

22. ročník matematické olympiády

V. Řešení soutěžních úloh III. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); František Zítek (editor): 22. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1972-1973. 15. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974.

~~Terms of use:~~

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404638>
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

V. Řešení soutěžních úloh III. kola

KATEGORIE A

A-III-1

Platí-li pro velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2, \quad (1)$$

je tento trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

(5 bodů)

ŘEŠENÍ. Podle vzorce $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ plyne z dané rovnosti

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = 0.$$

Podle vzorce pro $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ a podle vzorce $2\cos^2 \gamma = 1 + \cos 2\gamma$ dostaneme

$$2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2 \gamma = 0.$$

Protože je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, dostaneme dále

$$\cos \gamma (\cos \gamma - \cos(\alpha - \beta)) = 0,$$

neboli

$$\cos \gamma (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0.$$

Použijeme znovu vzorce pro $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$; vyjde

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = 0. \quad (2)$$

Je tedy buď $\alpha = \frac{\pi}{2}$, nebo $\beta = \frac{\pi}{2}$, nebo $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

POZNÁMKA. Uvedené řešení 1. úlohy je řešení autorské. Soutěžící, kteří tuto úlohu úspěšně vyřešili, většinou užívali v podstatě stejného postupu, tj. dokázali, že z rovnosti (1) plyne rovnost (2). Jejich důkazy však byly složitější.

A-III-2

Je dán čtyřstěn. Označme v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jeho výšky a ϱ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) poloměry kulových ploch vně vepsaných tomuto čtyřstěnu. Pak platí

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4};$$

Dokažte.

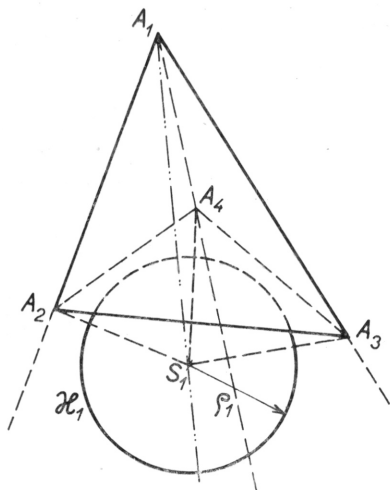
(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Označme vrcholy čtyřstěnu A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Budiž S_1 střed a ϱ_1 poloměr vně vepsané kulové plochy podle schematického obr. 65. Označme P_1, P_2, P_3, P_4 po řadě obsahy trojúhelníků $\triangle A_2A_3A_4, \triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_2A_3$. Potom pro objemy $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ čtyřstěnů $A_2A_3A_4S_1, A_1A_3A_4S_1, A_1A_2A_4S_1, A_1A_2A_3S_1$ platí

$$-V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} = V, \quad (1)$$

kde V je objem čtyřstěnu $A_1A_2A_3A_4$. Platí však

$$V_{1i} = \frac{P_i \varrho_1}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$



Obr. 65

po dosazení do (1) dostáváme

$$\frac{\varrho_1}{3} (-P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = V,$$

z čehož

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{-P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{3V}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{P_1 - P_2 + P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_3} = \frac{P_1 + P_2 - P_3 + P_4}{3V},$$

$$\frac{1}{\varrho_4} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 - P_4}{3V}.$$

Je tedy

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (2)$$

Dále platí

$$V = \frac{P_i \cdot v_i}{3} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

z čehož

$$\frac{1}{v_i} = \frac{P_i}{3V} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

a tedy

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{V}. \quad (3)$$

Z rovností (2) a (3) vyplývá

$$2 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right) = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4},$$

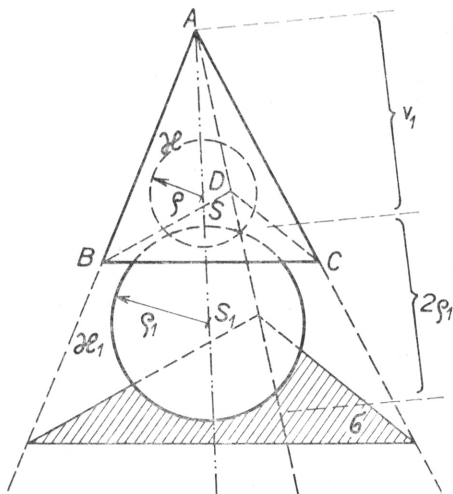
c. b. d.

