* V trojuholníku  $ABC$  má ťažnica  $AS$  dĺžku  $t_a$  a výška  $AM$  dĺžku  $v_a$ . Ak bod  $A$  leží mimo kružnice  $k$  (t. j. pre  $2t_a > v_b$ ), je dotýčnica  $p$  rôzobežná s priamkou  $MS$  a bod  $C \equiv S$  existuje. Pritom je  $BN = 2 \cdot TS = v_b$  (viď obr. 18–20), pretože  $TS$  je stredná priečka v trojuholníku  $BCN$ . Má teda výška trojuholníka  $ABC$  vedená bodom  $B$  dĺžku  $v_b$ .

Z bodu  $A$  možno viesť ku kružnici  $k$  dve rôzne dotýčnice. Sú teda dve riešenia práve vtedy, keď je

$$2t_a > v_b.$$

Inak úloha riešenie nemá.

*Záver.* Ak platí: [1]  $v_a = t_a$ ,  $v_b < 2t_a$ , má úloha dve riešenia.



[2]  $v_a < t_a$ ,  $v_b < 2t_a$  má úloha taktiež dve riešenia. Inak úloha riešenie nemá.

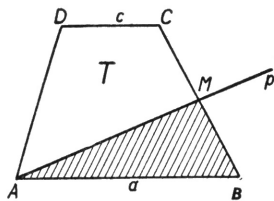
Riešenie zaslal s. Karol Trnovský,  
učiteľ SVVŠ, Ružomberok.

**3.** Máme rozdeliť lichoběžník ve tři nepřekrývající se trojúhelníky o stejných obsahích.

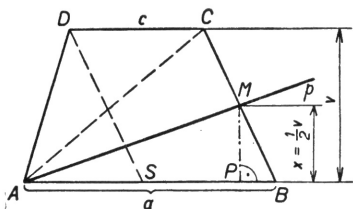
Zjistěte, zda je úloha řešitelná pro každý lichoběžník.

V případech, kdy je úloha řešitelná, najděte všechny způsoby takového rozdělení.

**Řešení.** Označme  $a = AB$ ,  $c = CD$  základny a  $v$  výšku uvažovaného lichoběžníka  $ABCD$ ; nechť přitom platí  $a > c$  (toho lze dosáhnout vhodným označením vrcholů lichoběžníka). Obsah každého z hledaných dílčích trojúhelníků pak je  $\frac{1}{6}(a + c)v$ .



Obr. 21



Obr. 21 a

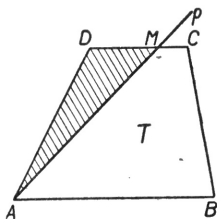
Přímka, která neobsahuje žádný vrchol trojúhelníka, zřejmě úloze nevyhovuje; taková přímka dělí lichoběžník buď ve dva čtyřúhelníky, nebo na trojúhelník a pěti-

úhelník (ten nelze jednou další přímkou rozdělit ve dva trojúhelníky). Proto musí hledaná přímka  $p$  obsahovat alespoň jeden vrchol lichoběžníka. Jsou dvě možnosti: Přímka  $p$  oddělující dílčí trojúhelník prochází vrcholem:

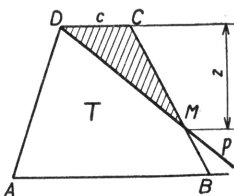
[1] větší základny  $a$  a protíná rameno lichoběžníka (srovnej s obr. 21).

[2] větší základny  $a$  a protíná menší základnu  $c$  (srovnej s obr. 22).

[3] menší základny  $a$  protíná rameno (srovnej s obr. 23).



Obr. 22



Obr. 23

[4] menší základny  $a$  protíná větší základnu (srovnej s obr. 24). (Výrokem „p ř í m k a p r o t í n á ú s e č k u“ tu rozumíme, že má s úsečkou jediný společný bod, který leží uvnitř uvažované úsečky.)

Případy [1] až [4] prozkoumáme ve sledu [2], [4], [1], [3]:

P ř í p a d [2] nevede k řešení, neboť čtyřúhelník  $T$

v obr. 22 je lichoběžník a ten nelze rozdělit přímkou, která obsahuje úhlopříčku, ve dva rovnoploché trojúhelníky.

Případ [4] povede k řešení právě tehdy, je-li v obr. 24 čtyřúhelník  $T \equiv BCDM$  rovnoběžníkem, tj. platí-li

$$cv = 2 \cdot \frac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \quad (1)$$

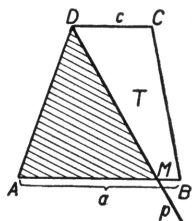
Skutečně, tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující; tím je tento případ vyřízen (viz obr. 21, 24a, 24b).

Případ [1]. Označme v obr. 21a  $x$  výšku trojúhelníka  $ABM$ ; tu platí

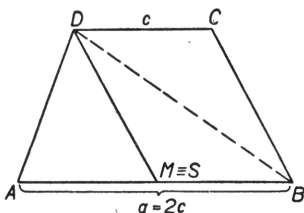
$$\frac{1}{2} ax = \frac{1}{6} (a + c)v,$$

tj.

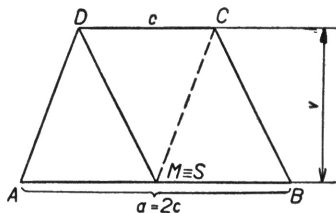
$$x = \frac{a + c}{3a} \cdot v.$$



(2) Obr. 24



Obr. 24a



Obr. 24b

Máme dvě možnosti pro rozdělení čtyřúhelníka  $T$  ve dva rovnoploché trojúhelníky:

a) Čtyřúhelník  $T$  v obr. 21a rozdělme úhlopříčkou  $AC$  ve dva trojúhelníky; pro obsah  $P$  trojúhelníka  $ACD$  platí

$$P = \frac{1}{2}cv = \frac{1}{6}(a + c)v$$

neboli

$$a = 2c. \quad (1')$$

Po dosazení (2) dostáváme

$$x = \frac{1}{2}v \quad (3)$$

což vede k řešení (viz obr. 21a) a trojúhelníky mají obsah  $cv$ .

b) Úhlopříčka  $DM$  (viz obr. 21) vzhledem k (1'), (3) nedělí čtyřúhelník  $T$  ve dva rovnoploché trojúhelníky, neboť obsah  $Q$  trojúhelníka  $CDM$  je

$$Q = \frac{1}{2}c(v - x) = \frac{1}{6}(a + c)v; \quad (4)$$

pomocí vztahu (2) však je

$$v - x = \frac{2a - c}{3a} v \text{ a po dosazení do (4) máme}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{(2a - c)}{a} \cdot cv = \frac{1}{6} (a + c)v$$

neboli

$$a^2 - ac + c^2 = 0,$$

tj.

$$\frac{a^2}{c^2} - \frac{a}{c} + 1 = 0.$$

Trojčlen  $y^2 - y + 1 = (y - 1)^2 + y$  je pro všechna kladná čísla  $y$  kladný; avšak  $\frac{a}{c}$  je kladné číslo, proto rovnice (5) nemá reálné řešení a dělení lichoběžníka je nemožné.

**P ř í p a d [3].** Označme  $z$  výšku příslušnou ke straně  $CD$  trojúhelníka  $CDM$  v obr. 23; pak musí být

$$\frac{1}{2}cz = \frac{1}{6}(a + c)v,$$

tj.

$$z = \frac{a + c}{3c} v.$$

Celé další vyšetřování dostaneme z případu [1] výměnou písmen  $a, c$ . Protože je  $a > c$ , je vztah  $c = 2a$  [obdobný ke vztahu (1')] nemožný; proto případ [3] nemůže nastat.

*Závěr.* Úloha je při  $a > c$  řešitelná jedině, platí-li  $a = 2c$ ; pak má tři řešení — viz obr. 21a, 24a, b.

**4.** Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prirodzených čísel  $x, y, z$ , ktoré majú tu vlastnosť, že súčet každých dvoch čísel trojice je deliteľný zostávajúcim tretím číslom trojice.

**Riešenie.** Predpokladajme, že sme našli prirodzené čísla, ktoré splňujú požiadavky úlohy. Najmenšie z nich označme  $x$ , najväčšie  $z$  a stredné, čo do veľkosti, označme  $y$ . Platí teda

$$0 < x < y < z. \quad (1)$$

Z nerovností

$$x < z, y < z \quad (1')$$

dostaneme sčítaním

$$x + y < 2z. \quad (2)$$

Podľa textu úlohy je súčet  $x + y$  deliteľný číslom  $z$ , teda platí

$$x + y = kz, \quad (3)$$

kde  $k$  je nejaké prirodzené číslo. Pomocou vzťahu (3) prejde vzťah (2) do tvaru

$$kz < 2z, \quad \text{čiže} \quad 0 < (2 - k)z.$$

Pretože je  $z > 0$ , je nutne  $2 - k > 0$  čiže  $2 > k$ . Pretože  $k$  je prirodzené číslo, je nutne  $k = 1$  a vzťah (3) má preto tvar

$$x + y = z. \quad (3')$$

Podľa textu úlohy pre čísla  $x, y, z$  okrem vzťahu (3) platia ešte vzťahy

$$x + z = ny, \quad (4)$$

$$y + z = mx; \quad (5)$$

pričom  $m, n$  sú určité prirodzené čísla. Ak do (4) a (5) dosadíme za  $z$  z (3'), dostaneme

$$2x + y = ny, \quad (4')$$

$$x + 2y = mx. \quad (5')$$

Zo vzťahu (5') vyplýva, že  $x$  je deliteľom čísla  $2y$ , tj.

$$2y = px, \quad (6)$$

kde  $p$  je nejaké prirodzené číslo. Zo vzťahu (4') vyplýva, že  $y$  je deliteľom čísla  $2x$ , t. j.

$$2x = qy, \quad (7)$$

kde  $q$  je prirodzené číslo. Vynásobme navzájom ľavé a pravé strany vzťahov (6) a (7). Dostaneme

$$4xy = pqxy.$$

Keďže je  $xy \neq 0$ , vyplýva z tejto rovnice

$$pq = 4.$$

Prirodzené čísla  $p, q$  nemôžu byť  $p = q = 2$ , lebo potom zo (7) vyplýva  $x = y$ , čo je v spore s predpokladom (1). Taktiež nie je možné, aby bolo  $p = 1; q = 4$ , pretože potom zo (7) vyplýva  $x = 2y$ , čo je opäť v spore s predpokladom (1). Zostáva teda posledná možnosť:  $p = 4, q = 1$ . Zo vzťahov (6) a (7) dostaneme  $y = 2x$  a stadiaľ a z (3') obdržíme  $z = 3x$ . Dostali sme trojicu čísel

$$x, y = 2x, z = 3x,$$

kde  $x$  je ľubovoľné prirodzené číslo. Tieto čísla vyhovujú požiadavkám úlohy, ako sa ľahko presvedčíme. Opravdu čísla

$$\frac{x+y}{z} = 1, \quad \frac{y+z}{x} = 5, \quad \frac{z+x}{y} = 2$$

sú prirodzené.

Hľadaná trojica čísel je teda

$$r, 2r, 3r,$$

pričom  $r$  je ľubovoľne zvolené prirodzené číslo.

5. Jsou dány dvě shodné kružnice  $k_1, k_2$ , které se protínají ve dvou různých bodech  $P, Q$ . Bodem  $P$  vedme přímku, která protne obě kružnice ještě v dalších bodech  $X, Y$  navzájem oddělených bodem  $P$ .

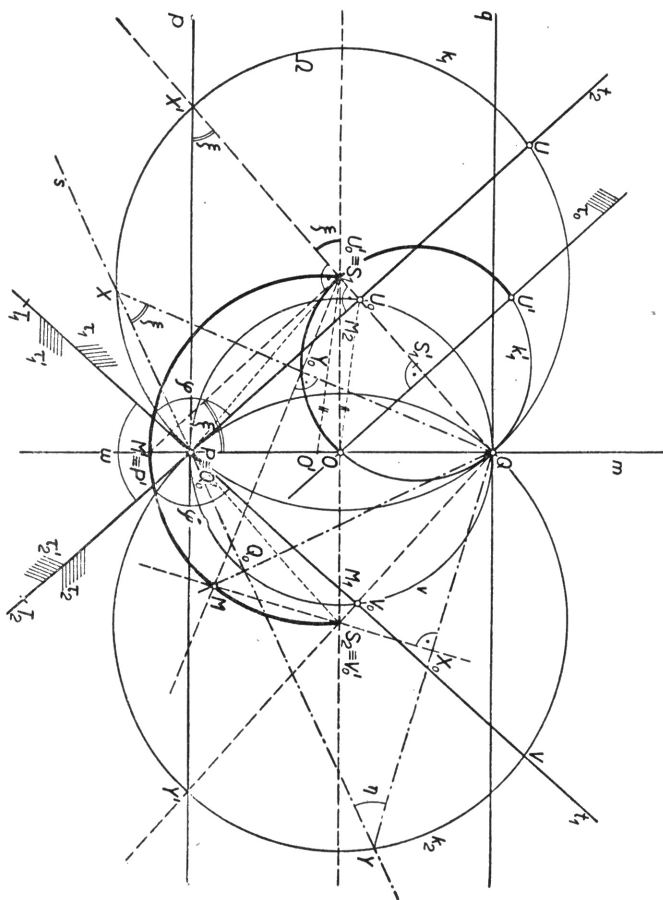
a) Vyšetřte geometrická místa středů stran trojúhelníka  $QXY$ .

b) Vyšetřte, který útvar vyplní středy kružnic opsaných trojúhelníkům  $QXY$ .

**Řešení.** Užijeme označení z obrázku 25, kde  $t_1 \equiv PT_1$ ,  $t_2 \equiv PT_2$  jsou po řadě tečny daných kružnic  $k_1 \equiv (S_1, r)$ ,  $k_2 \equiv (S_2, r)$  ve společném jejich bodě  $P$ . Přitom kružnice  $k_1$  leží v polorovině  $\tau_1 \equiv t_1O$ , kde  $O$  je střed úseček  $PQ, S_1S_2$ . Přímky  $p, q$  jsou rovnoběžné s  $S_1S_2$  a po řadě procházejí body  $P, Q$ . Dutý úhel  $\omega \equiv \sphericalangle T_1PT_2$  je společnou částí polorovin  $\tau'_1, \tau'_2$ ; úhly  $\varphi \equiv \sphericalangle T_1PU$ ,  $\varphi' \equiv \sphericalangle T_2PV$  jsou vrcholové a k úhlu  $\omega$  vedlejší. Přímka  $t_2$  je různá od  $t_1$ ; obě přímky mají společný bod  $P$ , takže jsou různoběžné a protože je  $t_2 \neq t_1$ , je  $t_2$  sečnou kružnice  $k_1$ . Průsečíky přímky  $t_2$  s  $k_1$  označme  $P, U \neq P$ ; podobně je  $V$  druhý průsečík přímky  $t_1$  s  $k_2$ .

Označme  $s \equiv XPY$  přímku, která má vedle bodu  $P$





Obr. 25

s kružnicemi  $k_1, k_2$  po řadě další společný bod  $X$ , popř.  $Y$ , a to takový, že bod  $P$  odděluje body  $X, Y$ . Dokážeme, že každá přímka, která prochází bodem  $P$  a vnitřkem úhlu  $\varphi$ , je přímkou typu  $s$ ; všechny ostatní přímky jdoucí bodem  $P$  nejsou přímkami typu  $s$ .

Především přímky  $t_1, t_2$  nejsou typu  $s$ ; každá přímka  $o$ , která prochází vnitřkem úhlu  $\omega$ , nemá s žádnou z kružnic  $k_1, k_2$  uvnitř úhlu  $\omega$  společný bod; úhel  $\omega$  je společnou částí polorovin  $\tau'_1, \tau'_2$  a např. uvnitř poloroviny  $\tau'_1$  neleží žádný bod kružnice  $k_1$ , proto bod  $P$  nemůže oddělovat body  $X, Y$ , které padnou do úhlu  $\omega'$ , který je k úhlu  $\omega$  vrcholový.

