

17. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); František Zítek (editor): 17. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1967-1968. 10. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1969. pp. 120–133.

Terms of use:

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404577>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Necht' $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n > 2$) jsou reálná čísla, z nichž nejvýše jedno je rovno nule. Řešte v reálném oboru soustavu

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ x_2 x_3 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1} x_n &= a_{n-1}, \\ x_n x_1 &\geq a_n. \end{aligned} \quad [8 \text{ bodů}]$$

ŘEŠENÍ. A. Zabývejme se řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ x_2 x_3 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_l x_{l+1} &= a_l, \end{aligned} \quad (1)$$

kde $a_i \neq 0$ pro $1, 2, \dots, l$; $l \geq 1$.

Na pravých stranách těchto rovnic jsou čísla různá od nuly, a proto musí být $x_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, l+1$. Chceme-li ze soustavy (1) vypočítat x_i , $i = 2, 3, \dots, l+1$, je nutno rozlišit zda i je číslo sudé nebo liché.

1. Necht' i je číslo sudé. Pro $i = 2$ dostáváme z první rovnice

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}.$$

Necht' $i = 2k$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $2 < 2k \leq l+1$. Vezmeme prvních $2k-1$ rovnic soustavy (1) a přepíšme je následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a_1, \\ a_2 &= x_2 x_3, \\ x_3 x_4 &= a_3, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{2k-2} &= x_{2k-2} x_{2k-1}, \\ x_{2k-1} x_{2k} &= a_{2k-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Rovnice (2) spolu znásobme. Dostáváme

$$(x_1 x_2 \dots x_{2k})(a_2 a_4 \dots a_{2k-2}) = (x_2 x_3 \dots x_{2k-1})(a_1 a_3 \dots a_{2k-1}).$$

Po úpravě

$$(x_2 x_3 \dots x_{2k-1})[x_1 x_{2k}(a_2 a_4 \dots a_{2k-2}) - (a_1 a_3 \dots a_{2k-1})] = 0,$$

odkud již plyne

$$x_{2k} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2k-2} \cdot x_1}. \quad (3)$$

Poznámka. Vztah (3) platí i pro $i = 2$, tj. $k = 1$, klademe-li $a_2 a_4 \dots a_{2k-2} = 1$ pro $k = 1$.

2. Necht $i = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo splňující nerovnosti $3 \leq 2k + 1 \leq l + 1$. Z $2k$ -rovnice soustavy (1) plyne

$$x_{2k+1} = \frac{a_{2k}}{x_{2k}},$$

tj. podle (3)

$$x_{2k+1} = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2k}}{a_1 a_3 \dots a_{2k-1}} x_1. \quad (4)$$

Z tvaru vzorců (3) a (4) je zřejmé, že x_{2k} a x_{2k+1} dané (3) a (4) vyhovují $2k$ -rovnici soustavy (1) pro $2 \leq 2k \leq l$ a libovolné $x_1 \neq 0$; $(2k + 1)$ -rovnici soustavy (1), (kde $3 \leq 2k + 1 \leq l$) splňují x_{2k+1} dané (4) a $x_{2(k+1)}$ určené pomocí (3) pro libovolné $x_1 \neq 0$. První rovnici soustavy (1) splňuje x_2 dané vztahem (3) pro $k = 1$ při libovolném $x_1 \neq 0$.

Soustava (1) má tedy nekonečně mnoho řešení daných vztahy $x_1 = t$ a (3) a (4) pro $x_2, x_3, \dots, x_{l+1}$, kde t je libovolné reálné číslo různé od nuly.

B. Výsledků získaných v odstavci **A.** využijeme pro řešení soustavy dané v úloze. Je třeba rozlišovat několik případů.

1 Necht' $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \neq 0$. Potom řešení z odstavce **A.**, položíme-li $l = n - 1$, musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n. \quad (5)$$

1.1 Je-li n sudé, pak podle (3) má platit

$$\frac{a_1 a_3 \dots a_{n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{n-2}} \geq a_n. \quad (5\alpha)$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5 α) písmenem a . Jestliže $a \geq a_n$, má soustava nekonečně mnoho řešení; v případě, že $a < a_n$, soustava řešení nemá.

