

20. ročník matematické olympiády

IV. Sůtažné úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor): 20. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1970-1971. 13. Mezinárodní matematická olympiáda. (Slovak). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. pp. 93-122.

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

IV. Súťažné úlohy II. kola

1. RIEŠENIA ÚLOH KATEGÓRIE A

1a. Nech $n > 1$ je prirodzené číslo, $a \geq 1$ reálne číslo a nech pre reálne čísla x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ platí:

$$x_1 = 1, \quad \frac{x_{k+1}}{x_k} = a + \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad (1)$$

pričom čísla α_k vyhovujú nerovnosti

$$|\alpha_k| \leq \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Potom platí: $\sqrt[n-1]{x_n} < a + \frac{1}{n-1}$; dokážte.

(Použite známu nerovnosť: Pre ľubovoľné nezáporné reálne čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ platí:

$$\sqrt[m]{b_1 b_2 \dots b_m} \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_m}{m}.) \quad (5 \text{ bodov})$$

RIEŠENIE. Z (1) jednoduchým výpočtom dostaneme

$$x_n = (a + \alpha_1) \dots (a + \alpha_{n-1}). \quad (3)$$

Keďže z (2) pre každé $k = 1, 2, \dots, n-1$ vyplýva

$$a + \alpha_k \geq 1 - \frac{1}{k(k+1)} > 0,$$

dostaneme z (3) na základe vety o geometrickom a arit-

metickom priemere

$$\begin{aligned}\sqrt[n-1]{x_n} &= \sqrt[n-1]{(a + \alpha_1) \dots (a + \alpha_{n-1})} \leq \\ &\leq \frac{(n-1)a + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k}{n-1}\end{aligned}$$

čiže

$$\sqrt[n-1]{x_n} \leq a + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}}{n-1}. \quad (4)$$

Zrejme však platí

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

na základe čoho už zo (4) vyplýva nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

1b. Vyšetrite množinu všetch bodů v rovině, jejichž pravouhlé souřadnice x, y splňují soustavu nerovnic

$$|x| < 2, \quad |y| < 2, \quad (1)$$

$$\cos \pi xy \leq 0, \quad (2)$$

$$\cos \pi(x^2 - y^2) \leq 0. \quad (3)$$

Načrtněte obrázek. (5 bodů)

ŘEŠENÍ. A) Množinou všech bodů, pro které je splněno (1), je vnitřek čtverce, který omezuje přímky

$$x = 2, \quad x = -2, \quad y = 2, \quad y = -2.$$

B) Z nerovnice (2) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi xy \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leq xy \leq 2k + \frac{3}{2},$$

kde k je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (2), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$xy = 2k + \frac{1}{2}, \quad xy = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \quad (4)$$

a na těchto hyperbolách.

C) Z nerovnice (3) plyne

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi(x^2 - y^2) \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

tj.

$$2k + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 \leq 2k + \frac{3}{2},$$

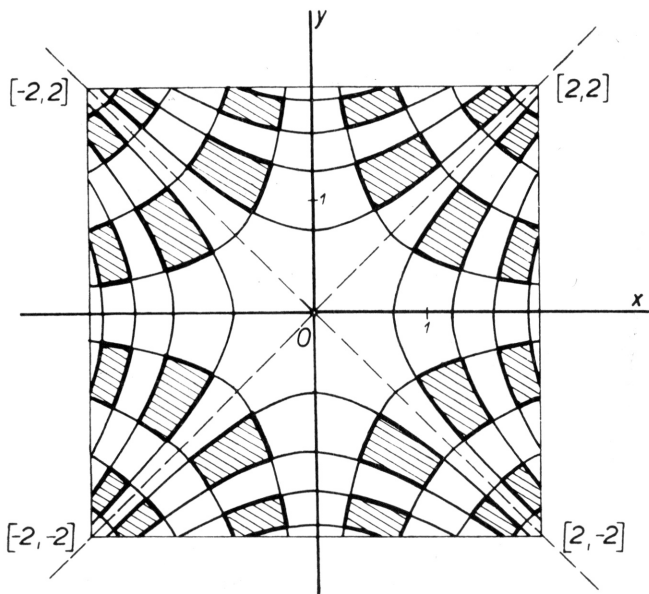
kde k je celé číslo. Množinou všech bodů, pro které je splněno (3), jsou všechny body ležící mezi rovnoosými hyperbolami

$$x^2 - y^2 = 2k + \frac{1}{2}, \quad x^2 - y^2 = 2k + \frac{3}{2}, \quad k \text{ celé číslo}, \quad (5)$$

a na těchto hyperbolách.

D) Hledaná množina je průnikem množin nalezených v A), B), C). Na obr. 32 je vyšrafována. Při určování tohoto průniku stačí v případě B) uvažovat jen body mezi hyperbolami (4) a na nich pro

$k = -2, -1, 0, 1$, neboť pro $k \geq 2$ ($k \leq -3$) platí



Obr. 32

$xy \geq \frac{9}{2} \left(xy \leq -\frac{9}{2} \right)$, takže je $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

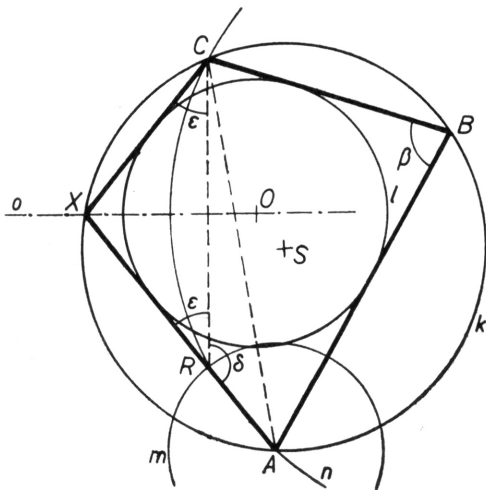
Podobně v případě C) stačí uvažovat jen body mezi hyperbolami (5) a na nich pro $k = -2, -1, 0, 1$, neboť pro $k \geq 2$ ($k \leq -3$) je $x^2 - y^2 \geq \frac{9}{2} \left(x^2 - y^2 \leq -\frac{9}{2} \right)$, takže $|x| > 2$ nebo $|y| > 2$.

2a. Je dán $\triangle ABC$. Sestrojte všechny takové body X , které mají tu vlastnost, že čtyřúhelníku s vrcholy A, B, C ,

X lze opsat i vepsat kružnici. Konstrukci proveďte eukleidovsky (tj. kružítkem a pravítkem).

