

14. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Rudolf Zelinka (author): 14. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1964-1965. 7. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. pp. 26–111.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404542>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

IV. Řešení úloh ze soutěže

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. Vypočítejte součet všech možných součinů xy , jejichž činitelé x, y jsou navzájem různá čísla vybraná z přirozených čísel $1, 2, \dots, n$, kde n je dané přirozené číslo. [Lze užít vzorce: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 =$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).]$$

Řešení. Označme S hledaný součet a dále

$$s_1 = 1 + 2 + \dots + n, \quad s_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Víme, že je

$$s_1 = \frac{1}{2} n(n+1), \quad s_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad (1)$$

což lze ověřit matematickou indukcí. Zřejmě platí vztah

$$s_1^2 = s_2 + 2S,$$

z čehož

$$S = \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2).$$

Dosaďme sem z (1); dostáváme postupně

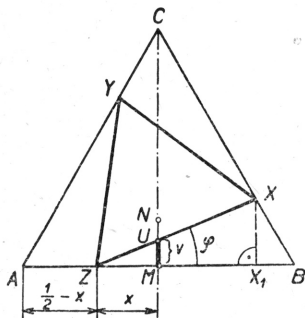
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right] = \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(3n^2 - n - 2) = \frac{1}{24} n(n+1)(n-1)(3n+2). \end{aligned}$$

Tím je číslo S nalezeno.

2. Je daný rovnostranný trojuholník ABC so stranou dĺžky 1; M je stred strany AB . Do trojuholníka ABC je vpísaný rovnostranný trojuholník XYZ tak, že body X, Y, Z ležia po rade vo vnútri strán BC, CA, AB a tak, že úsečky XZ, CM majú spoločný bod U .

a) Vyjadrite vzdialenosť MU pomocou vzdialenosti MZ .

b) Dokážte, že bod U každého z trojuholníkov XYZ leží na určitej úsečke MN , ktorá má dĺžku $\frac{1}{9} CM$.



Obr. 1

Riešenie (obr. 1). a) Vzdialenosť bodov M, Z označme x , vzdialenosť bodov M, U označme v a $\sphericalangle XZB$ označme φ . Potom pre trojuholníky ZXB, XYZ platí, že

$$\sphericalangle ZXB = 120^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle YXC = 180^\circ - 60^\circ - (120^\circ - \varphi) = \varphi.$$

Je teda

$$\triangle ZXB \cong \triangle XYC \quad (usu),$$

takže

$$ZB = XC, \quad AZ = AB - ZB = BC - XC = BX = \\ = \frac{1}{2} = x.$$

Cyklickou zámenou dostaneme $BX = CY$, t. j.

$$AZ = BX = CY = \frac{1}{2} - x.$$

Označme X_1 pātu kolmice vedenej bodom X k strane AB . Bod X_1 náleží úsečke MB . Platí

$$XX_1 = BX \sin 60^\circ = \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2)$$

$$MX_1 = MB - BX_1 = MB - BX \cos 60^\circ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x. \quad (3)$$

Pomocou vzťahu (3) dostávame

$$ZX_1 = x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}. \quad (4)$$

Z rovnoláhlosti trojuholníkov ZUM , ZXX_1 dostaneme

$$v : x = XX_1 : ZX_1.$$

Stadiaľ pomocou vzťahov (2) a (4) po úprave dostávame

$$v = x \frac{\sqrt{3}(1 - 2x)}{6x + 1}, \quad (5)$$

pričom x prebieha interval $0 \leq x < \frac{1}{2}$.

b) Máme určiť maximum funkcie (5). Dokážeme, že

je to $\frac{1}{9} CM = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{1}{18} \sqrt{3}$. Predpokladajme, že je $v \geq \frac{\sqrt{3}}{18}$ čiže

$$\frac{x(1-2x)}{6x+1} \sqrt{3} \geq \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \text{kde } 0 \leq x < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Vynásobením prvej nerovnosti kladným číslom $\frac{18(6x+1)}{\sqrt{3}}$ dostávame po krátkej úprave, že nutne platí

$$36x^2 - 12x + 1 \leq 0$$

čiže

$$(6x - 1)^2 \leq 0. \quad (7)$$

Nerovnosť (7) platí jedine pre $x = \frac{1}{6}$. Číslo $x = \frac{1}{6}$ splňuje pritom nerovnosť (6) a z rovnosti (5) pre $x = \frac{1}{6}$ dostaneme práve $v = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Bod Z pre $x = \frac{1}{6}$ leží v tretine úsečky AB a príslušný bod U má od M vzdialenosť $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Tým je riešenie úlohy prevedené.

3. Je dána funkce proměnné x

$$y = x^2 - 4|x - 1| - p,$$

kde p je parametr.

Určete p tak, aby příslušná funkce nabyla hodnoty 1 právě pro tři různé hodnoty x .

Řešení. Označme $x_1 < x_2 < x_3$ hledané tři hodnoty nezávisle proměnné x , pro které má daná funkce hodnotu

$y = 1$. Vzhledem k dané funkci (1) rozeznávejme dvě možnosti, podle toho, je-li $x \leq 1$ nebo je-li $x \geq 1$.

Pro $x \leq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 + 4x - 4 - p; \quad (2)$$

pro $x \geq 1$ funkce (1) zní

$$y = x^2 - 4x + 4 - p. \quad (3)$$

Jsou zřejmě jen tři možnosti [1], [2] a [3]:

Případ [1]. Funkce (2) nabývá pro $x = x_1$, $x = x_2$ hodnoty $y = 1$, kde $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$. Pak ovšem funkce (3) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_3 \geq 1$, tj. platí [viz (3)] $1 = x^2 - 4x + 4 - p$ neboli $x^2 - 4x + 3 - p = 0$; tato kvadratická rovnice musí mít jediný kořen, tj. její diskriminant $4[4 - (3 - p)]$ musí být roven nule. Odtud plyne, že je nutně

$$p = -1.$$

Funkce (3) pak zní

$$y = x^2 - 4x + 5$$

a pro $y = 1$ dostaneme $x^2 - 4x + 4 = 0$ neboli $(x - 2)^2 = 0$; odtud plyne

$$x_3 = 2; \quad (4)$$

to je číslo z intervalu $x \geq 1$. Pro $x = x_3$ je skutečně $y = 1$.

Nyní zjistíme, zda existují čísla x_1 , x_2 , pro funkci (2) a pro parametr $p = -1$ taková, že pro ně je hodnota funkce $y = 1$. Funkce (2) zní

$$y = x^2 + 4x - 3 \quad (5)$$

a pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 + 4x - 4 = 0$, jejíž

kořeny jsou

$$\begin{aligned}x_1 &= -2 - 2\sqrt{2} = -2(\sqrt{2} + 1), \\x_2 &= -2 + 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{2} - 1) < 2 \cdot 0,5 = 1;\end{aligned}\tag{6}$$

obě navzájem různá čísla x_1 , x_2 jsou skutečně menší než 1. Po dosazení $x = x_1$, $x = x_2$ do pravé strany (5) dostaneme (čti zároveň horní anebo dolní znaménka)

$$\begin{aligned}(-2 \pm 2\sqrt{2})^2 + 4(-2 \pm 2\sqrt{2}) - 3 &= 12 \mp 8\sqrt{2} - 8 \pm \\&\pm 8\sqrt{2} - 3 = 1,\end{aligned}$$

tj. $y = 1$. Tím je případ [1] vyšetřen; hledaná čísla jsou dána vztahy (6), (4).

Případ [2]. Funkce (2) nabývá hodnoty $y = 1$ pro jediné $x = x_1 \leq 1$ a funkce (3) pro dvě čísla $x = x_2$, $x = x_3$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$. Pro $y = 1$ ze (2) dostaneme rovnici

$$x^2 + 4x - (5 + p) = 0$$

o neznámé x , která musí mít jediný (reálný) kořen; její diskriminant $4[4 + (5 + p)]$ musí být roven nule, tedy

$$p = -9.$$

Funkce (2) tedy zní

$$y = x^2 + 4x + 5\tag{7}$$

a pro $y = 1$ odtud plyne $(x + 2)^2 = 0$, neboli

$$x_1 = -2;$$

pro $x = x_1$ je hodnota funkce (7) skutečně $y = 1$.

Pro $p = -9$ funkce (3) zní

$$y = x^2 - 4x + 13.\tag{8}$$

Tu pro $y = 1$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x + 12 = 0$, jejíž diskriminant je zřejmě záporný a případ [2] nevede k řešení.

Případ [3]. Zjistíme ještě, zda funkce (2) a (3) mohou nabýt současně pro $x = x_1 = 1$ hodnoty $y = 1$. V tomto případě pak funkce (2) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_2 \leq 1$ a rovněž funkce (3) nabude hodnoty $y = 1$ pro jisté $x = x_3 \geq 1$.

Dosaďme tedy $y = 1$ a $x = 1$ např. do vztahu (2); dostaneme rovnici pro p :

$$1 = 1 + 4 \cdot 1 - 4 - p,$$

tj.

$$p = 0.$$

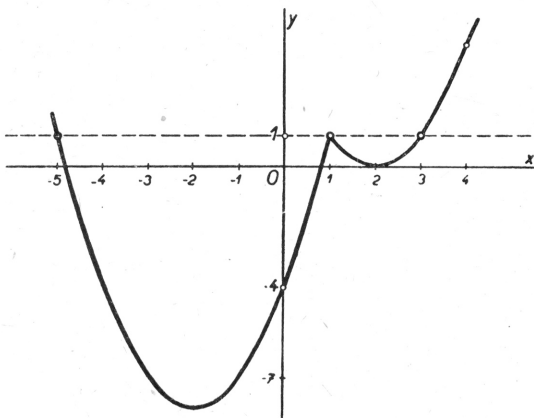
Pro $p = 0$ a $y = 1$ dostaneme ze vztahu (2) rovnici

$$1 = x^2 + 4x - 4.$$

Kořeny této rovnice jsou očekávané $x_1 = 1$ a dále $x_2 = -5$, tj. číslo menší než 1.

Dosažením $p = 0$ a $y = 1$ do vztahu (3) dostaneme rovnici

$$1 = x^2 - 4x + 4.$$



Obr. 2

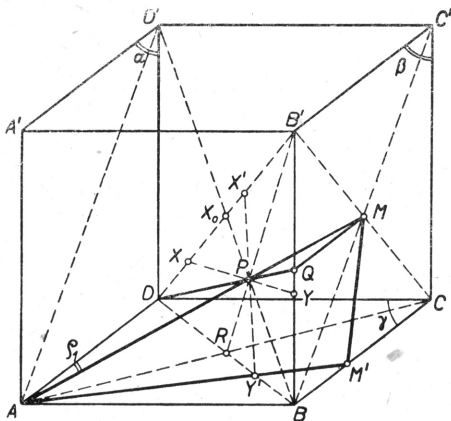
Rovněž tato rovnice má kořen $x_1 = 1$ a další kořen $x_3 = 3$, tj. číslo větší než 1. Tedy i případ [3] pro $p = 0$ vede k řešení úlohy (obr. 2).

Závěr. Hledané hodnoty parametru jsou $p = 0$ a $p = -1$.

4. Místnost má tvar krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky 1. Označme M střed stěny $BCC' B'$. Svítící bod probíhá tělesovou úhlopříčkou DB' . Přitom se vržený stín úsečky AM pohybuje a probíhá postupně jistou část stěn a podlahy místnosti.

Vyšetřte, z kterých obrazců se tato část skládá, a rozhodněte, zda její obsah je větší než obsah podlahy místnosti.

Řešení. Situace je patrna z obr. 3. Nejprve dokážeme, že se úsečky BD' , AM protínají v bodě, který označíme P .



Obr. 3

Skutečně úsečky AM , BD' jsou úhlopříčkami lichoběžníku $AD'MB$ a protínají se v bodě P , který náleží vnitřku každé z nich. Vržený stín úsečky AM padne buď na přední a pravou stěnu krychle (tj. $ABB'A'$ a $BCC'B'$), nebo na dolní a pravou stěnu (tj. $ABCD$ a $BCC'B'$); v prvním případě se stín láme na hraně BB' , ve druhém na hraně BC . Přechodným případem je situace, kdy svítící bod X splývá se středem X_0 úsečky DB' a kdy stínem jsou úsečky AB , BM ; tu je bod B vrženým stínem průsečíku P úseček AM , BD' . Bod P hraje v úloze důležitou roli pro kteroukoli polohu bodu X na úsečce DB' ; označíme Y bod, který je vrženým stínem bodu P z bodu X na povrch krychle.

a) Bod Y padne na úsečku BB' v případě, že X je bodem úsečky X_0D ; b) bod Y padne na úsečku BD v případě, že X' je bodem úsečky X_0B' .

Případ a). Vržený stín bodu P pro případ, že je svítící bod $X \equiv D$, označme Q ; leží v rovině $PADM$, a protože jsou stěny $ADD'A'$, $BCC'B'$ rovnoběžné, jsou rovnoběžné i průsečnice AD , MQ roviny $PADM$ s oběma těmito stěnami. Protože M je střed stěny $BCC'B'$, plyne odtud, že Q je středem úsečky BB' .

Pohybuje-li se bod X z bodu D do X_0 , pohybuje se bod Y z bodu Q do B ; pro $X \equiv X_0$ je $Y \equiv B$. Lomené čáry AYM pokryjí tedy v rovinách ABB' , BCC' trojúhelníky ABQ a BMQ .

Případ b). Vržený stín Y' bodu P pro případ, že svítící bod X' náleží úsečce X_0B' , padne do úsečky BR , kde R je vržený stín bodu P pro případ, že je $X' \equiv B'$, tj. R je průsečík úhlopříček AC , BD stěny $ABCD$. V tomto případě je stínem lomená čára $AM'M$, kde M' je průsečík přímek AY' , BC . Tyto lomené čáry v rovinách ABC , BCC' pokryjí trojúhelníky ABC a BCM ;

v rovině BCC' dostaneme celkem lichoběžník $BCMQ$ (viz případ a).

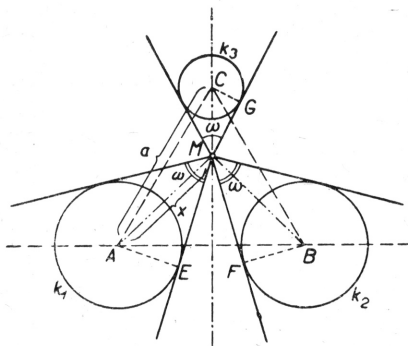
Obsah čtverce $ABCD$ je 1 (plošných jednotek); trojúhelníky ABQ , BMQ , BCM , ABC mají po řadě obsahy $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a součet $\frac{9}{8}$ těchto obsahů je větší než 1.

5. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a . Dále jsou dány dva kruhy K_1 , K_2 se středy A , B a o poloměrech 1 a kruh K_3 se středem C a o poloměru $r = \frac{1}{2}$. Bod M je takový bod trojúhelníku ABC , ze kterého je vidět kruhy K_1 , K_2 , K_3 pod zornými úhly téže velikosti.

Vypočítejte vzdálenosti MA , MB , MC a proveďte diskusi vzhledem k číslu a .

Řešení. a) Označení je patrné z obr. 4a. Je-li bod M řešením úlohy, je

$$\triangle AME \sim \triangle CMG,$$



Obr. 4a

neboť

$$\sphericalangle MEA = \sphericalangle MGC = 90^\circ, \quad \sphericalangle AME = \\ = \sphericalangle CMG = \frac{1}{2} \omega.$$

Odtud plyne

$$\frac{AM}{CM} = \frac{AE}{CG} = 2. \quad (1)$$

Dále je podle věty *suu*

$$\triangle AME \cong \triangle BMF,$$

tj.

$$AM = BM. \quad (2)$$

Označíme-li $AM = x$, je podle (1), (2)

$$AM = BM = x, \quad CM = \frac{1}{2}x. \quad (2')$$

Užijeme kosinové věty na trojúhelník ACM ; vyjde

$$x^2 = \frac{1}{4}x^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot a \cdot \cos 30^\circ; \quad (3)$$

je totiž $\sphericalangle ACM = 30^\circ$, neboť bod M leží podle (2) na ose úsečky AB . Úpravou vztahu (3) dostaneme pro neznámou x kvadratickou rovnici

$$3x^2 + 2ax\sqrt{3} - 4a^2 = 0. \quad (4)$$

Její diskriminant $D = 60a^2$ je kladné číslo. Kořeny rovnice (4) jsou

$$x = \frac{-2a \cdot \sqrt{3} \pm 2 \cdot \sqrt{15}a}{6} = \frac{\pm \sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a. \quad (5)$$

Záporný kořen (5) nemůže být řešením úlohy, zbývá

tedy jediné možné řešení

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a. \quad (6)$$

Tím je ukončen rozbor úlohy.

b) Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABM tak, aby platilo (2'), kde x je dáno vzorcem (6), a aby bod M ležel v polorovině ABC . Je to možné, neboť platí $2x > a$, jak se snadno přesvědčíme tímto výpočtem: z nerovnosti

$$2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > a \quad (7)$$

vyplývá postupně

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{5} - 1) &> \sqrt{3}, \\ \sqrt{20} &> 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je pravdivá, neboť je $\sqrt{20} > 4 > 2 + \sqrt{3}$; obrácením postupu pak dostaneme nerovnost (7).