1.2 Jestliže je n liché, potom ze vztahů (5) a (4) plyne, že má platit

$$\frac{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}{a_1 a_3 \dots a_{n-2}} \cdot x_1^2 \geq a_n. \quad (5\beta)$$

Označme zlomek na levé straně nerovnosti (5 β) písmenem b . Zřejmě tedy $b \neq 0$.

1.21 Jestliže $b > 0$, potom

$$x_1^2 \geq \frac{a_n}{b}$$

a čísel $x_1 \neq 0$ splňujících tuto nerovnost je nekonečně mnoho a soustava má nekonečně mnoho řešení, přičemž a_n je libovolné reálné číslo.

1.22 Jestliže $b < 0$, potom

$$x_1^2 \leq \frac{a_n}{b}.$$

Vzhledem k tomu, že musí být $x_1 \neq 0$, má soustava řešení, a to nekonečně mnoho, právě když $\frac{a_n}{b} > 0$, tj. $a_n < 0$.

2 Necht' $a_1 = 0$. Potom z prvních dvou rovnic soustavy plyne, že $x_1 = 0$, neboť $a_2 \neq 0$. Lze opět využít výsledků z odstavce **A.**, ovšem nyní jde o soustavu

$$x_2 x_3 = a_2,$$

$$x_3 x_4 = a_3,$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$x_{n-1} x_n = a_{n-1},$$

takže je třeba nejdříve x_i a a_i přechíslovat (snížit indexy o jedničku).

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n,$$

tj.

$$x_n \cdot 0 \geq a_n.$$

Soustava má tedy pro $a_n < 0$ nekonečně mnoho řešení a pro $a_n > 0$ nemá žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_1 = 0$).

3 Necht' $a_i = 0$, kde $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$, přičemž $n > 3$. Potom $x_i = 0$ nebo $x_{i+1} = 0$, což však není možné, neboť $a_{i-1} \neq 0$ a $a_{i+1} \neq 0$. Soustava nemá tedy v tomto případě řešení.

4 Necht' $a_{n-1} = 0$. Potom zřejmě $x_n = 0$ ($x_{n-1} \neq 0$, neboť $a_{n-2} \neq 0$). Řešení opět získáme pomocí výsledků z odstavce **A.**, položíme-li $l = n-2$.

Řešení ovšem musí splňovat podmínku

$$x_n x_1 \geq a_n,$$

tj.

$$0 \cdot x_1 \geq a_n.$$

Jestliže $a_n < 0$, má soustava nekonečně mnoho řešení; pro $a_n > 0$ žádné řešení ($a_n \neq 0$, neboť $a_{n-1} = 0$).

Závěr:

Soustava má nekonečně mnoho řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je sudé číslo, } a \geq a_n \quad [\text{viz 1.1}]$$

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo, } b > 0 \quad [\text{viz 1.21}]$$

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo, } b < 0, a_n < 0 \quad [\text{viz 1.22}]$$

$$a_1 = 0, a_n < 0 \quad [\text{viz 2}]$$

$$a_{n-1} = 0, a_n < 0 \quad [\text{viz 4}].$$

Soustava nemá řešení, právě když nastane jeden z těchto případů:

$$\begin{array}{ll}
 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je sudé číslo, } a < a_n & [\text{viz 1.1}] \\
 a_1 a_2 \dots a_{n-1} \neq 0, n \text{ je liché číslo,} & \\
 \quad b < 0, a_n \geq 0 & [\text{viz 1.22}] \\
 a_1 = 0, a_n > 0 & [\text{viz 2}] \\
 a_i = 0, i \in \{2, 3, \dots, n-2\}, n > 3 & [\text{viz 3}] \\
 a_{n-1} = 0, a_n > 0 & [\text{viz 4}]
 \end{array}$$

2. Je-li n celé číslo, potom číslo

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

je celé. Dokažte a vyšetřete, pro která n je a_n dělitelné třemi. [5 bodů]

