

15. ročník matematické olympiády

VI. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967, pp. 140-147.

Terms of use.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404554>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

VI. Úlohy III. kola kategorie A

1. Je dána soustava nerovností

$$y - x \geq |x + 1| - |x - 1|, \quad (1)$$

$$|y - x| - y + x \geq 2.$$

Znáznorněte řešení každé z daných nerovností v rovině a určete všechna řešení úlohy.

Řešení. a) Pro znázornění řešení první nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $x \leq -1$, 2) $-1 \leq x \leq 1$, 3) $x \geq 1$. V případě 1) je $x + 1 \leq 0$, $x - 1 \leq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq -x - 1 + x - 1$ neboli

$$y \geq x - 2. \quad (x \leq -1) \quad (2)$$

V případě 2) je $x + 1 \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq x + 1 + x - 1$ neboli

$$y \geq 3x. \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (3)$$

V případě 3) je $x - 1 \geq 0$, $x + 1 \geq 0$ a první nerovnost (1) zní $y - x \geq x + 1 - x + 1$ neboli

$$y \geq x + 2. \quad (x \geq 1) \quad (4)$$

b) Pro znázornění řešení druhé nerovnosti (1) rozlišíme případy 1) $y \geq x$, 2) $y \leq x$. V případě 1) zní druhá nerovnost $y - x - y + x \geq 2$ neboli

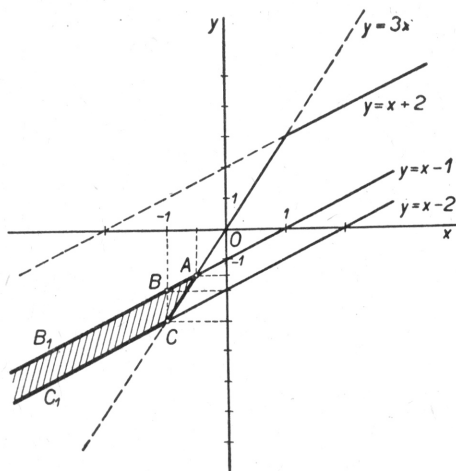
$$0 \geq 2.$$

Druhá nerovnost není tedy splněna pro žádnou dvojici x, y , pro niž platí $y \geq x$.

V případě 2) zní druhá nerovnost $-y + x - y + x \geq 2$ neboli (po krácení)

$$y \leq x - 1. \quad (5)$$

Grafické znázornění je na obr. 66.



Obr. 66.

Řešení soustavy jsou dána nerovnostmi:

$$(I) \quad x \leq -1, \quad x - 2 \leq y \leq x - 1, \quad [(2) \text{ a } (5)]$$

$$(II) \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \quad 3x \leq y \leq x - 1. \quad [(3) \text{ a } (5)]$$

(4) a (5) nedávají řešení (jsou ve sporu). Graf je část roviny skládající se z části pásu omezeného polopřímkami BB_1 , CC_1 a úsečkou BC (řešení I) a z trojúhelníka ABC (řešení II). Body A , B , C mají souřadnice

$$A = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right], \quad B = [-1, -2], \quad C = [-1, -3].$$

2. V rovině je daných n kružnic, z kterých každé dvě sa pretínajú práve v dvoch bodoch a žiadnym bodom neprechádzajú.

zajú tri z týchto kružníc. Určite celkový počet častí, na ktoré delí sústava kružníc rovinu. (Např. tri kružnice uvedených vlastností delia rovinu na osem častí.)

Riešenie. Počet častí, na ktoré delí rovinu n kružníc uvedených vlastností, označíme a_n . Pridajme k týmto n kružniciam ďalšiu kružnicu k tak, aby sústava $n + 1$ kružníc mala požadované vlastnosti. Kružnica k pretína každú z n pôvodných kružníc v 2 bodoch. Celkom na k vznikne $2n$ bodov, ktoré ohraničujú $2n$ jej oblúkov. Ku každému z týchto oblúkov patrí jedna z a_n častí roviny, ktorá ním bola rozdelená na 2 časti. To znamená, že kružnica k zapríčinila vznik $2n$ ďalších častí roviny. Je teda

$$a_{n+1} = a_n + 2n. \quad (1)$$

Zo vzťahu (1) odvodíme vzorec pre a_n .