Bod M takto sestrojený padne dovnitř trojúhelníku ABC , neboť je

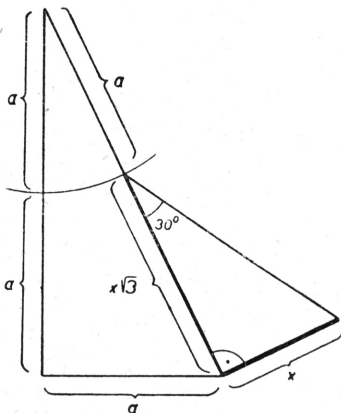
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{5} - 1}{3} \cdot a \sqrt{3} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3} \cdot a < \\ &< \frac{4 - 1,6}{3} \cdot a = 0,8a < a. \end{aligned}$$

Bod M padne vně kružnic k_1, k_2 (a tudíž i vně k_3), právě tehdy, platí-li $x > 1$, neboli podle (6)

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}} a > 1,$$

tj. platí-li

$$a > \sqrt{3} \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \doteq 1,4.$$



Obr. 4b

Platí-li nerovnost (8), je bod M řešením úlohy, a to jediným, jak vyplývá z obrácení postupu.

Nerovnost (8) je tedy podmínkou řešitelnosti úlohy. Konstrukci ukazuje obr. 4b.

6. Najděte všechna čísla x , pro něž platí nerovnosti

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad (1)$$

$$\cos 2x \geq \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - x \right). \quad (2)$$

Řešení. a) Předpokládejme nejprve, že $x \neq \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi$,

$\frac{3}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. Je-li x řešením, pak z nerovnosti (2) postupně plyne

$$2\cos^2 x - 1 \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad (2')$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1 \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x},$$

$$\frac{(1 - \operatorname{tg} x)[(1 + \operatorname{tg} x)^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 x)]}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} x)} \geq 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \geq 0,$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi - x \right) \geq 0, \quad (2'')$$

neboť pro x různé od $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ je $1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$.

Jsou dvě možnosti, jak splnit (2''), a tím i (2'):

Případ [1]. Nechť zároveň platí

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4}\pi - x \right) \geq 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} x \geq 0. \quad (4)$$

Ze (4) pro x vzhledem k (1) dostáváme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{2}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{3}{2}\pi \right\rangle. \quad (4')$$

Místo (3) pišme $\operatorname{tg} \left(x - \frac{1}{4} \pi \right) \leq 0$; tento vztah bez ohledu na (1) platí právě tehdy, je-li

$$\frac{1}{2} \pi + n\pi < x - \frac{1}{4} \pi \leq \pi + n\pi,$$

kde n je libovolné celé číslo [které dodatečně omezíme požadavkem (1)]. Odtud

$$\frac{3}{4} \pi + n\pi < x \leq \frac{5}{4} \pi + n\pi. \quad (5)$$

Omezme n vzhledem k požadavku (1):

Pro $n = -1$ již se zřetelem k (1) dostáváme

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \pi. \quad (6)$$

Pro $n = 0$ máme

$$\frac{3}{4} \pi < x \leq \frac{5}{4} \pi. \quad (6')$$

Pro $n = 1$ vzhledem k (1) je

$$\frac{7}{4} \pi < x \leq 2\pi. \quad (6'')$$

Společné části intervalů (4') a (6) až (6'') jsou

$$\left\langle 0, \frac{1}{4} \pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4} \pi \right\rangle. \quad (6''')$$

Případ [2]. Necht' platí zároveň

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi - x \right) \leq 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} x \leq 0. \quad (8)$$

Z (8) plynou intervaly

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right). \quad (8')$$

Místo (7) pišme $\operatorname{tg}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \geq 0$, a tedy bez zřetele k (1) je

$$n\pi \leq x - \frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi + n\pi,$$

kde n je libovolné celé číslo; odtud dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi + n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi.$$

Volba čísla n je omezena požadavkem (1); jsou tyto dvě možnosti:

Pro $n = 0$ dostáváme

$$\frac{1}{4}\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi; \quad (9)$$

pro $n = 1$

$$\frac{5}{4}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi. \quad (9')$$

Společné části intervalů (8') a (9), (9') jsou:

$$\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right), \quad \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right). \quad (9'')$$

b) Předem jsme vyloučili případy $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$; první dvě hodnoty však vyhovují (1) a (2), další

dvě nikoli. Dostáváme tedy intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle. \quad (9''')$$

Pro čísla x z intervalů $(6''')$, $(9'')$ lze postup obrátit, takže $(6''')$, $(9'')$ jsou všechna požadovaná řešení úlohy.

Jiné řešení. Daný vztah (2) upravujeme takto:

$$\cos 2x \geq \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad (10)$$

$$\cos 2x \geq \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x},$$

$$\cos 2x \geq \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x}, \quad (11)$$

$$\cos 2x \geq \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}. \quad (12)$$

Úpravy byly provedeny za předpokladu, že je x různé od čísel

$$\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \text{ [viz (10)]}, \quad \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \quad (13)$$

která až na $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ vyhovují (2).

Nerovnost (12) lze splnit dvěma způsoby:

Případ [1]. Nechť je $\cos 2x > 0$; pak ze (12) plyne postupně

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &\geq 1 - \sin 2x, \\ \sin 2x (1 - \sin 2x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Druhý činitel vlevo je vždy nezáporný a máme tedy celkem požadavky

$$\sin 2x \geq 0, \quad \cos 2x > 0.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$n \cdot 2\pi \leq 2x < \frac{1}{2}\pi + n \cdot 2\pi$$

neboli

$$n\pi \leq x < \frac{1}{4}\pi + n\pi.$$

Vzhledem k (1) jsou možné tyto dvě volby čísla n :
pro $n = 0$ máme

$$0 \leq x < \frac{1}{4}\pi;$$

pro $n = 1$

$$\pi \leq x < \frac{5}{4}\pi.$$

Připojíme-li přípustné hodnoty z (13), obdržíme intervaly

$$\left\langle 0, \frac{1}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \pi, \frac{5}{4}\pi \right\rangle. \quad (14)$$

Případ [2]. Necht' je $\cos 2x < 0$; pak ze (12) postupně plyne

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &\leq 1 - \sin 2x, \\ \sin 2x (1 - \sin 2x) &\leq 0, \end{aligned}$$

kde druhý činitel vlevo je nezáporný, a tudíž celkem

$$\sin 2x \leq 0, \quad \cos 2x < 0.$$

Ty platí při libovolném celém n pro x z intervalů

$$\pi + n \cdot 2\pi \leq 2x < \frac{3}{2}\pi + n \cdot 2\pi$$

neboli

$$\frac{1}{2}\pi + n\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi + n\pi.$$

Vzhledem k požadavku (1) jsou možné tyto volby čísla n :
pro $n = 0$ máme

$$\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{3}{4}\pi;$$

pro $n = 1$

$$\frac{3}{2}\pi \leq x < \frac{7}{4}\pi.$$

Podle poznámky k (13) čísla $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ vskutku nevyhovují
(1) a tak dostáváme intervaly

$$\left\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi \right\rangle, \left\langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\rangle. \quad (15)$$

Postup lze pro čísla x z intervalů (14), (15), pokud jsou
různá od čísel (13), obrátit. Tím jsou tedy nalezena všechna
řešení.

2. Úlohy II. kola kategorie A

1. Řešte nerovnost

$$3 \cotg x - \sqrt[3]{3} \operatorname{tg} x \geq 3 - \sqrt[3]{3}. \quad (1)$$

Riešenie. Ak x je riešením nerovnosti (1), je nutne

$$x \neq k \cdot 90^\circ, \quad (2)$$

kde k je ľubovoľné celé číslo. Upravujme postupne ne-

rovnosť (1) pre x , ktoré je jej riešením:

$$\frac{3}{\operatorname{tg} x}(1 - \operatorname{tg} x) + \sqrt[3]{3}(1 - \operatorname{tg} x) \geq 0,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\frac{3}{\operatorname{tg} x} + \sqrt[3]{3} \right) \geq 0,$$

$$3(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right) \geq 0,$$

$$(1 - \operatorname{tg} x) \cdot \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right) \geq 0. \quad (3)$$

Rozlišujme teraz dve možnosti (v ďalšom je n ľubovoľné celé číslo):

Prípád [1]. Nech obidva činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nezáporné, t. j.

$$\operatorname{tg} x \leq 1, \quad \operatorname{cotg} x \geq -\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}.$$

Musí teda súčasne platiť jednak [vzhľadom na (2)] jedna z nerovností

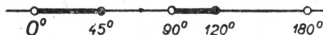
$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &\leq 45^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &< 180^\circ + n \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

a jednak jedna z nerovností

$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &< 90^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &\leq 120^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

Spoločné časti týchto intervalov sú (pozri obr. 5 pre $n = 0$):

$$\begin{aligned} n \cdot 180^\circ < x &\leq 45^\circ + n \cdot 180^\circ, \\ 90^\circ + n \cdot 180^\circ < x &\leq 120^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{aligned} \quad (4)$$



Obr. 5

Prípád [2]. Nech oba činitele na ľavej strane vzťahu (3) sú nekladné, t. j. $\operatorname{tg} x \geq 1$, $\operatorname{cotg} x \leq -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Musí teda platiť jednak [vzhľadom na (2)] nerovnosť

$$45^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x < 90^\circ + n \cdot 180^\circ$$

a súčasne nerovnosť

$$120^\circ + n \cdot 180^\circ \leq x < 180^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

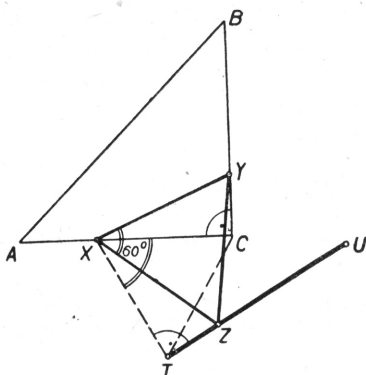
Tieto dva intervaly však nemajú spoločnú časť.

Od čísla x daného niektorou z nerovností (4) možno prejsť obrátením postupu k (1). Vzťahom (4) sú teda dané všetky riešenia danej nerovnosti.

2. V rovine je dán rovnoramenný pravoúhlý trojuholník ABC s preponou AB . Vyšetrite množinu všetkých vrcholov Z rovnostranných trojuholníkov XYZ , ktoré vzniknú, keď bod X probíhá vnitrek úsečky CA , bod Y probíhá vnitrek úsečky CB a polorovina XYZ obsahuje bod C .

Řešení (obr. 6). Zvolme pevný bod X medzi body A , C a nechť je XYZ jeden z trojuholníkov, ktorý splňuje

podmínky úlohy. Pak bod Z vznikne otočením bodu Y kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu (viz

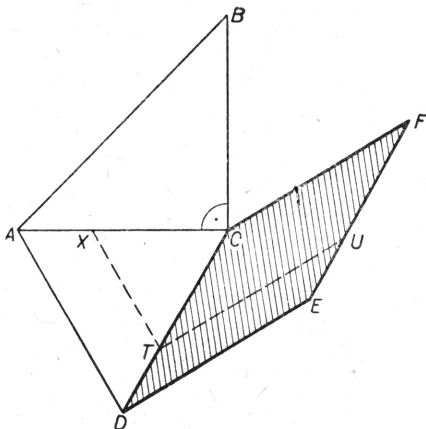


Obr. 6

obr. 6). Probíhá-li bod Y vnitřek úsečky BC , probíhá bod Z vnitřek úsečky TU , která vznikne otočením úsečky CB kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu. Bod T vznikne tedy otočením bodu C kolem X o úhel velikosti 60° v záporném smyslu, tj. bod T je vrcholem rovnostranného trojúhelníku XCT , ležícího vně trojúhelníku ABC .

Probíhá-li nyní bod X vnitřek úsečky AC , probíhá bod T vnitřek úsečky CD ; přitom D je vrchol rovnostranného trojúhelníku ACD sestrojeného v polorovině opačné k polorovině ACB (obr. 7). Úsečky TU jsou navzájem rovnoběžné (je $TU \perp XT \parallel AD$) a leží všechny v polorovině opačné k CDA . Všechny úsečky TU vyplní kosočtverec $CDEF$; jeho strany DE a CF vznikly po

řadě otočením úsečky CB kolem středů A, C o úhel velikosti 60° v záporném smyslu. Hledaný útvar, vyplněný vrcholy Z , je tedy vnitřek kosočtverce $CDEF$.



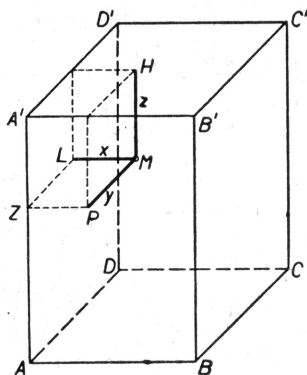
Obr. 7

3. Uvnitř kvádru o daných rozměrech a, b, c zvolme bod M a sestrojme jeho obrazy v souměrnostech vzhledem k rovinám, ve kterých leží stěny daného kvádru. Obdržíme tak 6 vrcholů osmistěnu, který má právě tři navzájem kolmé tělesové úhlopříčky.

Vypočítejte objem tohoto osmistěnu i objem tělesa, které je společnou částí osmistěnu a daného kvádru. Dokažte, že oba tyto objemy nezávisí na volbě bodu M .

Řešení. I. Uvažujme tři navzájem kolmé roviny stěn kvádru (obr. 8), které jdou bodem A' , a označme vzdálenosti bodu M od těchto stěn x, y, z (levá, přední, horní stěna), což jsou kladná čísla. Jsou-li $a = AB, b = AD,$

$c = AA'$ rozměry kvádru, pak $a - x$, $b - y$, $c - z$ jsou vzdálenosti bodu M od rovin stěn kvádru (pravé, zadní, dolní) jdoucích bodem C . Označme $M_1, \dots, M_6$ obrazy bodu M v uvažovaných rovinových souměrnostech, a to



Obr. 8

M_1, M_2, M_3 podle stěn levé, přední a horní, jdoucích bodem A' , a M_4, M_5, M_6 podle stěn pravé, zadní a dolní, jdoucích bodem C ; jsou tedy M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 tělesové úhlopříčky vzniklého osmistěnu. Platí

$$MM_1 = 2x, \quad MM_2 = 2y, \quad MM_3 = 2z,$$

$$MM_4 = 2(a - x), \quad MM_5 = 2(b - y), \quad MM_6 = 2(c - z);$$

tedy

$$M_1M_4 = 2x + 2(a - x) = 2a, \quad M_2M_5 = 2b, \quad M_3M_6 = 2c.$$

Objem kvádru je $K = abc$. Objem V osmistěnu vy počítáme jako objem dvojjeřlanu, např. s podstavou $M_1M_2M_4M_5$ (což je čtyřúhelník s kolmými úhlopříčkami

M_1M_4 , M_2M_5 — viz obr. 9) a s hlavními vrcholy M_3 , M_6 jehlanů, jejichž výšky jsou $2z$, $2(c - z)$. Označme P obsah zmíněného čtyřúhelníka; platí

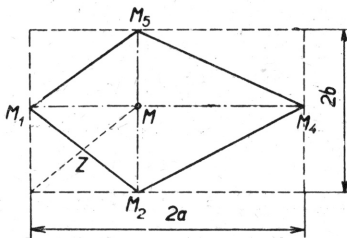
$$P = \frac{1}{2} M_1M_4 \cdot M_2M_5 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab$$

(čtyřúhelník snadno doplníme na obdélník s rozměry M_1M_4 , M_2M_5 a s dvojnásobným obsahem $4ab$ — viz obr. 9). Součet objemů jehlanů je