Zbývají nám přímky, které procházejí bodem  $P$  a vnitřky vrcholových úhlů  $\varphi, \varphi'$ . Buď  $s$  jedna taková přímka; dokažme, že má např. s kružnicí  $k_1$  společný bod  $X$ , ležící uvnitř úhlu  $\varphi$ . Přímka  $s$  prochází bodem  $P$  a není tečnou  $t_1$  kružnice  $k_1$ , je tedy nutně sečnou této kružnice; druhý její průsečík  $X \equiv P$  však nemůže padnout dovnitř poloroviny  $\tau'_1$  (v této polorovině má kružnice  $k_1$  pouze bod  $P$ ). Padne tedy bod  $X$  nutně dovnitř úhlu  $\varphi$ . Stejně dokážeme, že druhý průsečík  $Y \equiv P$  přímky  $s$  s kružnicí  $k_2$  padne dovnitř úhlu  $\varphi'$ . Úhly  $\varphi, \varphi'$  jsou vrcholové, nemají žádný společný vnitřní bod a proto bod  $P$  odděluje body  $X, Y$ .

Protože přímka typu  $s$  neprochází vnitřkem úhlu  $\omega'$ , v němž leží bod  $Q$ , nepadne bod  $Q$  na přímku  $s$  a ke každé přímce  $s \equiv XPY$  existuje tudíž trojúhelník  $QXY$ ,

o němž se mluví v textu úlohy. Označme  $\xi \equiv \sphericalangle PXQ$ ,  $\eta \equiv \sphericalangle PYQ$ ; platí  $\xi = \eta$ , což ihned dokážeme. Úhel  $\xi$  má vrchol na  $k_1$  a uvnitř poloroviny  $\tau'_2$ , jeho ramena procházejí body  $P, Q$  kružnice  $k_1$ ; je tedy  $\xi$  obvodový úhel v kružnici  $k_1$  a úhel  $\sphericalangle PS_1Q$  je k němu příslušný úhel středový, takže je  $\xi = \frac{1}{2} \sphericalangle PS_1Q$ . Stejně se dokáže, že  $\eta = \frac{1}{2} \sphericalangle PS_2Q$ ; avšak je  $\sphericalangle PS_1Q = \sphericalangle PS_2Q$  (úhly souměrně sdružené vzhledem k ose  $m$  úsečky  $S_1S_2$ ), a tím  $\xi = \eta$ . Je tedy trojúhelník  $QXY$  rovnoramenný s hlavním vrcholem  $Q$ . Dále je patrné, že všechny trojúhelníky  $QXY$  jsou navzájem podobné, neboť se shodují v úhlech; toho užijeme v části b) této úlohy.

a) Označme  $Q_0, X_0, Y_0$  po řadě středy stran  $XY, YQ, QX$  trojúhelníka  $QXY$ . Dokážeme dvě věty.

**Věta  $V_1$ :** Geometrickým místem bodů  $Q_0$  je vnitřek oblouku  $U_0PV_0$  kružnice  $v \equiv (O, OP)$ , kde  $O$  je střed úseček  $S_1S_2, PQ$ ; body  $U_0, V_0$  jsou po řadě středy úseček  $PU, PV$ .

**Věta  $V_2$ :** Geometrickým místem bodů  $Y_0$  je vnitřek oblouku  $OS_1U'$  kružnice  $k'_1$ , která je obrazem kružnice  $k_1$  ve stejnolehlosti o středu  $Q$  s koeficientem  $\frac{1}{2}$ ; přitom je  $U'$  středem úsečky  $QU$ . (Podobná věta platí o bodu  $X_0$ .)

**Důkaz vět  $V_1, V_2$ :** Je-li přímka typu  $s$  kolmá k přímce  $PQ$  (v obr. je to přímka  $p$ ), je  $Q_0 \equiv P$  a bod  $Q_0$  leží na oblouku  $U_0PV_0$ . Je-li  $s \neq p$ , vzniká pravoúhlý trojúhelník  $PQQ_0$  s přeponou  $PQ$ ; podle Thaletovy věty

leží bod  $Q_0$  na kružnici  $v$  opsané nad úsečkou  $PQ$  jako průměrem. Z bodů kružnice  $v$  mohou přijít v úvahu pro bod  $Q_0$  jen vnitřní body oblouku  $U_0PV_0$  (kde  $U_0, V_0$  jsou středy tětiv  $PU, PV$ ), neboť ty body leží v jednom z úhlů  $\varphi, \varphi'$  (jer. vnitřky těchto úhlů procházejí přímkou typu  $s$ ). Je-li  $Q_0 \equiv P$  bod tohoto oblouku, potom přímka  $PQ_0$  je typu  $s$  a  $Q_0$  je zřejmě středem příslušné úsečky  $XY$ . Tím je věta  $V_1$  dokázána.

**D ů k a z v ě t y  $V_2$ :** Libovolná přímka typu  $s$  má s  $k_1$  společný bod  $X \equiv P$ ; bod  $X$  leží uvnitř úhlu  $\varphi$  a uvnitř oblouku  $\Omega \equiv PU$ , tj. toho, který neobsahuje bod  $Q$ . Bod  $Y_0$  je však obrazem bodu  $X$  ve stejno-  
lehlosti o středu  $Q$  s koeficientem  $\frac{1}{2}$ ; body  $O, U'$  jsou obrazy bodů  $P, U$  v této stejno-  
lehlosti. Obrazy bodů  $X$  oblouku  $\Omega$  v této stejno-  
lehlosti leží na oblouku  $OS_1U'$  kružnice sestrojené nad úsečkou  $S_1Q$  jako průměrem (bod  $S_1$  je obrazem bodu  $X'$  diametrálního k bodu  $Q$  na kružnici  $k_1$ ). Ve stejno-  
lehlosti k předchozí obrácené je vnitřek oblouku  $\Omega$  obrazem vnitřku oblouku  $OS_1U'$ ; každý bod vnitřku oblouku  $OS_1U'$  je tedy středem  $Y_0$  strany  $QX$  jistého trojúhelníka našeho typu  $QXY$ . Tím je věta  $V_2$  dokázána a řešení části a) dané úlohy provedeno.

b) Již jsme dokázali, že každé dva rovnoramenné trojúhelníky  $QXY, Q'X'Y'$ , které vyhovují požadavkům textu úlohy, jsou navzájem podobné (podle věty uu). Označme  $M, M'$  středy kružnic těmito trojúhelníkům opsaných; ty leží po řadě na polopřímkách  $QQ_0, QQ'_0$ ,

kde  $Q_0$ ,  $Q'_0$  jsou středy základů  $XY$ ,  $X'Y'$ . Proto platí

$$\frac{QM}{QQ_0} = \frac{QM'}{QQ'_0} = \lambda, \quad (1)$$

kde  $\lambda > 0$  je konstanta; je tedy  $QM = \lambda \cdot QQ_0$ . Body  $M$ ,  $M' \equiv P'$  jsou tedy po řadě obrazy bodů  $Q_0$ ,  $P$  ve stejnoolehlosti o středu  $Q$  s konstantou  $\lambda$  stejnoolehlosti. Bod  $M$  proto vyplní vnitřek oblouku  $U'_0M'V'_0$ , který je v této stejnoolehlosti obrazem již dříve vyšetřovaného oblouku  $U_0PV_0$ .

O b r á c e n ě, ke zvolenému bodu  $M$  uvnitř oblouku  $U_0M'_0V_0$  přísluší v obrácené stejnoolehlosti bod  $Q_0$  uvnitř oblouku  $U_0PV_0$ ; víme již, že ke každému takovému bodu  $Q_0$  přísluší jediný trojúhelník  $QXY$  a ten má zřejmě bod  $M$  za střed opsané kružnice.

Geometrickým místem středů  $M$  kružnic opsaných trojúhelníkům  $QXY$  je vnitřek jistého oblouku  $S_1P'S_2$ , který má sečnu  $PQ$  za osu souměrnosti, přitom je  $S_1 \equiv U'_0$ ,  $S_2 \equiv V'_0$ .

*Poznámka.* Konstanta  $\lambda$  se dá jednoduše vyjádřit pomocí čísel  $r$ ,  $t$ , kde  $2t = PQ$  je délka společné tětivy kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ . Je

$$\lambda = \frac{QU'_0}{QU_0}; \quad QU'_0 \equiv QS_1 = r, \quad QU_0 = PQ \cdot \sin \xi = \frac{2t^2}{r},$$

takže

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

Nebo označme  $QX'Y'$  ten z uvažovaných trojúhelníků, který má přímku  $m \equiv PQ$  za osu souměrnosti (takže je  $X'Y' \perp m$ ); tu bod  $S_1$  je středem ramene  $QX'$  a střed  $M'$  kružnice trojúhelníku  $QX'Y'$  opsané je průsečíkem přímky  $m$  a kolmice vedené bodem  $S_1$  k přímce  $QS_1$ . Bod  $P$  je středem základny  $X'Y'$  rovnoramenného trojúhelníka  $QX'Y'$ , tj.  $Q'_0 \equiv P$ . Poměr  $\lambda$  ze vztahu (1) je

$$\lambda = \frac{QM'}{QQ'_0} = \frac{QS_1 : \sin \xi}{2t} = \frac{r}{2t \cdot \sin \xi}$$

a protože je

$$\sin \xi = \frac{OQ}{QS_1} = \frac{t}{r},$$

dostaneme

$$\lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

**6.** Je-li  $x$  nezávisle proměnná, dokažte:

a) Funkce  $y = x + 2\sqrt{1-x}$  je klesající v intervalu  $(0, 1)$ .

b) Funkce  $y = \frac{10x}{x^2 + 25}$  je v intervalu  $\langle -5, 5 \rangle$  rostoucí, kdežto v obou intervalech  $(-\infty, -5\rangle, \langle 5, \infty)$  je klesající; načrtněte přibližný graf funkce.

**V y s v ě t l e n í.** Funkce  $y = f(x)$  se nazývá v určitém intervalu klesající, jestliže pro každá dvě čísla  $x_1 < x_2$  tohoto intervalu platí  $f(x_1) > f(x_2)$ ; nazývá se v intervalu rostoucí, jestliže pro každá dvě čísla  $x_1 < x_2$  tohoto intervalu platí  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Řešení.** a) Mějme čísla  $x_1, x_2$ , o nichž platí

$$0 < x_1 < x_2 < 1; \quad (1)$$

máme dokázat, že potom platí

$$x_1 + 2\sqrt{1-x_1} > x_2 + 2\sqrt{1-x_2}. \quad (2')$$

Podle (1) mají pro uvažovaná čísla  $x_1, x_2$  odmocniny  $\sqrt{1-x_1}, \sqrt{1-x_2}$  význam a jsou kladné.

Důkaz provedme nepřímou; nechť platí

$$x_1 + 2\sqrt{1-x_1} \leq x_2 + 2\sqrt{1-x_2}; \quad (2)$$

případ rovnosti se snadno vyloučí. Vyloučíme-li tedy ve vztahu (2) rovnost, potom platí postupně

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{1-x_1} - \sqrt{1-x_2}) &> x_2 - x_1, \\ 2 \cdot \frac{(\sqrt{1-x_1})^2 - (\sqrt{1-x_2})^2}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} &< x_2 - x_1, \\ 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} &< x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Po znásobení obou stran číslem  $\frac{1}{x_2 - x_1} > 0$  dostaneme

$$\frac{2}{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}} < 1.$$

Znásobme obě strany této nerovnosti číslem  $\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} > 0$ ; dostaneme

$$2 < \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2}. \quad (3)$$

Avšak pro  $x$  z intervalu  $(0,1)$  platí  $0 < 1 - x < 1$  a tím též  $0 < \sqrt[3]{1 - x} < 1$ ; je proto pravá strana ve vztahu (3) menší než 2 a vztah (3) vyjadřuje spor, k němuž vede předpoklad (2). Tím je důkaz proveden.

**Náčrt jiného řešení úlohy.** a) Položme  $y = \sqrt[3]{1 - x}$  pro  $0 < x < 1$ ; zřejmě je

$$0 < y < 1. \quad (4)$$

Odtud plyne  $x = 1 - y^3$ . Pro  $x_1, x_2$  z intervalu (1) máme dokázat vztah (2'); položíme  $y_1 = \sqrt[3]{1 - x_1}$ ,  $y_2 = \sqrt[3]{1 - x_2}$ . Potom lze (2') psát ve tvaru  $1 - y_1^3 + 2y_1 > 1 - y_2^3 + 2y_2$ , jehož platnost máme dokázat.

Platí-li tento vztah, platí postupně  $(1 - y_2)^2 > (1 - y_1)^2$ ,  $1 - y_2 > 1 - y_1$  [viz (4)],  $y_2 > y_1$ ,  $\sqrt[3]{1 - x_2} < \sqrt[3]{1 - x_1}$ ,  $1 - x_2 < 1 - x_1$ ,  $x_1 < x_2$ . Obrácením postupu dostaneme naše tvrzení.

b) Mějme reálná čísla  $x_1 > x_2$ , takže je

$$x_2 - x_1 > 0. \quad (5)$$

Utvořme rozdíl  $r$  funkčních hodnot  $f(x_2) - f(x_1)$  funkce

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}.$$

Platí

$$\begin{aligned} r &= \frac{10x_2}{x_2^2 + 25} - \frac{10x_1}{x_1^2 + 25} = \frac{10[x_1^2x_2 - x_1x_2^2 + 25x_2 - 25x_1]}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)} = \\ &= \frac{10(x_2 - x_1)(25 - x_1x_2)}{(x_2^2 + 25)(x_1^2 + 25)}. \end{aligned}$$



V jmenovateli posledního zlomku jsou kladná čísla; též číslo  $10(x_2 - x_1)$  je kladné. Znaménko čísla  $r$  je tedy shodné se znaménkem čísla  $u = 25 - x_1x_2$ .

Platí jednak

$$u = 25 - x_1x_2 < 25 + 5(x_2 - x_1) - x_1x_2 = (5 - x_1)(5 + x_2), \quad (6)$$

jednak

$$u = 25 - x_1x_2 > 25 - 5(x_2 - x_1) - x_1x_2 = (5 + x_1)(5 - x_2). \quad (7)$$

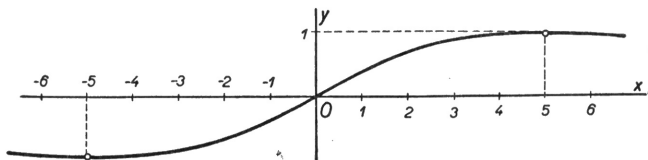
Uvažujme tyto možnosti:

[1] Je  $x_1 < x_2 \leq -5$ . Potom je  $5 - x_1 > 0$ ,  $5 + x_2 \leq 0$ ; odtud a z (6) plyne, že je  $u < 0$  a tím  $r < 0$ .

[2] Je  $5 \leq x_1 < x_2$ . Potom je  $5 - x_1 \leq 0$ ,  $5 + x_2 > 0$ ; odtud a ze (6) plyne, že je  $u < 0$  a tím  $r < 0$ .

[3] Je  $-5 \leq x_1 < x_2 \leq 5$ . Potom je  $5 + x_1 \geq 0$ ,  $5 - x_2 \geq 0$ ; odtud a ze (7) plyne, že je  $u > 0$  a tím  $r > 0$ .

Tím je dokázáno, že v intervalech  $(-\infty, -5\rangle, \langle 5, \infty)$  je daná funkce klesající (možnosti [1], [2]), kdežto v intervalu  $\langle -5, 5\rangle$  je tato funkce rostoucí (možnost [3]).



Obr. 26

Protože je  $f(-x) = -f(x)$ , je graf (obr. 26) funkce souměrný podle počátku  $O$  pravouhlých souřadnic. Stačí sestavit tabulku hodnot funkce pro  $x \geq 0$ .

| $x$        | 0 | 0,5                    | 1                         | 2                          | 3                          | 4                   | 5 | 6                   |
|------------|---|------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------|---|---------------------|
| $y = f(x)$ | 0 | $\frac{1}{5,05} < 0,2$ | $\frac{5}{13} \doteq 0,4$ | $\frac{20}{29} \doteq 0,7$ | $\frac{15}{17} \doteq 0,9$ | $\frac{40}{41} < 1$ | 1 | $\frac{60}{61} < 1$ |

Je patrné, že v bodě  $[5,1]$  je maximum, v bodě  $[-5, -1]$  minimum. S rostoucím  $x > 5$  se graf blíží ose  $x$  shora; pro  $x < -5$ , která rostou v absolutní hodnotě, se graf blíží ose  $x$  zdola.

