

59. ročník matematické olympiády na středních školách

Kategorie A

In: Zdeněk Dvořák (editor); Karel Horák (editor); Daniel Král' (editor); Peter Novotný (editor); Martin Panák (editor); Jaromír Šimša (editor); Jaroslav Švrček (editor); Pavel Töpfer (editor): 59. ročník matematické olympiády na středních školách. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 2009/2010. 51. mezinárodní matematická olympiáda. 22. mezinárodní olympiáda v informatice. (Czech). Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. pp. 63–100.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405193>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

Kategorie A

Texty úloh

A – I – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1,$$

$$\sqrt{y^2 - z} = x - 1,$$

$$\sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$

(*Radek Horenský*)

A – I – 2

Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC , CD a označme po řadě R , S její průsečíky s přímkami AB , AD . Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.

(*Leo Boček*)

A – I – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?

(*Peter Novotný*)

A – I – 4

V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° .

(*Tomáš Jurík*)

A – I – 5

V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n -tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese. (Dag Hrubý)

A – I – 6

Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y . (Tomáš Jurík)

A – S – 1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\ \sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\ \sqrt{z - x^2} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

A – S – 2

Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

kde r je poloměr kružnice opsané a ϱ poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek a a b . (Tomáš Jurík)

A – S – 3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme několik čísel napsaných na tabuli (aspoň dvě), jejichž součin je druhou mocninou

přirozeného čísla, zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných z nich není druhou mocninou. Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat? *(Peter Novotný)*

A – II – 1

Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnými parametry p, q má v oboru reálných čísel čtyři řešení, právě když platí $p + |q| + 2 < 0$. *(Jaromír Šimša)*

A – II – 2

Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC . Na jeho úhlopříčce AC v polovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP , právě když úsečky AB a BD jsou shodné. *(Jaroslav Švrček)*

A – II – 3

Určete všechna celá kladná čísla m, n taková, že n dělí $2m - 1$ a m dělí $2n - 1$. *(Tomáš Szaniszló)*

A – II – 4

V libovolném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC . Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnicí připsanou ke straně BC rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany BC , jednak obou polopřímek opačných k polopřímám BA a CA .) *(Pavel Leischner)*

A – III – 1

Určete všechny dvojice celých kladných čísel a a b , pro něž platí

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

(Martin Panák)

A – III – 2

Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

A – III – 3

Rumburak unesl na svůj hrad 31 členů strany A, 28 členů strany B, 23 členů strany C, 19 členů strany D a každého zavřel do samostatné kobky. Po práci se občas mohli procházet po dvoře a povídat si. Jakmile si spolu začali povídat tři členové tří různých stran, Rumburak je za trest přeregistroval do čtvrté strany. (Nikdy si spolu nepovídali více než tři unesení.)

- Mohlo se stát, že po určitém čase byli všichni unesení členy jedné strany? Které?
- Určete všechny čtveřice celých kladných čísel, jejichž součet je 101 a které jako počty unesených členů čtyř stran umožňují, aby se Rumburakovou péčí časem všichni stali členy jedné strany.

(Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

A – III – 4

Je dána kružnice k s tětívou AC , jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k . Určete množinu průsečíků přímk BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům.

(Pavel Leischner)

A – III – 5

Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli některá dvě čísla, jejichž součin je druhou mocninou přirozeného čísla, obě zvolená čísla smažeme a na tabuli napíšeme druhou odmocninu z jejich součinu. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen taková čísla, že součin žádných dvou z nich není druhou mocninou. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je týmž číslem.) Dokažte, že na tabuli zůstane aspoň 16 čísel.

(Peter Novotný)

A – III – 6

Najděte minimum výrazu

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c},$$

kde proměnné a, b, c jsou libovolná celá čísla větší než 1 a $[x, y]$ označuje
nejmenší společný násobek čísel x, y . (Tomáš Jurík)

Řešení úloh

A – I – 1

Levé strany daných rovnic mají (jako odmocniny) nezáporné hodnoty, proto z pravých stran plynou po řadě nerovnosti $z \geq 1$, $x \geq 1$ a $y \geq 1$.

Odmocnin v rovnicích se zbavíme jejich umocněním:

$$x^2 - y = (z - 1)^2, \quad y^2 - z = (x - 1)^2, \quad z^2 - x = (y - 1)^2,$$

umocněné rovnice sečteme a výsledek upravíme:

$$\begin{aligned}(x^2 - y) + (y^2 - z) + (z^2 - x) &= (z - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \\(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) &= (z^2 + x^2 + y^2) - 2(z + x + y) + 3, \\x + y + z &= 3.\end{aligned}$$

Protože však z odvozených nerovností $x \geq 1$, $y \geq 1$ a $z \geq 1$ sečtením plyne $x + y + z \geq 3$, může být rovnost $x + y + z = 3$ splněna jedinečně tak, že $x = y = z = 1$. Zkouškou dosazením se přesvědčíme, že trojice $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ je skutečně řešením (a to jediným, jak plyne z našeho postupu).

Dodejme, že pokud si nerovností $x, y, z \geq 1$ předem nepovšimneme, avšak vztah $x + y + z = 3$ po sečtení umocněných rovnic odvodíme, můžeme pak určenou hodnotu součtu $x + y + z$ uplatnit při sečtení původních (neumocněných) rovnic, a získat tak rovnici

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y^2 - z} + \sqrt{z^2 - x} = 0$$

s jasným důsledkem: každá z odmocnin musí být rovna nule.

Jiné řešení. Protože pro trojice (x, y, z) , (y, z, x) a (z, x, y) vyjde soustava zadaných rovnic nastejno, stačí hledat pouze taková řešení (x, y, z) , v nichž je první složka maximální, tj. platí $x \geq y$ a $x \geq z$.¹ Stejně jako v původním řešení si uvědomme, že $x, y, z \geq 1$ (dále nám postačí pouze fakt, že $x, y, z \geq 0$).²

Z předpokládané nerovnosti $x \geq z$ plyne pro pravé strany první a druhé nerovnice srovnání $x - 1 \geq z - 1$, takže stejnou nerovnost musí

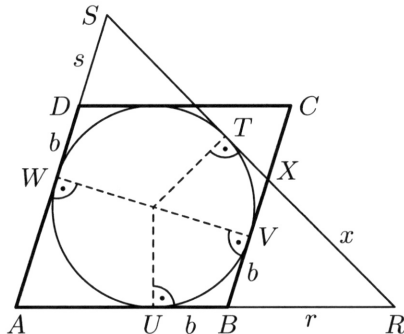
¹ Nerovnost $y \geq z$ ovšem předem zaručit nemůžeme. Pořadí neznámých x, y, z totiž nemůžeme měnit libovolně, ale pouze *cyklicky*.

² Nezápornost využijeme k ekvivalencím typu $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$.

splňovat i odmocniny na levých stranách, tedy i příslušní odmocněnci: $y^2 - z \geq x^2 - y$ neboli $x^2 - y^2 \leq y - z$. Levá strana té poslední je nezáporná (díky předpokladu $x \geq y$), takže je taková i pravá strana: $y - z \geq 0$ neboli $y \geq z$. To ještě upravíme na nerovnost $y - 1 \geq z - 1$ mezi pravými stranami první a třetí rovnice, takže podle jejich levých stran dostaneme $z^2 - x \geq x^2 - y$ neboli $z^2 - x^2 \geq x - y$. Odtud a z předpokladu $x \geq y$ máme $z^2 - x^2 \geq 0$ neboli $z \geq x$. Dohromady tak platí $x \geq y \geq z \geq x$, musí tedy být $x = y = z$. Tehdy se zadaná soustava redukuje na jedinou rovnici $\sqrt{x^2 - 1} = x - 1$. Je snadné ukázat, že její jediné řešení v oboru reálných čísel je $x = 1$.

