

18. ročník matematické olympiády

V. Úlohy III. kola kategorie A

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 18. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1968-1969. 11. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1970. pp. 129–146.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechny dvojice racionálních čísel x, y , pro které platí

$$(x + y\sqrt{5})^2 = 7 + 3\sqrt{5}. \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Budiž x, y dvojice racionálních čísel, pro kterou platí (1). Potom

$$x^2 + 5y^2 + 2xy\sqrt{5} = 7 + 3\sqrt{5},$$

takže

$$x^2 + 5y^2 - 7 = (3 - 2xy)\sqrt{5}.$$

Kdyby bylo $3 - 2xy \neq 0$, byla by

$$\sqrt{5} = \frac{x^2 + 5y^2 - 7}{3 - 2xy}$$

racionální číslo, což není. Máme tedy $2xy = 3$, tj.

$$xy = \frac{3}{2} \quad (2)$$

a ovšem také

$$x^2 + 5y^2 = 7. \quad (3)$$

Umocníme rovnici (3) dvěma; vyjde

$$x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 = 49. \quad (4)$$

Zároveň však podle (2) je

$$20x^2y^2 = 45. \quad (5)$$

Odečteme (5) od (4) a dostaneme

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^2 = 4,$$

tj.

$$(x^2 - 5y^2)^2 = 4.$$

Je tedy buď

$$x^2 - 5y^2 = 2, \quad (6)$$

anebo

$$x^2 - 5y^2 = -2. \quad (7)$$

Sečtením (3) a (6) dostáváme $2x^2 = 9$, tj.

$$x^2 = \frac{9}{2},$$

což není možné, neboť x je racionální číslo.

Sečtením (3) a (7) dostaneme $2x^2 = 5$, tj.

$$x^2 = \frac{5}{2},$$

což také není možné.

Poněvadž jsme z předpokladu existence dvojice racionálních čísel x, y vyhovujících (1) dostali vždy spor, žádná taková dvojice neexistuje.

2. V rovine leží pět bodov O, A, B, C, D . Pre ich vzdialenosti platí $OA \leq OB \leq OC \leq OD$.

Dokážte, že pre obsah P konvexného štvoruholníka, ktorého vrcholmi sú body A, B, C, D , vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2} (OA + OD) (OB + OC)$$

a zistite, kedy nastane rovnosť.

RIEŠENIE. V ľubovoľnom konvexnom štvoruholníku $KLMN$ nech je Q priesečníkom uhlopriečok KM a LN .

Pre obsah trojuholníka KLM zrejme platí

$$P_{KLM} \leq \frac{1}{2} KM \cdot LQ,$$

pretože úsečka LQ nie je kratšia než výška v trojuholníku KLM prislúchajúca strane KM . Pre trojuholník KMN analogicky platí

$$P_{KMN} \leq \frac{1}{2} KM \cdot NQ,$$

takže pre obsah štvoruholníka $KLMN$ vždy platí

$$P_{KLMN} \leq \frac{1}{2} KM \cdot LN,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď je $KM \perp LN$.

Nech je R ľubovoľným bodom roviny $KLMN$. Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí $KM \leq KR + MR$ a $LN \leq LR + NR$, takže

$$P_{KLMN} \leq \frac{1}{2} (KR + MR) (LR + NR).$$

Rovnosť v tomto vzťahu nastane práve vtedy, keď leží R jednak medzi bodmi K a M a jednak medzi bodmi L a N čiže, ak je $R \equiv Q$, kde Q je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok KM a LN .

V konvexnom štvoruholníku s vrcholmi A, B, C, D sú uhlopriečkami buď AB a CD , alebo AC a BD , alebo AD a BC . Podľa predchádzajúcej úvahy platí potom v prvom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + BO) (CO + DO),$$

v druhom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + CO) (BO + DO)$$

a v treťom prípade

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok.

