

29. ročník matematické olympiády

Kategorie C

In: Jozef Moravčík (editor); Leo Boček (editor); Lev Bukovský (editor); Antonín Vrba (editor); Jan Vyšín (editor); František Zítek (editor): 29. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1979-1980. 21. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 55–77.

Terms of use.
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



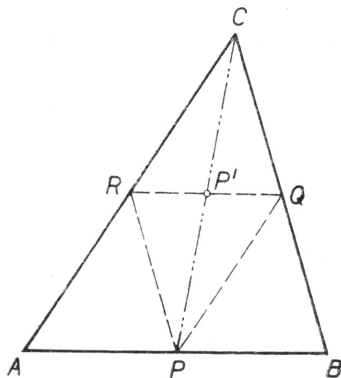
This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍPRAVNÉ ÚLOHY I. KOLA

C - P - 1

Je dán trojúhelník ABC . Označme P , Q , R středy jeho stran. Dokažte, že trojúhelníky ABC a PQR mají těžiště v tomtéž bodě.

Řešení. Dokážeme, že těžnice (přímky) trojúhelníku ABC splynou s těžnicemi trojúhelníku PQR ; z toho plyne, že těžiště



Obr. 14

obou trojúhelníků splynou. Důkaz provedeme pro těžnici CP (obr. 14). Úsečka QR je střední příčka trojúhelníku ABC , a je tedy $QR \parallel AB$ a $QR = \frac{1}{2} AB$. Označme P' průsečík úseček CP , QR . Pak je úsečka RP' střední příčka trojúhelníku APC , neboť prochází středem R strany AC a je $RQ \parallel AP$. Z obdobného důvodu je úsečka QP' střední příčka trojúhelníku BPC . Pro bod P' tedy platí

$$RP' = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} BP = QP',$$

tj. bod P' je střed úsečky QR , tj. přímka CP je těžnice trojúhelníku PQR .

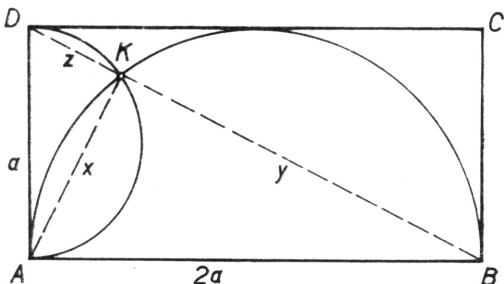
Jiné řešení. Úsečka PQ je střední příčka trojúhelníku ABC , je proto $PQ = CR$ a $PQ \parallel CR$. Body P , Q , C , R tvoří tedy rovnoběžník. Úhlopříčky rovnoběžníku se půlí, přímka CP tedy prochází středem úsečky QR a je to těžnice trojúhelníku PQR .

C - P - 2

Je dán obdélník $ABCD$, v němž $AB = 2a$, $BC = a$. Nad stranami AB , AD jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu A mají společný ještě bod K .

- a) Dokažte, že bod K leží na úhlopříčce BD .
- b) Vypočítejte vzdálenosti bodu K od vrcholů A , B , D .

Řešení. a) Poněvadž podle Thaletovy věty jsou úhly AKD , AKB pravé, leží body B , K , D v přímce (obr. 15).



Obr. 15

b) Podle Pythagorovy věty je $BD = a\sqrt{5}$. Označme hledané vzdálenosti $AK = x$, $BK = y$, $DK = z$. Snadno vypočteme x — je to výška na základnu BD v trojúhelníku ABD , jehož obsah je a^2 , je $x = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Z pravoúhlých trojúhelníků ABK , ADK dostáváme podle Pythagorovy věty

$$y = \sqrt{4a^2 - x^2} = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Mohli jsme využít také podobnosti trojúhelníků,

$$\triangle DAB \sim \triangle AKB \sim \triangle DKA,$$

které mají shodné odpovídající si úhly. Poměry velikostí odvěsen jsou

$$\frac{DA}{AB} = \frac{AK}{BK} = \frac{DK}{AK},$$

takže

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{y} = \frac{z}{x}.$$

Odtud vidíme, že $x = 2z$, $y = 4z$. Teď už stačí určit některou z veličin (například x z pravoúhlého trojúhelníku AKB o odvěsnách x , $2x$ a přeponě $2a$), abychom dostali ostatní.