Řešil Petr Slačálek,

3. f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

JINÉ ŘEŠENÍ. Poloměr kulové plochy κ vepsané dovnitř daného čtyřstěnu $ABCD$ (schematický obr. 66) označme ϱ a obsahy jednotlivých stěn S_1, S_2, S_3, S_4 . Pro objem V daného čtyřstěnu platí

$$S_1 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_2 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_3 \cdot \frac{\varrho}{3} + S_4 \cdot \frac{\varrho}{3} = V,$$



Obr. 66

z čehož po úpravě máme

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3V}. \quad (1)$$

Dále víme, že pro objem V platí

$$V = S_1 \cdot \frac{v_1}{3} = S_2 \cdot \frac{v_2}{3} = S_3 \cdot \frac{v_3}{3} = S_4 \cdot \frac{v_4}{3},$$

takže

$$S_1 = \frac{3V}{v_1}, S_2 = \frac{3V}{v_2}, S_3 = \frac{3V}{v_3}, S_4 = \frac{3V}{v_4}.$$

Po dosazení za S_1, S_2, S_3 a S_4 do (1) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}. \quad (2)$$

Vyšetřujeme kulovou plochu κ_1 o poloměru ϱ_1 vepsanou do trojhranu $A(BCD)$ tak, že se dotýká roviny BCD a leží v opačném poloprostoru určeném rovinou BCD než bod A . Tato kulová plocha κ_1 je stejnohlá s kulovou plochou κ vepsanou dovnitř čtyřstěnu $ABCD$. Středem stejnohllosti je bod A . Vedme rovinu $\sigma \parallel BCD$ ($\sigma \neq BCD$) tak, aby se dotýkala plochy κ_1 . Ze vzdálenosti rovin σ a BCD určíme koeficient stejnohllosti, který se musí rovnat poměru poloměrů:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{2\varrho_1 + v_1}{v_1}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \frac{1}{v_1}. \quad (3)$$

Obdobný vztah jako (3) platí zřejmě i pro $\varrho_2, v_2; \varrho_3, v_3; \varrho_4, v_4$. Z těchto vztahů tedy plyne

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 4 \cdot \frac{1}{\varrho} - 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right).$$

Po dosazení z rovnosti (2) dostáváme rovnost

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 2 \cdot \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} \right),$$

která se měla dokázat.

Řešil JAN FRYNTA,
4.f, gymnasium, ul. W. Piecka, Praha 2

Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ taká, že pre každé $k > 1$ platí $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$.

Pre $n = 1, 2, 3, \dots$ označme

$$A_n = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Potom pre každé $n > 1$ platí tiež

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2A_n; \quad (1)$$

dokážte.

(8 bodov)

RIEŠENIE. Vypočítajme rozdiel $R_n = A_{n-1} + A_{n+1} - 2A_n$. Lahko sa vidí, že

$$R_n = \frac{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - n(n+1)a_n + n(n-1)a_{n+1}}{n(n-1)(n+1)}.$$

Je zrejmé, že (1) platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ vtedy a len vtedy, keď pre každé $n > 1$ je $R_n \geq 0$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n(n-1)a_{n+1} &\geq \\ &\geq n(n+1)a_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Pravdivosť nerovnosti (2) dokážeme úplnou indukciou:

1. Pre $n = 2$ má nerovnosť (2) tvar

$$2(a_1 + a_2) + 2a_3 \geq 6a_2 \text{ čiže } a_1 + a_3 \geq 2a_2,$$

čo je splnené podľa predpokladu.

2. Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo $n > 1$ platí (2). Podľa podmienok úlohy platí pre každé prirodzené číslo $n > 1$ tiež

$$a_n + a_{n+2} \geq 2a_{n+1}, \text{ z čoho hneď dostaneme}$$

$$n(n+1)a_n + n(n+1)a_{n+2} \geq 2n(n+1)a_{n+1}. \quad (3)$$

Sčítaním (2) a (3) po jednoduchéj úprave dostaneme

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) + n(n+1)a_{n+2} \geq \\ \geq (n+1)(n+2)a_{n+1},$$

čo je nerovnosť, ktorú dostaneme z (2), ak v nej nahradíme n číslom $n+1$.

Tým sme dokázali správnosť nerovnosti (2) pre každé prirodzené číslo $n > 1$ a vzhľadom na ekvivalenciu nerovnosti (2) s nerovnosťou (1) tiež správnosť tejto nerovnosti.

Riešil PAVOL ZLATOŠ, 3.b tr.
Gymn. Bratislava, Novohradská ul.