Pretože $AO \leq BO \leq CO \leq DO$, platí

$$\begin{aligned} & (AO + DO) (BO + CO) - (AO + BO) (CO + DO) = \\ & = AO \cdot BO + BO \cdot DO + AO \cdot CO + CO \cdot DO - \\ & - AO \cdot CO - AO \cdot DO - BO \cdot CO - BO \cdot DO = \\ & = AO \cdot BO + CO \cdot DO - AO \cdot DO - BO \cdot CO = \\ & = (DO - BO) (CO - AO) \geq 0, \end{aligned}$$

takže

$$(AO + BO) (CO + DO) \leq (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = BO$ alebo $CO = AO$.

Analogicky tiež

$$\begin{aligned} & (AO + DO) (BO + CO) - (AO + CO) (BO + DO) = \\ & = AO \cdot BO + AO \cdot CO + BO \cdot DO + CO \cdot DO - \\ & - AO \cdot BO - AO \cdot DO - BO \cdot CO - CO \cdot DO = \\ & = AO \cdot CO + BO \cdot DO - AO \cdot DO - BO \cdot CO = \\ & = (DO - CO) (BO - AO) \geq 0, \end{aligned}$$

takže

$$(AO + CO) (BO + DO) \leq (AO + DO) (BO + CO),$$

pričom rovnosť nastane vždy práve vtedy, keď $DO = CO$ alebo $BO = AO$.

Platí teda vždy

$$P \leq \frac{1}{2} (AO + DO) (BO + CO).$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď O je priesečníkom navzájom kolmých uhlopriečok štvoruholníka $XYZV$,

kde X, Y, Z, V je také uspořádaná štvorica bodov A, B, C, D , že $OX = OA$ a $OZ = OD$.

3. Necht' p je prvočíslo. Kolik existuje různých posloupností přirozených čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

takových, že pro každé přirozené $n = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} + \frac{p}{a_{n+1}} = 1? \quad (1)$$

ŘEŠENÍ. Necht' $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ je posloupnost vyhovující podmínkám úlohy. Vztah (1) si napíšeme pro $n = m + 1$ a $n = m$ a pak odečteme:

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_{m+1}} + \frac{p}{a_{m+2}} = 1,$$

$$\frac{a_0}{a_1} + \frac{a_0}{a_2} + \dots + \frac{a_0}{a_m} + \frac{p}{a_{m+1}} = 1,$$

$$\frac{p}{a_{m+2}} + \frac{a_0 - p}{a_{m+1}} = 0,$$

takže

$$a_{m+2} = \frac{p}{p - a_0} a_{m+1}. \quad (2)$$

Tento vztah platí pro všechna $m = 1, 2, 3, \dots$. Vynásobíme (2) pro $m = 1, 2, \dots, k$

$$a_3 a_4 \dots a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0} \right)^k \cdot a_2 a_3 \dots a_{k+1}$$

a po zkrácení

$$a_{k+2} = \left(\frac{p}{p - a_0} \right)^k a_2 \quad (3)$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots$. Poněvadž všechna čísla a_n jsou přirozená, musí být $p - a_0 > 0$, tedy $0 < a_0 < p$. Zároveň musí být buď p dělitelné číslem $p - a_0$, anebo musí být a_2 dělitelné libovolnou mocninou čísla $p - a_0$; obojí je však možné jen v tom případě, že

$$a_0 = p - 1. \quad (4)$$

Napišeme si nyní vztah (1) pro $n = 1$ s použitím (4):

$$\frac{p-1}{a_1} + \frac{p}{a_2} = 1,$$

tj.

$$p(a_1 + a_2) = (a_1 + 1)a_2. \quad (5)$$

Vidíme odtud, že buď číslo $a_1 + 1$, anebo číslo a_2 musí být násobkem prvočísla p .

I. Nechť tedy za prvé $a_1 + 1 = kp$ (k přirozené číslo). Dosadíme do (5); vyjde

$$\begin{aligned} p(kp - 1 + a_2) &= kpa_2, \\ kp - 1 + a_2 &= ka_2, \end{aligned}$$

takže

$$(kp - 1) = (k - 1)a_2.$$

Poněvadž k je přirozené a $p \geq 2$, je $kp > 1$, takže nemůže být $k = 1$; a můžeme dělit číslem $k - 1$. Dostaneme tak

$$a_2 = \frac{kp - 1}{k - 1} = p + \frac{p - 1}{k - 1}. \quad (6)$$

Poněvadž a_2 je přirozené, musí být číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$. Zároveň vidíme, že takovéto číslo a_2 není dělitelné číslem p .