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Rozbor (obr. 33). Budiž k kružnice opsaná $\triangle ABC$. Hledané body X potom leží na k . Necht' čtyřúhelník $ABCX$, jehož vrchol X leží uvnitř oblouku AC



Obr. 33

neobsahující bod B , splňuje podmínky úlohy. Protože jde o čtyřúhelník tečnový, platí

$$AB + CX = BC + AX$$

čili

$$AB - BC = AX - CX = d, \quad (1)$$

což je konstanta.

a) Jestliže

$$AB = BC,$$

je

$$AX - CX = 0,$$

tj. bod X leží na ose úsečky AC . V případě a) je tedy KONSTRUKCE bodu X jednoduchá: Bod X je průsečíkem osy úsečky AC s vyšetřovaným obloukem AC , a to zřejmě vždy jediným.

b) Necht' např. $AB > BC$, potom body X , pro něž platí (1), leží na té větvi hyperboly s ohnisky A, C a s hlavní osou d , která obsahuje bod B . Určení průsečíku příslušné větve hyperboly s uvažovaným obloukem by byla *jen přibližná* konstrukce.

Bod X je však vrcholem trojúhelníka ACX daného stranou AC , úhlem $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \beta$ a rozdílem stran $AX - CX = d$. Tuto *pomocnou úlohu* vyřešíme nejprve:

Předpokládejme, že trojúhelník ACX na obr. 33 je řešením této pomocné úlohy. Rozdíl $AX - CX = d$ sestrojíme jako úsečku $AR = AX - XC$. Potom trojúhelník RCX je rovnoramenný; jeho úhly při základně RC mají velikost $\varepsilon = \frac{1}{2} [180^\circ - (180^\circ - \beta)] = \frac{1}{2} \beta$. Potom úhel $\sphericalangle CRA = \delta = 180^\circ - \frac{1}{2} \beta$ je tupý, úsečka $AR = AX - CX$ je menší než AC (z trojúhelníka ACX). Je tedy bod R sestrojitelný podle S_{su} v pomocném obrázku nebo jako průsečík kružnice $m = (A; d)$ a menšího oblouku příslušného úhlu $\delta = 180^\circ - \frac{1}{2} \beta$ nad třetivou AC , který leží v polorovině opačné k polorovině ACB . Bod X je pak společným bodem uvažovaného oblouku AC a osy o úsečky RC . Z toho vyplývá KONSTRUKCE:

1. Sestrojíme kružnici k opsanou $\triangle ABC$.
2. Sestrojíme kružnici $m = (A; d)$ a oblouk n příslušný úhlu δ (viz rozbor).
3. $R = m \cap n$ v polorovině opačné k polorovině ACB .
4. Sestrojíme osu o úsečky CR .
5. $X = o \cap \widehat{AC}$ (na k v polorovině opačné k ACB).
6. $ABCX$ je hledaný čtyřúhelník.

ZKOUŠKA. Obrácením výpočtu z rozboru vyplývá, že $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \beta$ a tedy $ABCX$ je tětíkový čtyřúhelník. Podle konstrukce je $AB - CB = d = AR = AX - CX$, a tedy $AB + CX = AX + CB$, čili $ABCX$ je tečnový čtyřúhelník.

DISKUSE. V uvedené konstrukci má každý krok právě jeden výsledek, takže na uvažovaném oblouku dostaneme jediný bod X . Obdobnou konstrukcí i pro zbývající oblouky AB a BC dostaneme po jednom bodu X . Celkem má tedy úloha tři řešení.

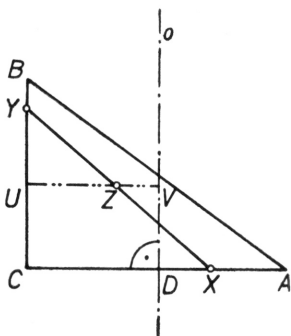
Obdobně tři řešení dostaneme i v případě a).

2b. Je daný pravouhlý trojúhelník ABC s preponou AB . Na odvesne AC zvolme bod X , na odvesne BC zvolme bod Y . V rovine ABC zostrojme kružnicu s priemerom XY .

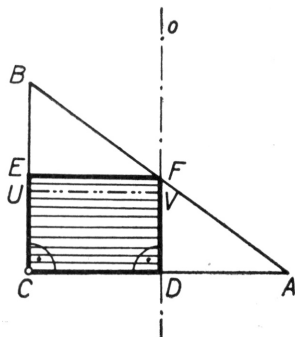
Určite množinu $\mathbf{P}$ všetkých bodov všetkých takto zostrojených kružníc. (6 bodov)

RIEŠENIE. I. Označme $\mathbf{K}$ množinu všetkých kružníc roviny ABC , ktoré boli zostrojené podľa textu úlohy. Dokážeme, že množina stredov všetkých kružníc z $\mathbf{K}$ je pravouholník $CDFE$ bez bodu C , pričom D, E, F sú v uvedenom poradí stredy strán AC, BC, AB (obr. 34a, b).

Skutočne, ak je Y pevný bod odvesny BC a ak prebieha X odvesnu AC , prebieha stred Z úsečky XY úsečku



a)



b)

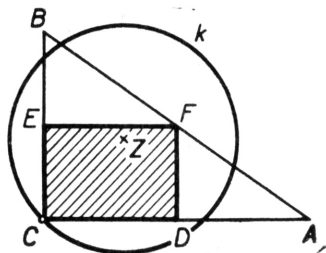
Obr. 34

$UV \parallel AC$, kde U je bod odvesny BC , V bod osi o úsečky AC . Ak je $Y = C$, je treba vylúčiť prípad $X = C$. Ku každému bodu Y odvesny BC je teda priradená jediná úsečka UV (obr. 34a) a všetky tieto úsečky UV vyplnia pravouholník $CDFE$ bez bodu C . Túto skutočnosť možno jednoducho dokázať tiež metódou súradníc, ak zvolíme za súradnicové osi kartézskej sústavy súradníc priamky AC , BC .

II. Stredom každej kružnice k z $\mathbf{K}$ je teda nejaký bod Z z pravouholníka $CDFE$ (mimo C) a pre jej polomer CZ platí (obr. 35)

$$CZ \leqslant BZ, \quad CZ \leqslant AZ,$$

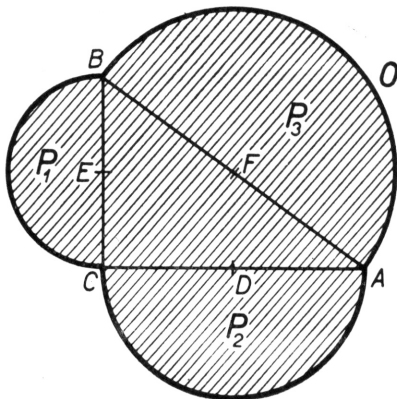
pretože priamky DF , EF sú v uvedenom poradí osi strán AC , BC . Preto kružnica k pretína úsečku AC i BC (pokiaľ sa priamok AC alebo BC v bode C nedotýka) okrem bodu C ešte v jej



Obr. 35

vnútornom bode. Analogické tvrdenie platí pre jej priesečníky s preponou AB , ak ovšem existujú.