ŘEŠENÍ. a) Necht' n je číslo přirozené. Použijeme binomické věty. Potom

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{\sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k - (-1)^k \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot (\sqrt{3})^k \right]}{2\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{2 \left[\binom{n}{1} 2^{n-1} \cdot \sqrt{3} + \binom{n}{3} 2^{n-3} (\sqrt{3})^3 + \binom{n}{5} 2^{n-5} (\sqrt{3})^5 + \dots \right]}{2\sqrt{3}} = \\
 &= \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{3} 2^{n-3} \cdot 3 + \binom{n}{5} \cdot 2^{n-5} \cdot 3^2 + \dots,
 \end{aligned}$$

tj. a_n je celé číslo. Všechny členy této řady s možnou výjimkou prvního jsou dělitelné třemi. Z tohoto důvodu číslo a_n je dělitelné třemi právě tehdy, jestliže je

$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$ dělitelné třemi, tj. když n je dělitelné třemi (neboť 2^{n-1} není dělitelné 3).

b) Pro $n = 0$ platí:

$$a_0 = \frac{1 - 1}{2\sqrt{3}} = 0.$$

Číslo a_0 je tedy celé a dělitelné 3.

c) Je-li n celé záporné číslo, pak užitíme rovnosti

$$2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}};$$

proto

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^{-n} - (2 + \sqrt{3})^{-n}}{2\sqrt{3}} = -a_{-n}. \end{aligned}$$

Číslo $(-n)$ je přirozené, a proto podle a) je číslo $-a_{-n} = a_n$ celé. Z a) dále plyne, že a_n je dělitelné 3, právě když je $-n$, tj. také n , dělitelné třemi.

Závěr: Dokázali jsme, že pro každé celé číslo n je číslo a_n celé a že číslo a_n je dělitelné 3, právě když je n dělitelné 3.

Řešil *Tomáš Mašek*,
žák třídy 2. f SVVŠ, W. Piecka,
Praha 2

3. V rovine sú dané dve zhodné úsečky AB , CD ; priamky AB , CD sú rôznobežné. Vyšetrite množinu všetkých bodov S , ktoré majú túto vlastnosť: súmernosť podľa stredu S prevedie úsečku AB na úsečku súmerne združenú s úsečkou CD podľa vhodnej osi o . [6 bodov]

RIEŠENIE. Označme $A'B'$ úsečku súmerne združenú s úsečkou AB podľa stredu S (obr. 47). Zrejme platí

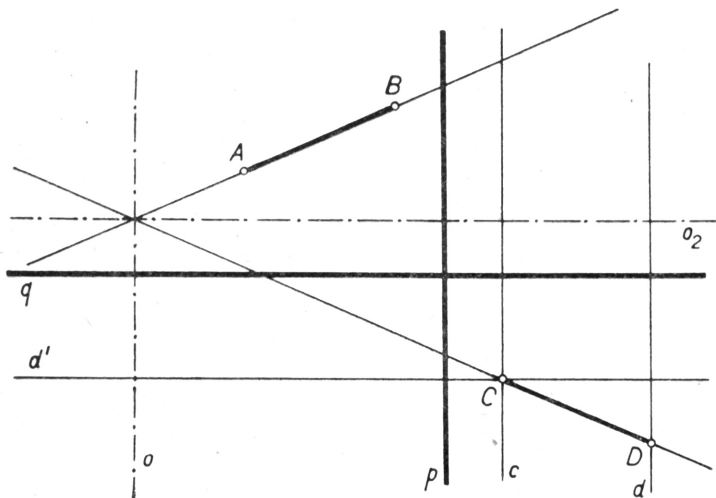
1. Ak je $o \parallel o_2$, potom body súmerne združené s bodmi C, D podľa osi o ležia na priamke c , resp. d , ktoré sú kolmé na os o a teda aj na os o_2 , pričom bod C leží na priamke c , bod D leží na priamke d . Všetky úsečky $A'B'$ sú zrejmé navzájom rovnobežné (pretože $A'B' \parallel AB$) a ich koncové body ležia na priamkach c a d (pretože sú súmerne združené s úsečkou CD podľa osi o). Bod S je stredom úsečky $A'A$. Keďže bod A' prebieha priamku d , prebieha bod S priamku $p \parallel d$, ktorá má rovnakú vzdialenosť od bodu A a priamky d .

126

priamka rovnobežná s osou o_2 prechádzajúca bodom C) a rovnako vzdialenú od bodu A a priamky d' .

