

18. ročník matematické olympiády

II. Přípravné úlohy I. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. Mezinárodní matematická olympiáda.

(Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970.

Terms of use:
pp. 29–56.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Budte a, b, c tři kladná čísla, pro něž platí

$$a^n + b^n = c^n,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1. Pak existuje trojúhelník, jehož strany mají délky a, b, c . Dokažte.

ŘEŠENÍ. Dané číslo c je větší než daná čísla a i b . Proto je

$$a + c > b,$$

$$b + c > a$$

a stačí dokázat, že také

$$a + b > c.$$

Podle binomické věty platí

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Protože $n > 1$, je na pravé straně kromě členů a^n a b^n alespoň jeden další člen. Všechny členy jsou kladné, takže

$$(a + b)^n > a^n + b^n = c^n,$$

tedy také

$$a + b > c.$$

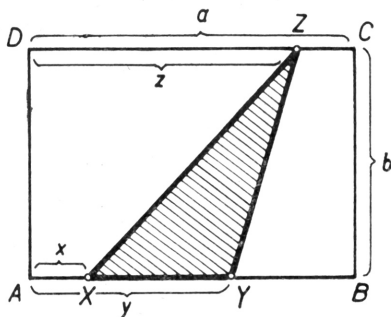
Tím je tvrzení dokázáno.

2. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $AD = b$. Trojúhelník XYZ je vepsán obdélníku $ABCD$ tak, že vrcholy X, Y náležejí straně AB , vrchol Z straně CD .

a) Dokažte, že poloměr r kružnice opsané trojúhelníku XYZ splňuje nerovnosti

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b}. \quad (1)$$

b) Dokažte, že každé číslo r splňující nerovnosti (1) je poloměrem kružnice opsané některému z takových trojúhelníků XYZ .



Obr. 1

ŘEŠENÍ (obr. 1). a) Zvolme označení vrcholů $\triangle XYZ$ tak, aby bylo $AX < AY$ a označme $AX = x$, $AY = y$, $DZ = z$.

Pro výpočet poloměru r užijeme známého vzorce

$$r = \frac{XY \cdot YZ \cdot ZX}{4P}, \quad (2)$$

kde P je obsah $\triangle XYZ$.

Vyjádríme

$$XY = y - x, \quad YZ = \sqrt{b^2 + (y - z)^2},$$

$$ZX = \sqrt{b^2 + (x - z)^2},$$

$$P = \frac{b}{2}(y - x). \quad (3)$$

Dosadíme z (3) do (2); po úpravě vyjde

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + (y - z)^2} \cdot \sqrt{b^2 + (x - z)^2}. \quad (4)$$

Zřejmě je

$$b = BC \leq YZ \leq BD = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$b = AD \leq ZX \leq AC = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Z geometrického významu plyne, že nemůže současně platit

$$YZ = b, \quad ZX = b,$$

$$YZ = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad ZX = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

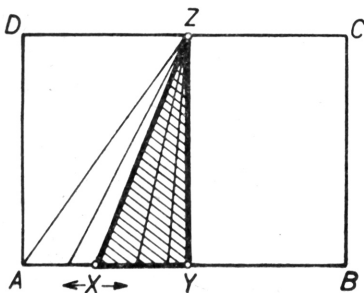
Spojením (3), (4) a (5) vyjde

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b},$$

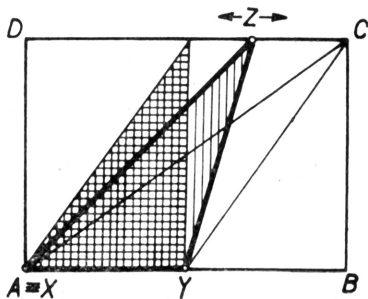
což jsou nerovnosti (1).

b) Abychom dokázali, že poloměr r nabývá každé hodnoty z intervalu (1), rozlišme tři případy.

I. (obr. 2a). Nechť je $0 \leq x < \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, $z = \frac{a}{2}$.



Obr. 2a



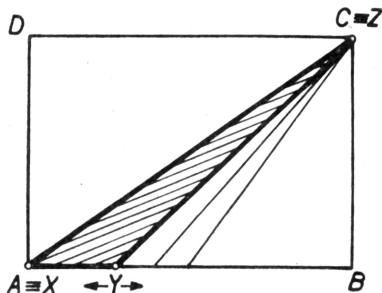
Obr. 2b

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}. \quad (4a)$$

Pak r nabývá podle (4a) všech hodnot z intervalu

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot b < r \leq \frac{1}{2b} \cdot b \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}. \quad (6a)$$



Obr. 2c

II. (obr. 2b). Necht' je $x = 0$, $y = \frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} \leq z \leq a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{b^2 + z^2}. \quad (4b)$$

Pak r nabývá podle (4b) všech hodnot z intervalu

$$\frac{1}{2} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2b} \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \leq r \leq \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{b^2 + a^2}. \quad (6b)$$

III. (obr. 2c). Necht' je $x = 0$, $0 < y \leq \frac{a}{2}$, $z = a$.

Pak je

$$r = \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + (y - a)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4c)$$

Pak r nabývá podle (4c) všech hodnot z intervalu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{b^2 + a^2} \leq r < \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 + a^2} \cdot \sqrt{b^2 + a^2} = \\ = \frac{a^2 + b^2}{2b}. \end{aligned} \quad (6c)$$

Spojíme-li (6a), (6b), (6c), zjistíme, že r nabývá všech hodnot z intervalu (1).