Poznámka. Úloha byla uvedena v XIX. roč. MO jako Z-I-3. V brožuře *Vyšín-Macháček: Vybrané úlohy MO — kategorie Z* je zařazena pod č. 33.

C - P - 3

Najděte všechna trojčíselná čísla s touto vlastností: Napíšeme-li před hledané číslo stejnou cifru, jako je ta, která stojí na místě jeho jednotek, dostaneme čtyřčíselné číslo, které je o 18 menší než sedminásobek hledaného čísla.

Řešení. Má-li hledané číslo v desítkové soustavě zápis abc , má pozměněné číslo zápis $cabc$. Pro číslice a , b , c přitom platí $a \neq 0$ (trojčíselnost původního čísla), a $c \neq 0$ (čtyřčíselnost pozměněného čísla). Podle podmínky úlohy je

$$1000c + 100a + 10b + c = 7(100a + 10b + c) - 18,$$

odkud dostaneme

$$c = \frac{3(100a + 10b - 3)}{497}.$$

Vzhledem k tomu, že c je celé číslo a 497 není dělitelno třemi, je nutně $100a + 10b - 3$ dělitelno 497. Mohou nastat jen dvě možnosti:

$$(I) \quad 100a + 10b - 3 = 497$$

$$(II) \quad 100a + 10b - 3 = 994$$

Případ (I) vede ke vztahu

$$10a + b = 50,$$

kterému vyhovují jen číslice $a = 5$, $b = 0$. Hledané číslo je pak 503 - snadno ověříme, že splňuje podmínky úlohy. Případ (II) vede ke vztahu

$$100a + 10b = 997,$$

ale ten pro žádné číslice a , b neplatí — pravá strana není totiž dělitelná deseti.

Úloha má jediné řešení - číslo 503.

Poznámka. V XII. ročníku byla úloha zařazena jako D-I-2. V brožuře *Vyšín-Macháček: Vybrané úlohy MO - kategorie Z* je uvedena pod č. 6.

Určete všechna čísla a, b , pro která platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geq 0.$$

Zjistěte všechna a, b , pro která nastane rovnost.

Řešení. Jednoduchými ekvivalentními úpravami převedeme danou nerovnost na nerovnost

$$a^2b^2(3a^2 - 2ab + 3b^2) \geq 0.$$

Výraz a^2b^2 je pro všechna reálná čísla nezáporný, a protože

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 = (a - b)^2 + 2(a^2 + b^2),$$

je také výraz $3a^2 - 2ab + 3b^2$ nezáporný pro každou dvojici reálných čísel a, b . Platí tedy vždy

$$3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0, a^2b^2 \geq 0,$$

a tedy také

$$a^2b^2(3a^2 - 2ab + 3b^2) \geq 0.$$

Pro každou dvojici reálných čísel a, b tedy platí také daná nerovnost. Rovnost nastává v dané nerovnosti právě tehdy, platí-li

$$a^2b^2 [(a - b)^2 + 2(a^2 + b^2)] = 0.$$

V dané nerovnosti platí proto znaménko rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$.

Poznámka. Úloha byla zařazena v XV. ročníku MO jako D-II-1. V brožurě *Vyšín-Macháček: Vybrané úlohy MO — kategorie Z* je uvedena pod č. 23.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY I. KOLA

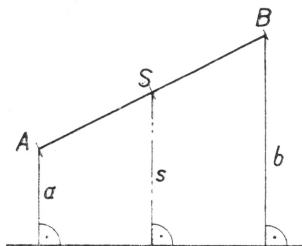
C - I - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným jeho vnitřním bodem. Dokažte, že součet vzdáleností bodů A, B, C od přímky p se rovná součtu vzdáleností středů stran AB, BC, AC od přímky p .