## 5. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE B

1. Nákladní vlak projede trať dlouhou 100 km za 2 hodiny 50 minut, z toho stráví 20 minut čekáním, takže se za jízdy pohybuje průměrnou rychlostí 40 km/h.

Při nové úpravě jízdního řádu vzrostla doba čekání o  $p$  %. O kolik procent je třeba zvýšit průměrnou rychlost jízdy vlaku, aby zůstala celková doba jízdy vlaku (tj. včetně čekání) nezměněna?

**Řešení.** Původní doba jízdy je

$$\frac{100}{40} + \frac{1}{60} \cdot 20. \quad (1)$$

Nová doba jízdy je

$$\frac{100}{40 \left(1 + \frac{q}{100}\right)} + \frac{1}{60} \cdot 20 \left(1 + \frac{p}{100}\right); \quad (2)$$

přítom  $q$  značí počet procent, o nějž je třeba zvýšit rychlost jízdy. Podle podmínky úlohy jsou si čísla (1), (2) rovna. Po úpravě dostaneme

$$\frac{17}{6} = \frac{5}{2 \left(1 + \frac{q}{100}\right)} + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Po další úpravě

$$15 = 15 \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{100}} + \frac{p}{50}$$

a odtud

$$q = \frac{100p}{750 - p}.$$

Např. pro  $p = 50$  (10 min) je  $q = \frac{50}{7} \doteq 7$  (%) (zvýšení rychlosti jízdy je tedy asi o 2,8 km/h).

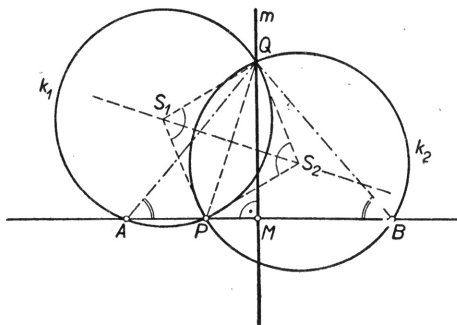
**2.** V rovině je dána úsečka  $AB$  a uvnitř této úsečky je dán bod  $P$  tak, že platí  $AP < PB$ .

Najděte geometrické místo bodů  $Q$  té vlastnosti, že oba trojúhelníky  $APQ$ ,  $PBQ$  mají shodné opsané kružnice.

Označte  $Q_0$  ten z bodů  $Q$ , kterým jsou určeny nejmenší z těchto opsaných kružnic, a sestrojte všechny

takové body  $Q_0$ . Vyšetřte, jakou polohu má kružnice opsaná každému trojúhelníku  $APQ_0$  vzhledem k nalezenému geometrickému místu bodů  $Q$ .

**Řešení** (viz obr. 27). I. Nechť  $APQ$ ,  $BPQ$  je jedna dvojice trojúhelníků, jimž opsané kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  o středech  $S_1$ ,  $S_2$  jsou navzájem shodné; přitom je nutně  $P \equiv Q$ , takže se jedná o protínající se kružnice. Oba



Obr. 27

úhly  $\sphericalangle PS_1Q$ ,  $\sphericalangle PS_2Q$  jsou souměrně sdružené podle přímky  $PQ$ , je tedy  $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$ ; proto je též  $\sphericalangle A$  trojúhelníka  $PQA$  roven úhlu  $\sphericalangle B$  trojúhelníka  $PQB$  (obvodové úhly příslušné ke středovým úhlům  $\sphericalangle S_1 = \sphericalangle S_2$ ). Proto je trojúhelník  $QAB$  rovnoramenný (proti shodným úhlům  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$  leží shodné strany), tj. platí  $QA = QB$ . Osa  $m$  souměrnosti tohoto trojúhelníka prochází bodem  $Q$  a středem  $M$  základny  $AB$ , přičemž je  $m \perp AB$ .

Leží tedy každý bod  $Q$  na přímce  $m$  právě popsané.

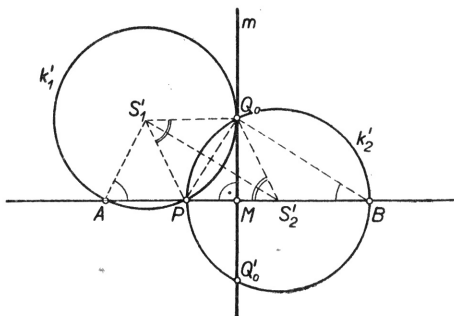
II. Obráceně, nechť  $Q$  je libovolný bod přímky  $m$ . Je-li  $Q \equiv M$ , pak lze oběma trojúhelníkům  $APQ$ ,  $BPQ$  po řadě opsat kružnice  $k_1$ ,  $k_2$ , které zřejmě nemohou splynout (bod  $P$  odděluje body  $A$ ,  $B$ ). Přitom je  $QA = QB$  (neboť  $m$  je osa úsečky  $AB$ ) a tudíž  $\sphericalangle A$  prvního trojúhelníka je shodný s úhlem  $\sphericalangle B$  druhého; obvodové úhly  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$  jsou ostré (úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka), takže body  $A$ ,  $B$  leží po řadě na větších obloucích (s krajními body  $P$ ,  $Q$ ) kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ . Středové úhly  $\sphericalangle S_1$ ,  $\sphericalangle S_2$ , příslušné po řadě v kružnicích  $k_1$ ,  $k_2$  k obvodovým úhlům  $\sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle B$ , jsou tedy shodné, a proto je  $\triangle PQS_1 \cong \triangle PQS_2$  (rovnoramenné trojúhelníky o společné základně  $PQ$  a shodných úhlech  $\sphericalangle S_1$ ,  $\sphericalangle S_2$  proti základnám); je tedy  $S_1P = S_2Q$  a obě kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  jsou shodné.

Protože je  $AP < PB$ , padne střed  $M$  úsečky  $AB$  dovnitř úsečky  $PB$ . Kružnice  $k_1$  jdoucí body  $A$ ,  $P$  nemůže procházet bodem  $Q \equiv M$ . Z toho plyne, že bod  $M$  nepatří k hledanému geometrickému místu bodů.

*Závěr.* Geometrickým místem bodů  $Q$  je osa  $m$  úsečky  $AB$ , přičemž z ní musíme vyloučit střed  $M$  úsečky  $AB$ .

III. Kružnice, která je z určité množiny kružnic nejmenší (obr. 28), má nejmenší průměr. Nejmenší z kružnic, které v úloze uvažujeme, je nutně kružnice  $k'_2$  opsaná nad úsečkou  $PB$  jako průměrem (všechny její tětivy

nejsou větší než  $PB$ ); kružnici  $k'_1$  shodnou s  $k'_2$  lze body  $A, P$  proložit, neboť je  $AP < PB$ . Označme  $k'_1, k'_2$  shodné kružnice, z nichž první jde body  $A, P$  a druhá má úsečku  $PB$  za průměr. Tyto kružnice se protínají v bodech  $P, Q_0$  (nemohou se v  $P$  dotýkat, jinak by středy  $S'_1, S'_2$  těchto kružnic ležely v přímce  $AB$  a nutně by bylo  $AP = PB$ , což je proti předpokladu); přitom je  $Q_0$  jeden z průsečíků přímky  $m$  s kružnicí  $k'_2$  (tento bod



Obr. 28

existuje, neboť  $m$  prochází vnitřním bodem  $M$  kružnice  $k'_2$ , takže  $m$  je sečnou kružnice  $k'_2$ ). Čtyřúhelník o úhlopříčkách  $PQ_0, S'_1S'_2$ , který určují středy  $S'_1, S'_2$  a průsečíky  $P, Q_0$  dvou shodných kružnic, je nutně kosoúhelník (úhlopříčky se totiž navzájem půlí a jsou k sobě kolmé). Je tedy  $PS'_2 = Q_0S'_1$  (jsou to poloměry shodných kružnic  $k_2, k_1$ ) a  $Q_0S'_1 \parallel PS'_2$  neboli  $Q_0S'_1 \perp$

$\perp m$ ; z toho však plyne, že kružnice  $k_1$  se dotýká přímky  $m$  v bodě  $Q_0$ .

*Konstrukce* (obr. 28): Nad průměrem  $PB$  sestrojíme kružnici  $k'_2$  (ta existuje právě jedna) a označíme  $Q_0, Q'_0$  její průsečíky s přímkou  $m$ ; oba tyto body jsou různé a souměrně sdružené podle přímky  $AB$ . Obě různé kružnice  $k'_1, k''_1$ , opsané trojúhelníkům  $APQ_0, APQ'_0$ , jsou podle předchozího shodné s  $k'_2$ ; dvojice  $k'_1, k'_2$  a dvojice  $k''_1, k'_2$  jsou všechna řešení úlohy. Tím je řešení úlohy provedeno; úloha má vždy dvě řešení (pokud jde o body  $Q_0$  a dvojice shodných kružnic).

### 3. Je dána funkce

$$V = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|). \quad (1)$$

Sestrojte její graf v intervalu  $-2 \leq x \leq 2$  a dokažte, že se skládá ze dvou úseček a kruhového oblouku.

**Řešení.** Funkce (1) nabývá vesměs kladných hodnot (neboť člen  $|1 + \sqrt{4 - x^2}|$  je kladné číslo, člen  $|1 - \sqrt{4 - x^2}|$  je číslo nezáporné) pro všechna  $x$ , pro něž je  $4 - x^2 < 0$  neboli

$$-2 \leq x \leq 2. \quad (2)$$

Protože pro čísla  $x, -x$  dostáváme z rovnice (1) touž funkční hodnotu, je graf této funkce souměrný podle osy  $y$ .

Pro další vyšetřování je třeba rozlišit dvě možnosti.

Případ [1]. Nechť je  $1 - \sqrt[3]{4 - x^2} \geq 0$  neboli  $1 \geq \sqrt[3]{4 - x^2}$ ; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tato  $x$ :

bud'

$$x \geq \sqrt[3]{3},$$

anebo

$$x \leq -\sqrt[3]{3}. \quad (3)$$

Potom je  $|1 - \sqrt[3]{4 - x^2}| = 1 - \sqrt[3]{4 - x^2}$  a ze vztahu (1) dostáváme

$$y = \frac{1}{2} [1 + \sqrt[3]{4 - x^2} + 1 - \sqrt[3]{4 - x^2}] = 1 \quad (4)$$

neboli

$$y = 1.$$

Spojením vztahů (2), (3) a výsledku (4) máme (viz obr. 29): Grafem funkce (1) v intervalech  $\langle -2, -\sqrt[3]{3} \rangle$ ,  $\langle \sqrt[3]{3}, 2 \rangle$  jsou úsečky  $MN$ ,  $PQ$ , kde

$$M \equiv [-2, 1], N \equiv [-\sqrt[3]{3}, 1], P \equiv [\sqrt[3]{3}, 1], Q \equiv [2, 1].$$

Případ [2]. Nechť je  $1 - \sqrt[3]{4 - x^2} \leq 0$  neboli  $1 \leq \sqrt[3]{4 - x^2}$ ; umocněním obou stran této nerovnosti na druhou dostaneme, že tento vztah platí právě pro tento interval:

$$-\sqrt[3]{3} \leq x \leq \sqrt[3]{3} \quad (5)$$

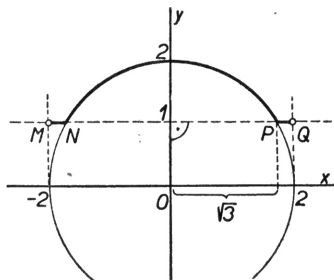


Potom je  $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = \sqrt{4 - x^2} - 1$  a ze vzta-  
hu (1) dostáváme

$$y = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} - 1] = \sqrt{4 - x^2}$$

neboli

$$y = \sqrt{4 - x^2}.$$



Obr. 29

Umocněním obou stran této rovnice na druhou obdrží-  
me

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (6)$$

takže příslušné body grafu funkce (1) leží na kružnici  
opsané kolem počátku souřadnic poloměrem 2. Přitom  
je  $y > 0$  a jedná se o body této kružnice, pokud pří-  
slušné souřadnice  $x$  náleží do intervalu (5); pro  $x =$   
 $= \pm\sqrt{3}$  a  $y > 0$  z rovnice (6) dostáváme  $y = 1$ . Tedy  
(obr. 29) grafem funkce (1) v intervalu  $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$  je  
oblouk  $NP$  kružnice o středu v počátku souřadnic a po-  
loměru 2; tento oblouk leží nad osou  $x$ .

4. Daný je lichobežník  $ABCD$  s väčšou základnou  $AB$ .

Zostrojte vo vnútri úsečky  $AD$  bod  $P$  a vo vnútri úsečky  $BC$  bod  $Q$  tak, aby súčasne platilo:  $PQ \parallel AB$ ,  $AQ \parallel PC$ . Vypočítajte veľkosti úsečiek  $AP$ ,  $BQ$  pomocou veľkostí strán daného lichobežníka.

**Riešenie** (viď označenie v obr. 30). *Rozbor.* Označme  $M$  priesečník priamok  $AD$ ,  $BC$ . Všimnime si toho, že rovnolahlosť ( $M$ ) so stredom  $M$ , ktorá prevádza bod  $A$  do bodu  $P$ , prevádza úsečku  $AB$  do úsečky  $PQ$ , bod  $B$  do bodu  $Q$ . Ďalej prevádza úsečku  $AQ$  do úsečky  $PC$  (pretože je  $PC \parallel AQ$ ), takže bod  $Q$  prevádza do bodu  $C$ . Z toho však vyplýva, že úsečku  $QP$  prevádza do úsečky  $CD$  a teda bod  $P$  do bodu  $D$ . Označme  $x > 0$  koeficient rovnolahlosti ( $M$ ). Potom platí:

$$MP = x \cdot MA, \quad MD = x \cdot MP.$$

Z toho delením odpovedajúcich si strán oboch rovností dostaneme

$$\frac{MP}{MD} = \frac{MA}{MP},$$

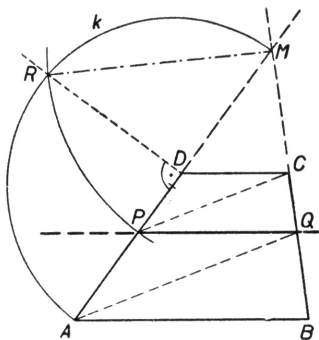
t. j.

$$MP^2 = MA \cdot MD.$$

Je teda dĺžka úsečky  $MP$  strednou geometrickou úmernou zostrojenou z dĺžok  $MA$ ,  $MD$ .

Z toho vyplýva *konštrukcia*: Nad úsečkou  $MA$  ako

priemerom opíšme polkružnicu  $k$ . V bode  $D$  zostrojme kolmicu k priamke  $MA$  a spoločný bod tejto kolmice a polkružnice  $k$  označme  $R$ . Podľa Eukleidovej vety o odvesne vyplýva, že je  $MR^2 = MA \cdot MD$ , takže



Obr. 30

$MP = MR$ , čím je bod  $P$  zostrojený. Bod  $Q$  leží na úsečke  $BC$  a na rovnobežke vedenej bodom  $P$  k priamke  $AB$ . Tým je konštrukcia úsečky  $PQ$  prevedená.

*Dôkaz.* Podľa konštrukcie je

$$MP = \sqrt{MA \cdot MD}$$

a teda aj

$$MQ = \sqrt{MB \cdot MC}, \quad (1)$$

pretože je  $PQ \parallel AB$ . Musíme dokázať, že platí  $AQ \parallel PC$ . K tomu stačí dokázať, že je

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MQ}{MC}, \quad (2)$$

čiže  $MA \cdot MC = MP \cdot MQ$ . Podľa (1) je

$$MP \cdot MQ = \sqrt{MA \cdot MD \cdot MB \cdot MC}. \quad (3)$$

No, z homotetie so stredom  $M$ , ktorá prevádza úsečku  $AB$  do úsečky  $DC$ , vyplýva

$$\frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB},$$

t. j.

$$MB \cdot MD = MA \cdot MC. \quad (4)$$

Po dosadení výsledku (4) do (3) dostaneme

$$MP \cdot MQ = MA \cdot MC,$$

čím je dokázaný vzťah (2) a platí teda  $AQ \parallel PC$ , čo sme mali dokázať.