Intuitívne zistíme: Hľadanou množinou $\mathbf{P}$ je obrazec $\mathbf{O}$, ktorý sa skladá z trojuholníka ABC a z troch polkruhov zostrojených nad priermi AB , AC , BC (obr. 36). Tieto polkruhy sú ohraňované kružnicami z $\mathbf{K}$, ktoré

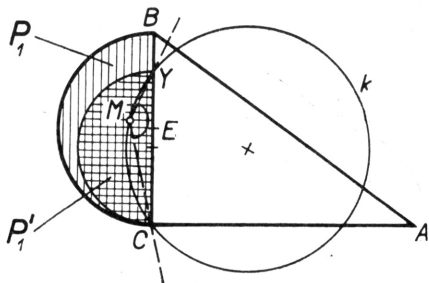


Obr. 36

majú stredy v bodoch D , E , F . Dokážeme teraz, že každý bod každej kružnice k z $\mathbf{K}$ patrí do obrazca $\mathbf{O}$. Ak kružnica k neleží v $\triangle ABC$, potom tá jej časť, ktorá leží napr. v polkruhu $\mathbf{P}_1$ (obr. 37), je polkružnica alebo menší oblúk nad tetivou CY , ktorá je časťou príslušnej strany trojuholníka ABC , t. j. odvesny BC . Ak je M ľubovoľný bod tohto oblúka kružnice k , je $\sphericalangle CMY$ pravý alebo tupý a patrí preto do polkruhu $\mathbf{P}_1'$ zostrojeného nad priemerom CY a teda aj do polkruhu $\mathbf{P}_1$. Analogická úvaha platí pre polkruhy $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$.

III. Zostáva dokázať, že každý bod M obrazca $\mathbf{O}$ patrí

aspoň jednej kružnici k z $\mathbf{K}$, t. j. kružnici, ktorá prechádza bodom C a jej stredom je niektorý bod Z pravouholníka $CDEF$ (okrem bodu C). K tomu stačí dokázať, že os p úsečky CM (predpokladáme $C \neq M$), má s pra-



Obr. 37

vouholníkom $CDEF$ aspoň jeden spoločný bod Z . Pre hraničné body obrazca $\mathbf{O}$ nie je treba nič dokazovať. Pre každý iný bod M polkruhu $\mathbf{P}_3$ a $\triangle ABC$ (ktorý leží v doplnkovom polkruhu) platí $MF < CF$. Preto medzi bodmi C, F leží aspoň jeden bod osi p .*) Os p obsahuje teda vždy aspoň jeden bod pravouholníka $CDFE$.

ZÁVER. Hľadaná množina $\mathbf{P}$ je množina všetkých bodov obrazca $\mathbf{O}$ (pozri obr. 36).

POZNÁMKA. Nie je výhodné riešiť túto úlohu metódou súradníc, pretože výsledný obrazec nemá v súradniciach jednoduché vyjadrenie.

3a. Mějme posloupnost celých čísel

*) Analogicky pre každý nehraničný bod polkruhu $\mathbf{P}_1$ ($\mathbf{P}_2$) platí $ME < CE$ ($MD < DC$) a preto medzi bodmi C, E (C, D) leží aspoň jeden bod osi p .

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad (1)$$

v níž pro všechna $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_1 a_n. \quad (2)$$

a) Může být taková posloupnost posloupností aritmetickou?

b) Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby v takové posloupnosti platilo

$$a_{n+k} + a_{n-k} = a_k a_n \quad (3)$$

pro všechna $n, k, n \geq k \geq 0$.

c) Jestliže $a_0 = 2$, pak existuje komplexní číslo z takové, že pro všechna $n \geq 0$ je

$$a_n = z^n + z^{-n}; \quad (4)$$

dokažte.

(7 bodů)

ŘEŠENÍ. a) Ano, může. Např. posloupnost (1), ve které je $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, je aritmetická (s diferencí 0) a vyhovuje (2). Kromě toho také všechny posloupnosti (1) splňující (2), v nichž je $a_1 = 2$, jsou aritmetické, jak je ihned vidět, napíšeme-li (2) ve tvaru

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

POZNÁMKA. Lze dokázat, že toto jsou také všechny aritmetické posloupnosti vyhovující (2).

b) Vztah (3) platí pro všechna $n \geq k \geq 0$ právě tehdy, jestliže je buď $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, anebo $a_0 = 2$.

DŮKAZ. I. Jestliže je $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$, platí (3) triviálně.

II. Nechť $a_0 = 2$. Potom (3) platí pro všechna $n \geq 0$ a $k = 0$. Pro $k = 1$ je však (3) totéž co (2). Obecnou platnost (3) dokážeme nyní indukcí. Předpokládejme, že (3)

platí pro $k = 0, 1, \dots, m$, kde $m \geq 1$, a dokážeme, že platí také pro $k = m + 1$. Jest

$$\begin{aligned} a_{n+m+1} + a_{n-m-1} &= a_{n+m+1} + a_{n+m-1} - a_{n+m-1} + \\ &+ a_{n-m-1} + a_{n-m+1} - a_{n-m+1} = \\ &= (a_{n+m+1} + a_{n+m-1}) + (a_{n-m-1} + a_{n-m+1}) - \\ &- (a_{n+m-1} + a_{n-m+1}). \end{aligned}$$

Na první dvě závorky aplikujeme (2), na třetí závorku pak (3) pro $k = m - 1$.

Dostaneme

$$a_1 a_{n+m} + a_1 a_{n-m} - a_{m-1} a_n = a_1 (a_{n+m} + a_{n-m}) - a_{m-1} a_n.$$

Znovu užijeme (3) pro $k = m$ a máme

$$a_1 a_n a_m - a_{m-1} a_n = a_n (a_1 a_m - a_{m-1}).$$

Avšak podle (2) je

$$a_1 a_m - a_{m-1} = a_{m+1},$$

takže celkem

$$a_{n+m+1} + a_{n-m-1} = a_{m+1} a_n,$$

což jsme měli dokázat. Vztah (3) tedy při $a_0 = 2$ platí pro všechna $n \geq k \geq 0$.