3. Určite všetky komplexné čísla z , ktoré vyhovujú rovnici

$$(1 + i)z^2 - i|z^2| + 1 - i = 0. \quad (1)$$

RIEŠENIE. Platí $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$. Rovnica (1) má potom tvar

$$(1 + i)z^2 - iz\bar{z} + 1 - i = 0. \quad (2)$$

Ak do (2) dosadíme $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ (x, y reálne čísla), dostaneme:

$$(1 + i)(x^2 - y^2 + 2xyi) - i(x^2 + y^2) + 1 - i = 0. \quad (3)$$

Z rovnice (3) vyplýva, že reálna aj imaginárna časť ľavej strany sa rovná nule, t. j.

$$x^2 - y^2 - 2xy + 1 = 0, \quad (4a)$$

$$x^2 - y^2 + 2xy - (x^2 + y^2) - 1 = 0. \quad (4b)$$

Rovnicu (4b) upravíme na tvar

$$2xy - 2y^2 - 1 = 0. \quad (5)$$

Sčítaním rovníc (4a), (5) dostaneme $x^2 - 3y^2 = 0$ čiže

$$x = \varepsilon \sqrt{3} y, \text{ kde } \varepsilon = \pm 1. \quad (6)$$

Po dosadení zo (6) do (5) vyjde $2y^2(\varepsilon\sqrt{3} - 1) = 1$. Pretože y musí byť reálne, je $2y^2 > 0$ a preto je $\varepsilon = 1$. Máme teda

$$y^2 = \frac{1}{2(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \quad (7)$$

Zo vzťahov (7) a (6) dostaneme

$$y_1 = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3(1 + \sqrt{3})}}{2},$$

$$y_2 = -y_1, \quad x_2 = -x_1.$$

Danej rovnici môžu teda vyhovovať len čísla

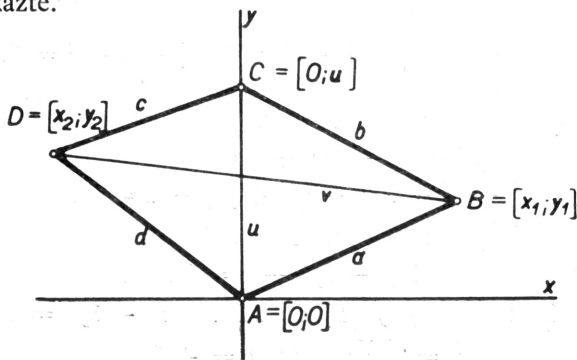
$$z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i = -z_1.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla rovnici (1) skutočne vyhovujú.

4. Buďte a, b, c, d dĺžky stran konvexného štvoruholníka, u, v dĺžky jeho úhlopříček, P jeho obsah. Pak platí

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$$

Dokažte.



Obr. 3

ŘEŠENÍ. Zvolme soustavu kartézských souřadnic podle obr. 3. Pak platí podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů

$$\begin{aligned}a^2 &= x_1^2 + y_1^2, \\b^2 &= x_1^2 + (y_1 - u)^2, \\c^2 &= x_2^2 + (y_2 - u)^2, \\d^2 &= x_2^2 + y_2^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Dále je podle téhož vzorce

$$v^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.\tag{3}$$

Podle vzorce pro obsah trojúhelníka je

$$P = \frac{1}{2} u(|x_1| + |x_2|) = \frac{1}{2} u(x_1 - x_2),\tag{4}$$

neboť je $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Z druhé a třetí rovnosti (2) dostaneme

$$\begin{aligned}b^2 - c^2 &= x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2u(y_1 - y_2), \\2u(y_1 - y_2) &= a^2 + c^2 - b^2 - d^2.\end{aligned}\tag{5}$$

Z (4) a (5) dosadíme do (3); vyjde

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2,$$

což je rovnost (1).

2. KATEGORIE B

1. a) Najděte všechny dvojice (x, y) celých kladných čísel, pro které platí

$$|2^x - 10^y| \leq 5.$$

b) Je-li p kladné číslo, pak nerovnice

$$|2^x - 10^y| \leq p$$

má v oboru dvojic celých kladných čísel (x, y) buď konečně řešení, nebo je neřešitelná. Dokažte.

ŘEŠENÍ. a) Dokažme nejprve, že nerovnice $|2^x - 10^y| \leq 5$ nemá řešení $x = y$. Je totiž $|2^x - 10^x| = 10^x - 2^x = (10 - 2)N = 8N \geq 8$, kde N je přirozené číslo. Protože mocniny čísla 2 rostou „pomaleji“ než mocniny čísla 10, napadne nás, že předchozí odůvodnění by se mohlo rozšířit i na případ $x \leq y$. Skutečně je pro $x \leq y$ $|2^x - 10^y| = 2^x |1 - 2^{y-x} \cdot 5^y| \geq 2^x (2^{y-x} \cdot 5^y - 1) \geq 2 \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8$.