Z konštrukcie vyplýva, že úloha má jediné riešenie.

Ešte vypočítame dĺžky úsečiek  $AP$ ,  $BQ$ . Označme  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ .

Z rovnolahlosti (**M**) vyplýva  $DP = x \cdot PA$ ,  $PQ = x \cdot AB$ ,  $CD = x \cdot PQ$ , čiže

$$DP = x \cdot PA, \quad PQ = ax, \quad c = x \cdot PQ. \quad (5)$$

Po dosadení druhého vzťahu do tretieho dostaneme  $c = ax^2$  a teda

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (6)$$

Ďalej platí  $DP + PA = AD$ , t. j.  $DP + PA = d$ . Ak sem dosadíme z prvého vzťahu (5), dostaneme

$$PA(x + 1) = d$$

a stadiaľ po dosadení za  $x$  zo (6)

$$PA\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + 1\right) = d,$$

t. j.

$$PA(\sqrt{c} + \sqrt{a}) = d\sqrt{a}.$$

Stadiaľ vypočítame, že

$$PA = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Podobne dostaneme

$$QB = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.$$

Tým je riešenie úlohy prevedené.

## 6. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE C

1. Rozhodněte, který z obou zlomků

$$\frac{5678901234}{6789012345}, \quad \frac{5678901235}{6789012347}$$

je větší.

**Řešení.** Položme  $x = 5678901234, y = 6789012345$ ; potom rozdíl  $r$  zlomků daných v úloze (v napsaném pořádku) lze psát

$$r = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - (xy + y)}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)}.$$

Zřejmě platí  $2x > y$  neboli  $2x - y > 0$ ; je tedy  
 $r > 0$ .

*Odpověď.* První zlomek je větší než druhý.

2. Z cihelny v místě  $A$  se vozí nákladními auty cihly na stavbu v místě  $B$ . Řidič nákladního vozu nastupuje a končí práci v místě  $A$ ; jezdí průměrnou rychlostí 45 km/h s vozem plným a 48 km/h s vozem prázdným. Při každé jízdě trvá nakládání vozu 35 minut, jeho vyložení 20 minut.

Vypočítejte vzdálenost místa  $A$  od místa  $B$ , víte-li, že řidič při osmihodinové pracovní době odvezl z cihelny na staveniště 5 vozů cihel.

O kolik minut při každé jízdě je nutno zkrátit dobu nakládání a skládání (počítáno dohromady), aby neklesl osmihodinový výkon řidiče, je-li nakládané auto nuceno jet z místa  $A$  do  $B$  (i zpět) objížďkou, která je o čtvrtinu delší než původní silnice.

**Řešení.** Označme  $d$  vzdálenost (v km) míst  $A$ ,  $B$  (měřeno na původně užívané síni); potom cesta prázdným vozem trvá  $\frac{d}{48}$  hodiny, cesta plným vozem trvá  $\frac{d}{45}$  hodiny. Na naložení a vyložení jednoho vozu je třeba  $\frac{55}{60}$  hodiny. Na jednu okružní cestu vozu (včetně naložení, vyložení a návratu) je třeba

$$\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60} \text{ hodin};$$

na pět okružních cest za den bylo třeba celkem 8 hodin  
neboli platí

$$5\left(\frac{d}{45} + \frac{d}{48} + \frac{55}{60}\right) = 8;$$

odtud postupně dostáváme

$$\frac{31d}{9 \cdot 16} = \frac{41}{12},$$

$$d = \frac{41 \cdot 12}{31},$$

$$d = \frac{492}{31} = 15\frac{27}{31}.$$

Vzdálenost míst  $A$ ,  $B$  je skoro 16 km ( $15\frac{27}{31}$  km).

V případě objížďky koná auto při cestě tam i při cestě  
zpět dráhu o  $\frac{1}{4}d$  delší, čímž se doba jízdy prodlužuje o

$$x = \frac{1}{4}d \cdot \frac{1}{45} + \frac{1}{4}d \cdot \frac{1}{48} = \frac{1}{4}d \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{48}\right) \text{ hodin},$$

kde

$$\frac{1}{45} + \frac{1}{48} = \frac{16 + 15}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 16};$$

je tedy

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{41 \cdot 12}{31} \cdot \frac{31}{9 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{41}{3 \cdot 5 \cdot 16} = \frac{41}{240}$$

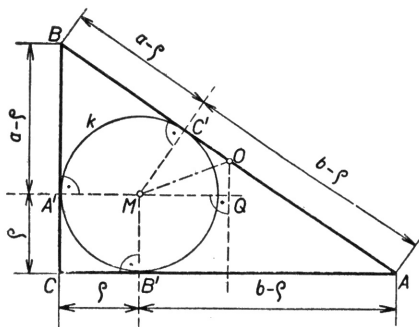
neboli v minutách

$$\frac{41}{240} \cdot 60 = \frac{41}{4} = 10\frac{1}{4}.$$

*Odpověď.* Dobu 55 minut potřebnou na nakládání a vykládání auta musí zkrátit o  $10\frac{1}{4}$  minuty, tj. asi na 45 minut ( $44\frac{3}{4}$  min).

3. Jsou dány poloměry  $r$ ,  $\varrho$  opsané a vepsané kružnice pravoúhlému trojúhelníku.

Vyjádřete vzdálenost středů obou těchto kružnic pomocí čísel  $r$ ,  $\varrho$ .



Obr. 31

**Řešení.** Je-li  $ABC$  daný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami  $a$ ,  $b$  a přeponou  $c$ , potom pro poloměr  $r$  kružnice tomuto trojúhelníku opsané platí  $r = \frac{1}{2}c$ ; označme  $2s$  obvod daného trojúhelníka  $ABC$ . Z obr. 31 je patrné, že délky tečen vedené z bodů  $C$ ,  $B$ ,  $A$  k vepsané kružnici  $k$  po řadě jsou  $\varrho$ ,  $a - \varrho$ ,  $b - \varrho$ . Podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 + b^2 = c^2 = 4r^2. \quad (1)$$



V obr. 31 jsou  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  dotykové body vepsané kružnice se stranami trojúhelníka  $ABC$ ,  $M$  střed kružnice vepsané a  $O$  střed kružnice opsané (bod  $O$  je středem úsečky  $AB$  a bod  $P$  středem úsečky  $AC$ ); je tedy  $OP \parallel BC$  střední příčka daného trojúhelníka. Označme  $Q$  patu kolmice vedené bodem  $M$  k přímce  $OP$ . Zřejmě je  $BA' > A'C$ , tj.  $a - \varrho > \varrho$ , takže je  $a - \varrho > 0$ ; proto je  $\frac{1}{2}a = OP > CA' = QP = \varrho$ . Z toho plyne, že bod  $Q$  padne dovnitř úsečky  $OP$  a existuje trojúhelník  $MOQ$  s pravým úhlem  $\sphericalangle Q$ ; označme  $x = OM$  vzdálenost, kterou podle textu úlohy máme zjistit. Je  $OQ = OP - PQ = \frac{1}{2}a - \varrho$ ; stejně se vyšetří, že  $MQ = CP - CB' = \frac{1}{2}b - \varrho$ . Užitím Pythagorovy věty na trojúhelník  $MOQ$  obdržíme  $MO^2 = MQ^2 + OQ^2$  neboli

$$x^2 = (\tfrac{1}{2}a - \varrho)^2 + (\tfrac{1}{2}b - \varrho)^2,$$

tj.

$$x^2 = \tfrac{1}{4}[a^2 + b^2 - 4\varrho(a + b) + 8\varrho^2]. \quad (2)$$

Přitom podle obr. 31 je  $a + b = (a - \varrho) + (b - \varrho) + 2\varrho = c + 2\varrho = 2(r + \varrho)$ ; tento výsledek a výsledek (1) dosadíme do (2); dostaneme

$$x^2 = r^2 - 2\varrho(r + \varrho) + 2\varrho^2$$

neboli

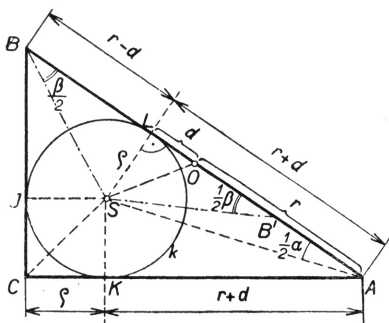
$$x^2 = r^2 - 2r\varrho,$$

čímž je řešení provedeno.

Je tedy

$$x = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

**Jiné řešení** (viz označení v obr. 32). Můžeme předpokládat, že je  $\alpha < \beta$ , neboli  $BC < AC$  (případ  $BC = AC$  vyřídíme na závěr). Označme  $J, K, L$  dotykové body kružnice  $k \equiv (S, \rho)$  vepsané trojúhelníku  $ABC$



Obr. 32

s jednotlivými stranami a  $O$  střed přepony  $AB$ , jejíž délka je  $2r$  (průměr opsané kružnice). Platí

$$SJ = SK = SL = CK = C\checkmark = \rho, \quad OL = d \quad (1)$$

a tedy

$$AL = AK = r + d, \quad BL = B\checkmark = r - d \quad (2)$$

(délky tečen vedených po řadě z bodů  $A, B$  ke kružnici  $k$ ); zřejmě je totiž  $BL < AL$  (stačí určit obraz  $B'$  bodu

$B$  v souměrnosti o ose  $SL$  a všimnout si toho, že je  $\sphericalangle SB'L = \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle SAL$ , kde  $\sphericalangle SB'L$  je vnější a  $\sphericalangle SAL$  vnitřní nesousední úhel v trojúhelníku  $ASB'$ .

Pomocí Pythagorovy věty užité na trojúhelník  $ABC$  vzhledem k (1) dostáváme

$$(AK + CK)^2 + (B\check{f} + C\check{f})^2 = (AL + BL)^2;$$

po dosazení z (2)

$$(r + d + \varrho)^2 + (r - d + \varrho)^2 = (r + d + r - d)^2$$

neboli

$$d^2 = r^2 - \varrho^2 - 2r\varrho. \quad (3)$$

Z trojúhelníka  $OSL$ , kde  $\sphericalangle L = 90^\circ$ , pomocí Pythagorovy věty pro hledanou délku  $x = OS$  dostaneme  $OS^2 = SL^2 + OL^2$  neboli

$$x^2 = \varrho^2 + d^2;$$

odtud po dosazení ze (3) plyne

$$x = \sqrt{r(r - 2\varrho)}. \quad (4)$$

Řešení podal Jaroslav Jerhout,  
žák 1.b SVVŠ J. Fučíka,  
nám. Odborářů, Plzeň.

4. Ak sú  $p, q$  prirodzené čísla, potom je číslo

$$\frac{10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4}{36}$$

celé. Dokážte.

**Riešenie.** O číse  $y = 10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4$  platí

$$\begin{aligned} y &= 10^p(10^q + 2) + 2(10^q + 2) = \\ &= (10^2 + 2)(10^q + 2). \end{aligned}$$

Pretože  $p, q$  sú prirodzené čísla, sú čísla  $10^p, 10^q$  párne a práve tak sú párne aj čísla  $10^p + 2$  a  $10^q + 2$ . Zápis čísla  $10^p + 2$  v dekadickej sústave obsahuje jednu číslicu 1, jednu číslicu 2, ostatné číslice sú pre  $p > 1$  všetko nuly. Preto je súčet číslic tohto čísla  $1 + 2 = 3$  a číslo  $10^p + 2$  je deliteľné tromi. Číslo  $10^p + 2$  je teda deliteľné dvoma a tromi a preto aj šiestimi. To isté platí aj o číse  $10^q + 2$ . Číslo  $y$  je teda deliteľné číslom  $6 \cdot 6 = 36$ . Tým je dokázané, že číslo  $\frac{y}{36}$  je prirodzené.

**Iné riešenie.** Zápis čísla  $y = 10^{p+q} + 2 \cdot 10^p + 2 \cdot 10^q + 4$  v dekadickej sústave má súčet číslic  $1 + 2 + 2 + 4 = 9$  (to platí aj v tom prípade, keď  $p = q$ ). Číslo  $y$  je teda deliteľné deviatimi. Každé z čísel  $10^{p+2}, 2 \cdot 10^p, 2 \cdot 10^2, 4$  je deliteľné štyrmi: Číslo  $10^{p+q} = 10^p \cdot 10^q$  je súčinom dvoch párných čísel, čo je zrejmé z uvedeného zápisu, kde  $p, q$  sú prirodzené čísla. Podobne číslo  $2 \cdot 10^p$  i číslo  $2 \cdot 10^2$  sú súčiny dvoch párných čísel. Číslo  $y$  je teda deliteľné nesúdeliteľnými číslami 9 a 4 a podľa známej vety je deliteľné aj ich súčinom. Číslo  $\frac{y}{36}$  je teda prirodzeným číslom.

5. Zvolte ostrý úhel  $\sphericalangle PVQ$  a uvnitř tohoto úhlu

bod  $C$ . Uvažujme všechny trojúhelníky  $ABC$ , kde  $A$  je vnitřní bod polopřímky  $VP$  a  $B$  vnitřní bod polopřímky  $VQ$ .

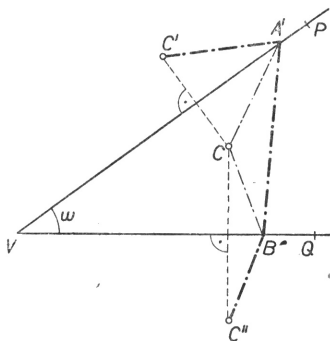
Sestrojte body  $A, B$  tak, aby trojúhelník  $ABC$ , který tak vznikne, měl ze všech uvažovaných trojúhelníků nejmenší obvod.

Dokažte, že se takový trojúhelník dá sestavit právě jeden.

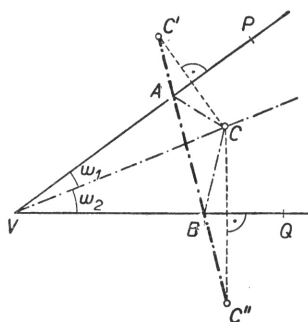
**Řešení** (obr. 33, 34). *Rozbor.* Buďte  $C', C''$  obrazy bodu  $C$  v souměrnostech o osách  $VP, VQ$ ; jsou-li  $A', B'$  po řadě libovolně zvolené body přímek  $VP, VQ$ , potom platí

$$A'C' = A'C, \quad B'C'' = B'C.$$

Délka  $x$  obvodu trojúhelníka  $A'B'C$  je  $x = CA' + A'B' + B'C$  a tedy  $x = C'A' + A'B' + B'C''$ ;

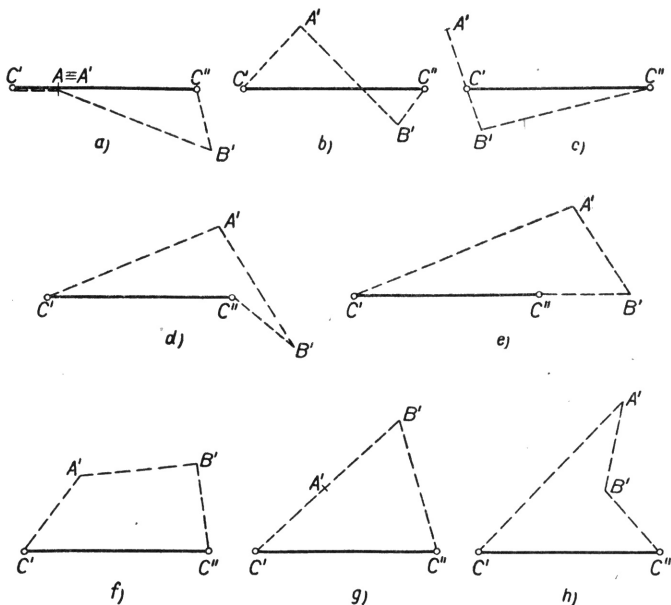


Obr. 33



Obr. 34

jedná se tedy o délku lomené čáry  $C'A'B'C''$ . Máme body  $A'$ ,  $B'$  určit tak, aby délka této čáry byla nejkratší. Podle známé věty z planimetrie (důkaz se opírá o větu, že součet dvou stran trojúhelníka je větší než strana třetí — viz obr. 35a—h) je známo, že úsečka  $C'C''$  je nejkratší lomená čára, která spojuje body  $C'$ ,  $C''$ . Odtud *konstrukce*:



Obr. 35a—h

Sestrojme tedy body  $C'$ ,  $C''$  (viz nahoře) a určíme společné body  $A$ ,  $B$  úsečky  $C'C''$  s polopřímkami  $VP$ ,  $VQ$  (obr. 34); existují-li tyto body, potom je  $ABC$  hledaný trojúhelník. Důkaz vyplývá z rozboru.