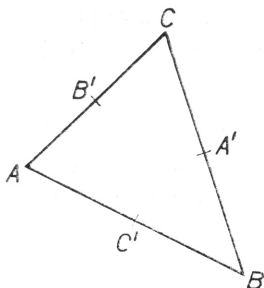
Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu, jejímž přímým důsledkem bude věta, kterou máme dokázat v úloze.

Leží-li body A, B v téže polorovině s hranicí p , je vzdálenost středu S úsečky AB od přímky p aritmetickým průměrem vzdáleností obou bodů A, B od přímky p (obr. 16).

Pomocná věta zřejmě platí v případech $AB \parallel p$ nebo $AB \perp p$. Má-li úsečka AB jinou polohu, označme a, b, s vzdálenosti bodů A, B, S od přímky p . Přitom je s délka střední příčky



Obr. 16



Obr. 17

lichoběžníka se základnami a, b (nebo pravoúhlého trojúhelníku, je-li $a = 0$ nebo $b = 0$). Platí tedy

$$s = \frac{a + b}{2}.$$

Při řešení úlohy C-I-1 označíme vrcholy trojúhelníku A, B, C , středy stran A', B', C' a jejich vzdálenosti od přímky p označme a', b', c' (obr. 17). Podle pomocné věty platí

$$a' = \frac{1}{2}(b + c), \quad b' = \frac{1}{2}(c + a), \quad c' = \frac{1}{2}(a + b).$$

Je tedy

$$a' + b' + c' = a + b + c$$

C - I - 2

Úsečka AB délky 12 cm je rozdělena bodem C v poměru $1 : 2$. V jedné polorovině určené přímkou AB jsou sestrojeny

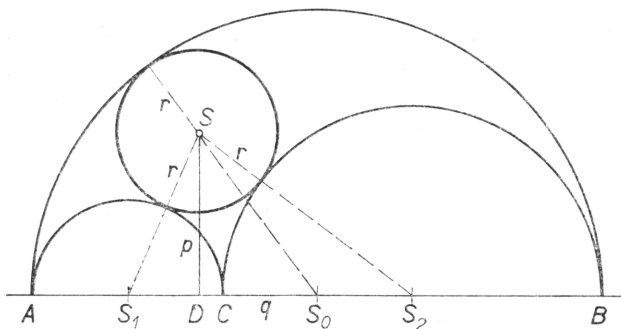
polokružnice s průměry AB , AC , CB . Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká všech tří polokružnic.

Řešení. Poloměr uvažované kružnice označme r a její střed S (obr. 18). Spustíme-li z bodu S kolmici na úsečku AB a její patu označíme D , vidíme tři pravoúhlé trojúhelníky, které mají společnou odvěsnu SD a jejichž přepony úzce souvisí s poloměry daných polokružnic a s hledaným poloměrem r . Budeme se snažit tyto souvislosti vyjádřit rovnicemi a z nich určit r . Podle Pythagorovy věty dostáváme, označíme-li ještě $SD = p$, $S_0D = q$,

$$\text{z } \triangle S_0SD: \quad p^2 + q^2 = (6 - r)^2,$$

$$\text{z } \triangle S_1SD: \quad p^2 + (4 - q)^2 = (2 + r)^2,$$

$$\text{z } \triangle S_2SD: \quad p^2 + (2 + q)^2 = (4 + r)^2.$$



Obr. 18

To je soustava tří rovnic o třech neznámých p , q , r , které sice nejsou lineární, ale snadno je vyřešíme, všimneme-li, že se v každé vyskytuje $p^2 + q^2$ vlevo a r^2 vpravo. Po úpravě je dostaneme ve tvaru

$$p^2 + q^2 - r^2 = -12r + 36$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 4r + 8q - 12$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = 8r - 4q + 12.$$