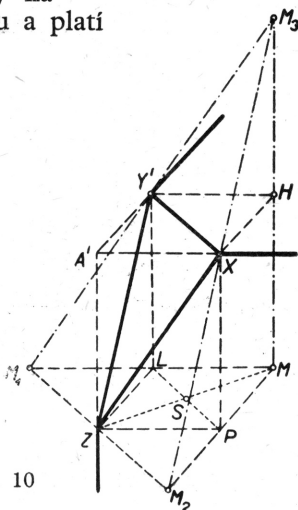
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} P \cdot MM_3 + \frac{1}{3} P \cdot MM_6 = \frac{1}{3} P \cdot (MM_3 + MM_6) = \\ &= \frac{1}{3} P \cdot M_3M_6 = \frac{1}{3} 2ab \cdot 2c = \frac{4}{3} K. \end{aligned}$$

Objem osmistěnu je nezávislý na poloze bodu M uvnitř kvádru a platí

$$V = \frac{4}{3} K.$$



Obr. 9



Obr. 10

II. Označme L, P, H paty kolmic z bodu M na stěny levou, přední a horní, jdoucí bodem A' (obr. 10). Trojúhelník LMP , kde $\sphericalangle M = 90^\circ$, doplníme na obdélník $LMPZ$ se středem S ; přitom bod Z leží na hraně AA' kváдру. Stejnolehlost o středu M a poměru 2 převádí trojúhelník LMP v trojúhelník M_1MM_2 a střed S strany LP (a strany MZ) převede ve střed strany M_1M_2 , což je bod Z . Protne tedy hrana M_1M_2 osmistěnu hranu $A'A$ kváдру. To se při vrcholu A' kváдру opakuje i pro hrany $M_2M_3, A'B'; M_3M_1, A'D'$. Označme $M_2M_3 \cdot A'B' \equiv \equiv X; M_3M_1 \cdot A'D' \equiv Y$; pak platí

$$A'X = x, A'Y = y, A'Z = z.$$

Čtyřstěn $A'XYZ$ odříznutý od kváдру stěnou $M_1M_2M_3$ osmistěnu má objem $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}xy\right)z = \frac{1}{6}xyz$. Obdobných čtyřstěnů je celkem osm (při každém vrcholu kváдру právě jeden); označme T součet jejich objemů; vzhledem k právě provedenému výpočtu platí, že

$$\begin{aligned} 6T = xyz + xy(c-z) + x(b-y)z + (a-x)yz + \\ + x(b-y)(c-z) + (a-x)y(c-z) + (a-x)(b-y)z + \\ + (a-x)(b-y)(c-z) = abc. \end{aligned}$$

Je tedy $T = \frac{1}{6}K$ a objem tělesa společného kváдру a osmistěnu je $K - \frac{1}{6}K = \frac{5}{6}K$.

Závěr. Objem osmistěnu je $\frac{4}{3}$ objemu kváдру a objem společného tělesa je roven $\frac{5}{6}$ objemu kváдру.

4. Ak sú a, b, c, d prirodzené čísla, potom súčin

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right)$$

nie je prirodzené číslo. Dokážte.

Riešenie. Dôkaz tvrdenia prevedieme sporom. Nech platí

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{d}{c} - \frac{b}{a}\right) = k, \quad (1)$$

kde k je prirodzené číslo. Po úprave dostaneme

$$(ad - bc)^2 = kabcd. \quad (2)$$

Ak položíme $ad = x$, $bc = y$, potom (2) možno písať vo tvare

$$(x - y)^2 = kxy.$$

Pretože je $x > 0$, $y > 0$, vyplýva z toho

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - (2 + k)\frac{x}{y} + 1 = 0. \quad (3)$$

Číslo xy je nutne racionálne a preto vo vzorci

$$\frac{1}{2}(2 + k \pm \sqrt{D})$$

pre korene rovnice (3) je diskriminant $D = (2 + k)^2 - 4$ (ktorý musí byť celým číslom) nutne rovný druhej mocnine nezáporného celého čísla m , t. j. $(2 + k)^2 - 4 = m^2$ čiže $(2 + k)^2 - m^2 = 4$ a teda

$$(2 + k + m) \cdot (2 + k - m) = 4.$$

Prvý činiteľ na ľavej strane je kladné číslo, preto je nutne kladný aj druhý činiteľ. Sú to okrem toho čísla párne, pretože ich súčin je 4 a rozdiel je $2m$. Jediná možnosť je $2 + k + m = 2$, $2 + k - m = 2$, t. j. $k = 0$, čo je však spor s predpokladom, že číslo k je prirodzené.

Iné riešenie. Dokážme, že predpoklad (1), kde k je prirodzené číslo, vedie k sporu.

Bez ujmy na všeobecnosti možno predpokladať, že dvojica prirodzených čísel a, b i dvojica c, d sú nesúdeliteľné čísla. Nech P je najväčší spoločný deliteľ čísel a, c a Q najväčší spoločný deliteľ čísel b, d . Možno teda položiť

$$a = PA, c = PC, b = QB, d = QD, \quad (4)$$

kde A, B, C, D sú nejaké prirodzené čísla, pričom čísla A, C i čísla B, D sú nesúdeliteľné. Po dosadení zo (4) do (1) postupne dostaneme

$$\left(\frac{AP}{QB} - \frac{CP}{QD}\right) \cdot \left(\frac{QD}{PC} - \frac{QB}{PA}\right) = k$$

čiže

$$\left(\frac{A}{B} - \frac{C}{D}\right) \cdot \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A}\right) = k,$$

$$(AD - BC)^2 = k ABCD. \quad (5)$$

Nech niektoré z čísel A, B, C, D je rôzne od čísla 1, napr. číslo A . Označme p jeho prvočíselného deliteľa. Potom je pravá strana rovnosti (5) deliteľná číslom p a teda aj straná ľavá. Tam je však číslom p deliteľné AD , preto aj BC je nutne deliteľné číslom p . Je teda nutne buď dvojica A, B alebo dvojica A, C deliteľná číslom p , čo je spor.

Preto nutne platí $A = B = C = D = 1$. Je teda $a = P = c, b = Q = d$, čo je spor s tým, že čísla a, c i čísla b, d sú nesúdeliteľné s výnimkou prípadu: $a = c = 1, b = d = 1$. V tom prípade však z (1) vyplýva $k = 0$, čo je spor s tým, že k je prirodzené číslo. Tým je dôkaz tvrdenia prevedený.

3. Úlohy III. kola kategórie A

1. Je-li n celé nezáporné číslo, potom číslo

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

je dělitelné devatenácti. Dokažte.

První řešení. Dané číslo lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^2 \cdot 5^{2n} \cdot 2^n + 3^2 \cdot 2 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} &= 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n = \\ &= 19 \cdot 50^n + 19 \cdot 12^n + 50^n - 12^n. \end{aligned}$$

Protože číslo $50^n - 12^n$ je pro každé celé $n \geq 0$ dělitelné číslem $50 - 12 = 38 = 2 \cdot 19$, je dané číslo dělitelné devatenácti pro každé celé $n \geq 0$.

Druhé řešení matematickou indukcí. Pro $n = 0$ platí $5^1 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^1 = 20 + 18 = 38 = 2 \cdot 19$, což je číslo dělitelné devatenácti.

Předpokládejme nyní, že pro některé celé nezáporné číslo n je číslo $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ dělitelné devatenácti a uvažujme číslo $5^{2n+3} \cdot 2^{n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+3}$, jež stručně označíme A . Platí

$$\begin{aligned} A &= 5^{2n+1} \cdot 5^2 \cdot 2^{n+2} \cdot 2 + 3^{n+2} \cdot 3 \cdot 2^{2n+1} \cdot 2^2 = \\ &= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} = \\ &= 38 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12(5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}). \end{aligned}$$

Číslo 38 je dělitelné devatenácti a také poslední číslo v závorce je podle indukčního předpokladu dělitelné devatenácti. Z toho plyne, že též číslo A je dělitelné devatenácti. Tím je důkaz podán.

2. V rovine je daná úsečka AM délky d . Dále je dané kladné číslo v .

Zostrojte pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB , ktorého výška kolmá k prepone má dĺžku v a ktorého

dotýčnice z bodu A a určíme spoločné body týchto dotýčnic a kružnice k_2 . Tým sú nájdene všetky body B . Vrcholy C hľadaného trojuholníka ľahko doplníme.

Skúška. Z predchádzajúcej konštrukcie je vidieť, že body A, B, C , pokiaľ existujú, sú nekolineárne, že trojuholník ABC je pravoúhlý (C leží na k_1), že platí $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$ (C leží na k_1 , B na k_2) a že vzdialenosť vrcholu C od priamky AB je v (je totiž $MQ = \frac{2}{5}v$).

Trojuholník splňuje teda podmienky úlohy.

Diskusia. Kružnice k_1, k_2, κ možno narysovať vždy. Dotýčnica kružnice κ prechádzajúca bodom A má s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod len vtedy, ak bod A leží zvonku kružnice κ , t. j. ak platí:

$$d > \frac{2}{5}v. \quad (1)$$

Dotýčnica vedená ku kružnici κ z vonkajšieho bodu A s kružnicou k_2 spoločný aspoň jeden bod práve vtedy, ak je

$$\frac{\frac{2}{5}v}{d} \leq \frac{\frac{d}{3}}{\frac{4}{3}d}. \quad (2)$$

Nerovnosti (1), (2) upravíme na tvar

$$5d > 2v, \quad 8v \leq 5d. \quad (3)$$

Ak je splnená druhá z nerovností (3), je splnená aj prvá a úloha je riešiteľná. Podmienka riešiteľnosti úlohy je teda

$$\frac{v}{d} \leq \frac{5}{8}.$$

Ak nastane nerovnosť, má úloha štyri riešenia (dve dvojice trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM). Ak nastane rovnosť, má úloha dve riešenia (jednu dvojicu trojuholníkov súmerne združených podľa priamky AM).

3. V oboru reálnych čísel řešte rovnici

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = p, \quad (1)$$

kde p je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p .

Řešení. Předpokládejme, že x je řešením dané rovnice (1). Je pak tedy jednak

$$p \geq 0, \quad (2)$$

jednak $x^2 - 2|x| - 1 \geq 0$, neboli

$$(x^2 - 1)^2 \geq 4x^2. \quad (3)$$

Umocněním obou stran v (1) dostaneme

$$x^2 - 2x - 1 + x^2 + 2x - 1 + 2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2$$

neboli

$$2\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 4x^2} = p^2 - 2(x^2 - 1). \quad (4)$$

Odtud vyplývá, že

$$p^2 \geq 2(x^2 - 1). \quad (5)$$

Umocněním (4) dostaneme

$$4[(x^2 - 1)^2 - 4x^2] = p^4 - 4p^2(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)^2,$$

čili

$$4x^2(p^2 - 4) = p^2(p^2 + 4). \quad (6)$$

Je proto

$$p^2 - 4 > 0 \quad (7)$$

a naše řešení x je jedno z čísel

$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}}. \quad (8)$$

Z (5) a (8) plyne

$$p^2 \geq 2 \left(\frac{p^2(p^2 + 4)}{4(p^2 - 4)} - 1 \right)$$

neboli vzhledem k (7)

$$2(p^2 - 4)p^2 \geq p^2(p^2 + 4) - 4(p^2 - 4).$$

Odtud vyplývá

$$p^4 - 8p^2 - 16 \geq 0,$$

tj.

$$[p^2 - 4(1 + \sqrt{2})][p^2 + 4(\sqrt{2} - 1)] \geq 0.$$

Je proto

$$p^2 \geq 4(1 + \sqrt{2})$$

neboli vzhledem k (2)

$$p \geq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}. \quad (9)$$

Tím jsme dokázali: Má-li rovnice (1) řešení, je řešením jedno z čísel (8) a pro číslo p platí nerovnost (9). Ukažme nyní, že je-li pro číslo p splněna nerovnost (9), pak každé z obou čísel (8) je řešením.

Je-li totiž splněna podmínka (9), pak čísla x_1, x_2 daná vztahem (8) existují a vyhovují vztahům (6), (5), tedy i (4). Protože je splněna rovnost (4), platí i (3), obě odmocniny v (1) mají smysl a platí i (1).

Celkem tedy dostáváme závěr:

Daná rovnice má řešení právě tehdy, je-li

$p \geq 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Řešení jsou dvě a jsou dána vzorcem

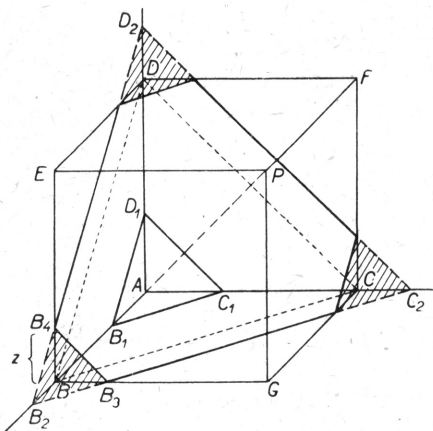
$$x_{1,2} = \pm \frac{p}{2} \sqrt{\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}}.$$

4. Nádobá má tvar duté krychle umístěné tak, že její tělesová úhlopříčka AP je ve svislé poloze, a platí $AP = 1$. V nádobě je voda; část tělesové úhlopříčky AP , která je ponořena ve vodě, má délku x .

Vyjádřete objem y vody v nádobě pomocí čísla x pro tyto dva případy:

a) $0 < x \leq \frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$.

Řešení (obr. 12). 1. Označme B, C, D vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu A , dále



Obr. 12

E, F, G vrcholy krychle, které leží na hranách vycházejících z vrcholu P . Roviny BCD, EFG dělí tělesovou

úhlopříčku na tři úsečky délky $\frac{1}{3}$. To snadno dokážeme. $ABCD$ je pravidelný jehlan trojboký, jehož podstava BCD je rovnostranný trojúhelník o straně délky $\sqrt{\frac{2}{3}}$, jeho pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, jejichž odvěsny mají délku $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Přímka AP je kolmá ke každé z přímek BC , CD , DB , proto je kolmá k rovině BCD a obsahuje příslušnou výšku v jehlanu $ABCD$. Vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{v}{3}.$$

Odtud vyjde po úpravě $v = \frac{1}{3}$, což jsme chtěli dokázat.

Ze souměrnosti krychle podle průsečíku jejich tělesových úhlopříček vyplývá, že také rovina EFG dělí tělesovou úhlopříčku AP v poměru 1:2.

2. Pokud je číslo x v intervalu $0 < x \leq \frac{1}{3}$, tvoří voda v nádobě pravidelný trojboký jehlan $AB_1C_1D_1$; jeho podstavou je rovnostranný trojúhelník $B_1C_1D_1$, příslušná výška jehlanu má délku x a pobočné stěny jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnou délky s . Jako v odst. 1 vypočteme dvojím způsobem objem tohoto jehlanu; dostaneme

$$y = \frac{1}{6} s^3 = \frac{(s\sqrt{\frac{2}{3}})^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{x}{3}.$$

Z rovnosti objemů vyjde po úpravě $s = x\sqrt[3]{3}$ a dále

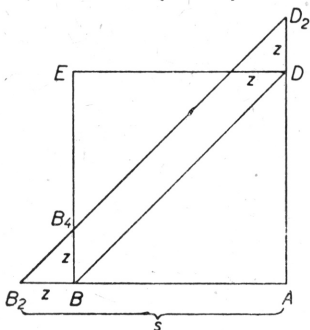
$$y = \frac{1}{2} x^3 \sqrt[3]{3}. \quad (1)$$

3. Je-li číslo x v intervalu $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$, vytvoří voda v nádobě těleso, jež dostaneme, oddělíme-li od pravidelného trojbokého jehlanu $AB_2C_2D_2$ tři navzájem shodné jehlany (vyšrafované na obrázku 12).

Jako v odst. 2 označme $AB_2 = AC_2 = AD_2 = s$; stejně jako dříve dostaneme

$$s = x\sqrt[3]{3}. \quad (2)$$

Objem jehlanu $AB_2C_2D_2$ je tedy opět $\frac{1}{2} x^3 \sqrt[3]{3}$. Každý z vyšrafovaných jehlanů je pravidelný jehlan trojboký; délku jeho pobočné hrany označme z . Situaci v rovině ABD znázorňuje obr. 13. Protože je $AB = AD = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, je podle (2) $z = BB_2 = s - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(3x - 1)$. Objemkaž-



Obr. 13

dého z vyšrafovaných jehlanů je $\frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(3x-1)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}(3x-1)^3$. Objem vody v případě 3 je tedy

$$y = \frac{1}{6}s^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}z^3 = \frac{1}{2}x^3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{18}(3x-1)^3.$$

Po úpravě dostaneme

$$y = \frac{\sqrt{3}}{18}(1 - 9x + 27x^2 - 18x^3). \quad (3)$$

Funkce (1), (3) jsou řešením úlohy. Rovnice (3) platí i pro $x = \frac{1}{3}$, jak se přesvědčíme dosazením: z (1) i (3) dostaneme pro $x = \frac{1}{3}$ výsledek $y = \frac{\sqrt{3}}{54}$.