*Diskuse.* Dokážeme, že body  $A$ ,  $B$  existují a leží po řadě uvnitř polopřímek  $VP$ ,  $VQ$ . Označme  $\omega \equiv \sphericalangle PVQ$  podle textu úlohy je  $\omega < 90^\circ$ . Dále označme  $\omega_1 \equiv \sphericalangle PVC$ ,  $\omega_2 \equiv \sphericalangle CVQ$ , přičemž je  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ . Body  $C'$ ,  $C''$  jsou zřejmě různé a existuje úsečka  $C'C''$ . Přitom je  $\sphericalangle C'VC = 2\omega_1$ ,  $\sphericalangle CVC'' = 2\omega_2$ , a tedy  $180^\circ > 2\omega = 2\omega_1 + 2\omega_2 = \sphericalangle C'VC + \sphericalangle VCC''$  (dva úhly styčné a duté), tj.  $\sphericalangle C'VC'' < 180^\circ$ , takže se jedná skutečně o dutý úhel, ve kterém leží ostrý úhel  $\sphericalangle PVQ$ ; polopřímky  $VP$ ,  $VQ$  procházejí vnitřkem úhlu  $\sphericalangle C'VC''$ , a proto protínají úsečku  $C'C''$  v bodech  $A$ ,  $B$ . Tím je důkaz proveden; úloha má tedy právě jedno řešení.

**6.** Dané sú dve zhodné kružnice  $k_1 \equiv (S_1, r)$ ,  $k_2 \equiv (S_2, r)$ , ktoré sa navzájom pretínajú. Označme  $O$  stred úsečky  $S_1S_2$ .

Bodom  $O$  vedte takú priamku, aby jej priesečníky s kružnicami  $k_1$ ,  $k_2$  boli krajnými bodmi troch navzájom zhodných úsečiek bez spoločných vnútorných bodov.

Udajte podmienky riešiteľnosti pomocou čísel  $r$ ,  $c$ , kde  $c = S_1S_2$ .

**Riešenie** (obr. 36). Označme si  $P$ ,  $Q$  priesečníky kružníc  $k_1$ ,  $k_2$  ( $P \neq Q$ ). Zrejme je  $S_1S_2 < PS_1 + PS_2$  (čo

platí o stranách trojuholníka  $PS_1S_2$ ) čiže  $S_1S_2 < 2r$ . Preto je  $S_1O < r$ ,  $S_2O < r$  a bod  $O$  leží vo vnútri každej z kružníc  $k_1$ ,  $k_2$ . Kružnice  $k_1$ ,  $k_2$  sú súmerne združené podľa bodu  $O$  a podľa priamky  $PQ$ . Priamka  $PQ$  rozdeľuje kružnicu  $k_1$  na dva oblúky  $\Omega$ ,  $\Omega'$  s krajnými bodmi  $P$ ,  $Q$ . Bod  $O$  leží vo vnútri  $k_1$  a preto oddeľuje oba krajné body  $A$ ,  $C$  každej tetivy  $AC$  kružnice  $k_1$ , pokiaľ priamka  $AC$  prechádza bodom  $O$  a je rôzna od priamky  $PQ$ . Body  $A$ ,  $C$  oddeľuje teda aj priamka  $PQ$ , takže patria vnútrajškom oboch rôznych oblúkov  $\Omega$ ,  $\Omega'$ . Zo súmernosti so stredom  $O$  vyplýva, že to isté platí o obrazoch  $D$ ,  $B$  bodov  $A$ ,  $C$ , a to vzhľadom ku kružnici  $k_2$ . Z tej istej súmernosti vyplýva, že je

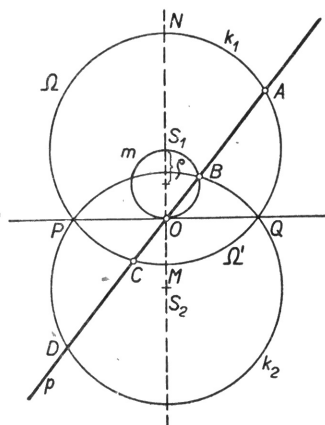
$$OA = OD, AB = CD, OB = OC. \quad (1)$$

Našou úlohou je zostrojiť body  $A$ ,  $B$ ,  $C$  na priamke  $p$  idúcej bodom  $O$  tak, aby platilo  $AB = CD$  a aby bod  $B$  ležiaci na kružnici  $k_2$  delil tetivu  $AC$  kružnice  $k_1$  na dve rovnaké časti. Je známe, že geometrickým miestom stredov tetív  $AC$  kružnice  $k_1$  idúcich vnútorným bodom  $O$  tejto kružnice je kružnica  $m$  zostrojená nad úsečkou  $OS_1$  ako priemerom (vyplýva to z Thaletovej vety, pričom aj body  $S_1$ ,  $O$  patria ku geometrickému miestu  $m$  ako stred tetivy  $MN$ , resp.  $PQ$  — viď obr. 36).

*Konštrukcia* (obr. 36). Zostrojme kružnicu  $m$  nad



úsečkou  $OS_1$  ako priemerom. Označme  $B$  spoločný bod kružníc  $m, k_2$  (pokiaľ bod  $B$  existuje). Potom priamka  $p \equiv OB$  je jedným riešením úlohy, pretože bod  $B$  patrí ku geometrickému miestu  $m$  a teda je stredom tetivy



Obr. 36

$AC$ , ktorú na kružnici  $k_1$  vytína priamka  $p$ . Súmernosť so stredom  $O$  prevádza kružnicu  $k_1$  na  $k_2$  a obrátene, body  $B, C, A$  po rade do bodov  $C, B, D$ , takže platí:  $BA = BC, CD = CB$  a teda  $BA = BC = CD$ .

*Diskusia.* Treba rozhodnúť o počte spoločných bodov kružníc  $k_2, m$ , ktorých polomery si označíme  $r, \varrho$ . Je  $\varrho = \frac{1}{4}S_1S_2$ . Spojnica stredov kružníc  $k_2, m$  má dĺžku  $3\varrho$ . Kružnice  $k_1, k_2$  sa podľa predpokladu pretínajú

(v dvoch rôznych bodoch), preto platí  $0 > S_1 S_2 > 2r$  čiže  $0 < 4\rho < 2r$ , t. j.  $2\rho < r$ . Je teda  $0 < \rho < r - \rho$  a preto  $r > \rho$ .

Pretože bod  $O$  ležiaci na kružnici  $m$  je vnútorným bodom kružnice  $k_2$ , môžu pre vzájomnú polohu kružníc  $k_2, m$  nastať tri rôzne prípady.

Nech o dĺžke  $3\rho$  spojnice stredov kružníc  $k_2, m$  platí:

[1]  $r - \rho < 3\rho < r + \rho$  čiže  $r < 4\rho$ ,  $2\rho < r$  (tento vzťah už platí). Potom existujú dva rôzne spoločné body kružníc  $k_2, m$  a úloha má dve rôzne riešenia (súmerne združené vzhľadom k priamke  $S_1 S_2$ ).

[2]  $r - \rho = 3\rho$  čiže  $4\rho = r$ . Úloha má jediné riešenie: priamka  $S_1 S_2$  je hľadaná priamka.

[3]  $r - \rho > 3\rho$  čiže  $r > 4\rho$ . V tomto prípade úloha riešenie nemá.

Pretože  $S_1 S_2 = 4\rho$ , možno záver vysloviť takto:

Ak je dĺžka spojnice stredov daných kružníc  $k_1, k_2$  väčšia ako ich polomer  $r$  (pritom je nutne menšia ako  $2r$ ), má úloha dve rôzne riešenia. Ak sa dĺžka spojnice stredov rovná polomeru  $r$ , má úloha jediné riešenie. Inak úloha riešenie nemá.

P o z n á m k a. Jednoduché riešenie úlohy sa dostane použitím rovnolahlosti so stredom  $O$  a koeficientom  $\frac{1}{3}$ .

## 7. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE C

1. Jsou dány rovnoběžky  $b$ ,  $c$  a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod  $A$ .

Sestrojte čtverec  $ABCD$  tak, aby jeho vrchol  $B$  ležel na přímkce  $b$  a vrchol  $C$  ležel na přímkce  $c$ . Kolik řešení má úloha?

**Řešení** (viz obr. 37). *Rozbor.* Je-li  $ABCD$  hledaný čtverec, potom existuje pravoúhlý trojúhelník  $ABM$  o přeponě  $AB = d$ , kde  $M$  je pata kolmice vedené bodem  $A$  k přímkce  $b$ . Označme v něm  $\sphericalangle A = \alpha$ ,  $\sphericalangle B = \beta$  (viz obr. 37); je tedy  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Dále označme  $N$  patu kolmice vedené z bodu  $C$  na přímkku  $b$ . Potom je úhel označený v obr. 37 písmenem  $\alpha'$  nutně roven  $\alpha$ . Úhel označený  $\omega$  v obr. 37 je pravý, a tedy  $\alpha' + \beta' = 90^\circ$  neboli  $\alpha' = \alpha$ . Je tedy  $\alpha'$  úhel ostrý, a proto pata  $N$  kolmice vedené z bodu  $C$  na jeho rameno padne dovnitř tohoto ramene, tj. na prodloužení úsečky  $MB$  za bod  $B$ .

Označme ještě  $AM = a$ ,  $CN = v$ . Platí

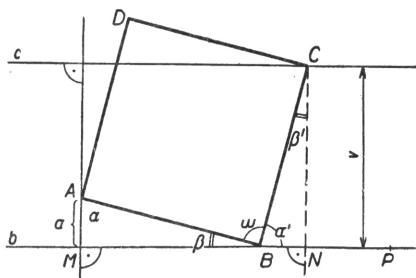
$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (usu),}$$

neboť je  $AB = BC = d$  (strana čtverce  $ABCD$ ),  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ . Odtud plyne:

$$MB = NC = v, \quad BN = AM = a$$

Z tohoto odvodíme *konstrukci* (viz obr. 37): Sestrojme

patu  $M$  kolmice vedené bodem  $A$  na přímku  $b$ ; bod  $M$  dělí přímku  $b$  ve dvě opačné polopřímky  $MP$ ,  $MQ$ . Další konstrukci provedeme pro polopřímku  $MP$  (pro polopřímku  $MQ$  je konstrukce obdobná).



Obr. 37

Na polopřímce  $MP$  sestrojíme úsečku  $MB = v$ , kde  $v$  je vzdálenost daných rovnoběžek  $b$ ,  $c$ . Na prodloužení úsečky  $MB$  za bod  $B$  sestrojíme úsečku  $BN = a$ , kde  $a = AM$ ; v bodě  $N$  sestrojíme kolmici k přímce  $b$  a označme  $C$  její průsečík s přímkou  $c$ . Trojúhelník  $ABC$  doplníme na rovnoběžník  $ABCD$ , což je hledaný čtverec.

*Důkaz.* Podle konstrukce je

$$\triangle ABM \cong \triangle BCN \text{ (sus),}$$

neboť jsme sestrojili  $AM = BN$ ,  $MB = NC$ ,  $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$ . Je tedy  $AB = BC$  a  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$

(viz obrázek); proto je  $\beta + \alpha' = 90^\circ$ , a tudíž  $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  neboli  $AB \perp BC$ . Je tedy rovnoběžník  $ABCD$  pravoúhlý a rovnostranný neboli je to čtverec.

*Diskuse.* Právě popsané řešení  $ABCD$  existuje. Obraz  $A'B'C'D'$  čtverce  $ABCD$  v souměrnosti o ose  $AM$  je rovněž řešením úlohy (které odpovídá polopřímce  $MQ$ ). Body  $B, B'$  jsou odděleny bodem  $M$ , a tedy je  $B \neq B'$ , a tím i oba čtverce  $ABCD, A'B'C'D'$  jsou různé.

Úloha má právě dvě řešení.

## 2. Uvažujme číslo

$$x = 1 \cdot 10^{p+q+r} + 2 \cdot 10^{p+q} + 4 \cdot 10^q + 8,$$

kde  $p, q, r$  jsou daná přirozená čísla (např. zvolíme-li  $p = 2, q = 1, r = 3$ , obdržíme číslo 1 002 408).

Dokažte, že číslo  $x$  je dělitelné číslem 24, ať zvolíme přirozená čísla  $p, q, r$  jakkoliv.

**Řešení.** Platí v ě t a: Je-li číslo dělitelné dvěma nesoudělnými čísly, je dělitelné i jejich součinem. Pro dělitelnost 24 máme tedy v ě t u: Číslo je dělitelné 24, je-li dělitelné třemi a osmi.

Protože mocnitély  $p + q + r, p + q, p$  čísla 10 v zápise čísla  $x$  jsou různá přirozená čísla [je  $p + q + r - (p + q) = r > 0, p + q + r - p = q + r > 0, p + q - p = q > 0$ ], vyskytují se v zápise čísla  $x$  v dekadické soustavě jen cifry 1, 2, 4, 8 a nuly (popřípadě

žádná nula); ciferný součet čísla  $x$  tedy je  $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ , tj. je dělitelný třemi.

Uvažujme, jak v dekadickém zápise čísla  $x$  vypadá poslední trojčíslí tohoto zápisu. Jsou tyto možnosti (vesměs pro  $r \geq 1$ ):

Pro  $p = 1, q = 1$  je to 248.

Pro  $p = 1, q = 2$  je to 048.

Pro  $p = 2, q = 1$  je to 408.

Pro  $p = 2, q = 2$  je to 008; totéž trojčíslí dostaneme pro  $p > 2, q > 2$ . Avšak každé z čísel: 248; 48; 408; 8 je dělitelné osmi. Je tedy číslo  $x$  dělitelné osmi.

Číslo  $x$  je tedy dělitelné čísly 3 a 8, a tím i číslem 24.

**3.** V roce 1960 měl únor pět pondělků. Který nejbližší rok bude mít tutéž vlastnost?

**Řešení.** Má-li být v únoru 5 pondělků, musí to být přestupný rok. Protože se v každém novém obyčejném roce posunuje např. pondělí (pokud jde o datum) o jeden den dopředu, kdežto v přestupném roce o dva dny dopředu, znamená to za 4 roky přesun o 5 dní dopředu.

Hledaný rok musí být tedy přestupný a musí na 1. února padnout pondělí; jedná se tedy o to, ve kterém prvním roce po roce 1960 se pondělek posune opět na 1. února. Posunutí za 1. čtyřletí je o 5 dní, za dvě čtyřletí je posunutí o 10 dní, za tři čtyřletí o 15 dní atd. Hledáme tedy první násobek pěti, který je dělitelný

sedmi (abychom dostali posunutí pondělku zase na pondělek); je to zřejmě 35 dní = 5 dní  $\cdot$  7 neboli nastane to za 7 čtyřletí, tj. za  $4 \cdot 7 = 28$  let (viz tabulku — čti ji ve vodorovných řádcích).

| Po   | Ú    | St   | Č    | Pá   | So   | Ne   |
|------|------|------|------|------|------|------|
| 1960 | .... | .... | .... | .... | 1964 | .... |
| .... | .... | .... | 1968 | .... | .... | .... |
| .... | 1972 | .... | .... | .... | .... | 1976 |
| .... | .... | .... | .... | 1980 | .... | .... |
| .... | .... | 1984 | .... | .... | .... | .... |
| 1988 | .... | .... | .... | .... | .... | .... |

Hledaný rok, který bude mít 5 pondělků v únoru jako rok 1960, je rok 1988.

Řešil Václav Limponek, žák 1. tř.  
SVVŠ, Strakonice.