Odtud plyne, porovnáme-li pravé strany 1. a 2., resp. 1. a 3. rovnice

$$2r + q = 6$$

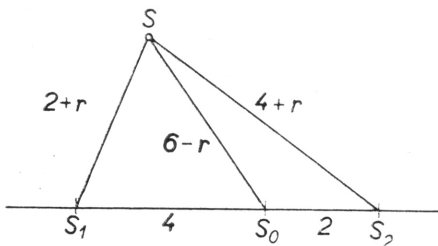
$$5r - q = 6.$$

To už je soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, kterou snadno vyřešíme: sečtením obou rovnic hned dostaneme

$$r = \frac{12}{7}. \text{ Existuje-li popsaná kružnice, má poloměr } \frac{12}{7}.$$

Jiné řešení. Vyhne se zavádění dvou pomocných neznámých. Vyjdeme opět z trojúhelníku S_1S_2S rozděleného příčkou ve dva trojúhelníky $T_1 = S_1S_0S$ a $T_2 = S_2S_0S$ (obr. 19). Pro jejich obsahy platí

$$T_1 = 2 T_2, \quad (*)$$



Obr. 19

neboť mají společnou výšku z vrcholu S na strany $S_1S_0 = 4$, $S_2S_0 = 2$. Podle známého Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde s je poloviční obvod a a, b, c jsou délky stran, dostaneme

$$T_1^2 = 12r(4-r)$$

$$T_2^2 = 24r(2-r).$$

Dosadíme-li odtud do vztahu (*), dostaneme

$$12r(4-r) = 4 \cdot 24r(2-r)$$

neboli

$$4-r = 8(2-r),$$

a odtud pro hledaný poloměr $r = \frac{12}{7}$.

Poznámka. Kružnici, jejíž poloměr jsme vypočítali, snadno sestrojíme. Vzdálenost jejího středu S od bodu S_1 bude $2 + \frac{12}{7}$, od bodu S_2 bude $4 + \frac{12}{7}$.

C - I - 3

Kružnice $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$ se dotýkají vně v bodě C . Kromě společné tečny v bodě C mají ještě další dvě společné tečny. Vezměme jednu z nich a body dotyku těchto kružnic na ní označme A , B .

- a) Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.
- b) Vyjádřete obsah trojúhelníku ABC pomocí r_1 a r_2 .

Řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné, neboť obě jsou kolmé ke společné tečně. Označme D druhý průsečík přímky S_1S_2 s kružnicí k_2 (obr. 20). Trojúhelníky S_1AC , S_2BD jsou podobné, neboť jsou oba rovnoramenné a mají stejné úhly při vrcholech S_1 , S_2 . Proto přímky AC a BD jsou rovnoběžné a úhly ACB , CBD jsou stejně velké. Podle Thaletovy věty je úhel CBD pravý.

Jiné řešení části a). Přímky S_1A a S_2B jsou rovnoběžné. Je-li tedy α velikost úhlu AS_1C a β velikost úhlu BS_2C , je $\alpha + \beta = 180^\circ$. Dále, protože trojúhelníky ACS_1 a CBS_2 jsou rovnoramenné, je $\sphericalangle S_1CA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ a $\sphericalangle S_2CB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Odtud dostaneme

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ.$$

Podle Pythagorovy věty

$$\begin{aligned} AB^2 &= DS_2^2 = S_1S_2^2 - DS_1^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = \\ &= 4r_1r_2. \end{aligned}$$

Dále vedme bodem C kolmici na přímku AB . Tato kolmice protne přímku DS_2 v bodě E a přímku AB v bodě F .