III. Nechť platí (3) pro všechna $n \geq k \geq 0$ a nechť není $a_n = 0$ pro všechna $n \geq 0$. Budiž m takové, že $a_m \neq 0$. Položíme-li v (3) $n = m$, $k = 0$, dostaneme

$$2a_m = a_m + a_m = a_{m+0} + a_{m-0} = a_0 a_m,$$

a tedy nutně $a_0 = 2$.

c) Vezmeme kvadratickou rovnici

$$x^2 - a_1 x + 1 = 0. \quad (5)$$

Součin jejích kořenů je roven 1, jejich součet je a_1 . Označme z jeden z těchto kořenů; druhý kořen bude pak z^{-1} a bude

$$z + z^{-1} = a_1.$$

Poněvadž pak zřejmě $z^0 = 1$, $(z^{-1})^0 = 1$, a tedy

$$z^0 + z^{-0} = 2 = a_0,$$

vidíme, že — při této volbě čísla z — platí (4) pro $n = 0, 1$. Indukcí dokážeme, že pak platí pro všechna $n \geq 0$. Předpokládejme, že (4) platí pro všechna $n = 0, 1, 2, \dots, m$; $m \geq 1$, a dokážeme, že platí i pro $n = m + 1$. Podle (2) máme

$$a_{m+1} = a_1 a_m - a_{m-1}$$

a tedy podle (4) pro $n = m$ a $n = m - 1$ jest

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= (z + z^{-1})(z^m + z^{-m}) - (z^{m-1} + z^{1-m}) = \\ &= z^{m+1} + z^{m-1} + z^{1-m} + z^{-m-1} - z^{m-1} - z^{1-m} = \\ &= z^{m+1} + z^{-m-1}, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat. Platí tedy (4) pro všechna $n \geq 0$, jestliže za z zvolíme jeden (kterýkoli) kořen rovnice (5).

3b. Je daný štvorsten $ABCD$. Vo vnútri jeho steny ABC zvolte bod M a veďte ním priamky $MC_1 \parallel CD$, $MB_1 \parallel BD$, $MA_1 \parallel AD$, kde C_1 , B_1 , A_1 sú priesečníky s rovinami ABD , ACD , BCD .

a) Dokážte, že pre každý taký bod M platí

$$\frac{MA_1}{AD} + \frac{MB_1}{BD} + \frac{MC_1}{CD} = 1. \quad (1)$$

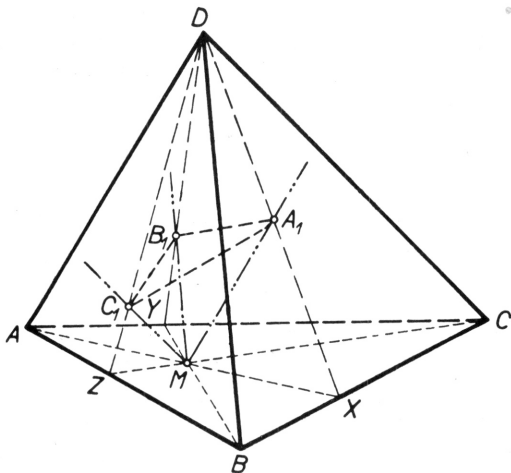
b) Vyjadrite pomer objemov štvorstenov $A_1B_1C_1M$ a $ABCD$ len pomocou veľkostí úsečiek AD , BD , CD , MA_1 , MB_1 , MC_1 .

c) Zistite, ako treba zvoliť bod M , aby objem štvorstena $A_1B_1C_1M$ bol maximálny. (7 bodov)

RIEŠENIE. Body A_1 , B_1 , C_1 ležia na priesečniciach rovín AMD a BCD , BMD a ACD , CMD a ABD .

(Pozri obr. 38.) Označme veľkosti úsečiek $MA_1 = a_1$, $MB_1 = b_1$, $MC_1 = c_1$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$.

a) Štvorsteny $MBCD$, $ABCD$ majú spoločnú podstavu



Obr. 38

a preto ich objemy sú v pomere veľkostí ich výšok, t. j.

$$\frac{\text{objem } MBCD}{\text{objem } ABCD} = \frac{a_1 \cdot \sin \varepsilon}{a \cdot \sin \varepsilon} = \frac{a_1}{a} \quad (2a)$$

kde ε je odchýlka AD a BCD . Pre štvorsteny $MACD$ a $MABD$ analogicky dostaneme

$$\frac{\text{objem } MACD}{\text{objem } ABCD} = \frac{b_1}{b}, \quad \frac{\text{objem } MABD}{\text{objem } ABCD} = \frac{c_1}{c}. \quad (2b, c)$$

Sčítaním rovností (2a, b, c) dostaneme

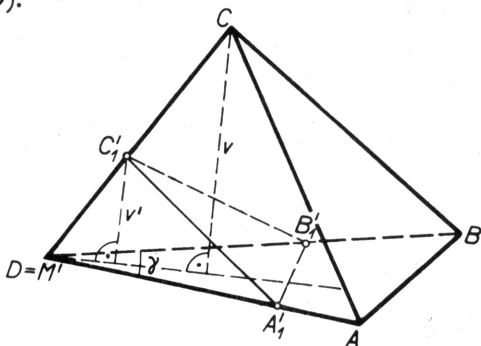
$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} = 1,$$

čo je už rovnosť (1).

b) Platí

$$\sphericalangle A_1MB_1 = \sphericalangle ADB = \gamma, \quad \sphericalangle A_1MC_1 = \sphericalangle ADC, \\ \sphericalangle C_1MB_1 = \sphericalangle CDB$$

a možno preto zostrojiť štvorsten $M'A'_1B'_1C'_1$ zhodný so štvorstenom $MA_1B_1C_1$, pričom $M' \equiv D$, A'_1 , B'_1 , C'_1 ležia v uvedenom poradí na polpriamkach DA , DB , DC (obr. 39).