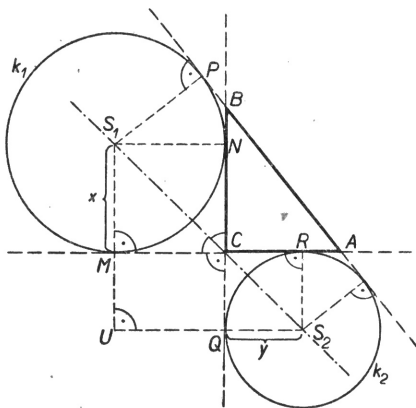
4. Daný je pravouhlý trojúhelník  $ABC$  s preponou  $AB$ . Označme  $k_1$ ,  $k_2$  kružnic zvonku vpísané trojúhelníku  $ABC$ , které sa po rade dotýkajú úsečiek  $BC$ ,  $CA$ .

Pomocou dĺžek  $a$ ,  $b$ ,  $c$  strán trojúhelníka  $ABC$  vyjadrite dĺžku dotýčnic vedených z bodu  $C$  ku kružniciam  $k_1$ ,  $k_2$  a vypočítajte vzdialenosť stredov kružnic  $k_1$ ,  $k_2$ .

**Riešenie** (viď označenie na obr. 38). Označme  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ . Dĺžky dotýčnic vedených z bodu  $C$  ku kružnici  $k_1$  sú rovnaké. Označme ich  $x = CM = CN$ . Dĺžky dotýčnic  $BN$ ,  $BP$  z bodu  $B$  ku kružnici  $k_1$  sú si tiež rovné, teda platí  $BP = BN = a - x$ .

Je teda  $AP = AB + BP = c + (a - x)$  čiže

$$AP = a + c - x. \quad (1)$$



Obr. 38

Dĺžky dotýčnic vedených ku kružnici  $k_1$  z bodu  $A$  sú taktiež rovnaké, teda  $AP = AM$ , kde  $AP$  je dané vzťahom (1) a  $AM = AC + CM$ , t. j.

$$AM = b + x. \quad (2)$$



Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostaneme

$$b + x = a + c - x$$

čiže

$$x = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b,$$

kde  $s$  je polovičný obvod trojuholníka  $ABC$ . Pritom je  $CMS_1N$  štvorec a jeho strana  $x$  je polomer kružnice  $k_1$ .

Je teda

$$x = s - b. \quad (3)$$

Rovnako sa zistí, že polomer  $y = CR = CQ$  kružnice  $k_2$  je

$$y = s - a. \quad (4)$$

Polpriamky  $CS_1$ ,  $CS_2$  sú osami vrcholových pravých uhlov  $\sphericalangle MCN$ ,  $\sphericalangle QCR$  a sú preto navzájom opačné, takže bod  $C$  leží vo vnútri úsečky  $S_1S_2$ . Priamky  $S_1M$ ,  $S_2Q$  sú na seba kolmé a s priamkou  $S_1S_2$  ohraničujú pravouhlý trojuholník  $S_1S_2U$  s preponou  $S_1S_2$ . Jeho odvesny sú zhodné úsečky a platí

$$S_1U = S_2U = x + y = 2s - a - b = c.$$

Prepona  $S_1S_2 = S_1U \cdot \sqrt{2}$  (ako uhlopriečka štvorca)  
čiže

$$S_1S_2 = c\sqrt{2}.$$

*Záver.* Vzdialenosť stredov kružníc  $k_1, k_2$  je  $c\sqrt{2}$ , kde  $c$  je dĺžka prepony daného trojuholníka  $ABC$ .

## 8. ÚLOHY I. KOLA KATEGORIE D

**1.** V zápise dělení dvou přirozených čísel chybí některé cifry. Nahradte chybějící cifry tak, aby zápis byl správný. Zápis zní:  $12^* 76 : 23^* = ^*2$  (každá hvězdička značí jednu chybějící cifru).

**Řešení.** Označme  $x, y, z$  po řadě chybějící cifry. Platí tedy

$$(12x76) = (23y) \cdot (z2).$$

Číslo  $(z2)$ , a tím i hledanou cifru  $z$ , dostaneme dělením  $(12x76) : (23y)$ . Přitom dělenec je větší než 12 000 a menší než 13 000, dělitel je přirozené číslo mezi 230 a 239 (popříp. jedno z těchto čísel). Tu platí

$$5 < \frac{12\,000}{239} < 6, \quad 5 < \frac{13\,000}{230} < 6;$$

je proto nutně  $z = 5$  (dělili jsme největšího z možných dělenců nejmenším dělitelem a nejmenšího dělence největším dělitelem).

Součin čísel  $y, 2$ , která stojí na místě jednotek v činitelích  $(23y)$ , 52, je  $2y$ ; na místě jednotek součinu  $(12x76)$  stojí číslo 6. Znásobením čísel 0, 1, 2, ..., 9 číslem 2 dostaneme v součinu na místě jednotek číslo 6 jen ve dvou případech:

$$3 \cdot 2 = 6, \quad 8 \cdot 2 = 16.$$

Musí tedy být buď  $y = 3$  anebo  $y = 8$ ; avšak pro  $y = 3$  máme

$$233 \cdot 52 = 12\,116,$$

čož nevyhovuje. Pro  $y = 8$  dostávame

$$238 \cdot 52 = 12\,376,$$

takže je  $x = 3$ . Je tedy jediné řešení  $x = 3$ ,  $y = 8$ ,  $z = 5$ .

Uvažovaný součin tedy je  $238 \cdot 52 = 12\,376$ .

2. Daná je úsečka  $AB$  so stredom  $S$ . Označme  $a$ ,  $b$  kolmice zostrojené po rade v bodoch  $A, B$  k priamke  $AB$ . Ďalej zvolme bod  $M$  na predĺžení úsečky  $AB$  za bod  $A$ .

Bodom  $M$  zostrojte priamku  $p$  tak, aby jej priesečníky  $X, Y$  s priamkami  $a, b$  a bod  $S$  boli vrcholmi pravouhlého trojuholníka s preponou  $XY$ .

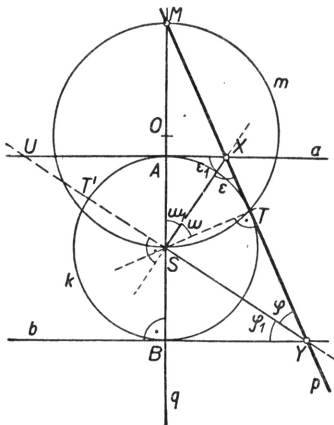
**Riešenie.** *Rozbor* (obr. 39a). Nech  $MXY$  je hľadaná priamka, takže je  $\sphericalangle XSY = 90^\circ$ . Označme  $U$  priesečník priamok  $SY, a$ . Je  $\triangle SBY \cong \triangle SAU$  (usu), pretože je  $SA = SB$ ,  $\sphericalangle BSY = \sphericalangle ASU$  (uhly vrcholové),  $\sphericalangle YBS = \sphericalangle UAS = 90^\circ$ . Preto je  $SU = SY$ . (To možno dokázať tiež pomocou súmernosti so stredom  $S$ , v ktorej sú priamky  $a, b$  súmerné združené.) Podľa textu úlohy je  $\sphericalangle XSY = 90^\circ$ . Preto je trojuholník  $XYU$  rovnoramenný so základňou  $YU$  a osou súmernosti  $XS$ , ktorá rozpoluje uhol  $\sphericalangle UXY$ . V osovej súmernosti s osou  $XS$  je obrazom polpriamky  $XU$  polpriamka  $XY$  a obraz  $T$  bodu  $A$  padne teda na polpriamku  $XY$ . Z tejto súmernosti vyplýva, že

$$ST = SA. \quad (1)$$

Obrazom pravého uhla  $\sphericalangle XAS$  je uhol  $\sphericalangle XTS$ , ktorý je teda tiež pravý a platí:

$$ST \perp MX. \quad (2)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva, že body  $A, B, T$  ležia na kružnici  $k \equiv (S, SA)$ . Pretože platí (2), je priamka  $MX$  dotýčnicou kružnice  $k$ .



Obr. 39a

Z toho *konštrukcia*: Opíšme kružnicu  $k \equiv (S, SA)$  a s použitím známej konštrukcie vedme z bodu  $M$  dotýčnice  $ST, ST'$  ku kružnici  $k$ . [Nad priemerom  $MS$  opíšme kružnicu  $m \equiv (O, OM)$  a označíme  $T, T'$  priesečníky kružníc  $m, k$ .] Priamka  $p \equiv MT$  pretne priamky  $a, b$  po rade v bodoch  $X, Y$ , ako hneď dokážeme.

K dôkazu použijeme túto vetu **V**: „Ak sú  $A$ ,  $T$  dotykové body dotýčnic  $XA$ ,  $XT$  vedených z bodu  $X$  ku kružnici  $k \equiv (S, SA)$ , potom je priamka  $XS$  osou súmernosti štvoruholníka  $SAXT$  aj kružnice  $k$ . Je teda na obrázku  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\omega = \omega_1$ , pričom je  $\omega + \varepsilon = 90^\circ$  (súčet ostrých uhlov v trojuholníku  $SXT$ ).“

Podľa vety **V** je  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ,  $\omega = \omega_1$ ,  $\varphi = \varphi_1$  (v tomto prípade ide o dotýčnice  $YB$ ,  $YT$  ku kružnici  $k$ ). Platí však

$$\sphericalangle BYX + \sphericalangle YXA = 180^\circ \quad (3)$$

(uhly priľahlé medzi rovnobežkami  $a$ ,  $b$ , preťatými pričkou  $p \equiv MXY$ ). Ale  $\sphericalangle BYX = \varphi + \varphi_1 = 2\varphi$ ,  $\sphericalangle YXA = \varepsilon + \varepsilon_1 = 2\varepsilon$ . Po dosadení do (3) máme  $2\varphi + 2\varepsilon = 180^\circ$  čiže

$$\varphi + \varepsilon = 90^\circ.$$

Preto v trojuholníku  $XY S$  je

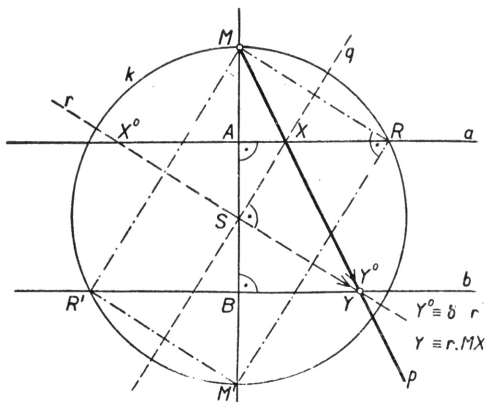
$$\sphericalangle XSY = 180^\circ - (\varphi + \varepsilon) = 90^\circ.$$

Je teda  $SX \perp SY$ , čo sme mali dokázať.

*Diskusia.* Pretože bod  $M$  leží na predĺžení úsečky  $AB$  za bod  $A$ , padne mimo kružnice  $k$  a podľa známej vety možno z bodu  $M$  zostrojiť dve rôzne dotýčnice  $MT$ ,  $MT'$ , z ktorých každá vyhovuje požiadavkám úlohy. Úloha má teda dve riešenia.

**Iný spôsob riešenia** (n á č r t — obr. 39b). Zostrojme pomocnú kružnicu  $k \equiv (S, SM)$  a jej druhý priesečník s priamkou  $AB$  označme  $M'$ . Niektorý

z priesečníkov kružnice  $k$  s priamkou  $a$  označme  $R$ . Stredom  $S$  úsečky  $AB$  vedme priamky  $r \parallel MR$ ,  $q \parallel \parallel RM'$ . Je teda  $r \perp q$  (podľa Thaletovej vety je  $\sphericalangle MRM' = 90^\circ$ ). Priesečník priamok  $a$ ,  $q$  označme  $X$ , priesečník priamok  $MX$ ,  $r$  označme  $Y$ . Potom  $X$ ,  $Y$  sú bodmi hľadanej priamky  $p$ .



Obr. 39b

*Dôkaz* (viď obr. 39b). Uvažujme o rovnobežníku  $MRM'R'$ . Keďže je  $\sphericalangle MRM' = 90^\circ$ , je to obdĺžnik. Priamky  $r$ ,  $q$  sú jeho stredné priečky. Podľa konštrukcie je trojuholník  $XYS$  pravouhlý ( $\sphericalangle XSY = 90^\circ$ ).

Označme  $Y^0$  priesečník priamok  $b$ ,  $r$ . Dokážeme, že je  $Y^0 \equiv Y$ : V osovej súmernosti podľa osi  $q \equiv SX$  je priamka  $a$  obrazom priamky  $MY^0$ , lebo priamka  $q$

je stredná priečka obdĺžnika  $MRM'R'$ . Bod  $Y$  pritom prejde do priesečníka  $X^0$  priamok  $a, r$  a platí  $X^0Y \perp \perp q$ . Zrejme je  $SY = SX^0$ . Vieme, že bod  $S$  je stredom súmernosti, ktorá prevádza priamku  $b$  do priamky  $a$  a obrátene. Táto stredová súmernosť prevádza spoločný bod  $X^0$  priamok  $a, r$  do spoločného bodu priamok  $b, r$ . Je teda  $Y^0 \equiv Y$ , čo sme mali dokázať. Priamka  $MX$  prechádza teda bodom  $Y$  a je hľadanou priamkou  $p$ .

**3.** Majme tri prirodzené čísla  $a, b, c$ . Utvorme

$$\begin{aligned} &(a + b + c)^2, (a + b - c)^2, (a - b + c)^2, \\ &(-a + b + c)^2, (a - b - c)^2, (-a + b - c)^2, \\ &(-a - b + c)^2, (-a - b - c)^2 \end{aligned}$$

a označme  $s$  súčet týchto ôsmich čísel.

a) Napište súčet  $s$  v najjednoduchšom tvare.

b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel  $a, b, c$  tak, aby výsledný súčet  $s$  bol rovný 240.

**Riešenie.** Platí vzorec  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ . Ak tu položíme napr.  $-b$  namiesto  $b$ , dostaneme

$$\begin{aligned} &(a - b + c)^2 = \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2[a(-b) + (-b)c + ca] = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - bc + ca). \end{aligned}$$

Kvôli stručnosti bude vhodné označiť  $X = a^2 + b^2 +$

$+c^2$ . Označme ďalej výrazy uvedené v texte úlohy po rade  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_8$ . Platí:

$$V_1 = X + 2(ab + bc + ca),$$

$$V_2 = X + 2(ab - bc - ca),$$

$$V_3 = X + 2(-ab - bc + ca),$$

$$V_4 = X + 2(-ab + bc - ca),$$

$$V_5 = X + 2(-ab + bc - ca),$$

$$V_6 = X + 2(-ab - bc + ca),$$

$$V_7 = X + 2(ab - bc - ca),$$

$$V_8 = X + 2(ab + bc + ca).$$

a) Ihneď je zrejmé, že  $s = 8X$ , čiže

$$s = 8(a^2 + b^2 + c^2).$$

b) Máme nájsť prirodzené čísla  $a, b, c$  tak, aby platilo  $8(a^2 + b^2 + c^2) = 240$  čiže

$$a^2 + b^2 + c^2 = 30.$$

Tieto čísla nájdeme pomocou tabuľky. Je zrejmé, že každé z čísel  $a, b, c$  musí byť menšie ako 6, pretože  $6^2 = 36 > 30$ . Pri hľadaní čísel  $a, b, c$  môžeme predpokladať, že je

$$a \leq b \leq c$$

(ostatné možnosti určíme na záver). Hneď môžeme vylúčiť tiež prípad, že sú všetky tri čísla párne; potom by totiž druhé mocniny čísel a teda aj ich súčet boli deliteľné štyrmi. Musia byť preto nutne dve z čísel  $a, b, c$



nepárne a tretie párne (v tabuľke uvádzame len také trojice).

|                   |   |    |    |    |    |    |    |
|-------------------|---|----|----|----|----|----|----|
| $a$               | 1 | 1  | 1  | 2  | 2  | 3  | 4  |
| $b$               | 1 | 2  | 2  | 3  | 3  | 3  | 5  |
| $c$               | 2 | 3  | 5  | 3  | 5  | 4  | 5  |
| $a^2$             | 1 | 1  | 1  | 4  | 4  | 9  | 16 |
| $b^2$             | 1 | 4  | 4  | 9  | 9  | 9  | 25 |
| $c^2$             | 4 | 9  | 25 | 9  | 25 | 16 | 25 |
| $a^2 + b^2 + c^2$ | 6 | 14 | 30 | 22 | 38 | 34 | 66 |

Z posledného stĺpca tabuľky je vidieť, že musí byť  $a < 4$ . Jediná vyhovujúca trojica v tabuľke je  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 5$ . Z nej dostaneme zámenou ďalších 5 trojíc.