Z podobných trojúhelníků S_1S_2D , CS_2E dostaneme

$$CE = \frac{CS_2 \cdot DS_1}{S_1S_2} = \frac{r_2(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2},$$

a tedy

$$CF = CE + EF = \frac{r_2(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2} + r_2 = \frac{2r_2r_1}{r_1 + r_2}.$$

Obsah trojúhelníku ABC je pak

$$\frac{1}{2} AB \cdot CF = \frac{1}{2} \sqrt{4r_1r_2} \cdot \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2} = 2 \frac{r_1r_2 \sqrt{r_1r_2}}{r_1 + r_2}$$

Poznámka. K řešení úlohy se nabízí i následující postup:

$$\text{Vypočteme } AC = 2r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2}}, BC = 2r_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}$$

a AB . To nám umožní dokázat pravoúhlost ABC pomocí obrá-

cené Pythagorovy věty a vypočíst jeho obsah jako $\frac{1}{2} AC \cdot BC$.

Tento způsob je však daleko pracnější než postupy uvedené výše.

C - I - 4

Uvažujme všechny výrazy, které dostaneme z výrazu

$$u - v - x - y - z$$

doplněním alespoň jedné dvojice závorek tak, aby se tím ve výrazu neobjevilo násobení. [Jeden z těchto výrazů je například $u - ((v - x) - y - z)$. Avšak například výraz $(u - v)(-x - y - z)$ mezi uvažované výrazy nepatří, neboť je v něm násobení.] Kolika různých hodnot mohou nejvýše tyto výrazy nabývat pro jednu pětici čísel u, v, x, y, z ?

Řešení. Ať si vezmeme kterýkoli z uvažovaných výrazů, můžeme vždy postupně provést úpravy, naznačené závorkami, a dospět k výrazu tvaru

$$u - v \alpha x \beta y \gamma z,$$

kde každý ze symbolů α, β, γ znamená buď $+$, nebo $-$. Výrazů tohoto tvaru existuje 8. Ukážeme, že každý z nich může vzniknout uvažovaným způsobem:

$$u - v + x + y + z = u - (v - x - y - z)$$

$$u - v + x + y - z = u - (v - x - y) - z$$

$$u - v + x - y + z = u - (v - x) - (y - z)$$

$$u - v + x - y - z = u - (v - x) - y - z$$

$$u - v - x + y + z = u - v - (x - y - z)$$

$$u - v - x + y - z = u - v - (x - y) - z$$

$$u - v - x - y + z = u - v - x - (y - z)$$

$$u - v - x - y - z = (u - v) - x - y - z$$

Pro jakoukoliv pěticí čísel x, y, z, u, v nabývají tedy všechny výrazy popsané v úloze nejvýše osmi různých hodnot. Existují však pětičky, pro něž nabývá osm naposled uvedených výrazů osmi navzájem různých hodnot (např. $u = v = 0, x = 1, y = 2, z = 3$). Hledaný počet je tedy 8.

C - I - 5

Při oslavě svých narozenin Josef zjistil, že sečte-li číslice momentálního letopočtu, dostane svůj věk, a odečte-li momentální letopočet od jeho zrcadlového obrazu, dostane čtyřnásobek svého roku narození. V kterém roce našeho tisíciletí Josef provedl výpočet?

Řešení. Provedl-li Josef výpočet v roce $1000 + 100a + 10b + c$, bylo mu právě $1 + a + b + c$ let a narodil se v roce $999 + 99a + 9b$. Rozdíl momentálního letopočtu a zrcadlového obrazu je

$$(1000c + 100b + 10a + 1) - (1000 + 100a + 10b + c) =$$

$$= 4(1000 + 100a + 10b + c - 1 - a - b - c)$$

a po úpravě

$$(*) \quad 37c + 2b - 18a - 185 = 0.$$

Odtud vidíme, že číslice c je nutně lichá, a dostáváme odhad

$$c = \frac{1}{37}(185 + 18a - 2b) \geq \frac{1}{37}(185 + 18 \cdot 0 - 2 \cdot 9) > 4.$$

Číslice c může tedy být jen 5, 7 nebo 9.

Pro $c = 5$ se rovnice $(*)$ redukuje na $b = 9a$, a té vyhovují dvě dvojice: $(a = 0, b = 0)$, $(a = 1, b = 9)$.

Pro $c = 7$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 4) - 1$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 5, b = 8$.