JINÉ ŘEŠENÍ. Utvořme nejprve posloupnost koeficientů definovanou rekurentně takto:

$$b_1 = 1, b_2 = 3, b_k = 2b_{k-1} - b_{k-2} + 1.$$

Matematickou indukcí snadno dokážeme, že pro každé přirozené číslo k platí

$$b_k = \frac{(k+1) \cdot k}{2}. \quad (1)$$

I. Pro $k = 1$ a $k = 2$ rovnost (1) skutečně platí. Nechť $k = 3$. Podle definice je

$$b_3 = 6 - 1 + 1 = 6$$

a podle (1) je také

$$b_3 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

II. Nechť (1) platí pro nějaké přirozené číslo $k \geq 3$. Pak

$$b_{k+1} = 2b_k - b_{k-1} + 1 = 2 \cdot \frac{(k+1) \cdot k}{2} - \frac{k \cdot (k-1)}{2} + 1 = \\ = \frac{(k+2)(k+1)}{2}, \text{ c. b. d.}$$

Podle předpokladu pro každé $k > 1$ platí

$$a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k. \quad (2)$$

Sečteme $n - 1$ nerovností (n je libovolně zvolené přirozené číslo, $n > 1$),

$$\begin{aligned} b_1 \cdot (a_1 - 2a_2 + a_3) &\geq 0, \\ b_2 \cdot (a_2 - 2a_3 + a_4) &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ b_k (a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}) &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n-1} (a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1}) &\geq 0, \end{aligned}$$

které platí podle (2) a proto, že podle (1) je $b_k > 0$ pro každé $k \geq 1$. Součet je

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 + a_2 \cdot (-2b_1 + b_2) + a_3 \cdot (b_1 - 2b_2 + b_3) + a_4 \cdot \\ &\cdot (b_2 - 2b_3 + b_4) + \dots + a_k \cdot (b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k) + \\ &+ \dots + a_{n-1} \cdot (b_{n-3} - 2b_{n-2} + b_{n-1}) + \\ &+ a_n \cdot (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Z rekurentní definice posloupnosti $\{b_k\}$ plyne

$$b_{k-2} - 2b_{k-1} + b_k = b_{k-2} - 2b_{k-1} + 2b_{k-1} - b_{k-2} + 1 = 1.$$

Tedy nerovnost (3) nabývá tvaru

$$a_1 b_1 + a_2 (-2b_1 + b_2) + a_3 + a_4 + \dots + a_k + \dots + a_{n-1} + a_n (b_{n-2} - 2b_{n-1}) + a_{n+1} \cdot b_{n-1} \geq 0.$$

Dosadíme za koeficienty b_k z definice a z (1); dostáváme

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \cdot \frac{2 - n^2 - n}{2} + \\ &+ a_{n+1} \frac{n^2 - n}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

tj.

$$2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + 2a_n - 2n^2 a_n + (n^2 - n)a_n + \\ + (n^2 - n) a_{n+1} \geq 0,$$

čili

$$(n^2 - n) \cdot a_n + (n^2 - n) \cdot a_{n+1} \geq \\ \geq -2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2n^2 a_n.$$

K oběma stranám poslední nerovnosti přičteme $2n^2 (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$, na levé přičteme i odečteme $n (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$. Po úpravě dostáváme

$$(n^2 + n) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + (n^2 - n) \cdot \\ \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + (n^2 - n) \cdot (a_n + a_{n+1}) \geq \\ \geq 2 (n^2 - 1) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Tuto nerovnost znásobíme kladným výrazem

$$\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

a docházíme k nerovnosti

$$\frac{1}{n-1} (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + \frac{1}{n+1} \cdot$$

$$\cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) \geq 2 \cdot \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

což je nerovnost

$$A_{n-1} + A_{n+1} \geq 2 \cdot A_n,$$

kterou jsme měli dokázat.

Řešila MAGDA FOŘTOVÁ
4.d, gymnasium J. Fučíka, Plzeň

Je-li $n \geq 2$ přirozené číslo, určete

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}].$$

(6 bodů)

ŘEŠENÍ. Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$[\sqrt{n^2 - 1}] = n - 1,$$

neboť

$$n - 1 \leq \sqrt{n^2 - 1} < (n - 1) + 1.$$

Množinu

$$\mathbf{M} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n^2 - 1}\}$$

tedy můžeme rozložit na $n - 1$ disjunktních podmnožin $\mathbf{A}_i$ definovaných takto:

$$\mathbf{A}_i = \{x \in \mathbf{M}; [x] = i\}, i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Nyní zjistíme počet prvků $||\mathbf{A}_i||$ množiny $\mathbf{A}_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Nejmenším prvkem množiny $\mathbf{A}_i$ je zřejmě prvek

$$\alpha_i = \sqrt{i^2};$$

největším jejím prvkem je prvek

$$\beta_i = \sqrt{(i + 1)^2 - 1}.$$

Zřejmě je $\mathbf{A}_i = \{\alpha_i, \alpha_i + 1, \dots, \beta_i\}$, a proto

$$||\mathbf{A}_i|| = (i + 1)^2 - i^2 = 2i + 1.$$

Z předcházejících úvah plyne ($n \geq 2$):