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1), \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 2(n-2), \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + 2(n-3), \\ &\dots\dots\dots \\ a_2 &= a_1 + 2 \cdot 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Sčítaním všetkých rovností (2) dostaneme

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k. \quad (3)$$

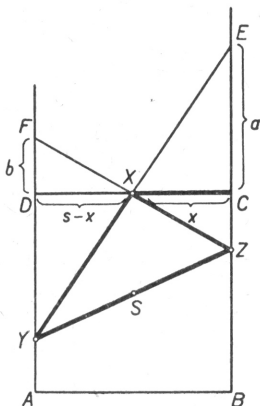
Platí $\sum_{k=1}^{n-1} 2k = \frac{1}{2} (2 + 2n - 2) \cdot (n - 1) = n(n - 1)$. Keďže $a_1 = 2$ (vnútro a vonkajšok kružnice), je

$$a_n = n(n - 1) + 2 = n^2 - n + 2. \quad (4)$$

Správnosť vzorca (4) dokážeme teraz pomocou vzťahu (1) *matematickou indukciou*: Pre $n = 1$ dá vzorec (4) skutočne $a_1 = 2$. Nech platí (4), potom $a_{n+1} = a_n + 2n = n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$.

3. Je daný štvorec $ABCD$ so stredom S a stranou $s = AB = 1$. Ďalej sú dané dva body E, F ležiace v uvedenom poradí na priamkach BC, AD vo vnútri polroviny opačnej k CDA .

Určite na základe výpočtu všetky také trojuholníky XYZ , že vrcholy X, Y, Z ležia v uvedenom poradí na úsečkách CD, AD, BC a priamky XY, YZ, ZX prechádzajú v uvedenom poradí bodmi E, S, F . (Poznámka. Výpočtom určujte napr. dĺžku CX .)



Obr. 67.

Riešenie (obr. 67). Označme s dĺžku strany štvorca, a, b dĺžky CE, DF a x dĺžku CX . Trojuholníky CEX, DYX a trojuholníky DFX, CZX sú rovnoběžné podľa stredu X .

Z toho vyplýva

$$CZ = \frac{x}{s-x} b, \quad DY = \frac{s-x}{x} a. \quad (1)$$

Dĺžka strednej pričky lichobežníka (obdĺžnika) $DYZC$ je

vzdialenosť stredu S od priamky CD , t. j. rovná sa $\frac{1}{2}s$. Preto platí $CZ + DY = s$, čiže podľa vzťahu (1)

$$\frac{x}{s-x} b + \frac{s-x}{x} a = s. \quad (2)$$

Po úprave vzťahu (2) dostaneme pre x rovnicu 2. stupňa

$$(a + b + s)x^2 - (2a + s)sx + as^2 = 0. \quad (3)$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = (s^2 - 4ab)s^2. \quad (4)$$

Ak je $D \geq 0$, má rovnica (3) dva (rôzne alebo splývajúce) korene

$$x = \frac{(2a + s)s \pm \sqrt{D}}{2(a + b + s)}. \quad (5)$$

Každý z koreňov (5) je kladný, pretože $(2a + s)s \geq \sqrt{D}$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s < \sqrt{D}$, dostali by sme po umocnení $a + s < -b$, čo je spor. Oba korene (5) sú taktiež menšie alebo rovné s , pretože $(2a + s)s \pm \sqrt{D} \leq 2(a + b + s)s$. Ak by totiž bolo $(2a + s)s + \sqrt{D} > 2(a + b + s)s$, dostali by sme po úprave a umocnení $D > (s + 2b)^2 s^2$ čiže $-a > s + b$, čo je spor. Podmienkou riešiteľnosti úlohy je teda

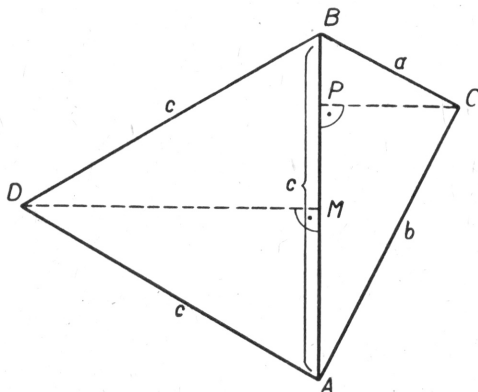
$$D \geq 0.$$

Zostrojenie sa prevedie konštrukciou koreňov (5), kde D je dané vzorcom (4). Pre $D = 0$ má úloha jediné riešenie, pre $D > 0$ dve riešenia.