Pro $c = 9$ dostáváme rovnici $b = 9(a - 8) - 2$, a té vyhovuje jediná dvojice: $a = 9, b = 7$.

Příslušné letopočty jsou 1005, 1195, 1587 a 1979. Snadno se přesvědčíme, že všechny vyhovují podmínkám úlohy. (Šestiletý Josef v r. 1005 měl však neuvěřitelné matematické schopnosti).

C - I - 6

Platí-li pro povrchy P_1, P_2, P_3 tří krychlí $P_3 = P_1 + P_2$, pak pro jejich objemy V_1, V_2, V_3 je

$$V_1 + V_2 < V_3 \leq \sqrt[3]{2}(V_1 + V_2).$$

Dokažte.

Řešení. Úloha je formulována geometricky, okamžitě se však převede na čistě algebraický problém.

Text úlohy sugeruje označit velikosti hran krychlí symboly a_1, a_2, a_3 . Označíme je však raději a, b, c , abychom se vyhnuli indexům a výrazy byly přehlednější.

Z podmínky pro povrchy plyne $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ a dosazením nabude dokazovaná nerovnost tvar

$$(1) \quad a^3 + b^3 < (\sqrt{a^2 + b^2})^3 \leq \sqrt{2}(a^3 + b^3).$$

Vzhledem k tomu, že pracujeme v oboru kladných čísel a, b , je soustava nerovností (1) ekvivalentní se soustavou nerovností

$$(a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3 \leq 2(a^3 + b^3)^2.$$

Máme vlastně dokázat, že pro všechna kladná čísla a, b platí tyto dvě nerovnosti:

$$(2) \quad (a^3 + b^3)^2 < (a^2 + b^2)^3$$

$$(3) \quad (a^2 + b^2)^3 \leq 2(a^3 + b^3)^2$$

První nerovnost už jsme dokázali v úloze C-P-4 (protože $a > 0, b > 0$, platí ostrá nerovnost). Druhá nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$a^6 - 3a^4b^2 + 4a^3b^3 - 3a^2b^4 + b^6 \geq 0.$$

Výraz na levé straně je však roven

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4)$$

a pro kladná a, b je vskutku nezáporný.

SOUTĚŽNÍ ÚLOHY II. KOLA

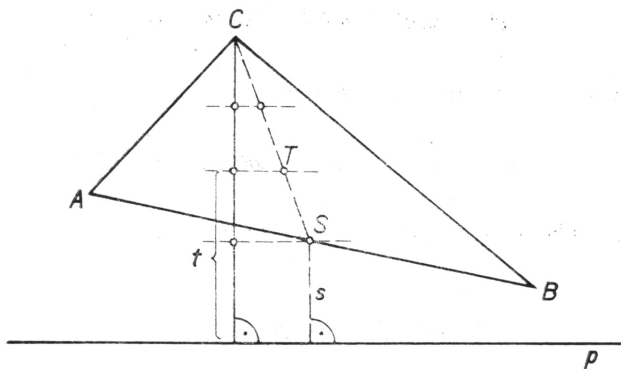
C - II - 1

V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným vnitřním bodem trojúhelníku. Vyjádřete vzdálenost těžiště T trojúhelníku od přímky p pomocí vzdáleností bodů A, B, C od přímky p .

Řešení. Označme vzdálenosti bodů A, B, C od přímky p po řadě a, b, c . Můžeme předpokládat, že bod C má z vrcholů A, B, C od přímky p největší vzdálenost, tj. $c \geq a, c \geq b$. Označme ještě s a t vzdálenosti středu S úsečky AB a těžiště T od přímky p (obr. 22). Pak je

$$s = \frac{a + b}{2}, \quad t = s + \frac{c - s}{3}. \quad \text{Po dosazení za } s \text{ dostaneme}$$

$$t = \frac{1}{3}(a + b + c).$$



Obr. 22

C - II - 2

Určete, kolik různých součtů můžeme dostat z výrazu

$$\underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1}_{1980 \text{ jedniček}}$$

1980 jedniček

doplněním alespoň jednoho páru závorek tak, aby vznikl správně uzavřovaný výraz a nedostali jsme přitom zápis součinu.