A – I – 2

Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS , jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 22). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS . Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $r \cdot s = |BR| \cdot |DS|$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 22

Trojúhelníky ARS, BRX jsou stejnohlé podle středu R , neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsána straně BX druhého trojúhelníku BRX . Protože body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrné sdružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX . To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení

zapišeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

Jiné řešení. Užijeme stejné označení jako v předchozím řešení. Označme ještě $|RX| = x$ a vyjádřeme délky stran obou stejnohlých trojúhelníků ARS , BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici. Pro trojúhelník ARS je to snadné: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

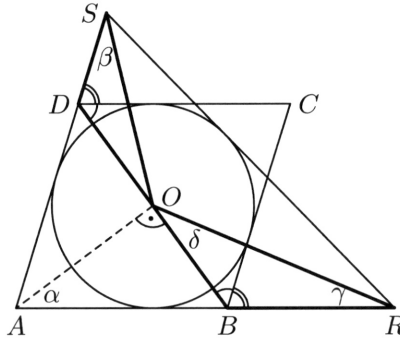
Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x , proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{aligned} \frac{(a + r) + (2b + r + s) + (a + s)}{a + r} &= \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b + s)}{a + r} &= 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs &= ab. \end{aligned}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

Jiné řešení. Překvapivě jednoduchý důkaz tvrzení úlohy podala studentka *Lenka Polcerová* z Gymnázia Křenová v Brně, když ukázala, že jsou podobné trojúhelníky ODS a RBO , kde O je střed kružnice vepsané kosočtverci $ABCD$ (obr. 23). Z této podobnosti totiž plyne úměra

$|DS| : |DO| = |BO| : |BR|$ neboli $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO|$, což je konstantní hodnota (na volbě tečny nezávislá).



Obr. 23

Protože zmíněné trojúhelníky ODS a RBO se zřejmě shodují ve vnitřních úhlech při vrcholech D a B , stačí k důkazu jejich podobnosti ověřit shodnost úhlů $\beta = |\sphericalangle OSD|$ a $\delta = |\sphericalangle ROB|$. Zavedeme-li ještě úhly $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ a $\gamma = |\sphericalangle ARO|$, pak z faktu, že kružnice vepsaná kosočtverci $ABCD$ je zároveň vepsána trojúhelníku ARS , plyne, že vnitřní úhly tohoto trojúhelníku jsou 2α , 2β , 2γ , takže platí $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Protože úhel AOB je pravý, vnitřní úhly trojúhelníku AOR mají velikost α , γ , $\delta + 90^\circ$, takže $\alpha + \gamma + \delta = 90^\circ$. Porovnáním obou uvedených rovností pro součet tří úhlů dostáváme kýženou rovnost $\beta = \delta$ a celý důkaz je hotov.

A – I – 3

Na tabuli zřejmě budou stále jen čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 tam budou napsána pořád, a to každé jedenkrát, protože nemají žádného dělitele různého od 1 a množina M ani neobsahuje žádný jejich násobek (takže nikdy nemohou z tabule zmizet ani se objevit v dalším exempláři).

Vysvětlíme nyní, proč na tabuli budou kromě uvedených pěti prvočísel napsána vždy ještě některá dvě další čísla. Součin S všech čísel zapsaných na tabuli je na počátku roven

$$S = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31. \quad (1)$$

V každém kroku zvolíme nějakou dvojici čísel (x, y) s vlastností $x \mid y$, tedy čísla tvaru $x = a$ a $y = ka$, a nahradíme je jedním číslem $y/x = k$.

Součin všech čísel na tabuli se přitom změní z dosavadní hodnoty S na novou hodnotu S/a^2 , neboť dva činitele x, y o součinu $xy = ka^2$ přejdou v jeden nový činitel k (a ostatní činitele se nezmění). Je jasné, že při změně $S \rightarrow S/a^2$ se exponent libovolného prvočinitele p z rozkladu čísla S buďto zachová (pokud $p \nmid a$), nebo sníží o sudé číslo (rovné exponentu p v rozkladu čísla a^2). V žádném případě se tedy nezmění *parita* (sudost či lichost) exponentu žádného z prvočinitelů. Proto každé z prvočísel, které mělo na počátku v rozkladu (1) *lichý* exponent, bude mít lichý exponent v rozkladu měnícího se S i po libovolném počtu kroků. Taková jsou (kromě 17, 19, 23, 29 a 31) rovněž prvočísla 2, 3, 5 a 11. Znamená to, že na tabuli budou stále zastoupena (ne nezbytně čtyři různá) čísla, která jsou těmito jednotlivými čtyřmi prvočísly dělitelná. Nemůže to být ovšem jediné číslo (neboť $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 > 33$), takže to musí být aspoň dvě čísla, například 10 a 33 (nebo 11 a 30 či 15 a 22, jiné možnosti při celkovém počtu sedmi čísel na tabuli neexistují). Tak jsme dokázali, že na tabuli bude skutečně vždy napsáno nejméně 7 čísel.

Zbývá popsat nějakou posloupnost kroků, po níž na tabuli 7 čísel zůstane. Existuje mnoho možností, můžeme například dát „stranou“ prvočísla 17, 19, 23, 29, 31 a čísla 10 a 33, a se zbylými čísly provést následující kroky:

$$\begin{aligned} 32, 16 &\rightarrow 2, & 30, 15 &\rightarrow 2, & 28, 14 &\rightarrow 2, & 26, 13 &\rightarrow 2, & 24, 12 &\rightarrow 2, \\ 22, 11 &\rightarrow 2, & 27, 9 &\rightarrow 3, & 21, 7 &\rightarrow 3, & 18, 6 &\rightarrow 3, & 25, 5 &\rightarrow 5, \\ 20, 4 &\rightarrow 5, & 8, 2 &\rightarrow 4, & 5, 5 &\rightarrow 1, & 4, 2 &\rightarrow 2, & 3, 3 &\rightarrow 1, \\ 3, 3 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1, & 2, 2 &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Po těchto krocích už je na tabuli (kromě sedmi čísel stranou) už jen 7 jedniček, které všechny odstraníme šesti kroky $1, 1 \rightarrow 1$ a posledním krokem např. $10, 1 \rightarrow 10$.

A – I – 4

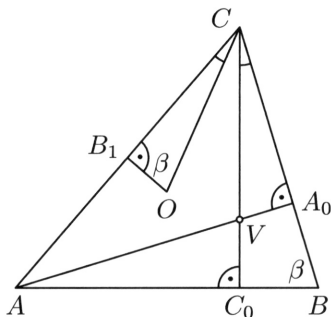
Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60^\circ \iff |CO| = |CV|. \quad (1)$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1 , kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 24). Z pravoúhlého trojúhelníku ACA_0 plyne

$$\gamma = 60^\circ \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1 , jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90^\circ - \beta$. (Pro úhel VCA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 , kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB , pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO , který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0 , CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV , což dokazuje (1).



Obr. 24

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB , ale také osou úhlu OCV . Tato osa je v případě $\gamma = 60^\circ$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různoramenný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60^\circ$, resp. $\beta = 60^\circ$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV , avšak žádný z úhlů α , β , γ není 60° . Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC , v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV , takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané. Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS . Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B , takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC , která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost 60° , leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. To ostatně plyne i z vyjádření jednotlivých úhlů v trojúhelníku.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2 \sin \gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg} \gamma}, \quad (2)$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2 \sin \gamma = \operatorname{tg} \gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ jediné řešení $\gamma = 60^\circ$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC , druhý vzorec ve (2) dostaneme dvojnásobným vyjádřením délky $|CA_0| = b \cos \gamma = |CV| \sin \beta$, kam ze sinové věty dosadíme $\sin \beta = (b/c) \sin \gamma$.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor $\mathbf{CV}$, závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětiny AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoliv na poloze bodu C . Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti 60° .

A – I – 5

Pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ označme r_k počet ryb v kádi poté, co si k -tý rybář odnese svůj díl. Tyto počty jsou podle zadání určeny počáteční hodnotou r_0 a rekurentními vztahy

$$r_{k+1} = \frac{n-1}{n}(r_k - 1) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Zapišme je ve výhodném tvaru

$$r_{k+1} = q \cdot r_k + d, \quad \text{kde } q = \frac{n-1}{n} \text{ a } d = \frac{1-n}{n}. \quad (1)$$

Rekurentní rovnice $r_{k+1} = q \cdot r_k + d$ (kde q, d jsou konstanty) je poměrně obvyklá v řadě aplikací. Odvodíme proto nejprve, jaké přímé vyjádření má každý člen r_k takové posloupnosti $r_0, r_1, r_2, \dots$ při obecných q, d a dané počáteční hodnotě r_0 . Teprve poté se vrátíme k naší úloze a do výsledku dosadíme hodnoty q, d připsané v (1).