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme ze vzorce (6) a z $a_1 = kp - 1$ dvojici čísel

$$a_1 = kp - 1, \quad a_2 = \frac{a_1}{k - 1};$$

poněvadž však a_0 je určeno v (4) a a_m pro $m > 2$ vzorcem (3), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

II. Necht $a_2 = kp$, k přirozené. Dosadíme do (5); vyjde

$$p(a_1 + kp) = (a_1 + 1)kp,$$

$$a_1 + kp = ka_1 + k,$$

$$a_1(k - 1) = k(p - 1).$$

Poněvadž $k \geq 1$ a $p \geq 2$, nemůže být $k = 1$; můžeme tedy dělit číslem $k - 1$:

$$a_1 = \frac{k(p - 1)}{k - 1} = p - 1 + \frac{p - 1}{k - 1}. \quad (7)$$

Poněvadž a_1 je přirozené číslo a $p \geq 2$, vidíme opět, že je číslo $p - 1$ dělitelné číslem $k - 1$.

Ke každému přirozenému číslu $k - 1$, jež je dělitelem čísla $p - 1$, dostaneme podle předchozího dvojici čísel

$$a_1 = p - 1 + \frac{p - 1}{k - 1}, \quad a_2 = kp;$$

poněvadž však čísla a_0 a a_m ($m > 2$) jsou pak plně určena vzorci (3) a (4), odpovídá každému přirozenému děliteli čísla $p - 1$ právě jedna posloupnost vyhovující úloze.

Zároveň je vidět, že posloupnosti, které dostaneme podle I a podle II jsou různé, neboť v případě II je a_2 dělitelné číslem p , kdežto v případě I tomu tak není.

Celkem tedy je počet různých posloupností vyhovujících úloze roven právě dvojnásobku počtu přirozených dělitelů čísla $p - 1$.

4. Určite všetky komplexné čísla z , ktoré vyhovujú nerovnosti

$$|z - |z + |z|| - |z| \sqrt{3} \geq 0 \quad (1)$$

a zobrazte ich v rovine komplexných čísel.

RIEŠENIE. Nerovnosť (1) je zrejme ekvivalentná s nerovnosťou

$$|z - |z + |z|||^2 \geq 3 |z|^2, \quad (2)$$

ktorej evidentne vyhovuje číslo $z = 0$. Nech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r > 0$, $\varphi \in <0; 2\pi)$ sú reálne čísla, je riešením nerovnosti (2). Potom zrejme platí

$$|r(\cos \varphi + i \sin \varphi) - |r(\cos \varphi + i \sin \varphi) + r||^2 \geq 3r^2,$$

skadiaľ po vynásobení číslom $\frac{1}{r^2}$ a vyjadrení absolútnej hodnoty vo vnútri výrazu na ľavej strane dostaneme

$$|\cos \varphi - \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + i \sin \varphi|^2 \geq 3,$$

čiže

$$\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} + 2(1 + \cos \varphi) + \sin^2 \varphi \geq 3.$$

Po jednoduchšej úprave máme

$$\cos \varphi \geq \cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}. \quad (3)$$

Z prevedených úprav je zrejmé, že číslo $z \neq 0$ vyhovuje nerovnosti (1) práve vtedy, keď jeho amplitúda $\varphi \in <0; 2\pi)$ splňuje vzťah (3).

Nerovnosti (3) vyhovujú zrejme všetky tie čísla φ , pre ktoré $\cos \varphi = 0$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Nech $\cos \varphi > 0$. Potom z (3) máme $1 \geq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}$, z čoho po umocnení na druhú a jednoduchšej úprave dostávame nerovnosť $\cos \varphi \leq -\frac{1}{2}$, ktorá je v spore s predpokladom, čo znamená, že uhly φ , pre ktoré $\cos \varphi > 0$ nerovnosti (3) nevyhovujú.