Řešení nerovnice z úlohy a) můžeme hledat jen mezi dvojicemi x, y , pro něž platí $x > y$. Pak platí

$$|2^x - 10^y| = 2^y |2^{x-y} - 5^y| \leq 5,$$

tj.

$$|2^{x-y} - 5^y| \leq \frac{5}{2^y} \leq \frac{5}{2},$$

neboť $y \geq 1$. Je tedy $|2^{x-y} - 5^y| = 0$ nebo 1 nebo 2. Případy 0; 2 jsou vyloučeny, neboť číslo 5^y je liché, čísla 2^{x-y} ; 0; 2 jsou sudá. Je tedy buď

$$5^y + 1 = 2^{x-y}, \quad (1a)$$

nebo

$$5^y - 1 = 2^{x-y}. \quad (1b)$$

Dekadické vyjádření čísla 5^y končí dvojčíslím 05 nebo 25; proto dekadické vyjádření čísla $5^y + 1$ končí buď dvojčíslím 06, nebo 26. Je proto $5^y + 1$ dělitelné jen mocninou 2^1 , tj. $2^{x-y} = 2$, $x - y = 1$. Z (1a) pak plyne $5^y = 1$, což je nemožné, neboť y je přirozené číslo.

Rovnici (1b) rozřešíme pomocí rozkladu

$$5^y - 1 = 5^y - 1^y = 4(1 + 5 + \dots + 5^{y-2} + 5^{y-1}). \quad (2)$$

Má-li být číslo $5^y - 1$ mocninou dvou, musí mnohočlen v závorkách (2) být roven buď 1, nebo být číslo sudé, tj. musí obsahovat sudý počet členů. V posledním případě seskupíme členy ve dvojice a použijeme vzorce $5^k + 5^{k+1} = 5^k(1 + 5) = 6 \cdot 5^k$. To znamená: jsou-li v zá-

vorkách (2) aspoň dva členy, je číslo na pravé straně (2) násobkem tří a není mocninou dvou. V úvahu přichází tedy jen případ $y = 1$. Z (1b) dostaneme $x - y = 2$, tj. $x = 3$.

b) Tvrzení dokážeme sporem. Budeme předpokládat, že pro některé přirozené číslo p má nerovnice $|2^x - 10^y| \leq p$ nekonečně mnoho řešení. Mezi těmito řešeními lze vybrat takové dvojice $[x_i, y_i]$ a očíslovat je tak, že $x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3$ budou dvě posloupnosti přirozených čísel, která stále porostou. Tyto posloupnosti nemohou být totiž obě omezené (předpokládáme, že nerovnice má nekonečně mnoho řešení); také není možné, aby jedna posloupnost byla omezená a druhá neomezená, protože $[2^x - 10^y] \leq p$.

Můžeme tedy najít takové přirozené číslo n , že je

$$2^{x_n} > p, \quad 5^{y_n} > p. \quad (3)$$

Je-li $x_n \leq y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{x_n} |1 - 2^{y_n - x_n} \cdot 5^{y_n}| > p |5 - 1| = 4p.$$

To je spor s danou nerovnicí; $[x_n, y_n]$ není tedy jejím řešením.

Je-li $x_n > y_n$, počítáme s použitím (3) takto:

$$|2^{x_n} - 10^{y_n}| = 2^{y_n} |2^{x_n - y_n} - 5^{y_n}| > p \cdot N \geq p,$$

kde N je přirozené číslo. Také tato dvojice $[x_n, y_n]$ není řešením dané nerovnice. Tím je dokázáno, že nerovnice nemá nekonečně mnoho řešení.

Obrat, kterého jsme použili, je typický v disciplíně, zvané matematická analýza.

2. Platí-li zároveň

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0, \quad (1)$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0, \quad (2)$$

pak je také

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0, \quad (3)$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0. \quad (4)$$

Dokažte.

ŘEŠENÍ. Upravíme

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin 2y + \sin 2z &= \sin 2x + \sin 2y + \\ &+ 2 \sin z \cos z = \sin 2x + \sin 2y + 2(\sin x + \sin y) \\ &(\cos x + \cos y) = 2 \sin 2x + 2 \sin 2y + 2 \sin (x + y) = \\ &= 4 \sin (x + y) \cos (x - y) + 2 \sin (x + y) = \\ &= 2 \sin (x + y) [2 \cos (x - y) + 1] = 0. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme z (1) a (2) $\sin z$, $\cos z$, dosadíme do formule $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; po úpravě dostaneme $2 \cos (x - y) + 1 = 0$. Platí tedy (3).

Obdobně počítáme

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z &= \cos 2x + \cos 2y + \cos^2 z - \\ &- \sin^2 z = \cos 2x + \cos 2y + (\cos x + \cos y)^2 - (\sin x + \\ &+ \sin y)^2 = 2 \cos 2x + 2 \cos 2y + 2 \cos (x + y) = \\ &= 4 \cos (x + y) \cdot \cos (x - y) + 2 \cos (x + y) = \\ &= 2 \cos (x + y) [2 \cos (x - y) + 1] = 0. \end{aligned}$$

Protože je $2 \cos (x - y) + 1 = 0$, platí i (4).