4. V priestore jsou umístěny dva trojúhelníky ABC a ABD se společnou stranou délky c . Trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB , trojúhelník ABD je rovnostranný, roviny ABC , ABD mají odchylku φ .

a) Vyjádřete vzdálenost bodů C, D pomocí délek stran obou trojúhelníků a čísla φ ; určete tuto vzdálenost konstrukcí.

b) Najděte takovou odchylku φ , aby čtyřstěn $ABCD$ měl čtyři shodné hrany.



Obr. 68.

Řešení (obr. 68). a) Označme délky stran trojúhelníka ABC obvyklým způsobem; označme M střed úsečky AB , P patu kolmice spuštěné z bodu C na přímku AB . Pak platí

$$DM = \frac{c}{2} \sqrt{3}, \quad CP = \frac{ab}{c} \quad (1)$$

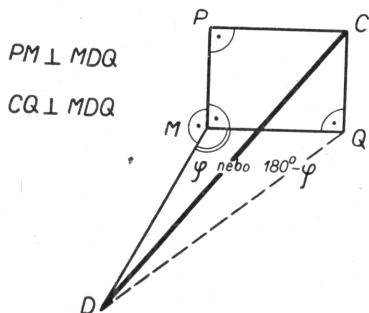
a dále

$$PM = |BM - BP| = \left| \frac{c}{2} - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (2)$$

Situaci v prostoru ukazuje obr. 69. $CPMQ$ je obdélník;

proto platí podle (1), (2)

$$MQ = CP = \frac{ab}{c}, \quad CQ = PM = \left| \frac{c}{2} - \frac{a^2}{c} \right|. \quad (3)$$



Obr. 69.

Podle kosinové věty je

$$DQ^2 = DM^2 + MQ^2 \pm 2DM \cdot MQ \cdot \cos \varphi$$

neboli podle (1), (3)

$$DQ^2 = \frac{3c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab\sqrt{3} \cdot \cos \varphi. \quad (4)$$

Podle Pythagorovy věty (v $\triangle DCQ$) platí

$$CD^2 = DQ^2 + CQ^2$$

neboli podle (3), (4)

$$CD^2 = \frac{3}{4}c^2 + \frac{a^2b^2}{c^2} \pm ab\sqrt{3} \cdot \cos \varphi + \frac{c^2}{4} + \frac{a^4}{c^2} - a^2,$$

po úpravě

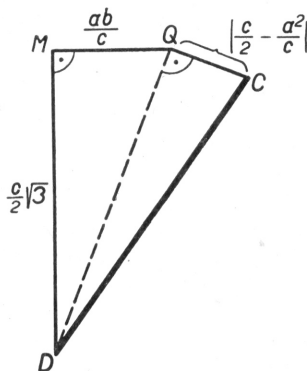
$$CD^2 = c^2 + \frac{a^2}{c^2} \underbrace{(a^2 + b^2)}_{c^2} \pm bc \sqrt{3} \cos \varphi - a^2,$$

tj.

$$CD = \sqrt{c^2 \pm ab \sqrt{3} \cos \varphi}, \quad (5)$$

což je výsledný vzorec.

Konstrukce: Sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník DMQ a pak sestrojíme (ve skutečné velikosti) pravoúhlý trojúhelník CDQ ; provedení ukazuje obr. 70.



Obr. 70.

b) Má-li čtyřstěn $ABCD$ čtyři shodné hrany, je $CD = c$, neboť $BC = a < c$, $AC = b < c$. Ze vzorce (5) pak plyne

$$c^2 = c^2 \pm ab \sqrt{3} \cdot \cos \varphi,$$

tj. $\cos \varphi = 0^\circ$, takže $\varphi = 90^\circ$.