Všimněme si předně, že v případě $q = 1$ dostáváme rovnici $r_{k+1} = r_k + d$, podle které je zkoumaná posloupnost aritmetická s diferencí d , takže její obecný člen má vyjádření $r_k = r_0 + kd$. V případě $q \neq 1$ z rekurentní rovnice postupně dostaneme

$$r_1 = qr_0 + d,$$

$$r_2 = qr_1 + d = q(qr_0 + d) + d = q^2r_0 + (q + 1)d,$$

$$r_3 = qr_2 + d = q(q^2r_0 + (q + 1)d) + d = q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d,$$

$$r_4 = qr_3 + d = q(q^3r_0 + (q^2 + q + 1)d) + d = q^4r_0 + (q^3 + q^2 + q + 1)d,$$

⋮

Takto nacházíme vyjádření

$$r_k = q^k r_0 + (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)d.$$

Uplatníme-li známý vzorec pro součet k členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q \neq 1$, dojdeme k závěru, že pro každé $k \geq 0$ je člen r_k dán přímým vzorcem

$$r_k = q^k r_0 + \frac{(q^k - 1)d}{q - 1} = q^k \left(r_0 + \frac{d}{q - 1} \right) - \frac{d}{q - 1}.$$

V našem konkrétním případě platí

$$\frac{d}{q - 1} = \frac{\frac{1 - n}{n}}{\frac{n - 1}{n} - 1} = n - 1,$$

odkud nacházíme vyjádření jednotlivých hodnot r_k ve tvaru

$$r_k = \frac{(n - 1)^k (r_0 + n - 1)}{n^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Vzhledem k nesoudělnosti dvojice čísel $(n - 1)^k, n^k$ jsou takové hodnoty r_k celočíselné, právě když je číslo $r_0 + n - 1$ dělitelné všemi zastoupenými

mocninami n^k , z nichž nejvyšší je mocnina n^n . Hledaná nutná i postačující podmínka má proto tvar: pro některé celé j platí $r_0 + n - 1 = j \cdot n^n$ neboli $r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Pomocí tohoto parametru j pak mají všechny členy r_k vyjádření

$$r_k = j \cdot (n - 1)^k \cdot n^{n-k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Zbývá zjistit nejmenší celé $j \geq 1$, při kterém jsou všechna čísla r_k daná vztahy (2) kladná. Protože tato čísla zřejmě tvoří klesající posloupnost, nejmenší z nich je číslo $r_n = j \cdot (n - 1)^n - n + 1$, což je při $n \geq 3$ číslo kladné již při $j = 1$ (tehdy $r_0 = n^n - n + 1$), zatímco při $n = 2$ to platí až při $j = 2$ (tehdy $r_0 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$).

Odpověď: Hledaný nejmenší počet ryb je $r_0 = 7$ pro $n = 2$ a $r_0 = n^n - n + 1$ pro každé $n \geq 3$.

Jiné řešení. Posloupnost $r_0, r_1, \dots, r_n$ můžeme počítat i „odzadu“, tj. pomocí posledního členu r_n vyjadřovat členy předchozí. S využitím rekurentního vztahu

$$r_k = q r_{k+1} + 1, \quad \text{kde} \quad q = \frac{n}{n-1}$$

(kvocient q má nyní převrácenou hodnotu oproti hodnotě v původním řešení), postupně pro $k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= q r_n + 1, \\ r_{n-2} &= q r_{n-1} + 1 = q^2 r_n + q + 1, \\ r_{n-3} &= q r_{n-2} + 1 = q^3 r_n + q^2 + q + 1, \\ r_{n-4} &= q r_{n-3} + 1 = q^4 r_n + q^3 + q^2 + q + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobně jako v původním řešení (sčítání členů geometrické posloupnosti a následné dosazení kvocientu q zde vynecháme) tak dospějeme ke vzorcům

$$r_{n-k} = \frac{n^k (r_n + n - 1)}{(n - 1)^k} - n + 1 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (3)$$

Protože čísla n^k a $(n - 1)^k$ jsou nesoudělná, hodnoty r_{n-k} jsou vesměs celočíselné, právě když $(n - 1)^n \mid r_n + n - 1$, neboli $r_n = j \cdot (n - 1)^n - n + 1$, čemuž odpovídá (podle vzorce (3) pro $k = n$) počáteční hodnota

$r_0 = j \cdot n^n - n + 1$. Tak jsme došli ke stejnému závěru jako při původním postupu.

Poznámka. Nalezení vzorců pro členy r_k se při obou postupech značně zjednoduší, když si všimneme, že pozměněná posloupnost tvořená čísly $r'_k = r_k + n - 1$ je geometrická.

A – I – 6

V zadané rovnici bude výhodné přejít od nejmenších společných násobků k největším společným dělitelům, a to pomocí známého vztahu $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$. Označme proto $u = (a, c)$, $v = (b, c)$ a levou stranu rovnice přepíšme takto:

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{ac/u + bc/v}{a + b} = \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \right) \cdot \frac{c}{a + b}.$$

Zadanou rovnici lze proto (po vynásobení zlomkem $(a + b)/c$) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b). \quad (1)$$

Porovnejme odhady velikosti výrazů v (1). Protože $p^2 > 0$, pro zlomek na pravé straně (1) zřejmě platí

$$\frac{1}{2} < \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} < 1,$$

takže v důsledku (1) musí být

$$\frac{a + b}{2} < \frac{a}{u} + \frac{b}{v} < a + b. \quad (2)$$

Díky levé nerovnosti nemohou být obě přirozená čísla u, v větší než 1, neboť z nerovností $u \geq 2$ a $v \geq 2$ bychom dostali

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Aspoň jedno z čísel u, v je tedy rovno jedné. Pravá nerovnost v (2) však vylučuje případ $u = v = 1$. Číslo 1 se tudíž rovná právě jedno z čísel u, v . S ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $u = 1$ a $v \geq 2$.

Protože číslo v jsme zavedli vztahem $v = (b, c)$, je zlomek b/v roven některému přirozenému číslu b_1 . Dosadíme nyní hodnoty $u = 1$ a $b = b_1 v$ do (1) a vzniklou rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné a :

$$\begin{aligned} a + b_1 &= \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot (a + b_1 v), \\ (p^2 + 2)(a + b_1) &= (p^2 + 1)(a + b_1 v), \\ a &= b_1((p^2 + 1)v - p^2 - 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Kdyby platilo $v \geq 3$, dostali bychom z poslední rovnosti odhad

$$a \geq (p^2 + 1)v - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

a to je ve sporu s nerovností $a \leq 2p^2$ danou oborem, ve kterém podle zadání úlohy mají hodnoty a, b, c ležet. Platí tedy opačná nerovnost $v < 3$, která spolu s předpokladem $v \geq 2$ vede k závěru, že nutně $v = 2$. Rovnice (3) tak přechází v rovnici

$$a = b_1(2(p^2 + 1) - p^2 - 2) = p^2 b_1,$$

kterou v zadaném oboru hodnot a , množině $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, snadno vyřešíme.

Protože je tedy $a \leq 2p^2$, je $b_1 \leq 2$. Přitom z podmínek $u = (a, c) = 1$ a $v = (b, c) = 2$ plyne, že c je sudé číslo s číslem a nesoudělné. Z rovnosti $a = p^2 b_1$ tak plyne, že $b_1 = 1$ a p je *liché* prvočíslo. Je tudíž $a = p^2 b_1 = p^2$ a $b = b_1 v = 1 \cdot 2 = 2$. Pro číslo c to znamená následující zpřesnění: *c je sudé číslo, které není násobkem daného prvočísla p .*

Která $c \in \{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$ takovou podmínku splňují a kolik jich je? Jak už víme, pro $p = 2$ žádné takové c neexistuje. Pro liché p pak ze všech p^2 možných sudých čísel $c = 2, 4, 6, \dots, 2p^2$ vyloučíme všechny násobky čísla p , tedy právě p čísel $2p, 4p, \dots, 2p^2$; vyhovujících hodnot je proto právě $p^2 - p$. Takový je tedy počet všech hledaných trojic $(a, b, c) = (p^2, 2, c)$ v rozebraném případě, kdy $u = 1$ a $v \geq 2$.

Ve druhém možném případě, kdy naopak $v = 1$ a $u \geq 2$, existuje s ohledem na symetrii stejný počet $p^2 - p$ vyhovujících trojic, které jsou tentokrát všechny tvaru $(2, p^2, c)$. (Popis vyhovujících trojic zahrneme i do odpovědi, přestože to zadání úlohy nevyžaduje.)

Odpověď: V případě $p = 2$ žádné vyhovující trojice neexistují, v případě lichého prvočísla p je jich právě $2(p^2 - p)$ a všechny jsou tvaru

$$(a, b, c) = (p^2, 2, c) \quad \text{nebo} \quad (a, b, c) = (2, p^2, c),$$

kde $c \in \{1, 2, \dots, 2p^2\}$ je libovolné sudé číslo, které není násobkem p .