3. V rovine je daný dutý uhol MON , vnútorný bod P polpriamky opačnej k polpriamke OM a vnútorný bod Q dutého uhla NOP . Ďalej je daný štvorec so stranou d . Bodom Q vedte priamku p , ktorá pretína polpriamky OM , ON v uvedenom poradí v bodoch X , Y tak, aby trojuholník OXY a daný štvorec mali rovnaký obsah.

RIEŠENIE. *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili priamku p žiadaných vlastností (obr. 4). Bodom Q vedme priamku $q \parallel ON$. Priamka q leží v polrovine NOP .

$$wx^2 - 2d^2x - 2d^2r = 0.$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice a ďalšou úpravou dostaneme:

$$x_{1,2} = \frac{2d^2 \pm \sqrt{4d^4 + 8d^2rw}}{2w} = \frac{2d^2 \pm 2d\sqrt{d^2 + 2rw}}{2w} = \frac{d(d \pm \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}.$$

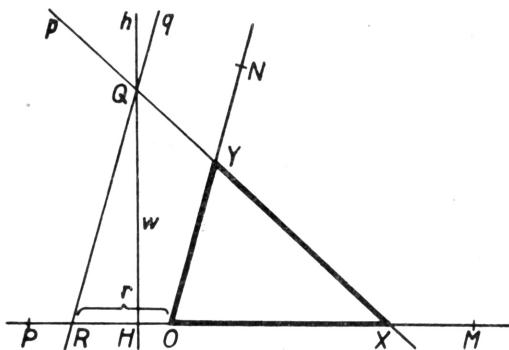
Pretože $\sqrt{d^2 + 2rw} > \sqrt{d^2} = d$ a x má byť číslo kladné, vyhovuje úlohe len prvý koreň, t. j.

$$x = \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}. \quad (3)$$

Úsečka veľkosti d je daná, úsečky veľkosti r, w môžeme zostrojiť a úsečku veľkosti x dostaneme konštrukciou algebraického výrazu (3).

Konštrukcia (obr. 5a, b).

1. Bodom Q vedieme priamku $q \parallel ON$ a jej priesečník



Obr. 5a

a

$$\triangle OXY \sim \triangle RXQ. \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) vyplýva, že $\frac{v}{x} = \frac{w}{r+x}$, z čoho $v = \frac{wx}{r+x}$. Po dosadení zo vzťahu (4) do tohto vzťahu dostaneme

$$v = \frac{\frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}}{r + \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w}} = \frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw}}.$$

Obsah P trojuholníka OXY je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} xv = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{w} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{wd(d + \sqrt{d^2 + 2rw})}{rw + d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2d^2(d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw)}{d^2 + d\sqrt{d^2 + 2rw} + rw} = d^2. \end{aligned}$$

Diskusia. Z rozboru vyplýva, že úsečka veľkosti x je jednoznačne určená. Na polpriamke OM existuje jediný bod X , pre ktorý $OX = x$, z čoho vyplýva, že úloha má práve jedno riešenie.

4. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$, jejichž vzdálenost je $v > 0$. V rovině ϱ leží čtverec $ABCD$ o straně d a středu S , v rovině ϱ' s ním shodný čtverec $A'B'C'D'$ o středu S' . Přitom je $SS' \perp \varrho$, odchylka přímek $SA, S'A'$ je α , kde $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, a polopřímka SX souhlasně rovnoběžná s polopřímkou $S'A'$ má s úsečkou AB společný bod. Vypočítejte objem tělesa, které omezují čtverce $ABCD$,

průsečík polopřímky SX s polopřímkou AE . Vzhledem k $A'D' \parallel HE$ je $\sphericalangle AMS = \sphericalangle D'A'S' = 45^\circ$. Protože $\sphericalangle SAB = 45^\circ$, v trojúhelníku AMS vypočítáme $\sphericalangle MAS = 180^\circ - (\alpha + 45^\circ) = 135^\circ - \alpha$. Je tedy $\sphericalangle MAB = 135^\circ - \alpha - 45^\circ = 90^\circ - \alpha$. Potom $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCF = \alpha$ a $BE = d \cdot \cos \alpha$, $BF = d \sin \alpha$, takže $EF = d \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Popsané těleso vznikne, jestliže od komolého jehlanu s podstavami $EFGH$, $A'B'C'D'$ a s výškou v odetneme čtyři shodné jehlany $AEBA'$, $BFCB'$, $CGDC'$, $DHAD'$, jejichž podstavy jsou pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami $d \cdot \sin \alpha$, $d \cdot \cos \alpha$ a jejichž výška je v . Jeho objem je

$$\begin{aligned} V &= \frac{d^2 v}{3} [1 + (\sin \alpha + \cos \alpha) + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2] - \\ &- \frac{4}{3} \cdot \frac{d^2 v \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{d^2 v}{3} (2 + \sin \alpha + \cos \alpha) = \\ &= \frac{d^2 v}{3} [2 + \sqrt{2} \sin (\alpha + 45^\circ)]. \end{aligned}$$

POZNÁMKA. Pro $\alpha = 0^\circ$ a $\alpha = 90^\circ$ vznikne pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A'B'C'D'$, popř. $ABCD D'A'B'C'$ o objemu $V = d^2 v$; pro $\alpha = 45^\circ$ máme

$$V = \frac{d^2 v}{3} (2 + \sqrt{2}) \doteq 1,138 \cdot d^2 v, \text{ což je zřejmě maximum.}$$

3. KATEGORIE C

1. Dva chodci jdou stálými rychlostmi podél železniční trati v téže směru. V též směru jede po trati vlak. Lokomotiva předjede prvního chodce τ minut poté, co předjela druhého chodce. Prvního chodce mine vlak za t_1 vteřin, druhého chodce, který jde rychleji, za t_2 vteřin. Za kolik minut dohoní druhý chodec prvního?