Nech $\cos \varphi < 0$, potom z (3) dostaneme

$$1 \leq \sqrt{2(1 + \cos \varphi)},$$

z čoho rovnakým postupom ako v predchádzajúcom prí-

pade dostaneme nerovnosť

$$-\frac{1}{2} \leq \cos \varphi < 0, \quad (4)$$

ktorej vyhovujú práve tie čísla φ z uvažovaného intervalu, pre ktoré platí jeden zo vzťahov

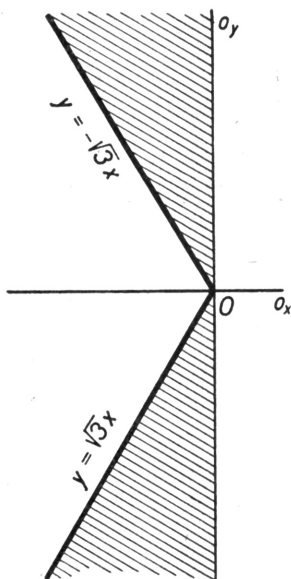
$$\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (5)$$

Pre riešenia nerovnosti (4) však zrejme platí:

$$2(1 + \cos \varphi) \geq 1 \text{ čiže } \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \geq 1 \text{ a}$$

$$\cos \varphi \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} \leq \cos \varphi, \text{ t. j. vyhovujú nerovnosti (3).}$$

Obr. 46



ZÁVER. Nerovnosti (1) vyhovuje číslo $z = 0$ a tie čísla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$, pre ktorých amplitúdy platí:

$$\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ resp.}$$

$$\frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \text{ (pozri obr. 46).}$$

INÉ RIEŠENIE. Ak použijeme vzťah $|z|^2 = z\bar{z}$, z nerovnosti (2) dostaneme

$$(z - |z + |z||) (\bar{z} - |\bar{z} + |\bar{z}||) \geq 3z\bar{z},$$

$$z\bar{z} - (z + \bar{z})|z + |z|| + |z + |z||^2 \geq 3z\bar{z},$$

$$- (z + \bar{z})|z + |z|| + (z + |z|)(\bar{z} + |\bar{z}|) \geq 2z\bar{z},$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$(z + \bar{z})(|z| - |z + |z||) \geq 0, \quad (6)$$

pričom je zrejmé, že nerovnosť (6) je ekvivalentná s nerovnosťou (2) a teda aj s nerovnosťou (1).

Nerovnosti (6) vyhovujú však len tie komplexné čísla z , pre ktoré platí buď

$$z + \bar{z} \geq 0, |z| - |z + |z|| \geq 0, \quad (7)$$

alebo

$$z + \bar{z} \leq 0, |z| - |z + |z|| \leq 0. \quad (8)$$

Nech platia nerovnosti (7). Z druhej z nich máme $|z| \geq |z + |z||$, z čoho po umocnení na druhú dostaneme $|z|^2 \geq (z + |z|)(\bar{z} + |\bar{z}|)$ čiže $|z|^2 \geq z\bar{z} + (z + \bar{z})|z| + |z|^2$, skadiaľ

$$(z + \bar{z})|z| \leq -|z|^2. \quad (9)$$

Vzhľadom na prvú z nerovností (7) vyhovuje však nerovnosti (9) zrejme len číslo $z = 0$, ktoré splňuje sústavu (7).