4. Úlohy I. kola kategorie B

1. Řešte nerovnost

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 1. \quad (1)$$

Řešení. Nutně je $x \neq 0$. Vztah (1) lze psát

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x^2}}{x} \leq 0. \quad (2)$$

Nechť je $1 - 2x^2 \geq 0$, tedy

$$0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2')$$

Rozlišme případy $x > 0$ a $x < 0$.

Případ [1]. Pro $x > 0$ musí ve (2) být

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \leq 0 \quad (2'')$$

neboli

$$1 - x \leq \sqrt{1 - 2x^2}.$$

Vlevo [viz (2')] je nezáporné číslo, tj. $0 < x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$; umocněním obou stran nerovnosti na druhou dostaneme postupně

$$1 - 2x + x^2 \leq 1 - 2x^2, \quad (2''')$$

$$x(3x - 2) \leq 0.$$

Protože je $x > 0$, je nutně $3x - 2 \leq 0$ neboli

$$0 < x \leq \frac{2}{3}. \quad (3)$$

Obrácením postupu pro takto stanovené x dospějeme ke (2'''). Tu musí být $1 - 2x^2 \geq 0$ neboli $\frac{\sqrt{2}}{2} = x$. Připustíme, že platí $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{2}{3}$; umocněním na druhou dojdeme ke vztahu $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{9}$ neboli $\frac{9}{18} \leq \frac{8}{18}$, což je spor. Lze tedy od (2''') dále dospět až ke (2''), (2) a (1).

Případ [2]. Pro $x < 0$ musí ve (2) platit

$$1 - x - \sqrt{1 - 2x^2} \geq 0$$

neboli

$$1 - x \geq \sqrt{1 - 2x^2}. \quad (4)$$

Vlevo je nutně nezáporné číslo, tj. $1 - x \geq 0$ a tedy $1 \geq x$, což je pro $x < 0$ splněno. Umocňeme (4) na

druhou; postupně dostáváme

$$1 - 2x + x^2 \geq 1 - 2x^2, \quad (4')$$

$$x(3x - 2) \geq 0 \quad (4'')$$

a protože je $x < 0$, je nutně $3x - 2 \leq 0$ neboli

$$x \leq \frac{2}{3},$$

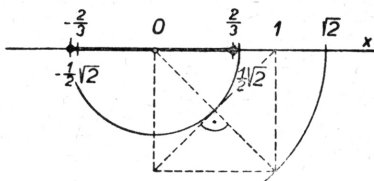
což podle předpokladu platí.

Obrácením postupu pro $x < 0$ od (4'') dospějeme ke (4'); chceme-li přejít ke (4), musíme požadovat, aby bylo $1 - 2x^2 \geq 0$ neboli $|x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, což vzhledem k $x < 0$ dává

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x < 0. \quad (5)$$

Pak lze již přejít ke (2) a (1).

Závěr. Řešení nerovnosti (1) jsou dána intervaly (3) a (5) (viz obr. 14).



Obr. 14

2. Dokážte, že číslo 48 je dělitelem čísla

$$N = n^2(n + 1)^2(n - 1)(n - 2)$$

pro každé přirozené číslo $n > 2$.

Riešenie. Platí: $48 = 2^4 \cdot 3$. Číslo N bude deliteľné číslom 48, ak je súčasne deliteľné číslami 3 a 16. No,

$$N = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)n(n + 1),$$

kde napr. čísla $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ sú tri bezprostredne za sebou nasledujúce prirodzené čísla, o ktorých je známe, že práve jedno z nich je deliteľné číslom 3.

Teraz rozlišujeme dve možnosti:

Prípad [1]. Nech n je párne číslo. Ďalej rozlišujeme:

a) Nech $n = 2(2k + 1)$, kde prirodzené číslo $k \geq 1$ (vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je $n - 2 = 2(2k + 1) - 2 = 4k$, t. j. je deliteľné štyrmi. Každý z činiteľov n^2 , $n - 2$ čísla

$$N = (n - 2)(n - 1)n^2(n + 1)^2 \quad (1)$$

je deliteľný štyrmi a teda číslo N je deliteľné číslom $4 \cdot 4 = 16$.

b) Nech je $n = 2 \cdot 2k = 4k$, kde prirodzené číslo $k \geq 1$ (opäť vzhľadom na predpoklad $n > 2$). Potom je n^2 v (1) deliteľné číslom $4^2 = 16$.

Tým sme prípad [1] vybavili.

Prípad [2]. Nech je n nepárne číslo. Položme $n + 1 = m$, kde $m > 3$. Potom je

$$N = (m - 3)(m - 2)(m - 1)^2m^2$$

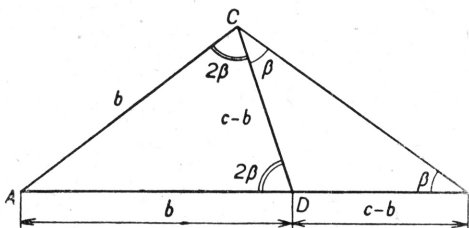
a opakujeme úsudky z prípadu [1] pre párne číslo m (namiesto predchádzajúceho n). Platia rovnaké závery ako v odstavcoch [1a], [1b].

Tým sme vybavili prípad [2] a zároveň dokázali tvrdenie pre prirodzené čísla $n > 2$.

3. Zostrojte trojuholník ABC , ak sú dané dĺžky strán

AB , AC a ak platí $\sphericalangle BCA = 3 \cdot \sphericalangle ABC$. Určite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 15). Rozbor: O uhloch β , γ trojuholníka ABC podľa textu úlohy platí $\gamma = 3\beta$, t. j.



Obr. 15

$\gamma > \beta$ a teda nutne platí $c > b$. Vo vnútri úsečky AB zostrojme bod D tak, aby platilo $DB = DC$, takže je $\sphericalangle BCD = \beta$. Potom v trojuholníku ADC je $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a uhol $\sphericalangle ADC$ je vonkajším uhlom rovnoramenného trojuholníka DBC , ktorý má pri základni BC zhodné uhly veľkosti β , takže $\sphericalangle ADC = 2\beta$. Trojuholník ADC je teda taktiež rovnoramenný trojuholník so základňou DC , pri ktorej má uhly s veľkosťou 2β . Preto platí $AD = AC = b$ a teda $DC = DB = AB - AD = c - b$. Trojuholník ADC má tedy ramená $AD = AC = b$ a základňa $DC = c - b$. Z toho vyplýva konštrukcia:

Z daných dĺžok $b = CA$, $c = AB$ zostrojíme trojuholník ADC tak, aby platilo:

$$DC = c - b, \quad AC = AD = b.$$

Na predĺžení úsečky AD za bod D určíme bod B tak, aby platilo $DB = c - b$ a teda $AB = c$. Potom ABC je hľadaný trojuholník, pretože strany CA , AB majú dané

veľkosti a platí $\sphericalangle ACD = 2 \cdot \sphericalangle ABC$, čo hneď dokážeme:

V trojuholníku DBC je podľa konštrukcie $DB = DC$ a preto uhly pri základni BC majú rovnakú veľkosť β . Uhol $\sphericalangle ADC$ pri základni DC rovnoramenného trojuholníka (čo vyplýva z jeho konštrukcie) je vonkajším uhlom trojuholníka DBC a jeho veľkosť je teda 2β . Je teda $\sphericalangle ACD = 2\beta$ a preto $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 2\beta + \beta = 3\beta$, čo sme mali dokázať.

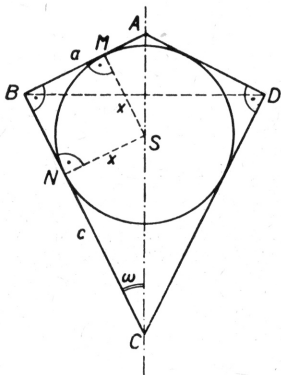
Diskusia. K tomu, aby sme mohli zostrojiť trojuholník ADC , musí pre dĺžky jeho strán platiť: $AC < AD + DC$, $AD < DC + AC$, $DC < AD + AC$, t. j. $b < b + c - b$, $c - b < b + b$. Z toho vyplýva, že úloha má jediné riešenie práve vtedy, keď o daných veľkostiach c , b úsečiek AB , AC platí: $b < c < 3b$.

4. Deltoid $ABCD$ má os súmernosti AC a jeho uhly pri vrcholoch B , D sú pravé.

Vyjadrite polomer kružnice vpísanej deltoidu pomocou dĺžok jeho strán.

Riešenie. Označme $AB = a$, $BC = c$, x dĺžku polomeru vpísanej kružnice. Nech S je stred hľadanej kružnice a M , N jej dotykové body po rade so stranami AB , BC . Potom platí: $x = SM = SN = BM = BN$ a $CN = c - x$ (pozri obr. 16). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov CSN , CAB (majú zhodné pravé uhly a uhol ω pri vrchole C) vyplýva

$$\frac{x}{a} = \frac{c - x}{c},$$



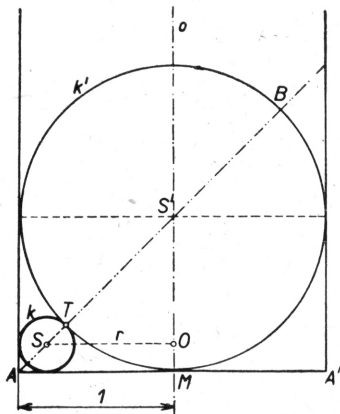
Obr. 16

z čoho dostaneme

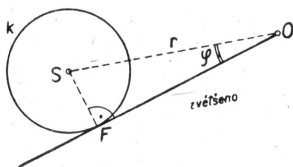
$$x = \frac{ac}{a + c}.$$

5. Do dutého rotačního válce s podstavou na vodorovné rovině je vepsána koule **K** o poloměru 1. Tato koule se dotýká jednak dolní podstavu, jednak pláště podél kružnice. Ve zbývajícím prostoru mezi dolní podstavou a koulí **K** spočívají na dolní podstavě shodné kuličky, které se dotýkají jak pláště válce, tak koule **K**.

Kolik lze nejvýše takových kuliček do zmíněného prostoru umístit?



Obr. 17



Obr. 18

Řešení. Viz označení v obr. 17 a 18, kde $S'M = S'T = MA = MA' = 1$, $ST = SF = x$, $SO \perp o$, $OS = r$, $\angle SFO = 90^\circ$. Kružnice k' , k jsou stejnohlé podle středů stejnohllosti T a A , konstanty stejnohllosti

mají absolutní hodnotu

$$\frac{ST}{S'T} = x = \frac{AT}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \frac{SO}{AM} = r = \frac{SS'}{AS'} &= \frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2 = \\ &= 2(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Je tedy

$$x = 3 - 2\sqrt{2}, \quad r = 2(\sqrt{2}-1).$$

Z pravoúhlého trojúhelníku OSF (obr. 18), kde ostrý úhel $\sphericalangle SOF = \varphi$, dostáváme

$$\begin{aligned} \sin \varphi = \frac{x}{r} &= \frac{3-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} > \frac{0,414}{2} = 0,207, \end{aligned}$$

takže je jistě

$$0,207 < \sin \varphi < 0,208$$

a podle tabulek

$$11\frac{5}{6}^\circ < \varphi < 12^\circ,$$

$$23\frac{2}{3}^\circ < 2\varphi < 24^\circ.$$

Zorný úhel jedné kuličky z bodu O má tedy velikost 2φ . Pro hledaný počet p kuliček dostáváme meze

$$\frac{360}{24} < p < \frac{360}{23\frac{2}{3}}$$

neboli

$$15 < p < 17,$$

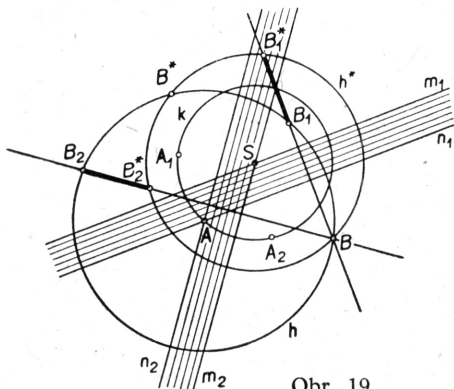
a tedy $p = 16$. Je totiž

$$\frac{360}{23\frac{2}{3}} = 16,9 \dots < 17.$$

Kuliček se vejde 16 a to volně (bez vzájemného dotyku).

6. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A ; vně kružnice k je dán bod B . Označme A' bod ležící vně kružnice k , B' bod souměrně sdružený s bodem B podle osy úsečky AA' . Jaký útvar vyplní všechny takto vzniklé body B' , proběhne-li bod A' vnějšek kružnice k ?

Řešení (obr. 19). Vedme libovolnou přímku m_1 středem S kružnice k a označme A_1 bod souměrně sdružený s bodem A podle přímky m_1 (A_1 zřejmě leží na k). Zkoumejme, které přímky směru (m_1) mohou být osami



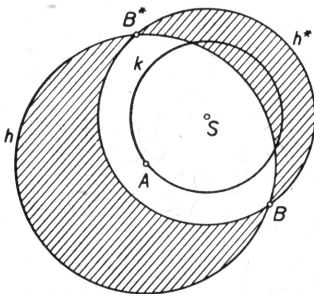
Obr. 19

úseček AA' , má-li bod A' ležet vně kružnice k . Zřejmě jsou vyloučeny všechny přímky vyšrafovaného pásu roviny (obr. 19), který je ohraničen přímkou m_1 a přímkou n_1 směru (m_1) vedenou bodem A . Souměrnost podle osy n_1 převede bod B v jistý bod B_1 , který náleží kružnici $h \equiv (A; AB)$, neboť je $AB = AB_1$. Souměrnost podle osy m_1 převede bod B v jistý bod B_1^* , který náleží kružnici $h^* \equiv (S; SB)$, neboť je $SB = SB_1^*$; přímka m_1 totiž prochází bodem S . Probíhá-li osa pás roviny (m_1, n_1) , probíhá obraz bodu B úsečku $B_1B_1^*$ (i s jejími krajními body). Náleží-li tedy osa úsečky AA' směru (m_1) , probíhá bod B' přímkou BB_1 s vyloučením úsečky $B_1B_1^*$.

Na obr. 19 je nakreslena situace pro další směr (m_2) ; zde je z přímky BB_2 vyloučena úsečka $B_2B_2^*$.

Jestliže směr (m_1) splyne se směrem AS , pak se pás (m_1, n_1) redukuje na jedinou přímku m_1 a úsečka $B_1B_1^*$ na jediný bod B^* , souměrně sdružený s bodem B podle přímky AS ; tento bod B^* nenáleží mezi body B' . Úsečky $B_1B_1^*$ vyplní množinu bodů, z nichž každý leží buď na jedné z obou kružnic h, h^* , nebo náleží vnitřku jedné a vnějšku druhé.

Závěr. Hledaný útvar U se skládá ze všech takových bodů B' , které náleží současně vnějšku obou kružnic h, h^* nebo současně jejich vnitřkům. Útvar U obsahuje mimoto ještě bod B , pokud je $B \neq B^*$; tato poslední podmínka je splněna právě tehdy, neleží-li body A, B, S v přímce. Útvar U je znázorněn na obr. 20, je to nevyšrafovaná část roviny.



Obr. 20

5. Úlohy II. kola kategorie B

1. Součet druhých mocnin dvou přirozených čísel je dělitelný sedmi právě tehdy, jsou-li obě uvažovaná čísla dělitelná sedmi. Dokažte.

Řešení. Označme A, B uvažovaná přirozená čísla; pak lze určit s jediným výsledkem celá čísla a, z_1 a b, z_2 taková, že platí

$$A = 7a + z_1, \quad B = 7b + z_2,$$

kde čísla z_1, z_2 jsou rovna některému z čísel $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Potom součet $N = A^2 + B^2$ lze psát

$$N = (49a^2 + 14az_1 + z_1^2) + (49b^2 + 14bz_2 + z_2^2) = 7x + z_1^2 + z_2^2, \quad (1)$$

kde x je jisté celé číslo. Jsou-li čísla A, B dělitelná sedmi, je $z_1 = z_2 = 0$, takže v (1) je $N = 7x$, tj. dělitelné sedmi.