ŘEŠENÍ. Prvního chodce, který jde pomaleji, mine vlak za kratší dobu než druhého chodce, tj.

$$t_1 < t_2 . \quad (1)$$

Představme si, že v úloze popsany děj sledujeme z uvedeného jedoucího vlaku. Označme d jeho délku v metrech. Potom se nám zdá, že se chodci pohybují kolem nás v obráceném pořadí pozpátku, a to první chodec rychlostí

$$v_1 = \frac{d}{t_1} \quad (2)$$

a druhý chodec rychlostí

$$v_2 = \frac{d}{t_2} . \quad (3)$$

Rychlosti v_1 a v_2 jsou ve vztazích (2) a (3) udány v m/s. Vzhledem k nerovnosti (1) platí

$$\frac{d}{t_1} > \frac{d}{t_2} ,$$

tj. podle (2) a (3)

$$v_1 > v_2 .$$

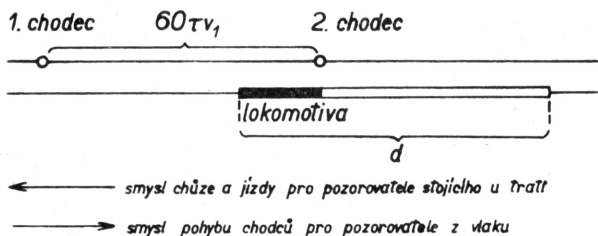
Z poslední nerovnosti plyne, že z vlaku se zdá, že první chodec je rychlejší a dohání druhého.

Popišme nyní, jak vypadá z hlediska pozorovatele ve vlaku předjíždění chodců. Jako první se objeví u předku lokomotivy druhý chodec. V okamžiku, kdy se octne druhý chodec u zádi lokomotivy (z jeho hlediska ho lokomotiva předjela), je od něho první chodec vzdálen

$$60 \cdot \tau \cdot v_1$$

metrů (obr. 7). Z vlaku se nám zdá, že se chodci k sobě přibližují s rychlostí

$$v_1 + v_2$$



Obr. 7

metrů za sekundu. Od okamžiku, kdy lokomotiva předjela druhého chodce, se oba chodci setkají za

$$t = \frac{1}{60} \cdot \frac{60 \tau v_1}{v_1 - v_2} = \frac{\tau v_1}{v_1 - v_2} \quad (4)$$

minut. Dosadíme-li z (2) a (3) do (4), máme

$$t = \frac{\tau \cdot t_2}{t_2 - t_1}. \quad (5)$$

Vztah (5) udává počet minut, který potřeboval druhý chodec v okamžiku, když ho předjela lokomotiva, k dosažení prvního chodce.

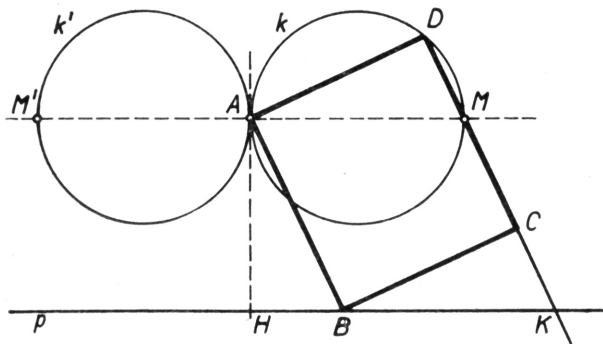
POZNÁMKA. Samozřejmě lze udávat počet minut i od jiného okamžiku, než kterého jsme užili. Musí být ovšem zajištěno, že v tomto okamžiku jsou už chodci v pohybu a že druhý chodec ještě není před prvním. U okamžiku, jenž jsme výše zvolili, je toto zřejmé podle textu úlohy. Podobně je tomu, počítáme-li čas potřebný k dosažení prvního chodce druhým od okamžiku, kdy lokomotiva předjela prvního chodce.

Dostáváme s užitím vztahu (5)

$$t' = \frac{\tau \cdot t_2}{t_2 - t_1} - \tau = \frac{\tau \cdot t_1}{t_2 - t_1}$$

minut.

2. V rovine je daná priamka p a bod A vzdialený od priamky p o $a > 0$. Ďalej je dané kladné číslo c . Určite geometrické miesto vrcholu D všetkých pravouholníkov $ABCD$, ktorých plošný obsah je c a ktorých vrchol B leží na priamke p .