Jiné řešení. Definujme přirozená čísla u, v, m, n vztahy $u = (a, c)$, $v = (b, c)$, $a = mu$ a $b = nv$. Pak $[a, c] = mc$, $[b, c] = nc$ a po dosazení do zadané rovnice po malé úpravě včetně zkrácení číslem c dostaneme

$$(p^2 + 2)(m + n) = (p^2 + 1)(mu + nv).$$

Díky nesoudělnosti čísel $p^2 + 1$ a $p^2 + 2$ existuje přirozené číslo k takové, že

$$m + n = k(p^2 + 1) \quad \text{a} \quad mu + nv = k(p^2 + 2). \quad (1)$$

Vyřešme nyní soustavu rovnic (1) pro neznámé m a n , pokládaje u a v za parametry. Zřejmě $u \neq v$, předpokládejme tedy dále, že $u > v$ (případ $u < v$ se díky symetrii rozebere stejně). Soustava (1) má jediné řešení

$$m = \frac{k(p^2 + 2 - v(p^2 + 1))}{u - v} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - v}.$$

Z nerovností $u - v > 0$ a $m > 0$ plyne $p^2 + 2 - v(p^2 + 1) > 0$ neboli

$$v < \frac{p^2 + 2}{p^2 + 1} = 1 + \frac{1}{p^2 + 1} < 2,$$

takže nutně platí $v = 1$ a vzorce pro m, n přejdou do tvaru

$$m = \frac{k}{u - 1} \quad \text{a} \quad n = \frac{k(u(p^2 + 1) - p^2 - 2)}{u - 1} = m(u(p^2 + 1) - p^2 - 2).$$

Kdyby pro číslo $u > 1$ platilo $u \geq 3$, měli bychom z poslední rovnosti

$$n \geq u(p^2 + 1) - p^2 - 2 \geq 3(p^2 + 1) - p^2 - 2 = 2p^2 + 1,$$

což je ve sporu s tím, že $n = nv = b \leq 2p^2$. Je tedy nutně $u = 2$ a vzorce pro m, n získávají definitivní podobu

$$m = k \quad \text{a} \quad n = kp^2,$$

tudíž (s ohledem na nerovnost $n \leq 2p^2$) musí být buď $k = 1$, nebo $k = 2$.

Je-li $k = 1$, máme $a = mu = 2$, $b = nv = p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (2, c) = 2$ a $(b, c) = (p^2, c) = 1$. Taková čísla c existují, jen když je prvočíslo p liché, a v zadaném intervalu jich je právě $p^2 - p$.

Je-li $k = 2$, máme $a = 4$ a $b = 2p^2$ a číslo c splňuje podmínky $(a, c) = (4, c) = 2$ a $(b, c) = (2p^2, c) = 1$. Žádné takové c (které by bylo sudé i liché) zřejmě neexistuje.

V případě $u < v$ s ohledem na symetrii existuje rovněž $p^2 - p$ vyhovujících trojic, takže jejich celkový počet je $2(p^2 - p)$ (je-li ovšem $p = 2$, žádná zkoumaná trojice neexistuje).

A – S – 1

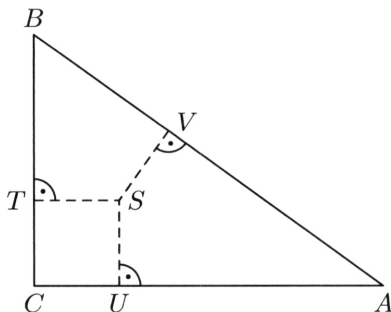
Hodnoty odmocnin jsou vždy nezáporné a odmocňované hodnoty také, proto neznámé x, y, z musejí splňovat podmínky $x, y, z \geq 1$, $x \geq y^2$, $y \geq z^2$ a $z \geq x^2$. Z posledních tří nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geq \max\{y^2, z^2, x^2\}$, opačná (neostrá) nerovnost platí díky tomu, že $t \leq t^2$ pro každé $t \geq 1$. Proto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, tedy $x = y = z = 1$ a obě strany všech tří rovnic soustavy jsou rovny nule (to je zároveň zkouška).

Obměna postupu: namísto úvahy o maximech můžeme po zjištění z první věty řešení pokračovat následovně: platí $x \geq y^2 \geq y \geq z^2 \geq z \geq x^2$, nerovnost mezi krajními výrazy $x \geq x^2$ již znamená $x = 1$, takže i hodnoty y, z z uvedeného řetězce šesti členů jsou rovny 1.

Závěr. Soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

A – S – 2

Pro délky úseků stran obecného trojúhelníku ABC k bodům dotyku vepsané kružnice (označeným podle obr. 25) platí vzorec



Obr. 25

$$|AU| = |AV| = \frac{b + c - a}{2}, \quad |BV| = |BT| = \frac{a + c - b}{2},$$

$$|CT| = |CU| = \frac{a + b - c}{2},$$

kteřé lze snadno získat vyřešením soustavy rovnic

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C , T , U spolu se středem S vepsané kružnice jsou obecně vrcholy deltoidu, který je v případě pravého úhlu ACB čtvercem o straně $\varrho = |SU| = |SV|$. Porovnání s výše uvedenými vzorci pro délky úseků CT , CU vede ke vztahu

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2};$$

podle Thaletovy věty v takovém pravoúhlém trojúhelníku navíc platí $r = \frac{1}{2}c$. Dohromady dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Zkoumaný podíl $(r + \varrho)/(a + b)$ má proto v libovolném pravoúhlém trojúhelníku jedinou možnou hodnotu, rovnou číslu $\frac{1}{2}$.

Uvedený postup lze obměnit zejména tak, že namísto obecných vzorců pro úseky stran vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z nichž plyne $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, tudíž

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b - \varrho) + (a - \varrho),$$

odkud je již závěr nasnadě.

Jiné řešení. Pro obsah P obecného trojúhelníku ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a + b + c);$$

k jeho odvození stačí sečíst obsahy trojúhelníků ABS , ACS a BCS se shodnou výškou ϱ ke stranám původního trojúhelníku. V případě $\gamma = 90^\circ$ je ovšem $2P = ab$ a kromě toho, jak už jsme zmínili výše, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a + b + c)} = \frac{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}{2(a + b + c)} =$$

$$= \frac{(a + b)c + (a + b)^2}{2(a + b + c)} = \frac{(a + b)(a + b + c)}{2(a + b + c)} = \frac{a + b}{2},$$

a docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení.

A – S – 3

Součin všech čísel zapsaných na tabuli je roven

$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Přítomnost lichých exponentů znamená, že S není druhou mocninou. Proto nemůžeme smazat v prvním kroku všechna napsaná čísla, prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonce nesmažeme nikdy. Ze všech ostatních čísel, která se účastnit úprav mohou, vznikne vždy neprázdný soubor čísel, takže na tabuli bude pořád alespoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukažme, že 6 je hledaný nejmenší počet popisem jednoho (z řady možných) postupů.

Kvůli lichým exponentům u prvočísel 2, 3, 5 a 11 vyčleníme nejdříve například skupinu čísel $A = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všechna ostatní čísla různá od 17, 19, 23, 29 a 31 zařadíme do skupiny

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33\}.$$

V prvním kroku vybereme všechna čísla z A a nahradíme je číslem

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Protože součin všech čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2$, vybereme v druhém kroku číslo n spolu se všemi čísly z B a nahradíme je číslem

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Pak už zůstane na tabuli pouze šest čísel, což je, jak jsme vysvětlili, nejmenší možný počet.

A – II – 1

Ze zadání je patrné, že číslo 0 není řešením dané rovnice, ať jsou parametry p, q jakékoliv. Zbavme se proto absolutní hodnoty v rovnici konstatováním, že všechna její řešení jsou *kladné* kořeny rovnice

$$x^2 + px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 + (p - q)x + 1 = 0, \quad (1)$$

spolu se *zápornými* kořeny rovnice

$$x^2 - px = qx - 1 \quad \text{neboli} \quad x^2 - (p + q)x + 1 = 0. \quad (2)$$

Protože každá kvadratická rovnice má nejvýše dva kořeny, zkoumaná situace celkového počtu čtyř řešení nastane, právě když rovnice (1) bude mít dva *různé kladné* kořeny a zároveň rovnice (2) bude mít dva *různé záporné* kořeny. Rozborem těchto podmínek se nyní budeme zabývat.