Předpokládejme nyní, že číslo N je dělitelné sedmi, potom, protože $7x$ je násobek sedmi, plyne z (1), že nutně i součet $s = z_1^2 + z_2^2$ je dělitelný sedmi. Pro tento součet s sestavme tabulku:

$z_1 \backslash z_2$	0	± 1	± 2	± 3
0	0	1	4	9
± 1	1	2	5	10
± 2	4	5	8	13
± 3	9	10	13	18

Avšak jediné číslo 0 z tabulky je dělitelné sedmi; toto číslo odpovídá případu $z_1 = z_2 = 0$, tedy případu, kdy obě uvažovaná čísla A, B jsou dělitelná sedmi. Tím je důkaz proveden.

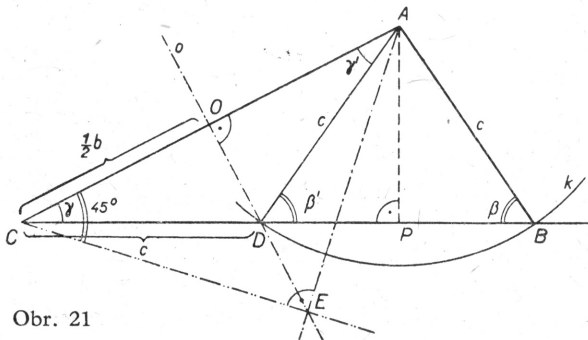
2. Trojúhelník ABC má tieto dve vlastnosti:

- (1) platí, že $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BCA$,
- (2) uhol $\sphericalangle ABC$ je ostrý.

Dokážte, že potom možno trojúhelník ABC rozdeliť priamkou, vedenou vrcholom A , na dva rovnoramenné trojúhelníky, z ktorých aspoň jeden je tupouhlý.

Zostrojte trojúhelník ABC , ktorý má obidve predchádzajúce vlastnosti (1), (2), ak sú dané dĺžky strán $AC = b$, $AB = c$ a dokážte, že úloha má riešenie práve vtedy, keď platí: $c/\sqrt{2} < b < 2c$.

Riešenie (obr. 21). Strany a uhly označíme obvyklým spôsobom. Nech hľadaná priamka (vedená vrcholom A) pretína stranu BC v bode D . Pretože sú oba uhly $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ ostré, leží päta P kolmice spustenej z bodu A na priamku BC medzi bodmi B, C



Obr. 21

a je $AP < c$. Pre kružnicu $k \equiv (A; c)$ je teda bod P vnútorný a bod C vonkajší (je totiž $b > c$, pretože je $\beta > \gamma$). Preto medzi bodmi C, P leží bod D kružnice k .

Trojuholník BDA je rovnoramenný so základňou BD a je $\sphericalangle ADB = \beta$. Tento uhol je vonkajším uhlom trojuholníka ACD , preto

$$\sphericalangle CAD = \beta - \gamma = \gamma. \quad (1)$$

Trojuholník ACD je teda tiež rovnoramenný so základňou AC a je $AD = CD = c$.

Konstrukcia. Zostrojíme pomocný trojuholník ACD z daných úsečiek b, c a pomocou kružnice k ho doplníme na trojuholník ABC .

Diskusia. Vzťah $2c > b$ zaisťuje existenciu pomocného rovnoramenného trojuholníka DAC , ktorého os súmernosti o rozpoľuje v bode O jeho základňu AC . Pretože je $\beta' = \beta < 90^\circ$, je uhol $\sphericalangle ADC$ tupý. Obrátene, ak je v pomocnom trojuholníku DAC uhol $\sphericalangle ADC$ tupý, má úloha riešenie. Vyjadrime túto skutočnosť pomocou dĺžok b, c . Zostrojme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ACE s preponou AC , kde E leží na polpriamke OD . Pretože je $\gamma < 45^\circ$, leží D nutne vo vnútri úsečky

OE dĺžky $\frac{1}{2}b$. Obrátene, každý bod D , ktorý leží vo

vnútri úsečky OE , vedie k tupouhlému trojuholníku DAC . Z Pythagorovej vety použitej na trojuholník CEO , kde

$\sphericalangle COE = 90^\circ$, dostaneme $CE^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{2}b^2$, t. j.

$CE = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Zrejme je $CD < CE$ čiže $c < \frac{b}{\sqrt{2}}$ a teda

$b > c\sqrt{2}$. Obrátene, ak platí tento vzťah, padne bod D

do vnútra úsečky OE a trojuholník DAC má $\sphericalangle D$ tupý. Tým je tvrdenie o riešiteľnosti úlohy dokázané.

3. Sestrojte graf funkce

$$y = \frac{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} - \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}{\sqrt{\frac{p+x}{p-x}} + \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}}, \quad (1)$$

kde p je dané kladné číslo.

Řešení. Vyšetříme nejprve definiční obor funkce (1). Aby zlomky pod odmocninami v (1) měly smysl, musí platit $p - x \neq 0$, $p + x \neq 0$ neboli

$$x \neq p, \quad x \neq -p. \quad (2')$$

Dále musí být zlomky (1) nezáporné; to nastane právě tehdy, když platí $(p - x)(p + x) > 0$ neboli

$$-p < x < p. \quad (2)$$

Položme pro stručnost

$$\frac{p+x}{p-x} = a, \quad (3)$$

takže (1) zní

$$y = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}}. \quad (4)$$

Z požadavku (2) plyne $a > 0$ a $\frac{1}{a} > 0$; proto má vždy smysl i zlomek na pravé straně (4); neboť je vždy

$$\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} > 0.$$

Rozšíříme zlomek ve (4) výrazem

$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0; \quad (5)$$

dostaneme

$$y = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2}{(\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{(a - 1)^2}{(a - 1)(a + 1)};$$

tento vztah označíme (6'). Další úpravou dostaneme

$$y = \frac{a - 1}{a + 1}.$$

Po dosazení ze (3) dostaneme

$$y = \frac{\frac{p+x}{p-x} - 1}{\frac{p+x}{p-x} + 1} = \frac{p+x - (p-x)}{p+x + p-x} = \frac{x}{p}$$

neboli

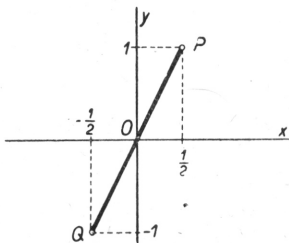
$$y = \frac{x}{p}. \quad (6)$$

Provedené zjednodušení platí za jistých předpokladů.

Především, že platí (5), tj. že $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \neq 0$. Ze vztahu $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} = 0$ plyne $\sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{a}}$ (na obou stranách jsou kladná čísla), tj. $a = \frac{1}{a}$, $a^2 = 1$, $a = 1$ (neboť je $a > 0$). Ze (3) a z rovnosti $a = 1$ dostaneme

$$\frac{p+x}{p-x} = 1,$$

tj. $x = 0$. Tedy $a = 1$ pro $x = 0$; pro $x \neq 0$ je $0 < a \neq 1$ a výrazy $\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}$, $a - \frac{1}{a}$, $a^2 - 1$, které se vyskytují v (6'), jsou různé od nuly, takže platí i (6). Avšak pro $x = 0$ dostaneme z (1), že $y = 0$; k tomuto výsledku však dospějeme i z (6) pro $x = 0$. Vztah (6) poskytuje pro x z intervalu (2) tytéž hodnoty jako (1). Grafem funkce (6) je přímka o směrnici $\frac{1}{p}$ jdoucí počátkem O souřadnic; s omezením (2) pak jako graf funkce dostaneme vnitřek úsečky $P \equiv [p; 1]$, $Q \equiv [-p; -1]$ (viz obr. 22 pro $p = \frac{1}{2}$). Tím je řešení provedeno.



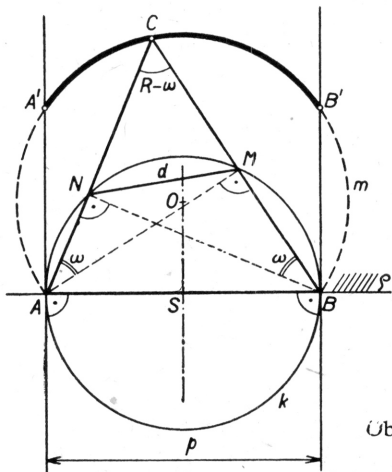
Obr. 22

4. Nad danou úsečkou AB , která má délku c , jsou v jedné z polorovin vyřatých přímkou AB sestrojeny všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC takové, že vzdálenost pat výšek vedených vrcholy A , B je rovna danému číslu d .

Vyšetřte množinu všech vrcholů C uvažovaných trojúhelníků. Proveďte diskusi vzhledem ke kladným číslům c , d .

Řešení (obr. 23). Trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který leží v polorovině ρ , leží nutně (až na stranu AB) uvnitř pásu p rovnoběžek AA' , BB' , kolmých k přímce AB . Je známo, že v ostroúhlém trojúhelníku padnou paty výšek dovnitř jeho stran. Proto paty M , N výšek jdoucích vrcholy A , B trojúhelníku ABC leží uvnitř

pásu p i uvnitř poloroviny ϱ ; tam leží tedy i celá úsečka MN i bod C . Trojúhelníky ABM , ABN jsou pravoúhlé a body M , N tedy leží na Thaletově kružnici $k \equiv \left(S; \frac{1}{2}c\right)$. Úhly $\sphericalangle MAN$, $\sphericalangle MBN$ jsou po řadě částmi ostrých úhlů



Übr. 23

$\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle CBA$ a tudíž ostré; jsou to obvodové úhly v kružnici k nad tětivou MN a oba tedy leží na větším oblouku $\widehat{MN}$ kružnice k . Jsou proto shodné a o jejich velikosti ω platí $\omega < 90^\circ$. Z trojúhelníků ACM , BCN , kde $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^\circ$, plyne, že $\gamma = \sphericalangle BCA = 90^\circ - \omega < 90^\circ$. Bod C tedy leží uvnitř p a uvnitř q na jistém oblouku m , z jehož bodů je úsečku AB vidět pod ostrým úhlem $90^\circ - \omega$. Zvolme body A' , B' přímkou AA' , BB' právě na oblouku m ; bod C tedy leží uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$.

Je-li obráceně C zvolený bod uvnitř oblouku $\widehat{A'B'}$, je $\sphericalangle BCA = 90^\circ - \omega$ a polopřímky AC , BC leží uvnitř pravých úhlů $\sphericalangle BAA'$, $\sphericalangle ABB'$; proto obě tyto polopřímky protnou k uvnitř ϱ v bodech M , N a je $AM \perp BC$, $BN \perp AC$. Proto i trojúhelníky ACM , BCN mají při M , N pravé úhly a platí $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBN = \omega$. Je tedy tětivu MN kružnice k z bodů A , B vidět pod konstantním ostrým úhlem ω , tj. všechny úsečky MN mají konstantní délku d . Takto sestrojený trojúhelník ABC splňuje proto požadavky textu úlohy. Tím je obrácení provedeno.

Hledanou množinou všech bodů C je tedy vnitřek popsaného oblouku $\widehat{A'B'}$.

Pokud jde o existenci trojúhelníků ABC , je zřejmě nutné a stačí, aby tětiva MN délky d padla celá dovnitř ϱ ; pak jsou však úhly $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle BAN$ ostré, jejich součet menší než 180° a podle Eukleidova axiómu mají polopřímky AN , BM společný bod C uvnitř ϱ a uvnitř pásu p . Tětiva MN kružnice k tedy není průměrem, tj. úloha má řešení, právě když je $d < c$.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Je dána rovnice s neznámou x :

$$\frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} = \frac{1}{6}; \quad (1)$$

přitom reálná čísla a , b , c (vesměs různá od nuly) splňují podmínku $a + b + c = 0$.

a) Dokažte, že rovnice má kořen a vyjádřete ho pomocí čísel a , b , c .

b) Dokažte, že kořen rovnice a číslo abc jsou téhož znamení.

Řešení. Protože je $a + b + c = 0$, lze rovnici (1) psát ve tvaru

$$\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} + \frac{x+c}{c} + \frac{1}{6} = 0;$$

po znásobení číslem $6abc \neq 0$ dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 6(bc + ca + ab)x + 3 \cdot 6abc + abc &= 0, \\ 3 \cdot 2(bc + ca + ab)x &= -19abc. \end{aligned} \quad (2)$$

Ze vztahu $a + b + c = 0$ umocněním na druhou dostáváme

$$2(bc + ca + ab) = -(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

a po dosazení do levé strany (2) máme

$$3(a^2 + b^2 + c^2)x = 19abc, \quad (4)$$

kde $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, neboť čísla a, b, c jsou vesměs různá od nuly; rovněž $abc \neq 0$.

Ze (4) dostaneme

$$x = \frac{19abc}{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (5)$$

Protože ve jmenovateli posledního zlomku je kladné číslo, mají čísla abc a x stejná znaménka, přičemž je $x \neq 0$.

Proveďme ještě zkoušku dosazením výsledku (5) do (1): Výsledek (5) lze pomocí (3) psát ve tvaru

$$x = \frac{19abc}{-6(bc + ca + ab)}. \quad (6)$$

Protože $b + c = -a$, platí

$$\frac{x+a}{b+c} = \frac{x+a}{-a} = -\frac{x}{a} - 1;$$

po dosazení za x ze vztahu (6) najdeme

$$\frac{x + a}{b + c} = \frac{19bc}{6(bc + cab + ab)} - 1.$$

Podobné výrazy dostaneme i po dosazení za x do obou zlomků na levé straně rovnice (1); hodnota L levé strany rovnice (1) tedy po dosazení ze (6) je

$$L = \frac{19bc + 19ca + 19ab}{6(bc + ca + ab)} - 3$$

neboli je postupně

$$L = \frac{19(bc + ca + ab)}{6(bc + ca + ab)} - 3 = \frac{19}{6} - 3 = \frac{1}{6},$$

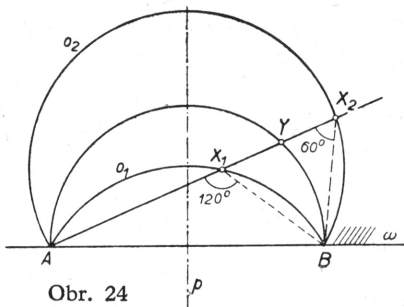
což je pravá strana rovnice (1). Krácení výrazem $bc + ca + ab$ lze provést, neboť je různý od nuly [viz vztah (3)]. Tím je zkouška provedena.

2. Nad danou úsečkou AB jsou sestrojeny v téže poloovině ω vyřáté přímkou AB kruhové oblouky o_1, o_2 , ze kterých je úsečku AB vidět po řadě pod zornými úhly velikostí 120° a 60° . Bodem A je vedena taková přímka, která má s oblouky o_1, o_2 po řadě další společné body X_1, X_2 .

Vyšetřte množinu středů Y všech takových úseček X_1X_2 .

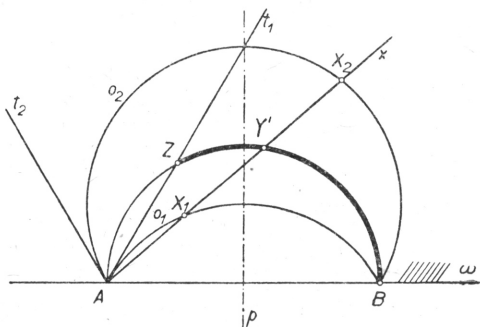
Řešení (obr. 24).

I. Úhel $\sphericalangle AX_1B$ velikosti 120° je vnějším úhlem v trojúhelníku BX_1X_2 , kde $\sphericalangle X_2 = 60^\circ$, takže $\sphericalangle B = 60^\circ$; je



Obr. 24

tedy trojúhelník BX_1X_2 rovnostranný a jeho těžnice BY je kolmá k přímce AX_1X_2 neboli $\sphericalangle AYB = 90^\circ$. Bod Y tedy leží na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem, a to uvnitř poloroviny ω ; všechny body Y tedy leží na polokružnici $\widehat{AB}$ uvnitř poloroviny ω .



Obr. 25.

II. Je třeba ještě zjistit, zda každý vnitřní bod Y' uvažované polokružnice $\widehat{AB}$ je středem jisté úsečky X_1X_2 , kde X_1, X_2 leží po řadě na obloucích o_1, o_2 a přitom přímka AX_1 prochází bodem X_2 . Sestrojíme bodem A tečnu t_1 (t_2) k oblouku o_1 (o_2) — viz obr. 25. Přímka procházející bodem A a ležící uvnitř poloroviny ω a uvnitř poloroviny t_1B (t_2B) protne oblouk o_1 (o_2) ve vnitřním bodě X_1 (X_2). Úsečky X_1X_2 , vyhovující úloze, mohou ležet jen uvnitř společné části polorovin t_1B, t_2B a ω , a to na přímkách x procházejících bodem A . Všechny tyto přímky x zřejmě protínají i polokružnici $\widehat{AB}$; písme-

nem Y' označme libovolný z těchto průsečíků. Průsečík tečny t_1 s polokružnicí $\widehat{AB}$ označíme Z .