Obr. 8

RIEŠENIE. Nech H je päta kolmice spustenej z bodu A na priamku p (obr. 8). Nech $ABCD$ je jeden z pravouholníkov vyhovujúcich podmienkam úlohy. Pretože priamka AB je zrejme rôznobežná s priamkou p , je tiež priamka CD s priamkou p rôznobežná a existuje preto priesečník K priamok p a CD . Podobne existuje priesečník M priamky CD s rovnobežkou s priamkou p vedenou bodom A . Pravouholník $ABCD$ a rovnobežník $ABKM$ majú spoločnú stranu AB a rovnakú výšku na ňu (je to dĺžka AD), preto sú rovnoploché. Plošný obsah pravouholníka sa podľa textu úlohy rovná c a plošný obsah pravouholníka sa zrejme rovná súčinu dĺžok AM a AH . Pretože čísla c a $AH = a$ nezávisia na voľbe pravouholníka $ABCD$, je tiež dĺžka úsečky $AM = c : a$ na tejto voľbe nezávislá. Existujú práve dva body vzdialené od bodu A o $c : a$ a le-

žiace na rovnobežke s priamkou p vedenej bodom A . Jeden z týchto bodov sme označili M , druhý označme M' . Z toho vyplýva podľa Thaletovej vety, že vrchol D leží na niektorej z kružníc k , resp. k' opísanej nad úsečkou AM , resp. AM' ako priemerom.

Hľadané geometrické miesto vrcholu D je dvojica kružníc k a k' bez bodu A . Posledné tvrdenie *dokážeme*. Ukázali sme už, že vrchol D leží nutne buď na kružnici k , alebo k' . Je zrejmé z textu úlohy, že $D \neq A$.

Nech teraz $D \neq A$ je bod kružnice k alebo k' . Bodmi D a A a tým, že bod B leží na priamke p je pravouholník $ABCD$ jednoznačne určený. Dôkaz, že jeho plošný obsah je c sa prevedie rovnako ako v predchádzajúcej úvahe. Tým je dôkaz prevedený.

3. Športový krúžok školy má 79 členov. Z nich pestuje 45 futbal, 30 volejbal, 36 basketbal, 28 hokej, 25 plávanie a 34 ľahkú atletiku. Každý člen krúžku pestuje aspoň dva športy a najväčší počet športov pestuje 40 členov krúžku. Koľko členov krúžku pestuje práve dva športy, práve tri športy, atď.?

RIEŠENIE. Označme x_i počet členov krúžku, ktorí pestujú práve i športov, $i = 2, 3, \dots, k$, pričom $x_k = 40$. V počte $45 + 30 + 36 + 28 + 25 + 34 = 198$ je každý člen krúžku počítaný toľkokrát, koľko rôznych športov pestuje. Preto platí

$$2x_2 + 3x_3 + \dots + kx_k = 198 \quad (1)$$

a keďže členov krúžku je 79, platí

$$x_2 + x_3 + \dots + x_k = 79. \quad (2)$$

Vylúčením x_2 z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$x_3 + 2x_4 + \dots + (k-2)x_k = 40.$$

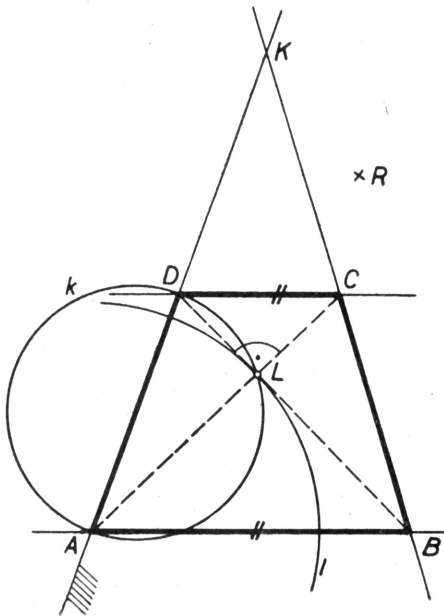
Keďže $x_k = 40$, musí byť $k = 3$, pretože inak by ľavá strana bola väčšia než 40. Potom rovnicu (2) môžeme zapísať v tvare

$$x_2 + x_3 = 79,$$

skadiaľ po dosadení $x_3 = 40$ dostaneme $x_2 = 39$.

Dva športy pestuje teda 39 členov a tri športy 40 členov krúžku.

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, je-li dána délka jeho ramene $AD = d$, délka jeho úhlopříčky $AC = e$ a poměr obou základů $AB : DC = 5 : 3$.



Обр. 9

ŘEŠENÍ. Označme L průsečík úhlopříček AC a BD , K průsečík ramen AD a BC . Z podobnosti trojúhelníků (obr. 9)

$$\triangle KAB \sim \triangle KDC \text{ a } \triangle ABL \sim \triangle CDL$$

plyne

$$AK:DK = 5:3, AL:CL = BL:DL = AB:DC = 5:3 \text{ a } AL = \frac{5}{8} AC.$$

Poněvadž je $AC \perp BD$, leží bod L na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem AD .