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot ||\mathbf{A}_i|| = \sum_{i=1}^{n-1} (2i^2 + i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i.$$

Pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

a proto

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{2}{6} (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) + \frac{1}{2} (n-1) \cdot n.$$

Po úpravě dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}] = \frac{1}{6} n(n-1)(4n+1),$$

což je hledaný vztah.

Řešil JAN TRLIFAJ,

3.d, gymnasium, Sladkovského nám., Praha 3

A-III-5

Je dána rovina ϱ . Jsou-li P, Q dva body z ϱ , označme $P + Q$ střed dvojice P, Q a $P \cdot Q$ bod roviny ϱ , který dostaneme otočením bodu Q okolo bodu P o 90° v kladném smyslu.

a) Jsou tyto operace komutativní?

b) Jsou dány dva pevně navzájem různé body A, B roviny ϱ . Rovnice

$$Y \cdot X = (A \cdot X) + B \tag{1}$$

určuje zobrazení $X \mapsto Y$.

Určete o jaké zobrazení jde.

c) Sestrojte všechny samodružné body tohoto zobrazení. (8 bodů)

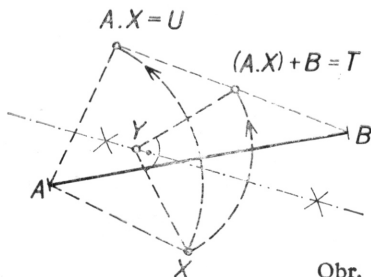
ŘEŠENÍ. a) Operace „+“ je zřejmě komutativní. Operace „.“ komutativní v množině ϱ není. Zvolíme-li si totiž v rovině ϱ dva různé body A, B , pak vždy platí

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

b) Zvolme v rovině ϱ libovolný bod X . Bod Y , pro který platí rovnost (1), pak získáme následujícím postupem. Nejprve sestrojíme bod $U = A \cdot X$ a potom bod $T = (A \cdot X) + B$. Nyní je třeba rozlišit dva případy:

α) Nechť $X = T$. Potom $Y = X$. (Problémem, zda tento případ nastává, se budeme zabývat při řešení části c) dané úlohy.)

β) Nechť $X \neq T$ (obr. 67). Potom je bod Y vrcholem pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka s přeponou XT , v němž bod X přejde do bodu



Obr. 67

T otočením okolo bodu Y o 90° v kladném smyslu.

Z popsané konstrukce bodu Y vyplývá, že rovnicí (1) je ke každému bodu $X \in \varrho$ přiřazen jediný bod $Y \in \varrho$.

Druh zobrazení určíme třeba pomocí komplexních čísel. Umístíme soustavu ortonormálních souřadnic v rovině ϱ tak, aby body A, B byly po řadě obrazy čísel $0, 1$ (stručně budeme psát $A = [0], B = [1]$). Dále označíme $X = [z]$; pak je $A \cdot X = [iz]$,

$$T = (A \cdot X) + B = \left[\frac{i}{2} z + \frac{1}{2} \right]. \quad (2)$$

Na druhé straně je $T = Y \cdot X$; označíme-li $Y = [z']$, je

$$T = [z' + i(z - z')] = [(1 - i)z' + iz]. \quad (3)$$

Porovnáním (2) a (3) vyjde

$$(1 - i) z' + iz = \frac{i}{2} z + \frac{1}{2},$$

tj.

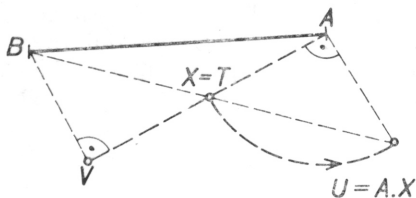
$$z' = -\frac{i}{2(1-i)} z + \frac{1}{2(1-i)}$$

a po úpravě

$$z' = \frac{1-i}{4} z + \frac{1+i}{4}. \quad (4)$$

Rovnicí (4) je určena přímá podobnost. To zjistíme, vyjádříme-li např. $\frac{1-i}{4} = k \cdot \varepsilon$, kde $k = \left| \frac{1-i}{4} \right| = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i)$.