Protože úhel $AY'B$ je pravý, je přímka BY' výškou trojúhelníku X_1X_2B . Tento trojúhelník je (viz odst. I) rovnostranný, takže bod Y' je středem úsečky X_1X_2 a patří hledané množině. Z provedené úvahy plyne, že hledanou množinou je pouze vnitřek oblouku $\widehat{ZB}$, který je částí polokružnice $\widehat{AB}$ (a nikoli tato polokružnice celá).

3. Řešte sústavu rovníc

$$px + 2y = 3, \quad (1)$$

$$2x + py = p - 1 \quad (2)$$

s neznámými x, y .

Prevedte skúšku dosadením a prevedte diskusiu vzhľadom na parameter p .

Riešenie. Vynásobme po rade číslami $p, -2$ rovnice (1), (2) a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)x = 3p - 2p + 2$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)x = p + 2. \quad (3)$$

Potom vynásobme rovnice (1), (2) po rade číslami $-2, p$ a sčítajme. Dostaneme $(p^2 - 4)y = p^2 - p - 6$ čiže

$$(p + 2)(p - 2)y = (p + 2)(p - 3). \quad (4)$$

Rozlišujme teraz tieto možnosti:

Prípád [1]. Nech je $(p + 2)(p - 2) \neq 0$, t. j. $-2 \neq p \neq 2$. Potom z (3), (4) dostaneme

$$x = \frac{1}{p - 2}, \quad y = \frac{p - 3}{p - 2}. \quad (5)$$

Skúška. Označme L_1, L_2 ľavé strany rovníc (1), (2)

po dosadení výsledku (5):

$$L_1 = \frac{p}{p-2} + \frac{2(p-3)}{p-2} = \frac{3p-6}{p-2} = \frac{3(p-2)}{p-2} = 3;$$

$$L_2 = \frac{2}{p-2} + \frac{p^2-3p}{p-2} = \frac{(p-2)(p-1)}{p-2} = p-1.$$

Čísla L_1, L_2 sú teda po rade rovné pravým stranám rovníc (1), (2).

Prípád [2]. Nech je $p+2=0$, t. j. $p=-2$. Potom nemožno použiť výsledky (3), (4), pretože tieto vzťahy sú splnené pre každú dvojicu čísel x, y . Sústava (1), (2) má tvar

$$-2x + 2y = 3, \quad 2x - 2y = -3.$$

Ak vynásobíme prvú rovnicu číslom -1 , dostaneme druhú. Možno teda napr. x voľiť ľubovoľne a y vypočítame z rovnice $2x - 2y = -3$. Riešenie teda je:

$$x \text{ je ľubovoľné číslo, } y = x + \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Prípád [3]. Nech $p-2=0$, t. j. $p=2$. Potom vzťah (3) nie je splnený pre žiadne číslo, pretože na ľavej strane (3) je 0, na pravej číslo 4. Daná sústava má tvar

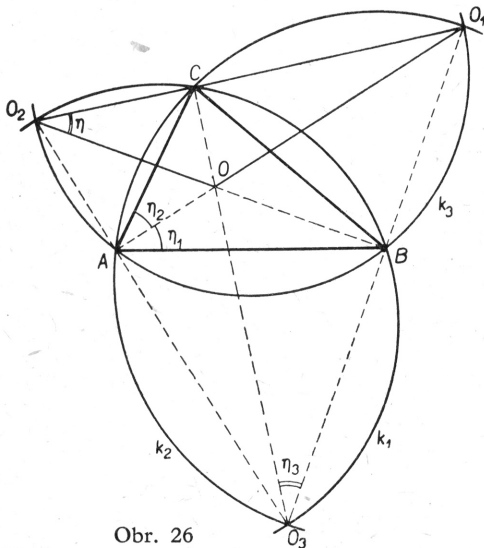
$$2x + 2y = 3, \quad 2x + 2y = 1,$$

čo zrejme nemožno splniť súčasne žiadnymi číslami, pretože $3 \neq 1$. Záver je zrejmý z tabuľky:

Parameter p	rôzny od $-2, 2$	-2	2
Počet riešení x, y danej sústavy	jediné riešenie dané vzťahmi (5)	sústave vyhovuje každá dvojica čísel (6)	sústava nemá riešenie

4. Je daný trojuholník OO_1O_2 .

Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod O bol stredom kružnice trojuholníku ABC vpísanej a aby body O_1, O_2 boli po rade stredmi kružníc vpísaných trojuholníku ABC zvonku ku stranám BC, CA . Prevedte diskusiu.



Obr. 26

Riešenie. Na obr. 26 máme hľadaný trojuholník ABC a stred O kružnice jemu vpísanej ako aj stredy O_1, O_2, O_3 kružníc zvonku vpísaných. Pretože osi vedľajších uhlov sú navzájom kolmé, je vždy os vnútorného uhla trojuholníka ABC kolmá k osi vonkajšieho uhla pri tom istom vrchole tohto trojuholníka. Ak označíme po rade α, β, γ vnútorné uhly hľadaného trojuholníka ABC , potom

o uhloch daného trojuholníka OO_1O_2 platí:

$$\begin{aligned} \sphericalangle O_1OO_2 &= \sphericalangle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ + \\ &+ \frac{1}{2}[180^\circ - (\alpha + \beta)] = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma > 90^\circ, \end{aligned}$$

takže uhly pri vrcholoch O_1 a O_2 sú nutne ostré. Úloha teda môže mať riešenie, ak je

$$\sphericalangle O_1OO_2 > 90^\circ.$$

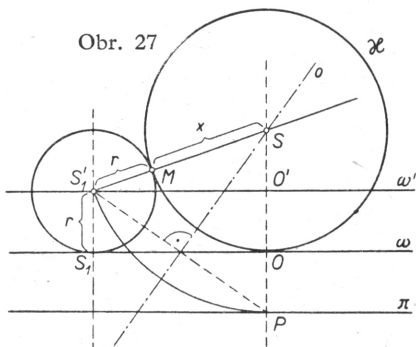
Ďalej je $OO_1 \perp AO_2$, $OO_2 \perp BO_1$, $O_1O_2 \perp OC$, t. j. body A, B, C sú päty výšok v trojuholníku OO_1O_2 , ktorého priesečníkom výšok je bod O_3 . Podľa toho prevedieme konštrukciu: Označme A, B, C po rade päty kolmíc vedených bodmi O_2, O_1, O k priamkam OO_1, OO_2, O_1O_2 a označme O_3 priesečník výšok trojuholníka OO_1O_2 , v ktorom je uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ tupý a teda oba ostatné uhly ostré. Tým je konštrukcia prevedená.

Dokážeme správnosť prevedenej konštrukcie: Použijeme pri tom túto známu vetu: Ak vedieme vnútorným bodom jedného ramena ostrého (tupého) uhla kolmicu k jeho druhému ramenu, padne jej päta do vnútra (na opačnú polpriamku) tohto druhého ramena. Z toho vyplýva, že bod C leží vo vnútri úsečky O_1O_2 (pretože uhly $\sphericalangle O_1, \sphericalangle O_2$ trojuholníka OO_1O_2 sú ostré a úsečka O_1O_2 je spoločná časť polpriamok O_1O_2, O_2O_1); naproti tomu body A, B padnú po rade na predĺženie úsečiek O_1O, O_2O za bod O , t. j. na polpriamky opačné k polpriamkam OO_1 , resp. OO_2 (pretože uhol $\sphericalangle O_1OO_2$ je tupý). Pritom je napr. $\sphericalangle AO_2O_1$ tiež ostrý (druhý ostrý uhol v pravouhlom trojuholníku O_1O_2A), práve tak aj $\sphericalangle BO_1O_2$, takže ich súčet je menší než 180° a podľa Euklidovej axiomy leží bod O_3 v polrovine O_1O_2O (v ktorej ležia body A, B). Ešte musíme dokázať, že priamky

Opíšme nad úsečkami O_2O_3 , O_3O_1 , O_1O_2 ako nad priermi po rade kružnice k_1 , k_2 , k_3 . Podľa Thaletovej vety ležia na k_1 body B , C ; atď. Pri označení obvodových uhlov podľa obrázka 26 platí: $\eta_1 = \eta$ (ležia na k_3), $\eta = \eta_3$ (ležia na k_1), $\eta_3 = \eta_2$ (ležia na k_2). Je teda $\eta_1 = \eta_2$, čo sme mali dokázať.

5. Ve vodorovné rovině je dán rovnostranný trojúhelník $S_1S_2S_3$ o straně délky 2. V každém z jeho vrcholů spočívá na rovině $S_1S_2S_3$ jedna ze tří shodných koulí o poloměru $r \leq 1$.

Řešení (viz označení v obr. 27). Označme O střed a ω rovinu daného rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$; dále označme S'_1, S'_2, S'_3 středy daných koulí s poloměrem r . Jsou-li M_1, M_2, M_3 dotykové body hledané koule $\kappa \equiv (S; x)$ s danými



koulemi, potom platí (za předpokladu, že je $r \leq 1$)

$$r + x = SS'_1 = SS'_2 = SS'_3,$$

a proto roviny souměrnosti úseček $S'_1S'_2$, $S'_2S'_3$, $S'_3S'_1$, a tím i úseček S_1S_2 , S_2S_3 , S_3S_1 procházejí bodem S a zároveň bodem O dotyku plochy kulové κ s rovinou ω ; roviny souměrnosti tedy obsahují přímku $p \equiv SO \perp \omega$. Rovina $\omega' \equiv S'_1S'_2S'_3 \parallel \omega$ protne přímku p v bodě O' a platí $S'_1O' = S_1O = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ (úsek těžnice rovnostranného trojúhelníku $S_1S_2S_3$ od jeho těžiště k jeho vrcholu).

V trojúhelníku SMO je $SM = SO = x$ a v trojúhelníku SS'_1P viz obr. 27, kde $OP = r$, $\pi \parallel \omega$) je $SS'_1 = SP = r + x$, takže osy základů těchto rovnostranných trojúhelníků splývají v jedinou přímku o , která prochází bodem S ležícím na přímce p . Konstrukci tedy provedeme takto: Nad úsečkou $OS_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (S'_1, r)$, která se dotýká přímky S_1O v bodě S_1 a v bodě O sestrojíme přímku $p \perp S_1O$. Od bodu O nanese na přímku p úsečku délky r tak, aby její druhý krajní bod P neležel v polorovině $S_1OS'_1$. Potom osa o úsečky PS'_1 protne přímku p v hledaném středu S koule κ . Protože úhel $\sphericalangle OPS'_1$ je ostrý, jsou přímky o , p vždy kosé a bod S existuje nezávisle na velikosti r . Úloha má zřejmě vždycky řešení (což potvrdí i následující výpočet).

Jestliže přímka o prochází bodem O' , je $r = x$, $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}$ neboli

$$x = r = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \quad (1)$$

Jestliže přímka o neprochází bodem O' , vzniká pravoúhlý trojúhelník SS_1O' (kde $\sphericalangle O' = 90^\circ$); o jeho stranách platí

$$1 < S_1O = O'S_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad SS_1 = x + r,$$

$$SO' = |x - r|,$$

neboť musíme rozeznávat obě možnosti: zda bod S padne dovnitř úsečky PO' nebo na její prodloužení za bod O' . Užitím Pythagorovy věty na tento trojúhelník dostaneme

$$(x + r)^2 - (x - r)^2 = \frac{4}{3}$$

a odtud

$$x = \frac{1}{3r};$$

tento výsledek platí i pro (1). Úvaha byla provedena za předpokladu, že hledaná koule existuje. Obrácením postupu zjistíme, že bod S na polopřímce OO' ve vzdálenosti x od bodu O jakožto střed a číslo $x = \frac{1}{3r}$ (pro $r \leq 1$) jakožto poloměr koule vyhovují naší úloze. Řešení je jediné.

6. V debne boli dopravované tri druhy plechoviek so súčiastkami. Plechovky mali váhy 0,8 kg, 1,5 kg, 2 kg a po rade objemy $1,5 \text{ dm}^3$, 4 dm^3 , 5 dm^3 . Celková váha zásielky (bez váhy debny) bola 3,3 q. Celkový objem plechoviek bol $0,78 \text{ m}^3$. Plechoviek každého druhu bolo aspoň 55 kusov. Z týchto údajov vypočítajte, koľko plechoviek každého druhu bolo v zásielke.

Riešenie. Počet najmenších plechoviek označme x ,

počet stredných plechoviek y , počet najväčších plechoviek z . Z podmienok úlohy dostaneme tieto dve rovnice

$$\begin{aligned} 0,8x + 1,5y + 2z &= 330 \text{ (kg)}, \\ 1,5x + 4y + 5z &= 780 \text{ (dm}^3\text{)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Z oboch rovníc (1) vylúčime z (prvú rovnicu vynásobíme číslom 5, druhú číslom -2 a sčítame). Dostaneme rovnicu

$$x - 0,5y = 90,$$

z ktorej

$$x = 90 + 0,5y. \quad (2)$$

Ak dosadíme z (2) do prvej rovnice (1), vyjde po úprave

$$z = 129 - 0,95y. \quad (3)$$

Čísla x , y , z sú podľa svojho významu prirodzené.

Pretože v (3) musí byť číslo $0,95y = \frac{19}{20}y$ celé, musí byť y deliteľné dvadsiatimi.

Zostavíme tabuľku pre $y = 60, 80, 100, 120, \dots$ (hodnoty $y = 20, 40$ sú neprípustné, pretože $y \geq 55$).

y	60	80	...
x	120	130	...
z	72	53	...

Údaje uvedené v druhom a treťom riadku boli vypočítané z rovníc (2), (3). Z rovnice (3) je zrejmé, že z s rastúcim y klesá. Pretože už pre $y = 80$ je $z = 53 < 55$, je pre každé $y > 80$ tiež $z < 55$.

Úloha má teda jediné riešenie:

$$x_1 = 120, y_1 = 60, z_1 = 72.$$

7. Úlohy II. kola kategórie C

1. V rovine pravouhlých súradníc x, y znázorníte množinu všetkých bodov $[x, y]$, ktorých súradnice vyhovujú nerovnostiam

$$x + |y| \leq 1, \quad (1)$$

$$y + |x| \leq 1. \quad (1')$$

Riešenie. Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1), ako vyplýva z definície absolútnej hodnoty, je buď

$$y \geq 0, \quad y \leq 1 - x \quad (2a)$$

alebo

$$y \leq 0, \quad y \geq x - 1. \quad (2b)$$

Ak je dvojica x, y riešením nerovnosti (1'), je buď

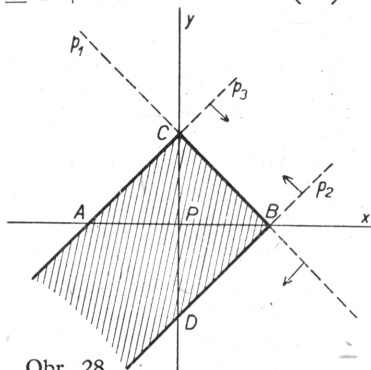
$$x \geq 0, \quad y \leq 1 - x \quad (3a)$$

alebo

$$x \leq 0, \quad y \leq 1 + x. \quad (3b)$$

Zostrojme v rovine pravouhlých súradníc x, y body $P \equiv [0, 0]$, $A \equiv [-1, 0]$, $B \equiv [1, 0]$, $C \equiv [0, 1]$, $D \equiv [0, -1]$ a priamky $p_1 \equiv BC$, $p_2 \equiv BD$, $p_3 \equiv AC$, kde $p_2 \parallel p_3$, $p_1 \perp p_2$, $p_1 \perp p_3$ (obr. 28). Priamka p_1 má rovnicu $y = 1 - x$, priamky p_2, p_3 majú po rade rovnice

$$y = x - 1, \quad y = 1 + x.$$



Obr. 28

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (2a) polroviny $x C$, $p_1 P$, ktorých spoločnou časťou je uhol $\angle CBA$;

b) nerovnosti (2b) polroviny xD, p_2P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle ABD$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1) ležia teda v uhle $\sphericalangle CBD$.

V rovine pravouhlých súradníc x, y určujú

a) nerovnosti (3a) polroviny yB, p_1P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle BCD$;

b) nerovnosti (3b) polroviny yA, p_3P , kterých spoločnou časťou je uhol $\sphericalangle DCA$.