Konstrukce (provedena na obr. 9 v polorovině ADR):

1. Nad úsečkou AD jako nad průměrem opišeme kružnici k .

2. Sestrojíme kružnici $l \equiv (A; \frac{5}{8} AC)$.

3. Určíme průsečík $L \equiv k \cdot l$ ležící v polorovině ADR .

4. Na polopřímku AL nanese od A úsečku délky $AC = e$.

5. Sestrojíme $AB \parallel DC$; B leží na DL .

Důkaz. Z provedené konstrukce plyne, že $DL \perp AL$, tj. úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Poněvadž je $AC:AL = 8:5$, je $AL:LC = 5:3$ a $AB:DC = 5:3$.

Diskuse. Úloha má řešení, a to jediné (v polorovině ADR), když $\frac{5}{8} e < d$. (Další řešení v polorovině opačné k polorovině ADR by bylo souměrné podle přímky AD .)

4. KATEGÓRIA D

1. Rozpočítali, že stavebný materiál odvezie auto za x dní, kde $x > 3$. Keďže odvoz bolo treba urýchliť, začali na štvrtý deň odvážať materiál ešte ďalšími dvoma autami.

Výkon prvého pomocného auta bol $\frac{5}{6}$ výkonu pôvodného auta, výkon druhého pomocného auta bol 1,5 výkonu pôvodného auta. Všetky tri autá dokončili odvoz za y dní.

a) Vyjadrite y pomocou x .

b) Pre ktoré celé čísla $x < 50$ je y celé číslo?

RIEŠENIE. Prvé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x}$ množstva všetkého materiálu, čiže celkom odviezlo $(y + 3) \frac{1}{x}$ materiálu. Druhé auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x} \cdot \frac{5}{6}$ množstva všetkého materiálu a celkom teda $\frac{5y}{6x}$ materiálu. Tretie auto odviezlo za jeden deň $\frac{1}{x} \cdot 1,5$ množstva všetkého materiálu, čiže celkom $\frac{3y}{2x}$ materiálu. Všetky tri autá spolu odviezli všetok materiál, preto platí

$$\frac{y + 3}{x} + \frac{5y}{6x} + \frac{3y}{2x} = 1,$$

z čoho dostaneme

$$y = \frac{3}{10}(x - 3).$$

Číslo y je zrejme kladné, pretože $x > 3$. Ak je číslo y celé, potom kladné číslo $x - 3$ je násobkom čísla 10, t.j. $x - 3 = 10k$, kde k je číslo prirodzené. Pre prirodzené číslo x máme teda vzťah

$$x = 3 + 10k,$$

čiže $x \in \{13, 23, 33, 43, 53, \dots\}$.

Ak je $x < 50$, potom prichádzajú do úvahy čísla 13, 23, 33 a 43.

2. Určete všetky dvojice prírodných čísel x, y , pro ktoré, platí

$$8x^3 - y^3 = 387. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Platí $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 =$
 $= (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$, tj. rovnice (1) zní

$$(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 387.$$

Zřejmě je $4x^2 + 2xy + y^2 > 0$, $2x - y > 0$, $2x > y$.
 Rozložíme číslo 387 v součin prvočinitelů: $387 =$
 $= 3 \cdot 3 \cdot 43$. Sestavíme tabulku:

$2x - y$	1	3	43	9	129	387
$4x^2 + 2xy + y^2$	387	129	9	43	3	1
$(2x - y)^2$	1	9	1849	81	$129^2 > 3$	$387^2 > 1$
$4x^2 + 2xy + y^2 - (2x - y)^2 = 6xy$	386	120	zá- porné	zá- porné	záporné	záporné
xy	není celé	20	—	—	—	—
x	—	4	—	—	—	—
y	—	5	—	—	—	—

Rozložíme číslo 20 v součin dvou činitelů: $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$; kladné rozdíly $2x - y$ jsou $2 \cdot 20 - 1 = 39$, $2 \cdot 10 - 2 = 18$, $2 \cdot 5 - 4 = 6$, $2 \cdot 4 - 5 = 3$. Vyhovuje jen poslední; proto do tabulky (sloupec 2) doplníme $x = 4, y = 5$. Skutečně je $8x^3 - y^3 = 8 \cdot 64 - 125 = 512 - 125 = 387$.

JINÉ ŘEŠENÍ. Položíme-li $2x = z$, dostáváme

$$z^3 - y^3 = 387, \quad (1)$$

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 8$$

$$3^3 = 27$$

$$4^3 = 64$$

$$5^3 = 125$$

$$6^3 = 216$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

$$11^3 = 1331$$

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197$$

$$14^3 = 2744$$

.

.