Předně je jasné, že oba diskriminanty $(p-q)^2 - 4$ a $(p+q)^2 - 4$ rovnic (1) a (2) musejí mít kladné hodnoty, což vede na nutné podmínky

$$(p-q)^2 > 4 \quad \text{a} \quad (p+q)^2 > 4. \quad (3)$$

Jsou-li splněny, stačí zkoumat otázku, kdy *menší* kořen rovnice (1) je *kladný* a zároveň *větší* kořen rovnice (2) *záporný*. Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice to lze zapsat nerovnostmi

$$\frac{q-p-\sqrt{(p-q)^2-4}}{2} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2-4}}{2} < 0. \quad (4)$$

(Znaménka pro menší, resp. větší kořen jsme vybrali na základě toho, že jmenovatelé obou zlomků se rovnají *kladnému* číslu 2.) Z první nerovnosti zapsané v ekvivalentním tvaru

$$q-p > \sqrt{(p-q)^2-4} \quad (5)$$

plyne $q-p > 0$, takže první nerovnost v (3) lze zpřesnit na $q-p > 2$. Pak už nerovnost (5) zřejmě platí, neboť

$$q-p = \sqrt{(p-q)^2} > \sqrt{(p-q)^2-4}.$$

Tak jsme ukázali, že rovnice (1) má dva různé kladné kořeny, právě když platí $q-p > 2$, což je první z podmínek

$$p-q+2 < 0, \quad p+q+2 < 0. \quad (6)$$

Stejným postupem ověříme, že druhá podmínka v (6) vyjadřuje existenci dvou různých záporných kořenů rovnice (2). Stačí upravit druhou nerovnost z (4) do tvaru

$$\sqrt{(p+q)^2-4} < -(p+q) \quad \text{(odkud plyne } p+q < 0)$$

a pro záporné číslo $p+q$ tak získat konečnou podmínku ve tvaru $p+q < -2$, což je druhá z nerovností (6), které tak přesně vymezují zkoumanou situaci.

K dokončení celého řešení zbývá zdůvodnit ekvivalenci

$$(p - q + 2 < 0 \wedge p + q + 2 < 0) \Leftrightarrow p + |q| + 2 < 0.$$

To je snadné, protože ze zřejmé rovnosti $|q| = \max\{-q, q\}$ plyne

$$p + |q| + 2 = \max\{p - q + 2, p + q + 2\}$$

a maximum ze dvou reálných čísel je záporné, právě když jsou obě záporná.

Jiné řešení. Nejprve postupujme shodně s původním řešením až do odvození nerovností (3), které, připomeňme, zaručují existenci dvou různých reálných kořenů rovnice (1), resp. rovnice (2). Označíme je po řadě $x_{1,2}$ a $x_{3,4}$ a zapíšeme jejich vztah ke koeficientům rovnic, vyjádřený známými Viètovými vzorci

$$x_1 + x_2 = -(p - q), \quad x_1 x_2 = 1, \quad x_3 + x_4 = p + q, \quad x_3 x_4 = 1. \quad (7)$$

Z rovnosti $x_1 x_2 = 1$ plyne, že kořeny $x_{1,2}$ mají stejné znaménko. Jsou tedy kladné, právě když je kladný jejich součet, který je ovšem podle první rovnosti v (7) roven $-(p - q)$. Získanou nerovnost $p - q < 0$ lze spolu s podmínkou $(p - q)^2 > 4$ vyjádřit jedinou nerovností $p - q < -2$ (neboli $p - q + 2 < 0$), která je tudíž kritériem toho, kdy rovnice (1) má dva různé kladné kořeny. Podobně pro existenci dvou záporných kořenů rovnice (2) dostaneme kritérium $p + q + 2 < 0$. Závěrečný převod obou nerovností na jednu ekvivalentní nerovnost s absolutní hodnotou zdůvodníme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Stejně jako v předchozích postupech přejdeme k rovnicím (1) a (2), které jsou obě téhož typu $x^2 + rx + 1 = 0$. Existenci dvou různých kladných či záporných kořenů takové rovnice nyní posoudíme úvahou o příslušné kvadratické funkci $f(x) = x^2 + rx + 1$ s parametrem r , jejímž grafem je parabola rozevřená vzhůru. Proto má funkce f dva různé nulové body, řekněme u a v , právě když má alespoň jednu zápornou hodnotu, navíc takové hodnoty se nabývají právě v bodech, které leží mezi u a v . Všimněme si ještě, že bez ohledu na hodnotu parametru r pro případné nulové body u, v funkce f platí $uv = f(0) = 1$, takže to jsou dvě navzájem převrácená čísla, jež jsou zároveň kladná či zároveň záporná. Jsou tedy obě kladná (resp. záporná), právě když mezi nimi leží číslo 1 (resp. číslo -1). Pro první případ tak dostáváme jedinou podmínku $f(1) < 0$

(neboli $2+r < 0$), pro druhý případ jedinou podmínku $f(-1) < 0$ (neboli $2-r < 0$). Zbývá dodat, že v rovnici (1) je $r = p - q$ a v rovnici (2) je $r = -(p + q)$, takže znovu dostáváme dvojici nerovností (6).

A – II – 2

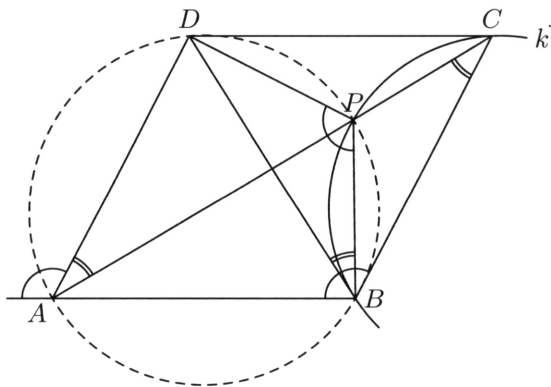
Pro lepší přehlednost zmiňme úvodem zřejmé vlastnosti obecného rovnoběžníku $ABCD$, které v řešení využijeme: součet úhlů BAD a ABC je úhel přímý, zatímco úhly DAC a ACB jsou shodné, stejně jako strany AB a CD .

Podle zadání úlohy přímka BD odděluje body A a P , přičemž platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ,$$

čtyřúhelníku $ABPD$ lze tudíž opsat kružnici (obr. 26). V ní jsou proto shodné obvodové úhly DBP a DAP , z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCP|.$$



Obr. 26

Protože přímka BP odděluje body C a D , lze uplatnit větu o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BP kružnice k opsané trojúhelníku BCP : Z odvozené shodnosti úhlů BCP a DBP vyplývá, že přímka BD je tečnou ke kružnici k (s bodem dotyku B). Po tomto zjištění již snadno dokážeme obě požadované implikace.

(i) Je-li přímka CD tečnou ke kružnici k , ze symetrie obou tečen CD a BD plyne $|CD| = |BD|$ neboli $|AB| = |BD|$.

(ii) Platí-li naopak $|AB| = |BD|$ neboli $|CD| = |BD|$, leží bod D na ose tětiny BC kružnice k , takže její tečnou je nejen přímka BD , ale i souměrně sdružená přímka CD .

A – II – 3

Hledáme právě ty dvojice celých kladných čísel m a n , pro něž existují celá kladná čísla k a l taková, že

$$2m - 1 = kn \quad \text{a} \quad 2n - 1 = lm. \quad (1)$$

Pohlédneme na čísla k, l jako na parametry a řešme soustavu lineárních rovnic (1) pro neznámé m, n . Když například k dvojnásobku první rovnice přičteme k -násobek druhé rovnice, eliminujeme tím neznámou n a po úpravě dostaneme první z rovnic

$$(4 - kl)m = k + 2 \quad \text{a} \quad (4 - kl)n = l + 2; \quad (2)$$

druhou rovnicí získáme analogicky. Protože pravé strany rovnic (2) jsou kladné, plyne z tvaru levých stran podmínka $4 - kl > 0$ neboli $kl < 4$. To je pro celá kladná čísla k, l natolik omezující, že jednotlivé možné případy $kl = 1$, $kl = 2$ a $kl = 3$ snadno postupně rozebereme.

V případě $kl = 1$ musí být $k = l = 1$ a z rovnic (2), které přejdou do tvaru $3m = 3$ a $3n = 3$, nacházíme první vyhovující dvojici $m = n = 1$.

Případ $kl = 2$ vůbec rozebírat nemusíme, protože podle levých stran rovnic (1) vidíme, že čísla k, l, m, n z pravých stran musí být (v každém, nejen v tomto případě) lichá.