Našej požiadavke vyhovujú teda iba tieto trojice (o tom, že vyhovujú, sa ľahko presvedčíme skúškou):

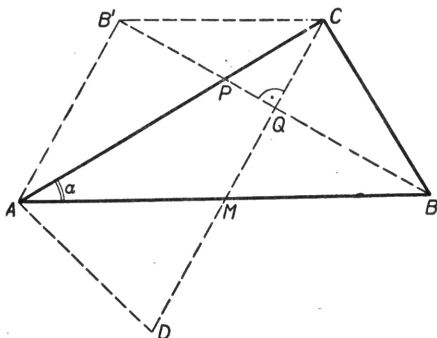
|     |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 5 | 5 |
| $b$ | 2 | 5 | 1 | 5 | 1 | 2 |
| $c$ | 5 | 2 | 5 | 1 | 2 | 1 |

Tým je riešenie prevedené.

4. Na obrázku 40 je  $ABC$  pravoúhlý trojúhelník o přeponě  $AB$ ;  $M$  je střed přepony,  $CD = CA$ ;  $B'$  je bod souměrně sdružený s bodem  $B$  vzhledem k přímce  $CD$ , přičemž je  $\alpha < 45^\circ$ .

Vnitřní úhly všech trojúhelníků, které se vyskytují na obr. 40, vyjádřete pomocí úhlu  $\alpha$ .

Na závěr proveďte výpočet pro  $\alpha = 42^\circ$ .



Obr. 40

**Řešení.** Užijeme označení z obrázku 41. Trojúhelník  $ABC$  je pravoúhlý s přeponou  $AB$ , takže je

$$\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha; \quad (1)$$

bod  $M$  je středem přepony  $AB$  a kružnice opsaná kolem bodu  $M$  poloměrem  $MA$  je trojúhelníku  $ABC$  opsána (Thaletova kružnice), takže je

$$MC = MA.$$

Je tedy trojúhelník  $MAC$  rovnoramenný se základnou  $AC$ , při které má shodné úhly; je tedy

$$\sphericalangle ACM = \alpha, \quad \sphericalangle AMC = 180^\circ - 2\alpha. \quad (2)$$

Dále

$$\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC = 2\alpha \quad (3)$$

(vnější úhel v trojúhelníku  $AMC$ ).

Trojúhelník  $CAD$  je rovnoramenný (neboť podle textu úlohy je  $CA = CD$ ) o základně  $AD$ ; proto platí

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ACD) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha, \text{ tj.}$$

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha. \quad (4)$$

Je tedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle MAD &= \sphericalangle CAD - \sphericalangle CAM = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - \alpha = \\ &= 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha, \end{aligned}$$

tj.

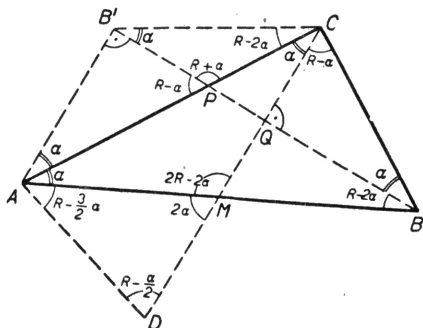
$$\sphericalangle MAD = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha. \quad (5)$$

Trojúhelník  $MBC$  je rovnoramenný (je  $MA = MB = MC$ ) se základnou  $BC$ , takže  $\sphericalangle C = \sphericalangle B$ , tj. [viz druhý vztah (2)]

$$\left. \begin{aligned} \sphericalangle BCM &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha, \\ \sphericalangle CBM &= 90^\circ - \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

což souhlasí s tím, že je  $\sphericalangle BCM + \sphericalangle ACM = 90^\circ$  [viz první vztah (2)].

Všechny čtyři úhly o vrcholu  $Q$  jsou podle textu úlohy pravé; na základě toho snadno vypočítáme dosud neznámé velikosti úhlů o vrcholech  $B, C, P, B'$ .



Obr. 41

Z trojúhelníka  $PCQ$  (kde  $\sphericalangle Q = 90^\circ$ ) plyne

$$\sphericalangle QBC = 90^\circ - \sphericalangle BCM = \alpha \text{ [viz(6)]}. \quad (7)$$

Z trojúhelníka  $BMQ$  (kde  $\sphericalangle Q = 90^\circ$ ) plyne

$$\sphericalangle MBQ = 90^\circ - \sphericalangle BMC = 90^\circ - 2\alpha \text{ [viz vztah (3)]}.$$

Z trojúhelníka  $CPQ$  (kde  $\sphericalangle Q = 90^\circ$ ) o úhlech  $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle APB'$  plyne

$$\sphericalangle APB' = \sphericalangle CPB = 90^\circ - \sphericalangle ACM = 90^\circ - \alpha \quad (8)$$

[viz první vztah (2)]; o úhlech k nim vedlejších platí

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPB' = 90^\circ + \alpha. \quad (9)$$

Ze souměrnosti o ose  $CM$  vyplývá, že  $Q$  je středem úsečky  $BB'$  a že je

$$\sphericalangle QB'C = \sphericalangle QBC = \alpha \text{ [viz (7)]}, \quad (8')$$

dále, že  $\sphericalangle QCB' = \sphericalangle QCB$  neboli

$$\sphericalangle QCB' = \sphericalangle BCM = 90^\circ - \alpha \quad (9)$$

[viz první vztah (6)].

Avšak [viz (9') a první vztah (2)]

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACB' &= \sphericalangle QCB' - \sphericalangle ACM = \\ &= 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Protože bod  $M$  je středem úsečky  $AB$  a  $Q$  je středem úsečky  $BB'$ , je úsečka  $MQ$  střední příčkou v trojúhelníku  $ABB'$ , tj. platí

$$MQ \parallel AB'.$$

Odtud plyne, že přilehlé úhly  $\sphericalangle MQB' = 90^\circ$  a  $\sphericalangle AB'Q$  mezi rovnoběžkami  $AB'$ ,  $MQ$  prořatými příčkou  $QB'$  mají součet  $180^\circ$ ; je tedy

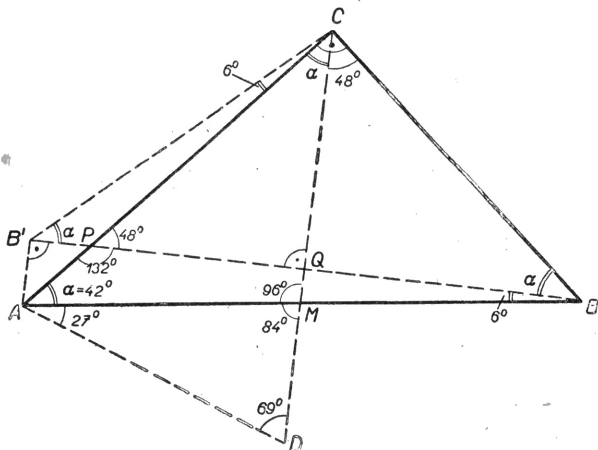
$$\sphericalangle AB'Q = 90^\circ. \quad (11)$$

Poslední úhel, který máme vypočítat, je úhel  $\sphericalangle PAB'$  v pravoúhlém trojúhelníku  $APB'$  [kde  $\sphericalangle B' = 90^\circ$  – viz (11)]; v něm je úhel  $\sphericalangle APB' = 90^\circ - \alpha$  [viz (8)]. Je tedy

$\sphericalangle PAB' = 90^\circ - \sphericalangle APB' = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ ,  
tj.

$$\sphericalangle PAB' = \alpha; \quad (12)$$

odtud plyne, že polopřímka  $AC$  je osou úhlu  $\sphericalangle BAB'$ . Tím je výpočet velikostí úhlů proveden. Velikosti všech úhlů (až na vrcholové) jsou zapsány v obr. 41, pro případ, že je  $\alpha = 42^\circ$ , pak na obr. 42.

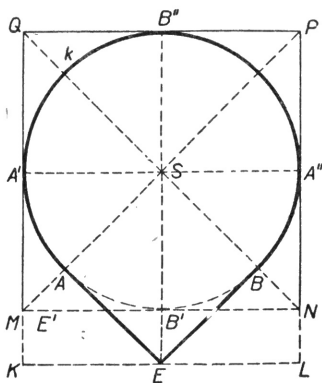


Obr. 42

Zkoušku správnosti výpočtů můžeme např. provést tak, že si ověříme, zda je součet úhlů v každém z trojúhelníků na obr. 41 roven  $180^\circ$  a součet úhlů ve čtyřúhelníku  $APQM$  roven  $360^\circ$ .

5. Tenký drát jsme stočili do tvaru číslice 8 tak, že se skládá ze dvou shodných smyček. Smyčku tvoří oblouk  $\widehat{AB}$  kružnice  $k$  a části tečen sestrojených v bodech  $A, B$  ke kružnici  $k$ ; délka oblouku  $\widehat{AB}$  je  $\frac{3}{4}$  délky kružnice  $k$ . Víme, že výška zhotovené číslice je 48 cm. Vypočtete šířku číslice a délku spotřebovaného drátu.

**Řešení.** Buď  $x$  délka (v cm) spotřebovaného drátu. Označme  $r$  poloměr a  $p$  obvod kružnice  $k$ , jejíž větší



Obr. 43

oblouk  $\widehat{AB}$  tvoří část jedné smyčky číslice 8 (viz označení v obr. 43). Oblouk  $\widehat{AB}$  se skládá ze tří čtvrtkružnic, neboť úsečky  $A'A''$ ,  $B'B''$  jsou středními příčkami čtverce  $MNPQ$  a platí  $A'A'' \perp B'B''$ ; je tedy délka

$o$  oblouku  $AB$  dána výrazem  $o = \frac{3}{4} p$ . Oblouk na druhé smyčce má touž délku a oba dohromady mají délku

$$2o = \frac{3}{2} p = \frac{3}{2} \cdot 2\pi r = 3\pi r$$

neboli

$$2o = 3\pi r. \quad (1)$$

Jedna smyčka je vedle oblouku  $\widehat{AB}$  tvořena úsečkami  $AE$ ,  $BE$  (viz obr. 43). Protože je  $SA = SB = r$  a  $SA \perp SB$ , je čtyřúhelník  $SAEB$  čtverec; je tedy  $AE = BE = r$  a  $AE + BE = 2r$ . Stejnou délku mají obdobně dvě úsečky na druhé smyčce; abychom dostali délku drátu spotřebovaného na osmičku, musíme k výsledku (1) přičíst číslo  $4r$ . Je tedy  $x = 2o + 4r$  neboli [viz (1)]  $x = 3\pi r + 4r = r(3\pi + 4)$ .

Položme  $\pi \doteq \frac{22}{7}$ ; pak je

$$x \doteq r \left( \frac{66}{7} + \frac{28}{7} \right) = \frac{94}{7} r.$$

Označme  $y = MN$  šířku číslice 8; zřejmě je

$$y = 2r. \quad (3)$$

Pro další výpočet potřebujeme určit délku  $r$  pomocí výšky  $v = 48$  cm zhotovené číslice. Z obrázku 43 je vidět, že  $\frac{1}{2} v = SB'' + SE$ ; přitom je  $SB'' = r$ ,  $SE = r\sqrt{2}$ , kde  $\sqrt{2} \doteq 1,4$  (což plyne ze vzorce pro úhlopříčku  $SE$  čtverce  $SAEB$ , jehož strana má délku  $r$ ). Je tedy



$$\frac{1}{2}v = r + r\sqrt{2}$$

neboli

$$\frac{1}{2}v = r(1 + \sqrt{2}).$$

Znásobme obě strany této rovnice o neznámé  $r$  číslem

$\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ ; dostaneme

$$\frac{v}{2(1 + \sqrt{2})} = r.$$

Přibližně tedy je

$$r \doteq \frac{48}{2(1 + 1,4)} = \frac{24}{2,4} = 10.$$

Ze vztahů (2) a (3) po dosazení za  $r = 10$  dostaneme

$$x \doteq \frac{940}{7} = 134 \frac{2}{7} \doteq 134, \quad y \doteq 20.$$

*Odpověď.* Šířka číslice je asi 20 cm, délka spotřebovaného drátu asi 134 cm.

**6.** Je dán výraz

$$V = \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right) : \left( \frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b} \right). \quad (1)$$

a) Zjednodušte daný výraz  $V$ .

b) Udejte, pro která čísla  $a, b$  nemá výraz  $V$  smysl.

c) Udejte, pro která čísla  $a, b$  je  $V = 0$ ; dále, kdy je kladný a kdy záporný.

**Řešení.** a) Provedeme postupně tuto úpravu výrazu  $V$  [zvláště uijeme vzorce  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ]:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} : \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{(a - b)(a + b)} = \\
 &= \frac{[a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)][a^2 + b^2 + a^2 - b^2]}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(a - b)(a + b)}{[a + b - (a - b)][a + b + a - b]} = \\
 &= \frac{4a^2b^2}{(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)} \cdot \frac{(a - b)(a + b)}{4ab}.
 \end{aligned}$$

Po zkrácení obou zlomků dostaneme

$$V = \frac{ab}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

b) Výraz  $V$  nemá smysl především tehdy, je-li roven nule některý ze jmenovatelů na pravé straně rovnosti (1). Platí  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ; ze vztahu

$$(a - b)(a + b) = 0$$

vyplývá, že jeden z činitelů  $a - b$ ,  $a + b$  je roven nule. Tedy  $a - b = 0$  anebo  $a + b = 0$ ; odtud plyne

$$a = b \quad \text{anebo} \quad a = -b. \quad (3)$$

Tím je rozhodnuto i o obou jmenovatelích  $a - b$ ,  $a + b$  ve výrazu (1). Výraz  $a^2 + b^2$  je součtem dvou nezáporných čísel a ten je roven nule jedině tehdy, jsou-li obě čísla  $a^2$ ,  $b^2$  rovna nule, tj. platí-li  $a^2 = 0$ ,  $b^2 = 0$ . Avšak zde ze vztahu  $a^2 = 0$  plyne  $a = 0$ ; podobně se najde i vztah  $b = 0$ . Je tedy  $a^2 + b^2$  rovno nule jedině pro  $a = b = 0$ , což je již zahrnuto ve vztazích (3).

Výraz  $V$  nemá dále smysl tehdy, je-li dělitel  $d = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$  na pravé straně (1) roven nule; podle provedeného výpočtu však je

$$d = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}.$$

Jestliže je  $4ab = 0$ , je  $d = 0$  (a obráceně); ze vztahu  $4ab = 0$  plyne buď  $a = 0$ , nebo  $b = 0$ . Musí tedy být obě čísla  $a, b$  různá od nuly, tj.  $a \neq 0, b \neq 0$ .

*Odpověď.* Výraz  $V$  ztrácí smysl, jestliže je  $a = b$  nebo  $a = -b$  nebo je-li jedno z čísel  $a, b$  rovno nule.

c) Výraz (1), pokud má smysl, je roven číslu

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} \quad (4)$$

[viz (2)]; má-li být  $V = 0$ , musí být ve zlomku (4) číselník roven nule (avšak jmenovatel různý od nuly), tj. musí platit  $ab = 0$ . Odtud dostaneme, že musí platit buď  $a = 0$  nebo  $b = 0$ . Avšak v žádném z obou případů nemá výraz (1) smysl.

*Odpověď.* Výraz  $V$  je různý od nuly pro všechna čísla  $a, b$ , pro něž má smysl.

O znaménku výrazu (1) rozhodneme pomocí vztahu (2). Jmenovatel  $a^2 + b^2$  je součtem dvou kladných čísel, neboť např.  $a^2$  je druhá mocnina čísla různého od nuly, a tedy kladné číslo. Proto o znaménku zlomku rozhodne číselník  $ab$  zlomku (2).