Obrazy $[x, y]$ riešení x, y nerovnosti (1') ležia teda v uhle $\sphericalangle BCA$. Obrazy spoločných riešení daných nerovností vyplnia teda spoločnú časť pravých uhlov $\sphericalangle CBD, \sphericalangle BCA$. Je to tá časť pásu ohraničeného rovnobežkami p_2, p_3 , ktorá padne do polroviny p_1P (pozri vyšrafovanú časť obr. 28 včítane polpriamok CA, BD a úsečky BC).

2. V rovine je dána úsečka AB . V jednej z polorovin vyťatých priamkou AB uvažujme všetky pravouhlé trojuholníky ABC o preponě AB . Označme X patu kolmice vedené bodem B k ose uhlu $\sphericalangle BCA$.

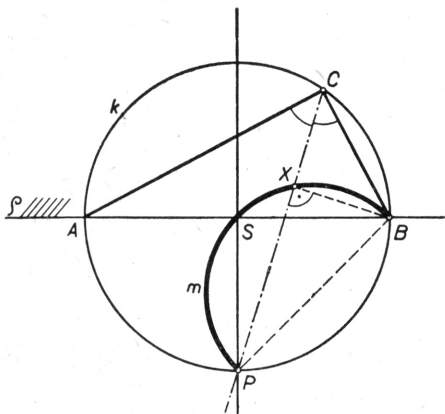
Dokažte, že všetky také osy uhlov prechádzajú pevným bodem a vyšetrite množinu všetkých bodů X .

Riešení. Zvolenou polorovinu s hranicou AB označme ϱ ; bod C leží vnútri ϱ na Thaletovej kružnici $k \equiv \left(S; \frac{c}{2}\right)$, opísané nad úsečkou AB ako priemerom (obr. 29).

Osa úsečky AB protne kružnici k v polorovine opačnej k ϱ v bode P . Menšie oblouky AP, BP jsou čtvrtkružnice; proto platí pro příslušné obvodové úhly

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP.$$

Je tedy polopřímka CP osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Pata X kolmice spuštěné z bodu B na polopřímku CP náleží polokružnici m sestrojené nad průměrem BP a obsahující střed S úsečky AB (nebo kružnice k).



Obr. 29

Označme m' kružnici sestrojenou nad průměrem BP . Je-li Y libovolný bod vnitřku oblouku m , označme dále C průsečík kružnice k s přímkou PY . Bod C náleží polo-rovině ρ ; protože tečna kružnice m' v bodě P prochází bodem A , přímka PY , která je sečnou kružnice m' , protne úsečku AB , a tudíž i kružnici k v bodě C polo-roviny ρ . Sestrojíme-li k trojúhelníku ABC patu X kolmice spuštěné z vrcholu B na osu úhlu $\sphericalangle ACB$, zjistíme, že je $X \equiv Y$.

Závěr. Hledanou množinou všech pat X je vnitřek oblouku m .

3. Je dán výraz

$$V = \frac{(x-a)^2}{ab-bc+ca-a^2} + \frac{(x-b)^2}{bc-ca+ab-b^2} + \frac{(x-c)^2}{ca-ab+bc-c^2}, \quad (1)$$

kde a, b, c jsou daná reálná čísla.

Dokažte, že výraz V , pokud má smysl, nabývá pro všechna reálná čísla x konstantní hodnoty. Zároveň udejte podmínky pro čísla a, b, c , kdy výraz V nemá smysl.

Řešení. Je

$$\begin{aligned} ab-bc+ca-a^2 &= b(a-c) - a(a-c) = \\ &= (b-a)(a-c) = (a-b)(c-a); \end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned} bc-ca+ab-b^2 &= (b-c)(a-b); \\ ca-ab+bc-c^2 &= (c-a)(b-c). \end{aligned}$$

Výraz V ztrácí smysl, je-li některý jmenovatel v (1) roven nule, tj. platí-li některá z rovností:

$$a-b=0; \quad b-c=0, \quad c-a=0$$

neboli

$$a=b, \quad b=c, \quad c=a. \quad (2)$$

Upravíme výraz V za předpokladu, že neplatí žádný ze vztahů (2); společný jmenovatel n zlomků v (1) vzhledem k provedeným rozkladům je

$$n = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{n} [(x^2 - 2ax + a^2)(b - c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c - a) + \\ &+ (x^2 - 2cx + c^2)(a - b)] = \frac{1}{n} \{x^2 [b - c + c - a + a - b] - \\ &- 2x [a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)] + \\ &+ a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\} = \\ &= \frac{1}{n} [a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)]. \end{aligned}$$

Ale

$$\begin{aligned} n &= -a^2(b - c) + ab(b - c) - bc(b - c) + ca(b - c) = \\ &= -a^2(b - c) - b^2(c - a) - c^2(a - b); \end{aligned}$$

je tedy

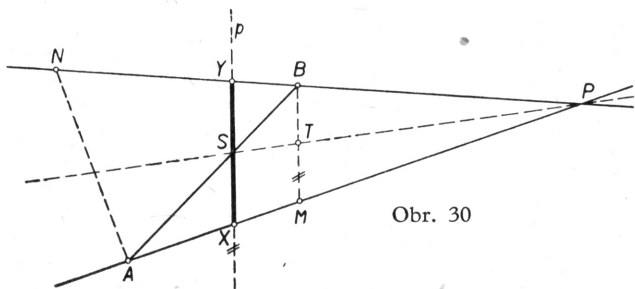
$$V = -n : n = -1.$$

Závěr. Výraz V má smysl právě tehdy, jestliže žádná dvě z čísel a, b, c si nejsou rovna; v tom případě je $V = -1$.

4. V rovině je dán čtyřúhelník $AMBN$.

Na polopřímkách AM, BN sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bylo $XY \parallel BM$ a aby přímka AB půlila úsečku XY .

Řešení. Jestliže v daném čtyřúhelníku $AMBN$ je $AM \parallel BN$ (rovnoběžník nebo lichoběžník), potom podle známé věty střední příčka, která půlí strany AN, MB , vytíná na úsečce AB bod S ; jím vedeme přímku $p \parallel BM$ a její společné body s polopřímkami AM, BN po řadě označíme X, Y . Dále nechť přímky AM, BN mají společný bod P , který leží buď na prodloužení úsečky AM za bod M (viz obr. 30), nebo na prodloužení úsečky



BN za bod *N* (čtyřúhelník leží v úhlu $\sphericalangle MPB$ trojúhelníku *PMB*). Je-li *XY* hledaná úsečka, jejíž střed *S* padne na přímku *AB*, pak *XMBY* je lichoběžník se základnami *BM*, *XY*. Stejnolehlost o středu *P*, která převádí úsečku *XY* v úsečku *MB*, převádí střed *S* úsečky *XY* ve střed *T* úsečky *MB*. Odtud konstrukce:

Sestrojíme střed T úsečky MB . V úhlu $\angle MPB$ sestrojíme polopřímku PT , která prochází vnitřním bodem S úsečky AB ; bodem S vedeme přímku $p \parallel MB$ a průsečíky přímky p s přímkami AM , BN označíme po řadě X , Y . Potom je XY hledaná úsečka.

Důkaz, že S je středem úsečky XY , vyplývá ze stejno-
lehlosti, která převádí úsečku MB v úsečku XY . Přitom
bod S existuje, neboť polopřímka PT prochází vnitřkem
úhlu $\angle APB$, a protíná tudíž každou jeho příčku, tedy
i úsečku AB v jejím vnitřním bodě S .

Úloha má proto vždy jediné řešení.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Dopravní síť města se skládá ze tří trolejbusových linek. Celková délka trolejového vedení je 13 km. Jednotlivé linky mají po řadě délky 5,7 km, 5,8 km a 6,9 km.

První a druhá linka mají společný úsek délky 1,8 km.
 Druhá a třetí linka mají společný úsek délky 2,3 km.
 Třetí a první linka mají společný úsek délky 2,7 km.

Rozhodněte, zda existuje úsek společný všem třem linkám; jestliže ano, pak vypočítejte jeho délku. Načrtněte, jak asi vypadá plánec tří tratí a vepište do něho délky jednotlivých úseků.

Řešení. (Délky udáváme v kilometrech.) Linky označme číslý 1, 2, 3. Celkovou délku trolejového vedení rozdělíme do tří skupin a vyjádříme ji jako součet délek vedení každé ze skupin. Označíme:

a) d_1, d_2, d_3 délky těch částí tratí č. 1, 2, 3, v nichž probíhají jednoduše (sólově);

b) d_{12}, d_{23}, d_{31} délky těch částí tratí, u nichž probíhají „dvojitě“ (nikoli však trojitě); tak např. d_{12} značí délku společné části tratí č. 1 a č. 2;

c) x délku části společné všem třem linkám.

Celková délka vedení 13 (km) je součtem právě zavedených čísel, tj.

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13. \quad (1)$$

Nyní se pokusíme součty $d_1 + d_2 + d_3, d_{12} + d_{23} + d_{31}$ vyjádřit pomocí údajů uvedených v textu úlohy a pomocí neznámého čísla x .

Platí např. $d_{12} + x = 1,8$, takže je $d_{12} = 1,8 - x$; dostaneme tak celkem

$$d_{12} = 1,8 - x; d_{23} = 2,3 - x; d_{31} = 2,7 - x. \quad (2)$$

Podle textu úlohy a podle významu čísla d_1 platí $d_1 = 5,7 - (d_{12} + d_{31} + x)$; podobně najdeme d_2, d_3 . Máme tak

$$\begin{aligned} d_1 &= 5,7 - (d_{12} + d_{31} + x); d_2 = 5,8 - (d_{12} + d_{23} + x); \\ d_3 &= 6,9 - (d_{31} + d_{23} + x). \end{aligned} \quad (3)$$

Pomocí (2) platí

$$\begin{aligned} d_{12} + d_{23} + d_{31} &= (1,8 + 2,3 + 2,7) - 3x = \\ &= 6,8 - 3x. \end{aligned} \quad (4)$$

Pomocí vztahů (3) a (4) najdeme

$$\begin{aligned} &d_1 + d_2 + d_3 = \\ &= (5,7 + 5,8 + 6,9) - 2(d_{12} + d_{23} + d_{31}) - 3x = \\ &= 18,4 - 2(6,8 - 3x) - 3x = 3x + 4,8. \end{aligned} \quad (5)$$

Nyní výsledky (4), (5) dosadíme do (1); postupně dostaneme

$$\begin{aligned} (3x + 4,8) + (6,8 - 3x) + x &= 13, \\ x + 11,6 &= 13, \\ x &= 1,4. \end{aligned} \quad (6)$$

Tím jsme našli délku společného úseku všem třem tratím.

Provedeme zkoušku: Pomocí (2) a (6) dostaneme

$$d_{12} = 0,4; \quad d_{23} = 0,9; \quad d_{31} = 1,3. \quad (7)$$

Pomocí (7) a (3) najdeme

$$d_1 = 2,6; \quad d_2 = 3,1; \quad d_3 = 3,3. \quad (8)$$

Celkové délky tratí č. 1, č. 2, č. 3 po řadě jsou:

$$\begin{aligned} d_1 + d_{12} + d_{31} + x &= 2,6 + 0,4 + 1,3 + 1,4 = 5,7; \\ d_2 + d_{23} + d_{12} + x &= 3,1 + 0,9 + 0,4 + 1,4 = 5,8; \\ d_3 + d_{31} + d_{23} + x &= 3,3 + 1,3 + 0,9 + 1,4 = 6,9. \end{aligned}$$

Společné úseky mají délky:

a) pro tratě č. 1 a č. 2 je to

$$d_{12} + x = 0,4 + 1,4 = 1,8;$$

b) pro tratě č. 2 a č. 3 je to

$$d_{23} + x = 0,9 + 1,4 = 2,3;$$

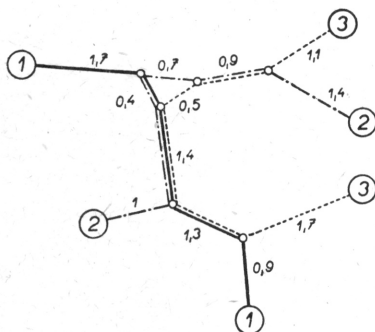
c) pro tratě č. 3 a č. 1 je to

$$d_{31} + x = 1,3 + 1,4 = 2,7.$$

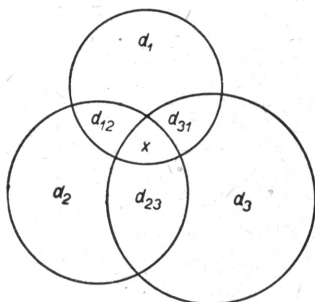
Přitom skutečně platí

$$(d_1 + d_2 + d_3) + (d_{12} + d_{23} + d_{31}) + x = 13,$$

jak se snadno pomocí výsledků (8), (7), (6) přesvědčíme. Připojený plánek je jedna z mnoha možných situací (obr. 31).



Obr. 31



Obr. 32

Poznámka. Zobrazíme-li délky tratí kruhy (obr. 32), pak z obrázku snadno dospějeme k rovnici (1), jakož i ke vztahům (2), (3).

2. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a vně této kružnice je dán bod A , z něhož je ke kružnici k sestrojena tečna AT s dotykovým bodem T .

Uvnitř úsečky AT sestrojte takový bod X , aby platilo $AX = XY$, přičemž Y je průsečík úsečky SX s kružnicí k .

Řešení (obr. 33). Je-li Y bod, který je řešením úlohy, je trojúhelník AYX rovnoramenný s rameny $AX = XY$.

3. Rozhodnite, ktoré z oboch čísel

$$a = 639^9, b = 638^9 + 638^8$$

je väčšie. Svoje rozhodnutie odôvodnite.

Riešenie. Máme porovnať čísla

$$a = 639^9, b = 638^9 + 638^8. \quad (1)$$

Pokúsime sa napísať číslo a v tvare súčtu dvoch mocnín, ktoré sa dajú porovnať s oboma číslami vyskytujúcimi sa vo vyjadrení čísla b . Platí

$$a = 639 \cdot 639^8 = (638 + 1) \cdot 639^8 = 638 \cdot 639^8 + 639^8. \quad (2)$$

Je známe, že mocnina s väčším kladným mocnencom je väčšia; je preto $639^8 > 638^8$. Ak teda v súčte na pravej strane (2) nahradíme obe mocniny 639^8 mocninami 638^8 , dostaneme číslo menšie než a . Tak postupne dostaneme

$$a > 638 \cdot 638^8 + 638^8 = 638^9 + 638^8 = b.$$

Je teda $a > b$, čím je úloha vyriešená.

Poznámka. Platnosť vzťahu $639^8 > 638^8$ medzi kladnými číslami overíme napr. tak, keď dokážeme, že zlomok $\frac{639^8}{638^8}$ je väčší než jedna.

Platí:

$$\frac{639^8}{638^8} = \left(\frac{639}{638}\right)^8 = \left(\frac{638 + 1}{638}\right)^8 = \left(1 + \frac{1}{638}\right)^8.$$

Číslo v zátvorke je väčšie než jedna. No, súčin dvoch čísel $(1 + m)(1 + n)$, kde m, n sú kladné čísla, sa rovná číslu $(1 + m + n + mn)$, ktoré je väčšie než jedna. Preto aj ôsma mocnina čísla väčšieho než 1 je väčšia než 1. Tým je dôkaz prevedený.

K dôkazu možno však použiť aj vzorec pre rozdiel druhých mocnín: Položme $x = 639$, $y = 638$. Máme

dokázať, že je $x^8 - y^8 > 0$. Platí:

$$\begin{aligned} r &= x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ &= [(x^2)^2 - (y^2)^2] \cdot (x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \cdot \\ &\cdot (x^4 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

Všetky 4 činitele posledného súčinu sú kladné čísla, preto je $r > 0$, čo sme mali dokázať.

4. Druhú mocninu prirodzeného čísla N delíme číslom 12. Zistite, aký zvyšok (t. j. niektoré z celých čísel 0, 1, 2, ..., 11) môže pri tomto delení vyjsť. Sú len štyri možnosti.

(Pokyn: Každé prirodzené číslo N možno písať v tvare $N = 12k + z$, kde k je celé nezáporné číslo a o celom čísle z platí $0 \leq z < 12$.)