.

tj. úlohu: nalezněte taková dvě přirozená čísla z a y , přičemž z je sudé, aby rozdíl jejich třetích mocnin byl 387.
Z rovnice (1) plyne, že pro sudé číslo z platí

$$z^3 > 387,$$

takže z tabulky třetích mocnin přirozených čísel snadno zjistíme, že

$$z \geq 8. \quad (2)$$

Z této tabulky lze také odhadnout, že sudé číslo z nemůže být větší než 10, tj. musí být

$$z \leq 10. \quad (3)$$

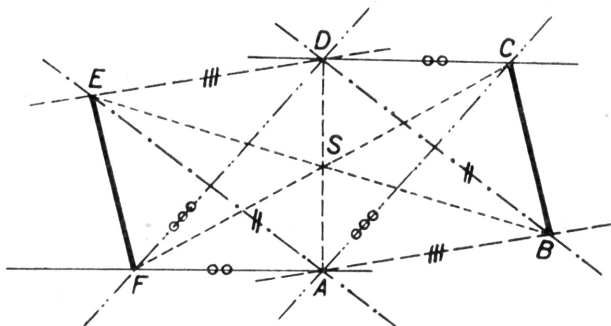
Odečteme-li totiž od třetí mocniny libovolného sudého čísla $z > 10$

třetí mocninu největšího čísla, které přichází v úvahu jako číslo y , tj. třetí mocninu čísla $z - 1$, potom, jak se zdá z tabulky, dostaneme vždy číslo větší než 387. Pravdivost tohoto odhadu snadno dokážeme. Každé sudé přirozené číslo $z > 10$ lze psát ve tvaru $12 + n$, kde n je celé nezáporné číslo. Platí:

$$(12 + n)^3 - [(12 + n) - 1]^3 = (12 + n)^3 - (12 + n)^3 + 3(12 + n)^2 - 3(12 + n) + 1 = 397 + n^2 + 69n > 387.$$

Ze vzťahů (2) a (3) plyne, že sudé číslo z je buď 8, nebo 10. Z tabulky třetích mocnin zjistíme, že úloha má jediné řešení $z = 8$ a $y = 5$, tj. $x = 4$ a $y = 5$.

3. Sú dané body A, B, C, D , z ktorých žiadne tri neležia v priamke. Zostrojte bod E tak, aby bolo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$ a bod F tak, aby bolo $AF \parallel CD$ a $DF \parallel AC$. Dokážte, že $EF = BC$.



Obr. 10

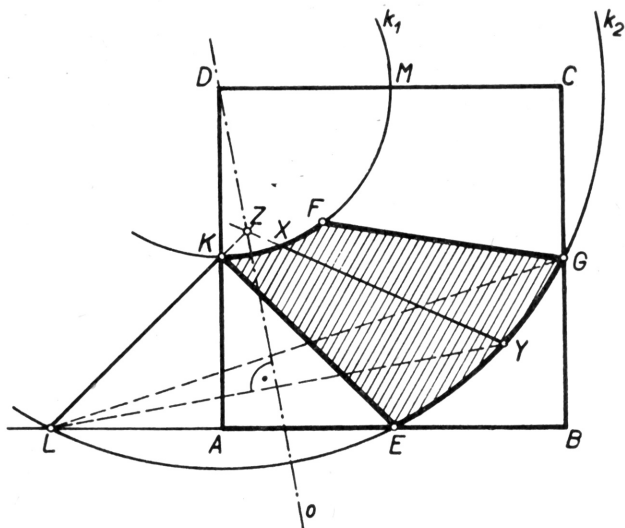
RIEŠENIE. Obrazec $ABDE$ je rovnobežník, pretože body A, B, D neležia v priamke. Priesečník jeho uhlopriečok označme S (obr. 10). Potom $AS = DS$, $BS = ES$. Obrazec $ACDF$ je taktiež rovnobežník, pretože ani body A, C, D neležia v priamke. Jeho uhlopriečky sa taktiež pretínajú v bode S , pretože uhlopriečka AD je spoločná pre oba rovnobežníky. Preto platí tiež $CS = FS$. Z podmienok $BS = ES$, $CS = FS$ vyplýva $EF = BC$, pretože body B, E a C, F tvoria dve dvojice bodov súmerne združených podľa stredu S .

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o nějakou takovou přímku procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.

ŘEŠENÍ. Danou situaci znázorňuje obr. 11. Protože body K, X jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , platí

$$DK = DX.$$



Obr. 11

Bod X leží tedy na kružnici k_1 se středem D a poloměrem $DK = \frac{a}{2}$; ovšem jenom na tom oblouku kružnice k_1 , který leží ve čtverci $ABCD$ (je to čtvrtkružnice KM).

Protože body L , Y jsou souměrně sdruženy podle osy o , která prochází vrcholem D , platí

$$DL = DY.$$

Bod Y leží tedy na kružnici k_2 se středem D a poloměrem

$$DL = \frac{a}{2} \sqrt{5}, \text{ jak snadno vypočteme podle Pythagorovy}$$

věty z trojúhelníka ADL . Kružnice k_2 prochází středem G strany BC ; bod Y leží ovšem jen na tom oblouku kružnice k_2 , který leží ve čtverci $ABCD$. Tento oblouk je omezen středy E , G stran AB , BC .

Budiž Y libovolný bod oblouku EG ; dokážeme, že vznikne jako souměrně sdružený bod s bodem L podle vhodné osy o procházející vrcholem D . Tuto osu o sestrojíme jako osu úsečky LY ; určíme průsečík Z přímek o , KL a dále průsečík X přímky YZ s obloukem KM kružnice k_1 . Úsečka XY je souměrně sdružená s KL podle osy o . Je-li $Y = G$, je $X = F$. Proměnná úsečka XY vyplní vyšrafovanou část mezikruží (k_1 , k_2) omezenou obloukem EG kružnice k_2 , obloukem KF kružnice k_1 a úsečkami KE , FG .