Ak platia nerovnosti (8), potom z druhej z nich analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostaneme postupne

$$|z| \leq |z + |z||, |z|^2 \leq (z + |z|)(\bar{z} + |\bar{z}|),$$

$$|z|^2 \leq z\bar{z} + (z + \bar{z})|z| + |z|^2, \quad \text{tj.}$$

$(z + \bar{z})|z| \geq -|z|^2$, z čoho pre $z \neq 0$ dostaneme

$$-|z| \leq z + \bar{z} \leq 0. \quad (10)$$

Číslo $z = 0$ vyhovuje však tiež nerovnosti (10) i predchádzajúcej nerovnosti. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (10). Potom je táto ekvivalentná s nerovnosťou

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2x \leq 0, \quad (11)$$

ktorej vyhovujú len tie dvojice reálnych čísel $[x, y]$, pre ktoré platí: $x \leq 0$, $x^2 + y^2 \geq 4x^2$ čiže $y^2 \geq 3x^2$, tj. $|y| \geq \sqrt{3}|x| = -\sqrt{3}x$. Z posledného vzťahu pre $y \geq 0$ vyplýva $y \geq -\sqrt{3}x$ a pre $y \leq 0$: zasa $y \leq \sqrt{3}x$. Obrátením postupu sa ľahko presvedčíme, že dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x \leq 0$ a $y \geq -\sqrt{3}x \geq 0$, resp. $y \leq \sqrt{3}x \leq 0$ vyhovujú nerovnosti (11).

ZÁVER: Nerovnosti (1) vyhovujú všetky tie komplexné čísla z , ktorých obrazy ležia v spoločnej časti polrovín $x \leq 0$, $y \leq \sqrt{3}x$, a polrovín $x \leq 0$, $y \geq -\sqrt{3}x$ (pozri obr. 46).

INÉ RIEŠENIE. Nech $z = x + iy$, kde x, y sú reál. čísla, je riešením nerovnosti (1). Po dosadení do nerovnosti (2), ktorá je s ňou ekvivalentná, dostaneme

$$|x + iy - |x + iy + \sqrt{x^2 + y^2}||^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

$$|x + iy - \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}|^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

$$x^2 - 2x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)} + 2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2) + y^2 \geq 3(x^2 + y^2),$$

z čoho po jednoduchšej úprave vyplýva

$$x\sqrt{x^2 + y^2} \geq x\sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)}. \quad (12)$$

Nerovnosti (12) vyhovujú zrejme všetky dvojice $[x, y]$ reál. čísel, kde $x = 0$, y je ľubovoľné.

Nech $x > 0$. Potom z (12) dostaneme

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne vyplýva

$$x^2 + y^2 \geq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 + 2x\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0,$$

čo však neplatí pre žiadnu dvojicu $[x, y]$, kde $x > 0$, pretože na ľavej strane je súčet dvoch kladných a jedného nezáporného čísla.

Nech $x < 0$, potom

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2)},$$

z čoho postupne máme

$$x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) + 2x\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 \geq -2x\sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad (13)$$

a pretože pre $x < 0$ je $\sqrt{x^2 + y^2} > 0$, je nerovnosť (13) ekvivalentná s nerovnosťou

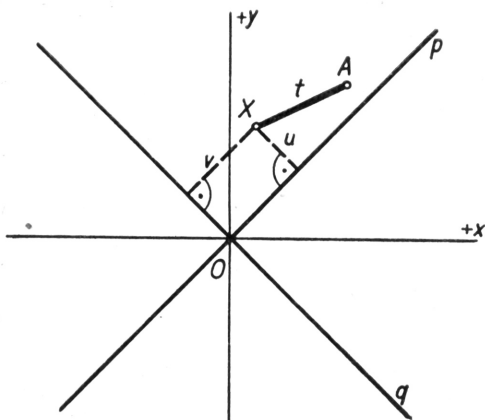
$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq -2x > 0,$$

ktorej vyhovujú všetky dvojice $[x, y]$, pre ktoré $x < 0$ a $y \geq -\sqrt{3}x$, resp. $y \leq \sqrt{3}x$, o čom sa presvedčíme podobne ako pri riešení nerovnosti (11).

5. Jsou dány dvě kolmice p, q a bod A jejich roviny, který neleží na žádné z nich. Označme vzdálenosti bodu X roviny přímek p, q od přímek p, q a bodu A po řadě u, v, t . Určete množinu všech takových bodů X , pro něž platí $t = \sqrt{uv}$.

[Návod: zvolte za osy souřadnic osy daných dvou různoběžek.]