2. Teraz dokážeme, že každý bod priamky p i každý bod priamky q patrí k hľadanej množine. Nech S je bod priamky p . Potom bod A' súmerne združený s bodom A podľa stredu S leží na priamke $d \parallel o_1$, bod B' súmerne združený s bodom B podľa stredu S leží na priamke $c \parallel o_1$ a platí $AB \parallel A'B'$. Osou súmernosti úsečiek $A'B'$ a CD je priamka o , ktorá je osou súmernosti úsečky $A'D$, resp. $B'C$.

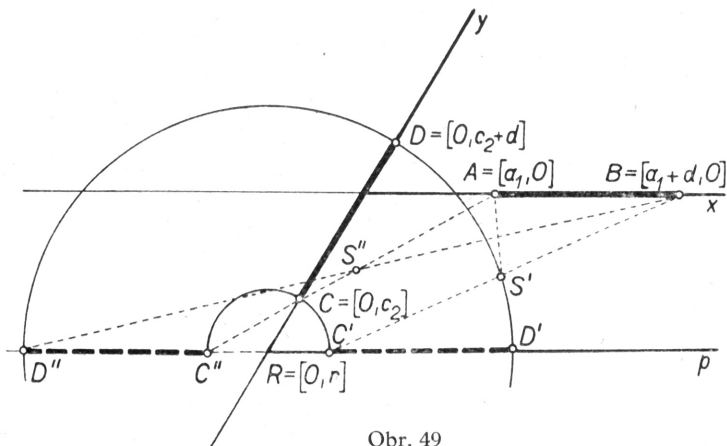
Ak S je bod priamky q , sa analogicky ukáže, že osou súmernosti úsečky $A'B'$ súmerne združenej s úsečkou AB podľa stredu S a úsečky CD je priamka o , ktorá je osou súmernosti úsečky $B'D$, resp. $A'C$.



Obr. 48

Záver: Ukázali sme, že hľadanou množinou bodov S je zjednotenie priamok p a q , ktoré majú tieto vlastnosti: Priamka $p \parallel d$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d , kde priamka d je rovnobežka s osou o_1 vedená bodom D . Priamka $q \parallel d'$ je rovnako vzdialená od bodu A a priamky d' , kde d' je rovnobežka s osou o_2 vedená bodom C (obr. 48).

Riešil *Marián Déněš*,
žiak 9c ZDŠ, Košická, Bratislava



Obr. 49

JINÉ ŘEŠENÍ. V rovině (obr. 49) zvolme rovnoběžkovou soustavu souřadnou tak, aby $A \equiv [a_1; 0]$, $B \equiv [a_1 + d; 0]$, $C \equiv [0; c_2]$; $D \equiv [0, c_2 + d]$, kde $d > 0$. Při středové souměrnosti je obraz přímky rovnoběžný se vzorem, to znamená, že úsečka $C'D'$ souměrně sdružená s úsečkou CD dle nějaké osy o leží na přímce rovnoběžné s AB . Označme tuto přímku p ; nechť má rovnici

$$y = r.$$

Na této přímce p sestrojíme otočením úsečky CD kolem průsečíku $R = p \cap CD$ dvě úsečky $C'D'$ a $C''D''$. Označme S , S' středy souměrnosti úseček AB , $C'D'$ a AB , $C''D''$. Platí

$$\begin{aligned} C' &\equiv [c_2 - r; r], & D' &\equiv [c_2 + d - r; r], \\ C'' &\equiv [r - c_2; r], & D'' &\equiv [r - c_2 - d; r], \end{aligned}$$

čili

$$S' = \frac{A + B + C' + D'}{4} = \left[\frac{a_1 + c_2 + d - r}{2}; \frac{r}{2} \right],$$

$$S'' = \frac{A + B + C'' + D''}{4} = \left[\frac{a_1 + r - c_2}{2}; \frac{r}{2} \right].$$

Protože bod R probíhá celou přímkou CD , probíhá parametr r množinu všech reálných čísel. Označme $\frac{r}{2} = t$.