Snadno usoudíme, že je správná tato o d p o v ě ě:

Jsou-li čísla  $a$ ,  $b$  týchž znamének (tedy i různá od nuly), je  $ab$  kladné číslo; jsou-li čísla  $a$ ,  $b$  různých znamének, je  $ab$  záporné číslo. Tedy: jsou-li  $a$ ,  $b$  různá čísla týchž znamének, potom je  $V$  číslo kladné; jsou-li  $a$ ,  $b$  čísla opačných znamének a mají-li různé absolutní hodnoty, potom je  $V$  záporné číslo.

*Závěr.* Jsou-li  $a$ ,  $b$  různá čísla a mají-li též znaménka, je  $V > 0$ ; jsou-li  $a$ ,  $b$  čísla různých znamének a není-li  $a = -b$ , je  $V < 0$ .

## 9. ÚLOHY II. KOLA KATEGORIE D

1. Daný je štvorec  $ABCD$  so stranou dĺžky  $d$ . Zo stredu každej jeho strany opíšme polkružnicu, ktorá prechádza stredom štvorca  $ABCD$  (viď obrázok 44).

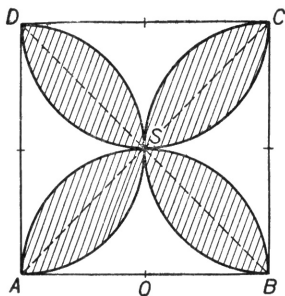
Koľko percent z obsahu štvorca je obsah vyčiarkovaného obrazca?

**Riešenie** (obr. 44). Obsah daného obrazca dostaneme, keď obsah obrazca na obr. 45 vynásobíme štyrmi, t. j. obsah polkruhu s polomerom  $\frac{1}{2}d$  zmenšený o  $\frac{1}{4}$  obsahu štvorca so stranou  $d$ . Teda

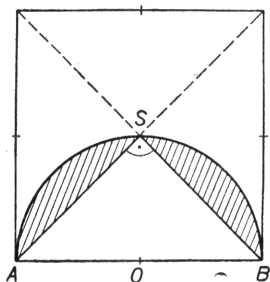
$$P = 4[\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2}d)^2 - \frac{1}{4}d^2] = d^2(\frac{1}{2}\pi - 1).$$

Obsah štvorca  $ABCD$  je  $P' = d^2$ . Pre hľadaný počet  $p$  percent platí:

$$p = P : \frac{P'}{100} = \frac{100P}{P'}.$$



Obr. 44



Obr. 45

Po dosadení za  $P$  a  $P'$  dostaneme

$$p = \frac{100d^2}{d^2} (\frac{1}{2}\pi - 1) = 100(\frac{1}{2}\pi - 1) \doteq 57.$$

Obsah vyčiarkovaného obrazca je približne 57 % obsahu štvorca.

Riešila Viera Kožiaková,  
8. b tr. ZDŠ,  
Hnúšťa, okr. Rimavská Sobota.

2. V továrňe pracovalo 1440 zamestnanců (mužů a žen). Za vzorně vykonanou práci obdrželo prémie  $18\frac{3}{4}\%$  ze všech mužů a  $22\frac{1}{2}\%$  ze všech žen. Vedení továrny vyhlásilo, že prémie bylo odměněno 20 % zaměstnanců.

Kolik mužů a kolik žen bylo zaměstnáno v továrně?

**Řešení.** Označme  $x$  počet mužů, kteří pracovali v továrně; potom počet žen, které pracovaly v továrně je  $1440 - x$ . Bylo odměněno:

$$18\frac{3}{4} \% \text{ z počtu všech mužů je } \frac{x}{100} \cdot 18\frac{3}{4} = \frac{75x}{400},$$

$$\begin{aligned} 22\frac{1}{2} \% \text{ z počtu všech žen je } & \frac{1440 - x}{100} \cdot 22\frac{1}{2} = \\ & = \frac{1440 - x}{100} \cdot \frac{45}{2} = \frac{45(1440 - x)}{200}; \end{aligned}$$

$$20 \% \text{ ze všech zaměstnanců je } \frac{1440}{100} \cdot 20 = \frac{1440}{5}.$$

Součet počtu odměněných mužů a počtu odměněných žen je roven počtu odměněných zaměstnanců, tj. platí

$$\frac{75x}{400} + \frac{45(1440 - x)}{200} = \frac{1440}{5}.$$

Dostali jsme rovnici pro neznámou  $x$ ; budeme ji řešit. Znásobme obě strany rovnice číslem 400 a postupně ji upravujeme:

$$\begin{aligned} 75x + 90(1440 - x) &= 80 \cdot 1440, \\ 1440 \cdot (90 - 80) &= (90 - 75)x, \\ 14400 &= 15x, \\ x &= \frac{14400}{15} = \frac{2880}{3} = 960. \end{aligned}$$

Počet mužů je tedy  $x = 960$ ; počet žen je  $1440 - 960 = 480$ .

*Zkouška.* Platí  $960 + 480 = 1440$ . Dále je:

$18\frac{3}{4}\%$  z 960 je  $\frac{960}{100} \cdot \frac{75}{4} = 180$  (počet odměněných mužů);

$22\frac{1}{2}\%$  z 480 je  $\frac{480}{100} \cdot \frac{45}{2} = 108$  (počet odměněných žen);

$20\%$  z 1440 je  $1440 \cdot \frac{1}{5} = 288$  (počet odměněných zaměstnanců).

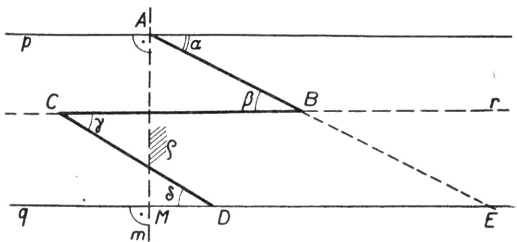
Skutečně je  $180 + 108 = 288$ .

**3.** Dané sú dve rovnobežky  $p, q$  o vzdialenosti  $v = 6$  cm. Na priamke  $p$  je daný bod  $A$ .

Zostrojte lomenú čiaru  $ABCD$  takého tvaru ako na obrázku 46, aby štyri uhly na obrázku vyznačené (oblúčkami) boli zhodné a aby úsečky  $AB, BC, CD$  mali tieto dĺžky:

$$AB = 4 \text{ cm}, \quad BC = 7 \text{ cm}, \quad CD = 6 \text{ cm}.$$

Je táto úloha riešiteľná pre  $AB = 2$  cm,  $BC = 7$  cm,  $CD = 3$  cm? Odôvodnite.



Obr. 46

**Riešenie** (viď označenie na obr. 46). *Rozbor.* Podľa textu úlohy je  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ . Uhly  $\alpha, \beta$  sú striedavé uhly medzi priamkami  $p, BC$ , preťatými priamkou  $AB$ . Z rovnosti  $\alpha = \beta$  vyplýva podľa známej vety, že je  $BC \parallel p$ . Pretože však je  $p \parallel q$ , vyplýva z toho, že je

$$p \parallel BC \parallel q. \quad (1)$$

Taktiež uhly  $\beta, \gamma$  sú striedavé medzi priamkami  $AB, CD$ , preťatými priamkou  $BC$ . Z rovnosti  $\beta = \gamma$  preto vyplýva, že je

$$AB \parallel CD. \quad (2)$$

Označme  $E$  priesečník priamok  $q, AB$ . Potom podľa (1), (2) sú protilahlé strany štvoruholníka  $EBCD$  navzájom rovnobežné, takže  $EBCD$  je rovnobežník. Preto je

$$\begin{array}{l} ED = BC = 7 \text{ cm}, \\ BE = CD = 6 \text{ cm}. \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} ED = BC = 7 \text{ cm}, \\ BE = CD = 6 \text{ cm}. \end{array}} \right\} \quad (3)$$

Keďže  $AE = AB + BE$ , je  $AE = 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$ , t. j.

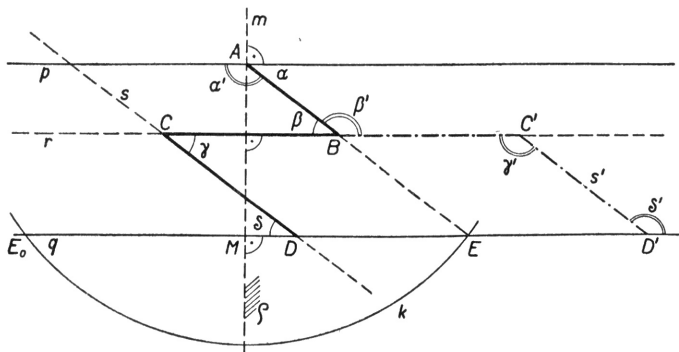
$$AE = 10 \text{ cm}. \quad (4)$$

Na základe výsledkov (4), (3) a (1), (2) prevedieme *konštrukciu* (viď obr. 47):

Označme  $m$  kolmicu vedenú bodom  $A$  k priamke  $q$ . Jej päťu označme  $M$ . Konštrukciu bodu  $E$  prevedieme



Pretože je  $AE = 10$  cm, je bod  $E$  jedným z priesečníkov priamky  $q$  a kružnice  $k \equiv (A, 10 \text{ cm})$ . Na polpriamke  $EM$  a polpriamke  $k$  nej opačnej zostrojme podľa vzťahu (3) po rade úsečky  $ED = 7$  cm a  $ED' = 7$  cm. Na polpriamke  $AE$  zostrojme úsečku  $AB = 4$  cm. Bodom  $B$  vedme priamku  $r \parallel q$ . Bodmi  $D, D'$  vedme rovnobežky  $s, s'$  k priamke  $AE$  a označme po



rade  $C, C'$  ich priesečníky s priamkou  $r$ . Potom lomené čiary  $ABCD, ABC'D'$  vyhovujú požiadavkám úlohy.

167

dobne.) Podľa konštrukcie je  $BCDE$  rovnobežník a preto je

$$\beta = \gamma \quad (5)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami  $BE$ ,  $CD$  pretáťmi priamkou  $BC$ ). Ďalej je

$$\gamma = \delta \quad (6)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami  $q$ ,  $r$  pretáťmi priamkou  $DC$ ). Konečne je

$$\alpha = \beta \quad (7)$$

(uhly striedavé medzi rovnobežkami  $r$ ,  $p$  pretáťmi priamkou  $AE$ ). Spojením (5), (6), (7) dostávame  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ .

Podľa konštrukcie je  $AE = 10$  cm,  $AB = 4$  cm, takže  $BE = AE - AB = 6$  cm. Pretože  $CD$ ,  $BE$  sú protiľahlé strany rovnobežníka  $BCDE$ , je  $CD = BE = 6$  cm. Podľa konštrukcie je  $ED = 7$  cm, pričom protiľahlé strany  $BC$ ,  $ED$  rovnobežníka  $BCDE$  sú zhodné, t. j.  $BC = ED = 7$  cm. Majú teda časti lomenej čiary  $ABCD$  dĺžky predpísané v texte úlohy. Tým je dôkaz prevedený.

*Diskusia.* Vzdialenosť  $v = 6$  cm stredu  $A$  kružnice  $k$  od priamky  $q$  je menšia ako jej polomer, ktorý je 10 cm. Preto je  $q$  sečnicou kružnice  $k$  a vo vnútri polroviny  $q$  leží priesečník  $E \equiv M$  čiar  $q$ ,  $k$  (druhý priesečník čiar

$q$ ,  $k$  dostaneme ako obraz bodu  $E$  v súmernosti podľa priamky  $m$ ).

Dostali sme dve riešenia  $ABCD$ ,  $ABC'D'$  prislúchajúce k bodu  $E$ . Ďalšie dve riešenia dostaneme ako obrazy týchto riešení v súmernosti podľa priamky  $m$ .

Úloha má teda celkom štyri riešenia.

Pre údaje  $AB = 2$  cm,  $CD = 3$  cm nemá úloha riešenie, pretože úsečka  $AE$ , pomocou ktorej sme úlohu riešili, by mala dĺžku  $AE = AB + CD = 5$  cm. No, kružnica  $k' \equiv (A, 5 \text{ cm})$  nepretína priamku  $q$ , pretože  $v > 5$  cm.

Podrobné riešenie tejto úlohy podal Ján Lupták,  
9. a tr. SVVŠ,  
Vazovova 6, Bratislava.

4. Je dán výraz

$$V = \left[ \frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \left( \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{x}{2x - 4} \right) - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x - 2}.$$

a) Daný výraz zjednodušte a určete všetky čísla  $x$ , pro která ztrácí daný výraz smysl.

b) Najdte všechna celá čísla  $x$ , pro která je výraz  $V$  roven celému číslu.

**Řešení.** a) V okrouhlé závorce máme zlomky o jmenovatelích

$$x(x - 2), \quad 2(x - 2);$$

jejich společný násobek je

$$2x(x - 2).$$

Proto první zlomek v okrouhlé závorce rozšíříme číslem 2 a druhý číslem  $x$ ; dostaneme nyní postupně:

$$V = \left[ \frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \left( \frac{4}{2x(x-2)} + \frac{x^2}{2x(x-2)} \right) - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \\ : \frac{x}{x-2} = \left[ \frac{4x}{x^2 + 4} \cdot \frac{x^2 + 4}{2x(x-2)} - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x-2}.$$

V lomené závorce první člen zkrátíme číslem

$$2x(x^2 + 4);$$

tím dostaneme

$$V = \left[ \frac{2}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right] : \frac{x}{x-2}.$$

Společný jmenovatel obou zlomků v lomené závorce je  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ; proto musíme první zlomek v lomené závorce rozšířit číslem  $x + 2$ . Dostáváme postupně:

$$V = \left[ \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right] : \frac{x}{x-2} = \\ = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} : \frac{x}{x-2}.$$

Po provedení dělení pak máme

$$V = \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x-2}{x}.$$

Po zkrácení čísla  $x$ ,  $x - 2$  je

$$V = \frac{2}{x + 2}. \quad (1)$$

Provedená úprava výrazu je správná, pokud daný výraz  $V$  má smysl, tj. jsou-li jmenovatelé všech zlomků, jež se v daném výrazu vyskytují, různé od nuly; tito jmenovatelé jsou  $x(x - 2)$ ,  $2(x - 2)$ ,  $x^2 + 4$ ,  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ . Musí tedy být  $x \neq 0$ ,  $x - 2 \neq 0$ ,  $x^2 + 4 \neq 0$  (což vždy platí, neboť je  $x^2 \geq 0$ ),  $x + 2 \neq 0$ . Odtud plyne, že  $x$  musí být různé od čísel

$$0, 2, -2.$$

Vedle toho dělitel  $\frac{x}{x - 2}$  musí být různý od nuly, tj. musí být  $x \neq 0$ .

*Závěr a).* Daný výraz  $V$  je roven zlomku  $\frac{2}{x + 2}$  a má smysl pro každé číslo  $x$  různé od čísel  $-2, 0, 2$ .

b) Dosadíme-li do výrazu  $\frac{2}{x + 2}$  za  $x$  celé číslo, je  $x + 2$  rovněž celé číslo; naším úkolem nyní je najít celé číslo  $x + 2$ , které je dělitelem čísla 2. Avšak číslo 2 je dělitelné právě těmito čtyřmi čísly:

$$2, 1, -1, -2. \quad (3)$$

Musí tedy platit jedna z rovnic

$$x + 2 = 2, \quad x + 2 = 1, \quad x + 2 = -1, \quad x + 2 = -2.$$

Jejich řešení po řadě jsou:

$$x = 0; \quad x = -1; \quad x = -3; \quad x = -4.$$

První případ ve (3) jsme však v části a) vyloučili [viz (2)]. Zbývá tedy provést zkoušku pro ostatní tři čísla.

$$\text{Pro } x = -1 \text{ je } V = \frac{2}{-1 + 2} = 2.$$

$$\text{Pro } x = -3 \text{ je } V = \frac{2}{-3 + 2} = -2.$$

$$\text{Pro } x = -4 \text{ je } V = \frac{2}{-4 + 2} = -1.$$

*Závěr b).* Je-li  $x$  celé číslo, pak výraz  $V$  je roven celému číslu jedině pro  $x = -1$  nebo pro  $x = -3$  nebo pro  $x = -4$ .