ŘEŠENÍ. Zvolme osy souměrnosti přímek p, q za osy soustavy ortonormálních souřadnic. Orientaci os zvolme tak, aby bod A náležel 1. kvadrantu (obr. 47). Označme souřadnice $A = [x_0, y_0]$, $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $X = [x, y]$.



Obr. 47

Rovnice přímek p, q jsou pak $x \pm y = 0$. Podmínka pro body X hledané množiny zní

$$t^2 = uv. \quad (1)$$

Použijeme vzorců:

$$t^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad u = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}},$$

$$v = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Po dosazení z (2) do (1) dostaneme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{|x^2 - y^2|}{2}. \quad (3)$$

Z (3) plynou dvě rovnice — buď

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = x^2 - y^2, \quad (4)$$

nebo

$$2(x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2) = y^2 - x^2. \quad (5)$$

Po úpravě (4) dostaneme

$$(x - 2x_0)^2 + 3(y - \frac{2}{3}y_0)^2 = 4x_0^2 + \frac{4}{3}y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2. \quad (6)$$

Po úpravě (5) dostaneme

$$3(x - \frac{2}{3}x_0)^2 + (y - 2y_0)^2 = \frac{4}{3}x_0^2 + 4y_0^2 - 2x_0^2 - 2y_0^2. \quad (7)$$

Obráceně z (6) a (7) plyne (4) a (5), odtud (3), a tedy podle (2) i (1). Analytické vyjádření vyšetřované množiny je tedy dáno rovnicemi (6) a (7).

Označme $P_6(P_7)$ pravou stranu rovnice (6), (7) po dělení dvěma.

Pak je

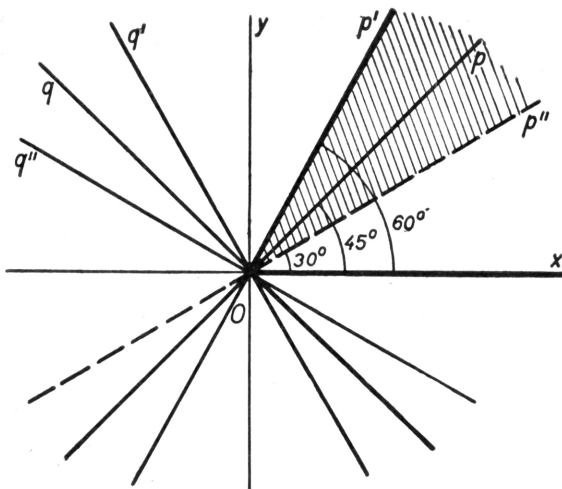
$$P_6 = x_0^2 - \frac{1}{3}y_0^2, \quad P_7 = y_0^2 - \frac{1}{3}x_0^2.$$

Upravíme

$$3P_6 = (x_0\sqrt{3} - y_0)(x_0\sqrt{3} + y_0), \quad (6')$$

$$P_7 = \left(y_0 - \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right)\left(y_0 + \frac{x_0}{\sqrt{3}}\right). \quad (7')$$

$P_6 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p', q' , které mají od osy x odchylku 60° . $P_7 = 0$ je analytickým vyjádřením dvou přímek p'', q'' , které mají od osy x odchylku 30° (obr. 48). Nerovnost $P_6 \geq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel s tlustě vytaženými rameny, nerovnost $P_7 \geq 0$ vyjadřuje v 1. kvadrantě úhel sevřený čárkovaným ramenem a polopřímkou $+y$.



Obr. 48

Vyšetřovaná množina bodů je tedy dána touto tabulkou

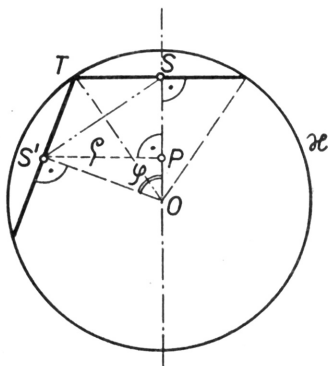
Bod A leží	Vyšetřovaná množina bodů je
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p'y$ nebo na rameni y	Elipsa (7)
Na rameni p'	Elipsa (7) a bod $\left[2x_0, \frac{2}{3}y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p'p''$	Elipsa (6) a elipsa (7)
Na rameni p''	Elipsa (6) a bod $\left[\frac{2}{3}x_0, 2y_0\right]$
Uvnitř úhlu $\sphericalangle p''x$ nebo na rameni x	Elipsa (6)

Symetriemi podle os a počátku dostaneme situaci v ostatních kvadrantech.