Obr. 39

Nech v je výška štvorstena $ABCD$ z vrcholu C na stenu ABD a v' výška štvorstena $A'_1B'_1C'_1M'$ z vrcholu C'_1 na stenu $M'A'_1B'_1$. Potom

$$\frac{v'}{v} = \frac{c_1}{c}, \quad \text{t. j.} \quad v' = \frac{c_1}{c} \cdot v.$$

Objem V štvorstena $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma \right) \cdot v,$$

objem V' štvorstena $A_1'B_1'C_1'M'$ a teda tiež štvorstena $A_1B_1C_1M$ je

$$V' = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \gamma \right) \cdot \frac{c_1}{c} \cdot v,$$

t. j.

$$\frac{V'}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a \cdot b \cdot c}.$$

c) Objem V' bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálny súčin $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c}$. Keďže súčet všetkých troch faktorov sa rovná jednej, zo vzťahu medzi aritmetickým a geometrickým priemerom nezáporných čísel $\frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{b}, \frac{c_1}{c}$ vyplýva nerovnosť $\frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} \cdot \frac{c_1}{c} \leq \frac{1}{27}$, takže

$$V' \leq \frac{1}{27} V,$$

pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{1}{3}$ čiže pre

$$\frac{MX}{AX} = \frac{MY}{BY} = \frac{MZ}{CZ} = \frac{1}{3}$$

(pozri obr. 38). Z rovnobežnosti úsečiek AB a XY so stredom rovnobežnosti M a koeficientom -2 vyplýva, že X, Y sú stredy strán BC, AC , takže bod M je ťažisko trojuholníka ABC .

ZÁVER. Objem V' štvorstena $A_1B_1C_1M$ je maximálny práve vtedy, keď bod M je ťažiskom trojuholníka ABC .

2. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE B

1a. Necht p, q jsou prvočísla větší než 3. Potom číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 \quad (1)$$

není prvočíslem; dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Dosadíme-li do výrazu (1) několik dvojic prvočísel p, q větších než 3, dostaneme vždy číslo větší než 3 a přitom dělitelné 3. Nabízí se nám domněnka, že pro každou dvojici prvočísel p, q větších než 3 je číslo (1) větší než 3 a dělitelné třemi. Dokážeme-li ji, znamená to, že číslo (1) není prvočíslo.

Pro $p > 3$ a $q > 3$ je číslo

$$p^2 + 7q^2 - 23 > 9 + 63 - 23 > 3. \quad (2)$$

Protože p, q jsou prvočísla větší než 3, není žádné z nich dělitelné 3, a proto je lze psát ve tvaru

$$p = 3k \pm 1, \quad q = 3l \pm 1,$$

kde p, q jsou vhodná přirozená čísla. Platí

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (3k \pm 1)^2 + 7(3l \pm 1)^2 - 23 = \\ &= (9k^2 \pm 6k + 1) + 7 \cdot (9l^2 \pm 6l + 1) - 23 = \\ &= 3 \cdot (3k^2 \pm 2k + 21l^2 \pm 14l - 5). \end{aligned} \quad (3)$$

Podle (2) a (3) tedy číslo (1) není prvočíslo.

JINÉ ŘEŠENÍ. Každé prvočíslo větší než 3 je tvaru $6k + 1$ nebo $6k - 1$. Necht tedy $p = 6k \pm 1, q = 6m \pm 1$. Potom číslo

$$\begin{aligned} p^2 + 7q^2 - 23 &= (36k^2 \pm 12k + 1) + \\ &+ 7 \cdot (36m^2 \pm 12m + 1) - 23 = \\ &= 12 \cdot (3k^2 \pm k + 21m^2 \pm 7m) - 15 \end{aligned}$$

je zřejmě dělitelné 3, a tedy vzhledem k (2) není prvočíslem.

1b. Sú dané štyri rôzne body A, B, C, D v priestore. Pre každý bod X priestoru platí

$$AX + BX + CX + DX > \frac{1}{3}(AB + AC + AD + BC + BD + CD).$$

Dokážte.

(5 bodov)

RIEŠENIE. Ak je X ľubovoľný bod priestoru, potom podľa trojuholníkovej nerovnosti platí:

$$AX + BX \geq AB, \quad (a)$$

$$AX + CX \geq AC, \quad (b)$$

$$AX + DX \geq AD, \quad (c)$$

$$BX + CX \geq BC, \quad (d)$$

$$BX + DX \geq BD, \quad (e)$$

$$CX + DX \geq CD. \quad (f)$$

Rovnosť v nerovnosti (a) nastáva práve vtedy, keď je X bodom úsečky AB a analogicky je tomu v ostatných prípadoch. Keďže body A, B, C, D sú podľa predpokladu navzájom rôzne, nemôže v nerovnostiach (a) – (f) nastať rovnosť vo všetkých súčasne. Ich sčítaním preto dostaneme

$$3(AX + BX + CX + DX) > AB + AC + AD + BC + BD + CD,$$

skadiaľ po vynásobení $\frac{1}{3}$ už dostávame nerovnosť, ktorej správnosť sme mali dokázať.

2a. Nech n je dané prirodzené číslo. Nájdite všetky skupiny siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel tej vlastnosti, že súčin všetkých čísel skupiny je menší než n^7 . (6 bodov)

RIEŠENIE. Súčin prvých siedmich prirodzených čísel za sebou nasledujúcich je $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$

$= 5040$. Je zrejmé väčší než $2^7 = 128$ i ako $3^7 = 2187$, ale je menší než $4^7 = 16\,384$. Najmenším prirodzeným číslom n , pre ktoré má daná úloha riešenie, je teda číslo 4. Vzhľadom na to, že najbližší väčší súčin siedmich za sebou nasledujúcich prirodzených čísel je $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320 > 4^7$, je to aj riešenie jediné.

Ukážeme, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n > 4$ má daná úloha práve týchto $n - 3$ riešení:

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]; [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]; \dots [n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3]. \quad (1)$$

K tomu stačí, aby sme ukázali, že súčin všetkých čísel poslednej skupiny je menší než n^7 , ale súčin všetkých čísel skupiny

$$[n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4],$$

ktorá je nasledujúcou skupinou prichádzajúcou do úvahy, je už väčší než n^7 .

Platí však

$$\begin{aligned} (n - 3)(n + 3) &= n^2 - 9 < n^2, \\ (n - 2)(n + 2) &= n^2 - 4 < n^2, \\ (n - 1)(n + 1) &= n^2 - 1 < n^2, \\ n &= n; \end{aligned}$$

z čoho vynásobením ľavých a pravých strán nerovností, resp. rovností, dostaneme

$$(n - 3)(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) < n^7.$$

Na druhej strane pre $n > 4$ platí:

$$\begin{aligned} (n - 2)(n + 4) &= n^2 + 2n - 8 > n^2, \\ (n - 1)(n + 3) &= n^2 + 2n - 3 > n^2, \\ (n + 2)(n + 1)n &= n^3 + 3n^2 + 2n > n^3; \end{aligned}$$

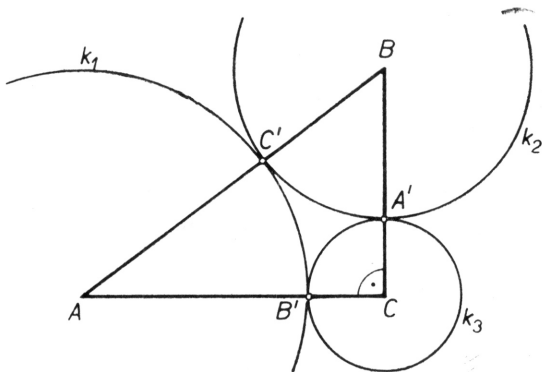
z čoho opäť vynásobením ľavých i pravých strán nerovností máme

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4) > n^7.$$

ZÁVER. Úloha má pre $n \geq 4$ práve $n - 3$ riešení uvedených v (1). Pre $n \leq 3$ úloha riešenie nemá.