Řešení. Nejprve dokážeme, že můžeme dostat součty

$$-1978, -1976, \dots, -2, 0, 2, \dots, 1974, 1976.$$

Součet tvaru $-2k$ pro $k = 989, 988, \dots, 1$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 - \underbrace{(1+1) - (1+1) - \dots - (1+1)}_{k \text{ párů závorek}} - 1 + 1 - \dots + 1 - 1$$

k párů závorek

Součet tvaru $2k$ pro $k = 0, 1, 2, \dots, 988$ dostaneme např. uzávorkováním

$$1 - (1+1 - \underbrace{(1+1) - (1+1) - \dots - (1+1))}_{k+1 \text{ párů závorek}} - 1 + \dots + 1 - 1.$$

$k + 1$ párů závorek

Dále dokážeme, že jiné hodnoty dostat nemůžeme. Po doplnění závorek dostaneme výraz, který lze upravit na výraz bez závorek s 1980 členy, který se od původního bude lišit jen znaménky členů. Je-li v něm a znamének $+$ a b znamének $-$, je jeho součet $a - b$, a je tedy sudý, protože $a + b = 1980$. První člen má vždy kladné a druhý záporné znaménko, takže součty -1980 ani 1980 nemohou vzniknout. Součet zřejmě nemůže v absolutní hodnotě přesáhnout 1980. Zbývá dokázat, že nemůže vzniknout součet 1978.

a) Má-li po odstranění závorek čtvrtý člen znaménko $-$, pak alespoň dva členy (druhý a čtvrtý) mají znaménko $-$ a součet nemůže přesáhnout 1976.

b) Má-li čtvrtý člen znaménko $+$, znamená to, že leží uvnitř závorky, před kterou je znaménko $-$. V této závorce leží i třetí člen, a ten pak má v upraveném výrazu znaménko $-$. Opět tedy alespoň dva členy mají znaménko $-$.

Nechť P_1, P_2, P_3, P_4 jsou obsahy čtyř čtverců a o_1, o_2, o_3, o_4 jejich obvody (v tomtéž pořadí).

Platí-li

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_4,$$

pak

$$o_1 + o_2 + o_3 \leq o_4 \sqrt{3}.$$

Dokažte.

Řešení. Označíme-li velikosti stran čtverců a, b, c, d , platí

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

Máme dokázat nerovnost

$$(2) \quad a + b + c \leq d \sqrt{3}.$$

Kdyby

$$a + b + c > d \sqrt{3},$$

bylo by

$$(a + b + c)^2 > 3d^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

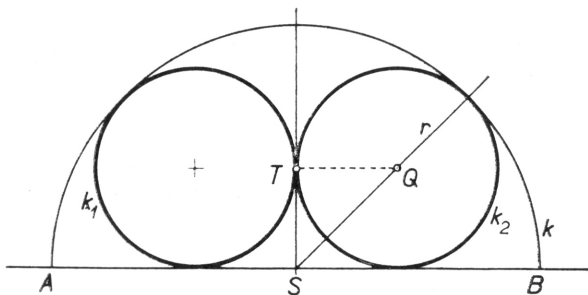
neboli

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + \\ &+ (a - c)^2 < 0, \end{aligned}$$

a to je spor.

Nad průměrem AB délky 10 cm je sestrojena polokružnice k . Kružnice k_1, k_2 mají stejně velké poloměry, dotýkají se vzájemně a obě se dotýkají polokružnice k a průměru AB . Určete velikost jejich poloměru.

Řešení. Zvolme označení podle obr. 23, r je hledaný poloměr. Je $SQ = 5 - r$, $ST = TQ = r$ a trojúhelník STQ je pravoúhlý. Podle Pythagorovy věty je $(5 - r)^2 = 2r^2$, tedy $r = 5(\sqrt{2} - 1) \doteq 2,07$.



Obr. 23