6. Je dána kulová plocha o poloměru délky 1. Na této kulové ploše jsou umístěny shodné kružnice $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n (n \geq 3)$ o poloměru r . Kružnice k_0 se dotýká ^{x)} každé z kružnic $k_1, k_2, \dots, k_n$. Dále se dotýkají ^{x)} každé dvě kružnice k_i, k_{i+1} , kde $i = 1, 2, \dots, n$, přičemž kružnice k_{n+1} a k_1 jsou totožné.

a) Najděte vztah, který platí mezi čísly r, n .

b) Zjistěte, pro která n může nastat popsaná situace a vypočítejte příslušný poloměr r .



Obr. 49

ŘEŠENÍ. a) Necht' kružnice k, k' o poloměru r leží na dané kulové ploše a mají dotyk. Jejich středy S, S' a středem O kulové plochy je určena rovina σ , která protne kulovou plochu v hlavní kružnici x ; situaci v rovině σ znázorňuje obr. 49. Označíme T bod dotyku kružnic k, k' ; bod T leží zřejmě v rovině σ . Protože je $TS = TS' = r$, $OT = 1$, dostaneme z pravoúhlého trojúhelníka OST ($OS'T$)

$$OS = OS' = \sqrt{1 - r^2}. \quad (1)$$

Pro vzdálenost $a = SS'$ vyjde z deltoidu $OSTS'$ (po-

*) „Dotykem“ dvou kružnic (neležících v rovině) rozumíme případ, kdy obě kružnice mají jediný společný bod a v něm společnou tečnu.

rovnáním dvojího vyjádření obsahu)

$$\frac{1}{2} a = r \sqrt{1 - r^2},$$

neboli

$$a = 2r \sqrt{1 - r^2}. \quad (2)$$

Označme podle obr. 49 $\varphi = \angle SOS'$; z trojúhelníka $\triangle OST$ plyne

$$\sin \frac{\varphi}{2} = r. \quad (3)$$

Středy všech kružnic $k_0, k_1, \dots, k_n$ jsou podle předchozího vrcholy pravidelného jehlanu n -bokého, jehož všechny hrany mají délku a . Poloměr ϱ kružnice opsané podstavě tohoto jehlanu (je to pravidelný n -úhelník o straně a) je roven délce úsečky $S'P \perp OS$ (obr. 49). Z pravoúhlého trojúhelníka $OS'P$ plyne

$$\varrho = S'P = OS' \sin \varphi = \sqrt{1 - r^2} \cdot \sin \varphi \quad (4)$$

tj.

$$\varrho = \sqrt{1 - r^2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

a podle (3)

$$\varrho = 2r(1 - r^2). \quad (5)$$

Pro pravidelný n -úhelník o straně a a poloměru ϱ opsané kružnice dostaneme

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2\varrho},$$

tj. podle (2) a (5)

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2 \sqrt{1 - r^2}}. \quad (6)$$

Rovnice (6) je řešením úlohy a).

b) Z obr. 49 je patrné, že je $S'P < S'S$, neboli $\varrho < a$.

Protože je $r < 1$, je $\sqrt{1-r^2} < 1$, a tedy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} > \frac{1}{2}$.

Podle (6) je

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

neboť $\frac{\pi}{n}$ je velikost ostrého úhlu. Z nerovností (7) dostáváme řešení $n = 3, 4, 5$. Sestavíme tabulku

n	3	4	5
$\sin \frac{\pi}{n}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 36^\circ$
r	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 - \frac{1}{4 \sin^2 36^\circ}$