V případě $kl = 3$ je nutně $\{k, l\} = \{1, 3\}$, což po dosazení do rovnic (2) dává řešení $m = 5$ a $n = 3$, nebo naopak $m = 3$ a $n = 5$.

Závěr. Všechny hledané dvojice (m, n) jsou $(1, 1)$, $(3, 5)$ a $(5, 3)$.

Jiná řešení. Nerovnostní úvahy vedoucí k úplnému vyřešení úlohy můžeme různými způsoby obměňovat. Podívejme se tedy, jakými cestami se lze od výchozích předpokladů $m \mid 2n - 1$ a $n \mid 2m - 1$ ubírat.

První postup. Kdyby neplatilo $m = 2n - 1$ ani $n = 2m - 1$, byla by čísla $2n - 1$ a $2m - 1$ alespoň dvojnásobky po řadě čísel m a n , tudíž by platily nerovnosti $2n - 1 \geq 2m$ a $2m - 1 \geq 2n$. Ty se však navzájem vylučují, neboť znamenají $2n > 2m$, resp. $2m > 2n$. Proto musí platit

aspoň jedna z rovností $m = 2n - 1$ či $n = 2m - 1$. Je-li $m = 2n - 1$, pak $2m - 1 = 4n - 3$ a zbylá podmínka $n \mid 2m - 1$ tak přechází do tvaru $n \mid 4n - 3$ neboli $n \mid 3$. To splňují pouze čísla $n = 1$ a $n = 3$, kterým podle vzorce $m = 2n - 1$ odpovídají po řadě hodnoty $m = 1$ a $m = 5$. Druhý případ, kdy $n = 2m - 1$, se od prvního liší jen záměnou rolí m a n , takže při něm dostaneme ještě třetí vyhovující dvojici $m = 3$ a $n = 5$.

Druhý postup. S ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že platí $m \leq n$, z čehož plyne $2m - 1 \leq 2n - 1 < 2n$. Číslo $2m - 1$ je tak násobkem čísla n menším než $2n$, musí to tudíž být samo číslo n . Tak jsme odvodili rovnost $2m - 1 = n$. Zbytek úvah je už stejný jako při prvním postupu.

Třetí postup. Všimněme si, že číslo $2m + 2n - 1$ je dělitelné každým z obou čísel m a n , která jsou navíc nesoudělná, neboť např. číslo m je dělitel čísla $2n - 1$, jež je s číslem n zřejmě nesoudělné. Proto je číslo $2m + 2n - 1$ dělitelné i součinem mn , takže platí nerovnost $mn \leq 2m + 2n - 1$ neboli $(m - 2)(n - 2) \leq 3$. Odtud vyplývá, že obě čísla m , n nemohou být větší než 3; s ohledem na symetrii rozebereme pouze případ $m \leq 3$. Pro $m = 1$ z podmínky $n \mid 2m - 1$ plyne $n = 1$, pro $m = 2$ je podmínka $m \mid 2n - 1$ nesplnitelná, pro $m = 3$ máme podmínky $3 \mid 2n - 1$ a $n \mid 5$, které splňuje jediné $n = 5$.

A – II – 4

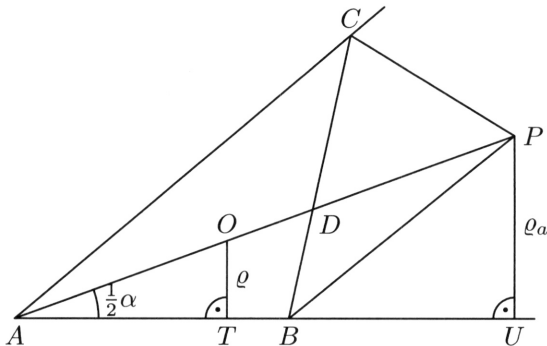
Označme obvyklým způsobem délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC . Pro poloměry ϱ , ϱ_a kružnice vepsané, resp. připsané straně BC trojúhelníku ABC o obsahu S platí známé vzorce

$$\varrho = \frac{2S}{a + b + c} \quad \text{a} \quad \varrho_a = \frac{2S}{b + c - a}.$$

(K jejich odvození stačí uvážit rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvážit, že ϱ , resp. ϱ_a je společná výška zastoupené trojice trojúhelníků ke stranám původního trojúhelníku.)

Protože středy O , P leží na ose vnitřního úhlu BAC , jsou ϱ , ϱ_a odvěsnami protilehlými k úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravoúhlých trojúhelníků s přeponami AO , resp. AP (obr. 27), takže platí $\varrho = |AO| \sin \frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin \frac{1}{2}\alpha$. Dohromady dostáváme vyjádření pravé strany dokazované rovnosti ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} = \\ &= \frac{((a + b + c) + (b + c - a)) \sin \frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b + c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S}. \end{aligned}$$



Obr. 27

Na druhé straně je obsah S součtem obsahů trojúhelníků ABD a ACD , které vyjádříme pomocí délek jejich stran z vrcholu A a sinu jimi sevřeného (shodného) úhlu $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD| \sin \frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtud snadno obdržíme vyjádření

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c) \sin \frac{1}{2}\alpha}{S},$$

z něhož vidíme, že obě strany dokazované rovnosti mají stejnou hodnotu. Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že díky vzorci $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = bc \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha$ lze získaný výsledek zapsat ve tvaru

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc \cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Jiné řešení. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pro body T, U dotyku polopřímky AB s vepsanou, resp. připsanou kružnicí.³ Vzhledem k rovnostem $|AT| = |AO| \cos \frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP| \cos \frac{1}{2}\alpha$ dostaneme následující vyjádření pravé strany dokazované rovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{|AO| + |AP|}{|AP|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{|AT| + |AU|}{|AU|} \cdot \frac{1}{|AO|} = \\ &= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \cdot \frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c} \cdot \frac{1}{|AO|}. \end{aligned}$$

³ Tyto rovnosti jsou dobře známe a snadno plynou z rovností délek úseků tečen od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku s příslušnou kružnicí.

Vidíme, že k dokončení důkazu požadované rovnosti stačí ukázat, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a + b + c}{b + c}.$$

Z vlastností osy úhlu však víme, že bod D dělí stranu BC v poměru délek stran AB a AC , tedy $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobně ovšem bod O osy úhlu ACD dělí protější stranu AD trojúhelníku ACD v poměru

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO| + |OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Jiné řešení. Uvedeme trigonometrický postup založený na užití sinové věty v trojúhelnících ABO , ABD a ABP .⁴ Je zřejmé, že tyto trojúhelníky mají u vrcholu B po řadě úhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatímco u vrcholů O , D , P mají po řadě úhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Proto sinová věta přináší rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\beta},$$

když jsme dvakrát využili vzorec $\sin(90^\circ + \delta) = \cos \delta$. Po dosazení do dokazované rovnosti tak docházíme k ekvivalentní úloze dokázat pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC rovnost

$$\frac{2 \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin \beta} = \frac{\cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}\beta}.$$

Po uplatnění vzorce $\sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta$ a následném vynásobení obou stran nenulovým výrazem $\sin \frac{1}{2}\beta \cos \frac{1}{2}\beta$ přecházíme k úkolu ověřit jednodušší rovnost

$$\sin\left(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\right) = \cos \frac{1}{2}\gamma \cdot \cos \frac{1}{2}\beta + \sin \frac{1}{2}\gamma \cdot \sin \frac{1}{2}\beta.$$

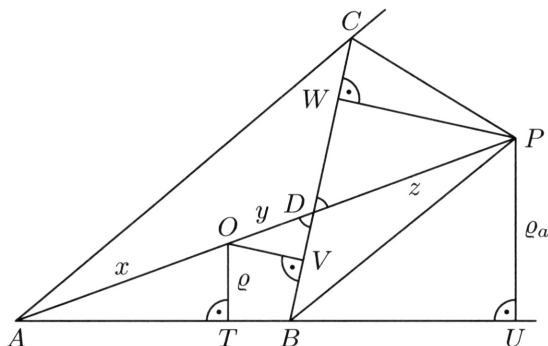
⁴ Se stejným úspěchem lze využít i trojici trojúhelníků ACO , ACD a ACP .