2b. Je dán pravoúhlý trojuholník ABC s odvěsnami $AC = 4$, $BC = 3$. Kružnice k_1 , k_2 , k_3 mají středy ve vrcholech A , B , C a každé dvě z nich mají vnější dotyk.

- Vypočtete poloměry kružnic k_1 , k_2 , k_3 a sestrojte je.
- Vypočtete poloměr kružnice, která má s každou z kružnic k_1 , k_2 , k_3 vnější dotyk. (6 bodů)



Obr. 40

ŘEŠENÍ. a) Označme r_1 , r_2 , r_3 poloměry kružnic k_1 , k_2 , k_3 . Pak je (obr. 40)

$$r_1 + r_2 = c, \quad r_2 + r_3 = a, \quad r_3 + r_1 = b. \quad (1)$$

Protože $a = 3$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, dostaneme z (1)

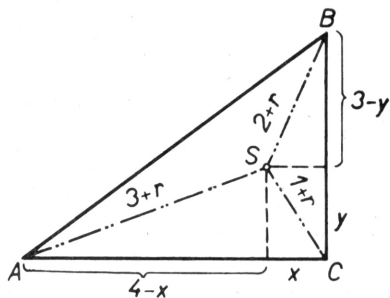
$$r_1 + r_2 = 5, \quad r_1 - r_2 = b - a = 1$$

a dále $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Kružnice k , která se dotýká obou odvěsen v bodech A' , B' (viz obr. 40), má poloměr $A'C = B'C = 1$. Poněvadž kružnice vepsaná trojúhelní-

ku ABC má také poloměr $\varrho = 1$ (obsah $\triangle ABC$ je $P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, poloviční obvod je $s = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$, $\varrho = \frac{P}{s} = 1$) a dotýká se také obou odvěsen

v bodech A' , B' , je k kružnice vepsaná trojúhelníku ABC . Pomocí vepsané kružnice k sestrojíme tyto body dotyku A' , B' , C' kružnic k_1 , k_2 , k_3 .

b) Označme k_0 kružnici, která má s každou z kružnic k_1 , k_2 , k_3 vnější dotyk, S její střed, r její poloměr. Pak je podle obr. 41



Obr. 41

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 + r)^2, & (4 - x)^2 + y^2 &= (3 + r)^2, \\ (3 - y)^2 + x^2 &= (2 + r)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Po úpravě (dosazení za $x^2 + y^2$ z první rovnice (2))

$$x = 1 - \frac{r}{2}, \quad y = 1 - \frac{r}{3}. \quad (3)$$

Dosadíme-li nyní za x, y z (3) do první rovnice (2), vyjde po úpravě kvadratická rovnice pro r

$$23r^2 + 132r - 36 = 0. \quad (4)$$

Jediný kladný kořen rovnice (4) je

$$r = \frac{-132 + \sqrt{132^2 + 4 \cdot 36 \cdot 23}}{46} = \frac{6}{23}.$$

3a. V obore reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy = a^2 + ab, \quad (1)$$

$$y^2 + xy = a^2 - ab, \quad (2)$$

kde x, y sú neznáme, a, b reálne parametre. Urobte diskusiu. (7 bodov)

RIEŠENIE. Ak dvojica $[x, y]$ vyhovuje danej sústave, potom pre čísla x, y dostaneme sčítaním oboch rovníc

$$(x + y)^2 = 2a^2 \quad (3)$$

a odčítaním (2) od (1)

$$x^2 - y^2 = 2ab$$

čiže

$$(x - y)(x + y) = 2ab. \quad (4)$$

V prípade, keď $a \neq 0$, vyplýva zo (4) po umocnení na druhú a využití rovnosti (3)

$$(x - y)^2 = 2b^2. \quad (5)$$

Z (3), (4), (5) však po jednoduchej úprave dostaneme

$$(2x)^2 = [(x + y) + (x - y)]^2 = 2(a + b)^2, \text{ resp.}$$

$$(2y)^2 = [(x + y) - (x - y)]^2 = 2(a - b)^2, \text{ z čoho}$$

$$|x| = \frac{\sqrt{2}}{2} |a + b|, \quad (6)$$

$$|y| = \frac{\sqrt{2}}{2} |a - b|. \quad (7)$$

Zistili sme teda, že v prípade, keď $a \neq 0$, môžu danej sústave vyhovovať len tieto štyri dvojice reálnych čísel:

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8a)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8b)$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a + b); -\frac{\sqrt{2}}{2}(a - b) \right], \quad (8c)$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b); -\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \right]. \quad (8d)$$

Dosadením sa presvedčíme, že sústave (1), (2) vyhovujú len dvojice (8a) a (8d), ktoré sú pre $a \neq 0$, navzájom rôzne. (Z rovnosti oboch dvojíc vyplýva totiž $a + b = 0$, $a - b = 0$ a stadiaľ priamo $a = 0$.)

Ak $a = 0$, má daná sústava tvar

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 0, \\ y^2 + xy &= 0 \end{aligned}$$

a má zrejme nekonečne mnoho riešení tvaru

$$[k, -k], \quad (9)$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo.

ZÁVER. Pre $a \neq 0$, b ľubov. má daná sústava dve rôzne riešenia dané vzťahmi (8a) a (8d); pre $a = 0$, b ľubov. má nekonečne mnoho riešení tvaru (9).