Zobrazení $[z] \mapsto [\varepsilon z]$ je otočení kolem bodu $[0]$, zobrazení $[\varepsilon z] \mapsto \left[k\varepsilon z + \frac{1+i}{4} \right]$ je stejnoolehlost s konstantou k .



Obr. 68

c) Budiž $X = Y$ samodružný bod podobnosti (4); pak je $X \cdot X = X$, a tedy bod X je řešením rovnice

$$X = (A \cdot X) + B.$$

Situace pro samodružný bod X je naznačena

na obr. 68; zde je $\triangle XAU \cong \triangle XVB$, $AU = AX = VX = BV$, $UX = BX$. Pro pomocný bod V tedy platí

$$AV = 2 BV, \quad \sphericalangle AVB = \frac{\pi}{2}, \quad V \cdot X = B;$$

těmito podmínkami je bod V jednoznačně určen; bod X sestrojíme z údaje $X = A + V$.

POZNÁMKA. U 5. úlohy je uvedeno autorské řešení. I když několik účastníků 3. kola získalo za tuto úlohu plný počet bodů, žádné z těchto řešení se nehodilo k otištění.

A-III-6

Ve čtverci, jehož strana má délku 50, je dána lomená čára L tak, že každý bod čtverce má od některého bodu čáry L vzdálenost nejvýše 1. Dokažte, že délka čáry L je větší než 1248.

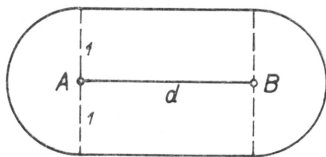
(7 bodů)

ŘEŠENÍ. Necht' AB je libovolná úsečka čáry L . Uvažujme množinu všech bodů roviny daného čtverce, které mají od této úsečky vzdálenost menší nebo rovnou 1. Touto množinou je zřejmě sjednocení všech kruhů ohraničených kružnicemi $k_x = (X; 1)$, kde X probíhá úsečkou AB , tedy útvar složený z pravoúhelníka, jehož dvě strany jsou rovnoběžné s úsečkou AB , mají od ní vzdálenost 1 a druhé dvě strany obsahují body A, B , a z dvou půlkruhů se středy A, B ohraničených stranami pravoúhelníka kolmými na AB (obr. 69). Je-li délka úsečky AB rovna d , pak obsah nalezeného útvaru (dále jej budeme nazývat oválem) je

$$2d + \pi.$$

Uvažujme všechny ovály nad všemi úsečkami tvořícími čáru L . Tyto ovály musí podle zadání úlohy

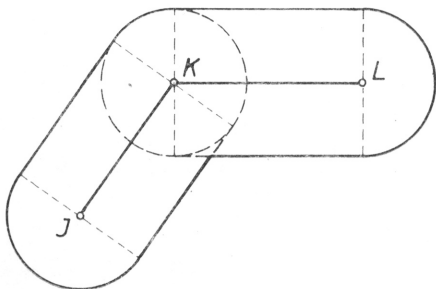
pokrýt celý daný čtverec. Kdyby totiž nějaký bod uvažo-



Obr. 69

vaného čtverce ležel vně každého z těchto oválů, měl by od každého bodu čáry L vzdálenost větší než 1.

Obsah průniku oválů nad dvěma sousedními úsečkami čáry L se společným koncovým bodem K je zřejmě větší nebo roven obsahu kruhu ohraničeného kružnicí $k_k = (K; 1)$, který je oběma oválům společný (obr. 70).



Obr. 70

Pro obsah P útvaru vzniklého sjednocením oválů sestavených nad všemi úsečkami čáry L pak platí:

$$P \leq \sum_{i=1}^n (2d_i + \pi) - (n-1) \cdot \pi = \pi + 2 \cdot \sum_{i=1}^n d_i, \quad (1)$$

kde $d_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou délky všech úseček tvořících čáru L .

Předpokládejme, že existuje čára L , která vyhovuje podmínkám úlohy a je kratší nebo rovna 1248. Pak

$$\sum_{i=1}^n d_i \leq 1248.$$

Z nerovnosti (1) tedy vyplývá

$$P \leq \pi + 2496 < 2500 = 50^2.$$

Avšak výše bylo dokázáno, že útvar vzniklý sjednocením všech oválů nad úsečkami čáry L pokrývá celý daný čtverec, takže $P \geq 50^2$, což je spor. Délka čáry L je tedy větší než 1248.

Řešil PAVEL KINDELMANN,
3.a, gymnasium, Šrámkova ul.,
České Budějovice