To je už docela snadné: výraz napravo je totiž roven $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnost typu $\sin \delta = \cos \varepsilon$ je zaručena, platí-li $\delta + \varepsilon = 90^\circ$. V našem případě je ovšem $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, tudíž

$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$$

a celý důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podle obr. 28 označme body dotyku T, U, V, W vepsané a připsané kružnice s přímkami AB, BC . Podle věty *uu* jsou dvojice trojúhelníků AOT, APU



Obr. 28

a DOV, DPW podobné, přitom v obou případech je koeficient podobnosti roven poměru poloměrů obou kružnic. Odtud pro přepony zmíněných čtyř trojúhelníků plyne úměra⁵

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{y}{z}. \quad (1)$$

Protože $x + y + z > z$, a tedy rovněž $x > y$, uvedeným dvěma zlomkům se rovná i třetí zlomek sestavený z (kladných) rozdílů čitatelů a jmenovatelů. Platí tedy

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{x - y}{(x + y + z) - z} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{2x}{x + y} - 1.$$

⁵ Její platnost je zaručena i v případě $D = V = W$, kdy druhý pár podobných trojúhelníků degeneruje na dvojici úseček — poloměrů zkoumaných kružnic.

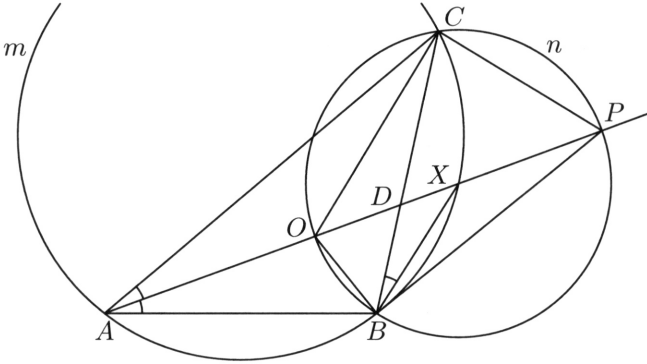
Odtud po vydělení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

a po převodu druhého zlomku z pravé strany na levou již obdržíme dokazovanou rovnost, neboť

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Jiné řešení. Body A, O, D, P leží na ose úhlu BAC . Body O, P navíc leží na vnitřní a vnější ose úhlu ABC , které jsou na sebe kolmé, takže úhly OBP a OCP jsou pravé. Body O, B, P, C proto leží na kružnici n , jejíž střed X je středem úsečky OP (obr. 29), takže zároveň platí $|AP| + |AO| = 2|AX|$. Vzhledem k mocnosti bodu A ke kružnici n



Obr. 29

tak dostáváme

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AP| + |AO|}{|AP||AO|} = \frac{2|AX|}{|AX|^2 - |BX|^2}.$$

Odtud plyne, že místo vztahu

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}$$

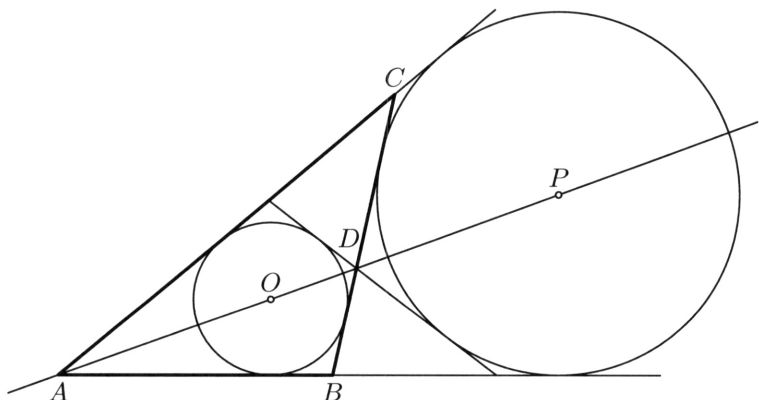
stačí dokázat rovnost $|AD| \cdot |AX| = |AX|^2 - |BX|^2$ neboli $|BX|^2 = |AX|(|AX| - |AD|) = |AX| \cdot |DX|$. Poslední rovnost však plyne z podobnosti trojúhelníků AXB a BXD , které se shodují ve společném vnitřním

úhlu u vrcholu X a v odpovídajících úhlech při vrcholech A, B , jež jsou zároveň obvodovými úhly příslušnými oblouku CX kružnice m .

Jiné řešení. Obě kružnice jsou stejnohlé podle středů A i D . Obě stejnohllosti mají až na znaménko stejné koeficienty a zobrazují bod O na bod P (obr. 30). Odtud

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| - |AD|}{|AD| - |AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme $2|AP||AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydělení nenulovým součinem $|AP| \cdot |AO| \cdot |AD|$ vyjde vztah, který jsme chtěli dokázat.



Obr. 30

A – III – 1

Z rovnice plyne, že b^2 je sudé číslo větší než 4^a , tudíž b je sudé číslo větší než sudé číslo 2^a . Musí proto platit $b \geq 2^a + 2$, odkud

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2 \geq (2^a + 2)^2 = 4^a + 4 \cdot 2^a + 4.$$

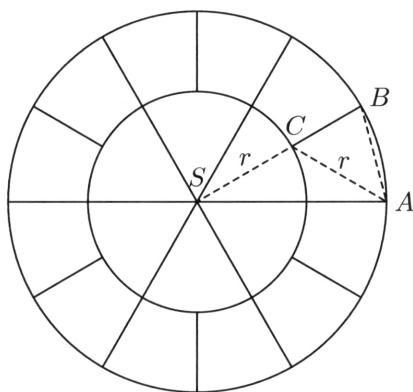
Porovnáním krajních výrazů dostaneme $a^2 \geq 2^a$, což znamená, že $a \leq 4$. Dokážeme totiž indukcí, že opačná nerovnost $a^2 < 2^a$ platí pro každé celé $a \geq 5$. Pro $a = 5$ je to tak ($25 < 32$); platí-li $a^2 < 2^a$ pro některé $a \geq 5$, pak po vynásobení dvěma dostaneme $2a^2 < 2^{a+1}$, takže kýžená nerovnost $(a+1)^2 < 2^{a+1}$ je důsledkem nerovnosti $a^2 < 2^a$, která je

zřejmá, neboť je ekvivalentní s nerovností $1 < a(a-2)$, jež platí triviálně, ať je $a \geq 5$ jakékoli. Tím je důkaz indukci hotov.

Ukázali jsme, že v každé hledané dvojici (a, b) musí platit $a \leq 4$. Postupným dosazením hodnot $a = 1, 2, 3, 4$ do rovnice $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ zjistíme, že úloha má právě dvě řešení, a to $(a, b) = (2, 6)$ a $(a, b) = (4, 18)$.

A – III – 2

Označme $r = 4\sqrt{3}$ cm a celý terč o daném poloměru $r\sqrt{3}$ rozdělme na 18 částí. Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu 60° v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí“ o středovém úhlu 30° (obr. 31).



Obr. 31

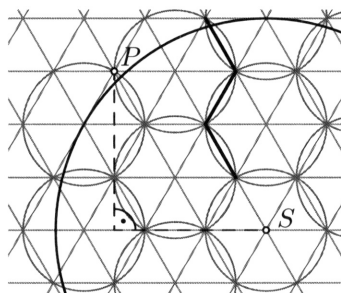
Označme podle obrázku S střed terče a A, B, C vrcholy jedné ze zmíněných mezivýsečí. Protože kružnice ohraničující tyto části mají poloměry r a $r\sqrt{3}$ a protože $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zřejmě trojúhelník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navíc je AC nejdelší stranou v trojúhelníku ABC , který má vnitřní úhly 45° , 75° a 60° . Proto je maximální vzdálenost dvou bodů jedné mezivýseče rovna r stejně jako maximální vzdálenost dvou bodů každé ze 6 výsečí středového kruhu o poloměru r . Podle Dirichletova principu některé dva z 19 zásahů leží ve stejné z 18 vytvořených částí, takže jejich vzdálenost je nejvýše r . Důkaz je hotov, protože platí $4\sqrt{3} < 7$ (neboli $48 < 49$).

Jiné řešení. (Podle Tomáše Zemana z Gymnázia J. Keplera v Praze 6.) Uvažujme v rovině síť rovnostranných trojúhelníků o straně $a = \sqrt{12}$,

jejímž vrcholem je i střed S uvažovaného terče. Kromě kruhu $(S; a)$ budeme uvažovat i šest kruhů o poloměru a se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenosti $a\sqrt{3}$ od S a dalších 12 kruhů téhož poloměru se středy ve vrcholech sítě ve vzdálenostech střídavě $3a$ a $2a\sqrt{3}$ od středu S (obr. 32). Označme P jeden z bodů sítě, který už neleží uvnitř útvaru složeného z uvedených devatenácti kruhů a přitom má od středu S nejmenší vzdálenost. Podle Pythagorovy věty je (obr. 32)

$$|PS|^2 = \left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(3\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 13a^2 > 12^2.$$

Bod P už tedy leží vně terče.