POZNÁMKA. V prípade $a \neq 0$ možno riešenie sústavy (1), (2) dostať tiež riešením sústavy

$$\begin{aligned} |x + y| &= |a|\sqrt{2}, \\ |x - y| &= |b|\sqrt{2}, \end{aligned}$$

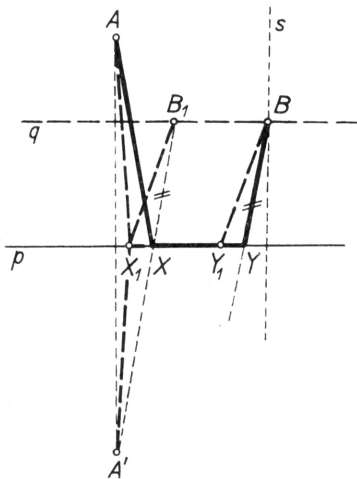
ktorú dostaneme odmocnením rovníc (3) a (5).

3b. V rovine je dána priamka p a uvnitř jednej poloroviny s hranicí p dva rôzne body A a B . Dále je dáno kladné číslo u . Na priamke p sestrojte body X a Y tak, aby $XY = u$ a aby dĺžka lomené čáry $AXYB$ byla co nejmenší. (7 bodů)

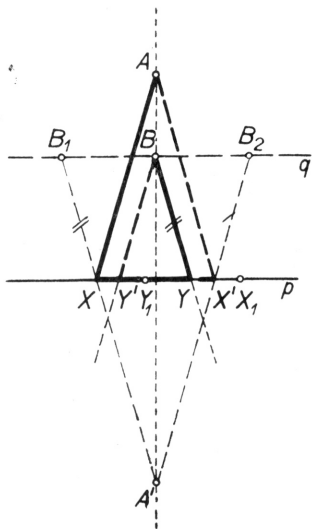
ŘEŠENÍ (obr. 42a). Bodem B sestrojme přímku $q \parallel p$ a přímku $s \perp p$. Na přímce q sestrojme bod B_1 tak, aby $BB_1 = u$ a aby B_1 ležel v téže polorovině vzhledem k přímce s jako bod A ; leží-li bod A na přímce s , sestro-

jíme na q oba body B_1 a B_2 tak, že $BB_1 = BB_2 = u$ (obr. 42 b).

K bodu A sestrojíme bod A' souměrně sdružený podle přímky p . Hledaný bod X je průsečík přímky $A'B_1$



a)



b)

Obr. 42

s přímkou p , příslušný bod Y je průsečík přímky p s rovnoběžkou s $A'B_1$ bodem B . V případě, že bod A leží na přímce s , vede i průsečík X' přímky $A'B_2$ s přímkou p k řešení.

K důkazu KONSTRUKCE budeme užívat pro délku lomené čáry C symbolu $d(C)$. Nechť tedy X_1 a Y_1 jsou libovolné body na přímce p takové, že $X_1Y_1 = u$. Rozlišujme dva případy (obr. 42a):

a) $X_1Y_1BB_1$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník. Pak

$d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_1B) = d(A'X_1B_1B) \geq d(A'B_1B) = d(A'XB_1B) = d(AXYB)$, a přitom rovnost nastane, právě když $X_1 = X$.

b) $X_1Y_1BB_2$ (v tomto pořadí) je rovnoběžník, kde $B_2 \neq B_1$ (obr. 42b) je bod přímky q takový, že $BB_2 = u$. Potom $d(AX_1Y_1B) = d(AX_1B_2B) = d(A'X_1B_2B) \geq d(A'B_2B) \geq d(A'B_1B) = d(AXYB)$. V nerovnosti $d(A'B_2B) \geq d(A'B_1B)$ nastane rovnost, právě když bod A leží na přímce s . Potom je $d(AX_1Y_1B) = d(AXYB)$, právě když X_1 je průsečík přímky $A'B_2$ s přímkou p a body A, B leží na přímce $s \perp p$.

ZÁVĚR. Úloha má jediné řešení, není-li přímka AB kolmá k přímce p ; je-li kolmá, má úloha dvě řešení.

3. ŘEŠENÍ ÚLOH KATEGORIE Z

1. Závory na železničním přejezdu se spouštějí 2 min. před příjezdem vlaku, spuštěny zůstávají celkem 3 min. Vlak jedoucí průměrnou rychlostí 60 km/h je 12 km před přejezdem. Po silnici jede auto, které je v téže době před přejezdem 14 km. Vypočtete nejmenší a největší průměrnou rychlost auta, při které spuštěné závory auto zadrží.

ŘEŠENÍ. Představme si, že jsme zmáčkli stopky v okamžiku, kdy je vlak 12 km a auto 14 km od přejezdu. Když vlak přijede k přejezdu, bude na stopkách

$$\frac{12}{60}(\text{h}) = 12(\text{min.})$$

Přejezd tedy bude uzavřen od okamžiku, kdy stopky ukazují čas 10 min., do okamžiku, kdy je na stopkách čas 13 min. Přijede-li auto v tomto časovém intervalu,

závory je zadrží. Době 10 min. odpovídá největší průměrná rychlost

$$v_{10} = \frac{14}{\frac{10}{60}} = 84 \text{ (km/h)}$$

a době 13 min. nejmenší průměrná rychlost

$$v_{13} = \frac{14}{\frac{13}{60}} = \frac{14 \cdot 60}{13} = 64 \frac{8}{13} \text{ (km/h)}.$$

Závory zadrží auto, bude-li jeho průměrná rychlost aspoň $64 \frac{8}{13}$ km/h a nejvýše 84 km/h.

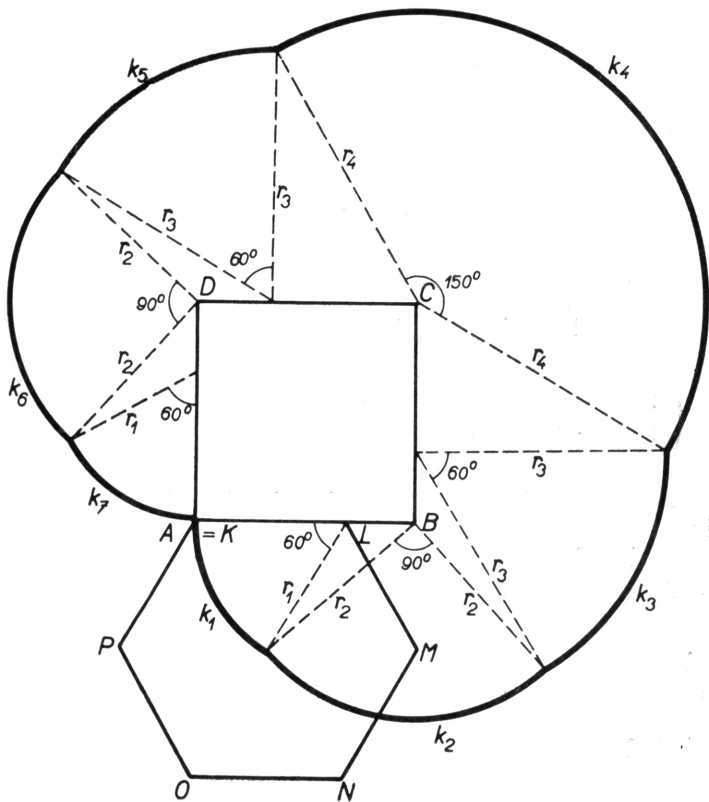
POZNÁMKA. Pro praxi nemá vlastně smyslu otázka, zda auto projede nebo nikoli, bude-li jeho průměrná rychlost „přesně“ $64 \frac{8}{13}$ km/h, neboť závory se nespouštějí okamžitě a též průměrná rychlost je jen pomocný abstraktní pojem. Podobně pro hodnotu 84 km/h.