Riešenie. Ku každému prirodzenému číslu N možno nájsť jediná dvojicu nezáporných celých čísel k, z , kde

$$0 \leq z < 12,$$

takých, že platí $N = 12k + z$ (nájdú sa napr. delením čísla N číslom 12). Je teda

$$\begin{aligned} N^2 &= (12k + z)^2 = 144k^2 + 24kz + z^2 = 12(12k^2 + \\ &\quad + 2kz) + z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Číslo z^2 možno taktiež jediným spôsobom napísať v tvare $z^2 = 12m + z'$, kde m, z' sú celé nezáporné čísla a platí $0 \leq z' < 12$. Po dosadení do (1) teda dostaneme

$$N^2 = 12(12k^2 + 2kz + m) + z'.$$

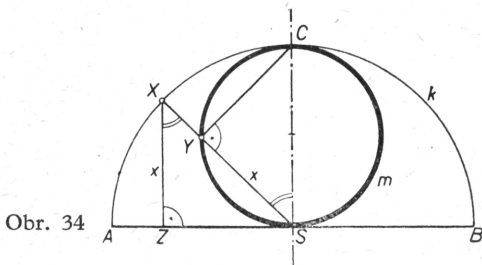
Tento výsledok hovorí, že zvyšok z' pri delení čísla N^2 číslom 12 je ten istý ako zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12. Zvyšky, ktoré dostaneme pri delení čísla z^2 číslom 12 zostavme do tabuľky:

číslo z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
číslo z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
zvyšok pri delení čísla z^2 číslom 12	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Z tabuľky je zrejmé, že zvyšok pri delení čísla N^2 číslom 12 je práve jedno z čísel 0, 1, 4, 9 a žiadne iné. Sú teda skutočne len 4 možnosti, ako sa tvrdí v texte úlohy.

5. Je daná polkružnica k so stredom S a s priemerom AB . Označme x vzdialenosť ľubovoľného bodu X polkružnice k od priamky AB . Na polpriamke SX zostrojme bod Y tak, aby $SY = x$.

Vyšetríte geometrické miesto bodov Y .



Obr. 34

Riešenie (obr. 34). Označme $k \equiv (S; r = 1)$ danú polkružnicu s priemerom AB a ďalej C bod tejto polkružnice, ktorý má rovnaké vzdialenosti od bodov A, B , takže je $SC \perp AB$. Zvoľme niekoľko polôh bodu X a zostrojme príslušné body Y . Pri tom zistíme, že ak je $X \equiv A$, je $Y \equiv S$ a ak je $X \equiv C$, je tiež $Y \equiv C$. Ľahko dospejeme k domnienke, že body Y padnú na kružnicu m zostrojenú nad úsečkou SC ako priemerom.

Najskôr dokážme, že každý bod Y leží na kružnici m :

[1] O bodoch $X \equiv A$, $X \equiv B$ a $X \equiv C$ to zrejme platí.

[2] Nech je X bod polkružnice k rôznej od bodov A , B , C . Potom vznikne pravouhlý trojuholník SXZ , kde Z je päta kolmice vedenej bodom X ku priamke AB , takže je $XZ \parallel SC$. Trojuholníky SXZ , CSY sú však potom zhodné podľa vety *sus*, pretože sa zhodujú v stranách $SX = CS = 1$, $XZ = SY = x$ a v uhloch $\sphericalangle SXZ = \sphericalangle CSY$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami XZ , SC). Je teda $\sphericalangle SYC = \sphericalangle XZS = 90^\circ$ a preto bod Y leží na Thaletovej kružnici m opísanej nad úsečkou SC ako priemerom.

Obrátene, nech je Y bod kružnice m (môžeme zrejme predpokladať, že Y je rôznej od bodov S , C , pre ktoré je vec samozrejma). Označme X priesečník polpriamky SY s polkružnicou k a Z pätu kolmice vedenej bodom X ku priamke AB . Potom sú trojuholníky SCY a XSZ zhodné podľa vety *usu*, pretože je $SC = XS = 1$, $\sphericalangle CSY = \sphericalangle SXZ$ (uhly striedavé medzi rovnobežkami $SC \parallel XZ$), $90^\circ = \sphericalangle CYS = \sphericalangle SZX$ a teda aj $\sphericalangle SCY = \sphericalangle XSZ$. Je teda skutočne $YS = XZ = x$.

Záver. Hľadané geometrické miesto bodov Y je kružnica m , zostrojená nad úsečkou SC ako priemerom, kde C je spoločný bod polkružnice k a osi úsečky AB .

6. Najdte všechna celá čísla p , pro která je výraz

$$V = \frac{1}{2} \left[\frac{p^2 + p + 1}{p^2 - 2p + 1} - \frac{p^3 + 1}{(p - 1)^3} \right] \cdot (p^2 - 2p + 1) + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} \quad (1)$$

roven celému číslu.

Řešení. Protože je $p^2 - 2p + 1 = (p - 1)^2$, dostaneme po dosazení do lomené závorky, že první člen výrazu V je

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left[p^2 + p + 1 - \frac{p^3 + 1}{p - 1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p - 1)(p^2 + p + 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(p^3 - 1) - (p^3 + 1)}{p - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{p - 1} = \frac{-1}{p - 1}. \end{aligned}$$

Pak je

$$\begin{aligned} V &= \frac{-1}{p - 1} + \frac{p - 3}{p + 1} - \frac{p^2 - 3p}{p^2 - 1} = \\ &= \frac{-(p + 1) + (p - 3)(p - 1) - (p^2 - 3p)}{(p - 1)(p + 1)} = \\ &= \frac{-p - 1 + p^2 - 4p + 3 - p^2 + 3p}{(p - 1)(p + 1)} = \\ &= \frac{-2p + 2}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2(p - 1)}{(p - 1)(p + 1)} = \frac{-2}{p + 1}. \quad (2) \end{aligned}$$

Abychom tedy dostali celé číslo, musí o číslu $p + 1$ platit některý ze vztahů:

$p + 1 = -2$; $p + 1 = -1$; $p + 1 = 1$; $p + 1 = 2$,
neboť číslo -2 lze dělit právě čísly: -2 ; -1 ; 1 ; 2 .
Odtud dostáváme tyto možnosti:

$$p = -3; \quad p = -2; \quad p = 0; \quad p = 1.$$

Z těchto možností vyloučíme $p = 1$, neboť je $p - 1 = 0$ a pak některé zlomky ve výrazu (1) mají jmenovatele rovné nule. Hledaná čísla p tedy jsou

$$-3; -2; 0. \quad (3)$$

Provedeme ještě zkoušky dosazením těchto hodnot do (1) a (2), zda skutečně vyhovují požadavkům úlohy:

[1] Pro $p = -3$ dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[\frac{9-3+1}{(-4)^2} - \frac{-27+1}{(-4)^3} \right] (-4)^2 + \frac{-6}{-2} - \frac{9+9}{9-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{7}{16} - \frac{26}{64} \right] \cdot 16 + \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \left[7 - \frac{13}{2} \right] + \\ &+ \frac{6}{2} - \frac{9}{4} = \frac{14-13+12-9}{4} = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

[2] Pro $p = -2$ dostáváme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \left[\frac{4-2+1}{(-3)^2} - \frac{-8+1}{(-3)^3} \right] (-3)^2 + \frac{-5}{-1} - \frac{4+6}{4-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 - \frac{7}{3} \right] + 5 - \frac{10}{3} = \frac{9-7+30-20}{6} = 2. \end{aligned}$$

[3] Pro $p = 0$ dostáváme

$$V = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{-1} \right] + \frac{-3}{1} - \frac{0}{-1} = \frac{1}{2} \cdot 2 - 3 = -2.$$

Tato dosazení souhlasí s dosazeními do výrazu (2). Čísla (3) jsou tedy všechna řešení úlohy.

9. Úlohy II. kola kategórie D

1. Otec aj matka sa zúčastňujú na závodnom sporení. Každý z nich má svoju vkladnú knižku. Pri výhernom zlosovaní vytiahli obe knižky. Otec na svoju knižku vyhral 20% svojho vkladu a matka vyhrala 100% svojho vkladu. Obaja mali potom spolu aj s vkladmi 10 040 Kčs. Ak by však bola výhra na otcovu knižku 100% a na matkinu 20 %, mali by po výhre celkom 9 480 Kčs.

Vypočítajte pôvodný vklad aj výhru každého z rodičov.

Riešenie. Čiastky uvádzame v korunách. Otec mal po výhre celkom x , matka $10\,040 - x$. Pôvodný otcov vklad bol $\frac{100x}{120} = \frac{5}{6}x$, matkin $\frac{10\,040 - x}{2}$. Ak by situácia, pokiaľ sa jedná o percento výhry, bola opačná, bol by otcov vklad po výhre $\frac{5x}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3}x$ a matkin $\frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{120}{100} = \frac{10\,040 - x}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5}(10\,040 - x)$. Súčet týchto čiastok by bol

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}(10\,040 - x) = 9\,480.$$

Ak poslednú rovnicu vynásobíme číslom 15, postupne dostaneme

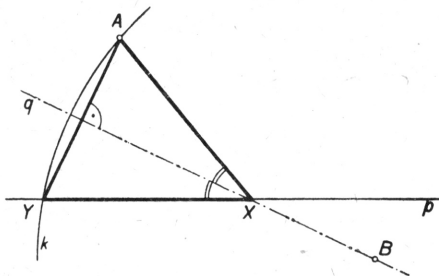
$$25x + 9(10\,040 - x) = 9\,480 \cdot 15, \\ x = 3\,240.$$

Ďalej je $10\,040 - 3\,240 = 6\,800$. Po výhre má otec celkom 3 240, matka 6 800. Pôvodne mal otec $\frac{3\,240 \cdot 5}{9} = 1\,800$ a matka $6\,800 \cdot \frac{1}{2} = 3\,400$. Výhry teda sú 540 a 3 400.

Odpoveď. Pôvodný vklad otca bol 2 700 Kčs, matky 3 400 Kčs. Otec vyhral 540 Kčs, matka 3 400 Kčs.

2. V rovine je daná priamka p a dva body A, B ktoré ležia vo vnútri opačných polrovín vyťatých priamkou p .

Na priamke p zostrojte body X, Y tak, aby AXY bol rovnoramenný trojuholník s ramenami XA, XY a aby priamka BX rozpoloovala uhol $\sphericalangle AXY$.



Obr. 35

Riešenie (obr. 35). Zrejme je (podľa podmienky úlohy) priamka BX osou základne AY . Preto platí

$$BA = BY.$$

Bod Y teda zostrojíme ako spoločný bod kružnice $k \equiv (B; BA)$ a priamky p . Kružnica má s priamkou vždy spoločné dva rôzne body Y, Y_1 , pretože priamka p oddeľuje body A, B . Na obr. 35 je jeden z týchto spoločných bodov označený Y .

Bod X zostrojíme ako priesečník osy q úsečky AY s priamkou p . Pretože X leží na osi q , je $AX = XY$ a trojuholník AXY je teda skutočne rovnoramenný so základňou AY . Úloha má vždy dve riešenia.

Poznámka. Na obr. 35 je naznačené len jedno z oboch riešení.

3. Součet $7\,251^5 + 6\,159^7$ je dělitelný číslem 90. Dokažte.

Řešení. I. Nejprve dokážeme pomocnou větu V: Jsou-li a, b dvě přirozená čísla, jejichž dekadický zápis končí ciframi m, n , potom dekadický zápis součinu ab končí touž cifrou jako dekadický zápis součinu mn . Důkaz provedeme takto:

Čísla a, b lze s jediným výsledkem napsat ve tvaru

$$a = 10A + m, \quad b = 10B + n,$$

kde A, B jsou celá nezáporná čísla a m, n jsou některá z čísel $0, 1, 2, \dots, 9$. Je tedy $ab = (10A + m)(10B + n) = 10(10AB + An + Bm) + mn$. V tomto výsledku je první člen dělitelný deseti, a proto neovlivňuje jednotky dekadického zápisu čísla ab ; čísla ab, mn mají tedy v dekadických zápisech na místech jednotek tytéž cifry. Tím je důkaz proveden.

II. Máme dokázat, že číslo

$$n = 7\,251^5 + 6\,159^7 \tag{1}$$

je dělitelné číslem 90. Je $90 = 9 \cdot 10$, kde 9, 10 jsou nesoudělná přirozená čísla; číslo n je dělitelné devadesáti, jestliže je dělitelné čísly 10 a 9.

Opakováním užitím věty V dostáváme, že dekadický zápis čísla $7\,251^5$ končí cifrou 1. Z téže věty plyne, že mocniny první, druhá, třetí atd. až sedmá čísla $6\,159$ končí po řadě ciframi 9, 1, 9, ..., 9; stačí totiž uvažovat čísla $9^1 = 9, 9^2 = 81, 9^3 = 81 \cdot 9, \dots; 9^7 = (\dots 1) \cdot 9 = (\dots 9)$ (sudé mocniny končí jedničkou, liché devít-

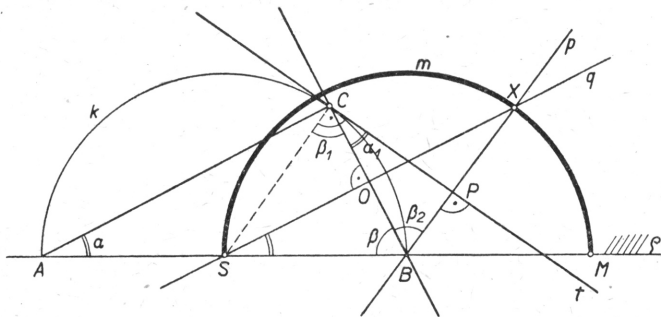
kou). Proto číslo n má na místě jednotek cifru jako součet $1 + 9 = 10$, tedy nulu; je proto n dělitelné číslem 10.

Každé z čísel 7 251, 6 159 je dělitelné třemi; proto mocniny těchto čísel od druhé počínajíc jsou dělitelné devíti a tím i jejich součet. Např. platí $7\,251^5 = (3 \cdot 2\,417)^5 = 3^5 \cdot 2\,417^5$, $\frac{3^5 \cdot 2\,417^5}{3^2} = 3^3 \cdot 2\,417^5$.

Tím je důkaz proveden.

4. Je dána polokružnice o průměru AB a středu S . Na polokružnici zvolme bod C různý od bodů A , B a sestrojme v něm k polokružnici tečnu t . Bodem B vedme kolmici p k přímce t a bodem S kolmici q k přímce BC . Označme X průsečík přímek p , q .

Vyšetřete množinu všech bodů X , jestliže bod C probíhá danou polokružnicí.



Obr. 36

Řešení (viz označení z obr. 36). Označme ϱ polovinu (s hranicí AB), ve které leží daná polokružnice k . Podle textu úlohy je $p \perp t$, $q \perp BC$; paty těchto kolmic

označme po řadě P, O, O středu S polokružnice k platí

$$SA = SB = SC = r. \quad (1)$$

Označme α, β úhly při vrcholech A, B pravoúhlého trojúhelníka ABC (bod C leží totiž na Thaletově kružnici opsané nad úsečkou AB jako průměrem). Proto o úhlech vyznačených v obr. 36 platí

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(ostré úhly v pravoúhlém trojúhelníku ABC),

$$\beta_1 = \beta$$

(trojúhelník SBC podle (1) je rovnoramenný se základnou BC),

$$\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ, \quad \text{tj.} \quad \alpha_1 = \alpha \text{ (je } SC \perp t),$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ, \quad \text{tj.} \quad \beta_2 = \beta$$

(součet ostrých úhlů v trojúhelníku BCP , kde $\sphericalangle P = 90^\circ$). Přímka BC tedy pólí úhel $\sphericalangle SBX$, přičemž je $BC \perp q$; je tedy BSX rovnoramenný trojúhelník s rameny BS, BX a vzhledem k (1) platí $r = BS = BX$. Je tedy $\sphericalangle SBX$ dutý a bod X padne dovnitř poloroviny ϱ na polokružnici m , která má střed B a průměr SM . Trojúhelníky SBC, BSX mají kolmé základny BC, SX , které se navzájem pólí; proto je $SBXC$ rovnostranný rovnoběžník (čtverec nebo kosočtverec) a polokružnice k, m vzniknou jedna z druhé posunutím o délku SB ve směru SB (nebo opačném).

Obráceně, je-li X bod uvnitř oblouku SM (polokružnice m), sestrojíme rovnostranný rovnoběžník $SBXC$; je $SC = SB$, tj. bod C padne dovnitř oblouku AB (polokružnice k) a najdeme-li k bodu C příslušné přímky p, q , je jejich průsečíkem zvolený bod X . Odtud závěr:

Množinou všech bodů X jsou body polokružnice

$m \equiv (B; \frac{1}{2}AB)$ ležící v polorovině ϱ , a to bez obou jejích krajních bodů S, M .