Potom parametrické vyjádření množiny bodů S' je

$$x = \frac{a_1 + c_2 + d}{2} - t,$$

$$y = t,$$

$$t \in (-\infty, \infty);$$

parametrické vyjádření množiny bodů S'' je

$$x = \frac{a_1 - c_2}{2} + t,$$

$$y = t,$$

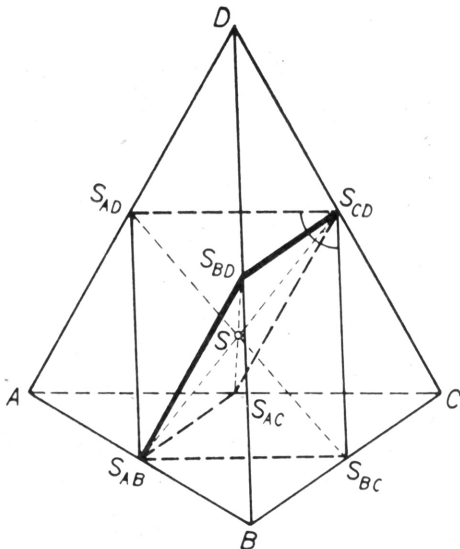
$$t \in (-\infty, \infty).$$

Množinou středů souměrnosti je dvojice navzájem kolmých přímek, které jsou rovnoběžné s osami úhlů přímek AB , CD a prochází bodem, jenž ve výše zvolené soustavě souřadnic má souřadnice $\left[\frac{2a_1 + d}{4}; \frac{2c_2 + d}{4} \right]$.

Řešil Jan Mašek, žák 3f SVVŠ,
Praha 2, W. Piecka

4. V priestore sú dané štyri rôzne body A, B, C, D také, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$. Potom existuje guľová plocha, ktorá prechádza stredmi všetkých úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD . Dokážte. [7 bodov]

RIEŠENIE. Označme stredy úsečiek AB, AC, AD, BC, BD, CD v uvedenom poradí $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ (obr. 50). Nech je S stred úsečky $S_{AB}S_{CD}$ (o prí-



Obr. 50

pade $S_{AB} \equiv S_{CD}$ budeme uvažovať zvlášť; zatiaľ predpokladajme, že body $S_{AB}, S_{AC}, S_{AD}, S_{BC}, S_{BD}, S_{CD}$ sú navzájom rôzne). Podľa známej planimetrickej vety je $S_{AB}S_{AD} \parallel BD$ a tiež $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, z čoho vyplýva, že $S_{AB}S_{AD} \parallel S_{BC}S_{CD}$. Analogicky sa ukáže, že $S_{AD}S_{CD} \parallel$

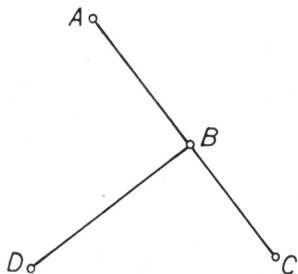
$\parallel S_{AB}S_{BC}$. Štvoruholník $S_{AB}S_{BC}S_{CD}S_{AD}$ je teda rovnobežník a bod S je súčasne stredom úsečky $S_{AD}S_{BC}$. Platí preto: $SS_{AB} = SS_{BC} = SS_{CD} = SS_{AD}$ a keďže $AC \perp BD$ a $S_{AB}S_{BC} \parallel AC$, $S_{BC}S_{CD} \parallel BD$, je $S_{AB}S_{BC} \perp S_{BC}S_{CD}$ a rovnobežník je zrejme obdĺžnikom, čo znamená, že tiež $SS_{BC} = SS_{CD}$.

Analogicky sa dokáže, že $S_{AB}S_{BD}S_{CD}S_{AC}$ je obdĺžnik a teda platí: $SS_{AB} = SS_{BD} = SS_{AC} = SS_{CD}$. Bod S je teda rovnako vzdialený od všetkých bodov S_{AB} , S_{AC} , S_{AD} , S_{BC} , S_{BD} , S_{CD} čiže existuje guľová plocha so stredom S , ktorá všetkými týmito bodmi prechádza.

Zostáva nám ešte uvažovať o prípade $S_{AB} \equiv S_{CD}$. Ak by tento prípad nastal, boli by body A, B, C, D vrcholmi rovnobežníka $ACBD$, v ktorom $AD \parallel BC$. Vzhľadom na predpoklad $AD \perp BC$ nemôže však tento prípad nastať. Analogicky se vylúčia prípady: $S_{AC} \equiv S_{BD}$, $S_{AD} \equiv S_{BC}$.