2. Je daný štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 6 cm. Ďalej je daný pravidelný šesťuholník $KLMNOP$ so stranou dĺžky 4 cm tak, že vrcholy A a K splývajú a vrchol L leží na polpriamke AB . Obidva obrazce ležia v opačných polrovinách s hranicou AB .

a) Zostrojte dráhu, ktorú opíše vrchol K šesťuholníka $KLMNOP$, ktorý sa zvonka odvažuje po obvode štvorca $ABCD$.

b) Vypočítajte dĺžku tejto dráhy.

RIEŠENIE. Dráha bodu sa skladá zo 7 kruhových oblúkov, ako je naznačené na obr. 43. Dĺžky jednotlivých oblúkov sú $k_1, k_2, \dots, k_7$. Platí



Obr. 43

$$k_1 = k_7 = \frac{\pi r_1}{180} \cdot 60 = \frac{4\pi}{180} \cdot 60 = \frac{4}{3}\pi,$$

$$k_2 = k_6 = \frac{\pi r_2}{180} \cdot 90 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{4^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \sqrt{16 + 4^2 - 2^2} = \pi \sqrt{7},$$

$$k_3 = k_5 = \frac{\pi r_3}{180} \cdot 60 = \frac{1}{3} \pi \cdot KM = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{8^2 - 4^2} = \\ = \frac{4}{3} \pi \cdot \sqrt{3},$$

$$k_4 = \frac{\pi r_4}{180} \cdot 150 = \frac{8\pi}{180} \cdot 150 = \frac{20}{3} \pi.$$

Celková délka dráhy bodu K je teda

$$d = 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 = \\ = \left(\frac{8}{3} + 2\sqrt{7} + \frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{20}{3} \right) \pi \doteq 19,2\pi \doteq 60,4 \text{ (cm)}.$$

3. Trojčíferné číslo n má v dekadickém zápise aspoň dvě cifry stejné. Jeho šestinásobek je čtyřčíferné číslo, jehož dekadický zápis obsahuje a) nulu a b) tři stejné cifry. Určete všechna čísla n těchto vlastností.

ŘEŠENÍ. a) Protože je $n < 1000$, je $6n < 6000$; jediná nenulová cifra čísla $6n$ je tedy 1, 2, 3, 4 nebo 5. *Obsahuje-li číslo $6n$ tři nuly*, platí $6n = 3000$, neboť čísla 1000, 2000, 4000, 5000 nejsou násobky šesti. Máme tedy jedno řešení úlohy:

$$n_1 = 500, \quad 6n_1 = 3000. \quad (1)$$

b) *Obsahuje-li číslo $6n$ jedinou nulu* a je-li jeho nenulová cifra 1, 3, 5, je nula na místě jednotek, neboť $6n$ je sudé. Dělíme-li čísla 1110, 3330, 5550 šesti, dostaneme po řadě 185, 555, 925. Dostáváme tedy další řešení úlohy:

$$n_2 = 555, \quad 6n_2 = 3330. \quad (2)$$

c) *Obsahuje-li číslo $6n$ jedinou nulu* a je-li jeho nenu-

lová cifra 2 nebo 4, je třeba prozkoumat 6 možných případů; výsledky jsou uvedeny v tabulce:

$6n$	2022	2202	2220	4044	4404	4440
n	337	367	370	674	734	740

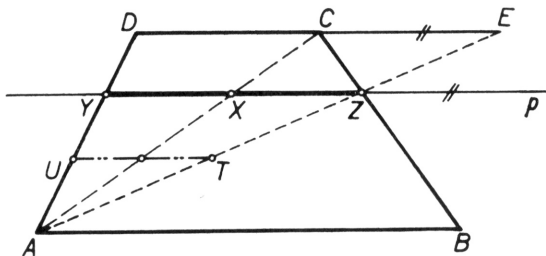
V této tabulce jen první sloupec dává řešení úlohy:

$$n_3 = 337, \quad 6n_3 = 2022. \quad (3)$$

Úloha má tedy celkem 3 řešení (1), (2), (3).

4. Je daný lichobežník $ABCD$ so základňami AB , CD . Určíte také bod X uhlopříčky AC , aby přímka p rovnoběžná s AB vedená bodem X přetřela ramena AD , BC v uvedeném pořadí v bodech Y , Z , pro které platí $XY = XZ$. Vyjadřte délku XY pomocí $a = AB$, $c = CD$.

RIEŠENIE. a) Určíme množinu všech bodů T , pro které platí: Y leží na AD , X leží na AC , X je středem úsečky YT , přímka XY je rovnoběžná s AB . Zostrojme bod E tak, aby vrchol C bol stredom úsečky DE (obr. 44).



Obr. 44

Potom v trojuholníku ADE je vnútro ťažnice AC a bod C množinou stredov všetkých úsečiek rovnobežných so stranou DE , ktorých koncové body U, T ležia v uvedenom poradí na stranách AD, AE . Hľadaný bod X dostaneme jedine v prípade, keď bod T splynie s priesečníkom úsečiek BC, AE .

b) Zo vzťahu $\triangle ZCE \sim \triangle ZBA$ vyplýva

$$\frac{EZ}{AZ} = \frac{c}{a} \quad (1)$$

a ďalej podľa (1)

$$\frac{AE}{AZ} = \frac{AZ + EZ}{AZ} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a + c}{a}. \quad (2)$$

Zo vzťahu $\triangle AXZ \sim \triangle ACE$ vyplýva

$$\frac{XZ}{CE} = \frac{AZ}{AE}.$$

Podľa (2) je

$$XZ = \frac{AZ}{AE} \cdot CE = \frac{ac}{a + c},$$

a teda

$$XY = XZ = \frac{ac}{a + c}.$$