Riešil *Bohuš Sivák*,
žiak 2a SVŠ, Zvolen

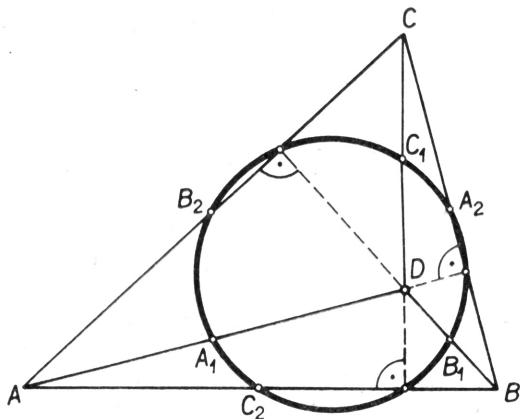
JINÉ ŘEŠENÍ. Žádné tři z těchto čtyř bodů nemohou ležet v přímce. Po označení podle obr. 51 by totiž musel být $\sphericalangle DAC = 90^\circ$, takže body A, B by splývaly, což by



Obr. 51

byl spor s předpokladem. Při jiné poloze bodů dojdeme obdobným postupem opět ke sporu.

Budou-li body A, B, C, D ležet v rovině, budou body A, B, C tvořit vrcholy trojúhelníku a bod D bude ortocentrem $\triangle ABC$ (obr. 52). Středů zmíněných úseček označené $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pak budou ležet na tzv. *Feuerbachově kružnici* devíti bodů.*) Touto kružnicí lze proložit nekonečně mnoho kulových ploch.

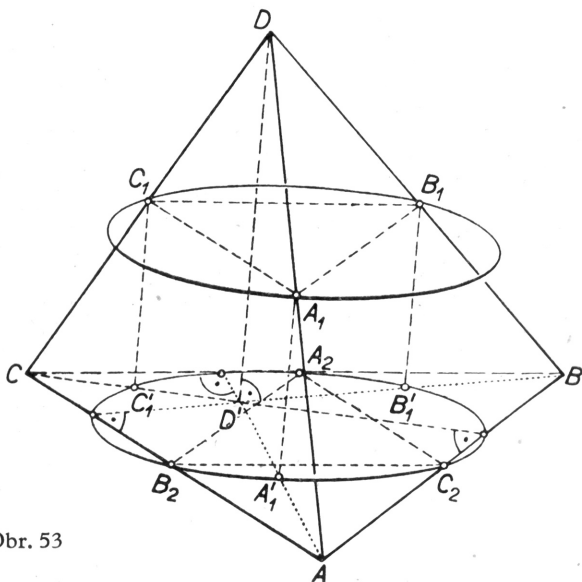


Obr. 52

Neleží-li tyto body v rovině, tvoří vrcholy čtyřstěnu. Středů úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD označme podle obr. 53. Sestrojíme-li pravoúhlý průmět tohoto čtyřstěnu do roviny ABC , bude obrazem vrcholu D ortocentrum D' trojúhelníku ABC . Úsečky BC a CA jsou

*) *Poznámka.* Feuerbachova kružnice trojúhelníku ABC prochází těmito devíti body: a) středů stran A_2, B_2, C_2 , b) středů A_1, B_1, C_1 úseček, určených vrcholy a průsečíkem výšek a c) (v úloze nepoužitými) patami výšek tohoto trojúhelníku.

totiž samodružné, a proto se úsečky AD a BD promítnou opět jako jejich kolmice. Průměty bodů A_1, B_1, C_1 označené na obr. 53 A'_1, B'_1, C'_1 leží na kružnici devíti bodů $\triangle ABC$. Je to kružnice opsaná trojúhelníku $A_2B_2C_2$. Poněvadž trojúhelník $A_1B_1C_1$ se promítá ve skutečné



Obr. 53

velikosti, je kružnice jemu opsaná shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku $A_2B_2C_2$ a úsečka spojující středy je kolmá k rovinám obou kružnic. Tyto dvě kružnice tedy leží na kulové ploše, tj. existuje kulová plocha, která prochází středy všech úseček AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Řešil Jiří Demel,
žák 3a SVVŠ, Valašské Meziříčí