Obr. 32

Pokud tedy všechny zásahy neleží ve středním kruhu $(S; a)$ (pak není co dokazovat), snadno pomocí vhodného otočení celé sítě okolo středu S dosáhneme toho, že některý ze zásahů bude ležet na vyznačené lomené čáře. V tom případě buď v jednom z obou kruhů, v jejichž průniku leží i příslušná úsečka lomené čáry, leží nějaký další zásah (a to ve vzdálenosti menší než $2a$), anebo už žádný další zásah ani v jednom z obou kruhů neleží. To ovšem znamená, že všech 18 zbývajících zásahů musí ležet ve zbývajících 17 kruzích, a tak podle Dirichletova principu v jednom z nich leží aspoň dva zásahy. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Uvažujme tvrzení: Je-li v kruhu o poloměru $r\sqrt{3}$ vybráno N bodů, je vzdálenost některých dvou z nich nejvýše r . Kdybychom chtěli takové tvrzení dokázat porovnáním součtu obsahů N shodných kruhů o průměru r s obsahem kruhu o průměru $r(1 + 2\sqrt{3})$, podaří se nám to, právě když bude platit

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2 (1 + 2\sqrt{3})^2}{4} \quad \text{neboli} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19,9.$$

V situaci dané úlohy, kdy je odhad r vzdálenosti dvou bodů zaměněn větší hodnotou $r_1 = r \cdot 7/4\sqrt{3}$, má podobná podmínka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi(r_1 + 2r\sqrt{3})^2}{4}, \quad \text{po dosazení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19,6.$$

Proto nelze takto jednoduchým postupem k řešení úlohy dospět.

A – III – 3

a) Označme a, b, c, d (proměnné) počty unesených členů stran A, B, C, D . Počáteční čtveřice $(a, b, c, d) = (31, 28, 23, 19)$ je podle parity čísel typu (l, s, l, l) , kde l, s označují lichá, resp. sudá čísla. Protože při každé přeregistraci se parita všech čísel a, b, c, d změní (tři z nich se totiž zmenší o 1 a čtvrté zvětší o 3), čtveřice typu (l, s, l, l) přejde ve čtveřici (s, l, s, s) a ta pak zase zpět ve čtveřici (l, s, l, l) . Dostaneme-li tedy nakonec čtveřici se třemi nulami, musí být tato čtveřice typu (s, l, s, s) , takže všichni unesení tehdy budou členy strany B.

Následující tabulka změn hodnot a, b, c, d ukazuje, že se všichni unesení mohou opravdu stát členy strany B:

$a:$	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	...	0
$b:$	28	27	26	25	24	23	26	29	32	35	...	101
$c:$	23	22	25	24	27	26	25	24	23	22	...	0
$d:$	19	22	21	24	23	26	25	24	23	22	...	0

b) Ukážeme, že hledané čtveřice (a, b, c, d) jsou právě ty, ve kterých *některá tři čísla dávají při dělení čtyřmi stejný zbytek*.

Z rovnosti $a + b + c + d = 101$ plyne, že tři z čísel a, b, c, d mají stejnou paritu a čtvrté paritu opačnou. S ohledem na symetrii hledejme výchozí čtveřice (a, b, c, d) za předpokladu

$$a \equiv b \equiv c \not\equiv d \pmod{2}$$

a podle řešení části a) zkoumejme, kdy se všichni členové mohou stát členy strany D. Z toho, jak se mění počty a, b, c, d při každé přeregistraci (tři se zmenší o 1 a jedno zvětší o 3), plyne, že rozdíly $a - b, a - c, b - c$ nemění své zbytky při dělení čtyřmi. Má-li nakonec platit $a = b = c = 0$, musí být uvedené tři rozdíly už na počátku dělitelné čtyřmi, takže výchozí počty a, b, c musí splňovat podmínku

$$a \equiv b \equiv c \pmod{4}. \quad (1)$$

Ukažme, že podmínka (1) je pro splnění kýženého cíle $a = b = c = 0$ i postačující. Zřejmě stačí ukázat, že výchozí čtveřici (a, b, c, d) splňující podmínku (1) lze po několika krocích změnit na čtveřici typu (e, e, e, f) , pak už totiž stačí opakovat úpravu $(e, e, e, f) \rightarrow (e - 1, e - 1, e - 1, f + 3)$.

Mějme tedy čtveřici celých kladných čísel (a, b, c, d) se součtem 101, která splňuje podmínku (1), a předpokládejme, že ještě neplatí $a = b = c$. Ukažme, jak v tomto případě povolenými kroky zvětšit hodnotu d (o 1 nebo 2). Protože vždy $d \leq 101$, lze takové zvětšení zopakovat jen několikrát, pak již dosáhneme vytčeného cíle.

Proceduru zvětšení d jistě stačí popsat v případech, kdy $a \geq b \geq c$ a $a > c$, tedy $a - c \geq 4$ díky podmínce (1).⁶ Poradme Rumburakovi dvojici kroků

$$(a, b, c, d) \rightarrow (a - 1, b - 1, c + 3, d - 1) \rightarrow (a - 2, b - 2, c + 2, d + 2),$$

kteřá zvyšuje hodnotu d o 2. Tuto dvojici kroků nelze provést pouze v případě $b = 1$, kdy ovšem z (1) a nerovnosti $b \geq c$ plyne rovněž $c = 1$. Na takovou čtveřici $(a, 1, 1, d)$, kde $a \geq 5$ a $d \geq 2$ (nemůže být ještě $d = 1$, protože d má odlišnou paritu), použije Rumburak trojici kroků

$$(a, 1, 1, d) \rightarrow (a - 1, 4, 0, d - 1) \rightarrow (a - 2, 3, 3, d - 2) \rightarrow (a - 3, 2, 2, d + 1),$$

kteřá zvyšuje hodnotu d o 1.

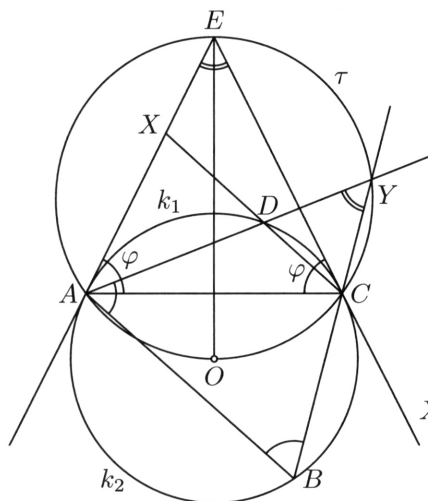
Tvrzení o tvaru všech vyhovujících čtveřic z první věty řešení b) je tak dokázáno.

A – III – 4

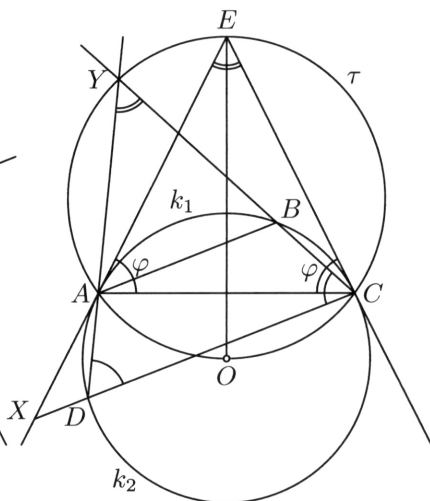
Budeme dále uvažovat jen takové lichoběžníky $ABCD$, ve kterých platí $AB \parallel CD$, u ostatních průsečíků (rovnoběžných) přímk BC a AD neexistuje.

Označme O střed kružnice k , E průsečík jejích tečen vedených body A , C (obr. 33). Jak víme, body A , C leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem OE a jsou podle tohoto průměru souměrně sdružené. Společnou velikost ostrých úhlů při základně AC rovnoramenného trojúhelníku ACE označme φ . Konečně vnitřky kratšího a delšího oblouku AC kružnice k označme k_1 , resp. k_2 .

⁶ Zdůrazněme, že nevylučujeme rovnost $c = 0$. Ke čtveřici s nulovým prvkem nás totiž dovede v další větě popsaná dvojice kroků v případě, kdy $b = 2$.



Obr. 33



Obr. 34

a) Zvolme na tečně AE libovolný bod X , $X \neq A$. Kružnice k zřejmě protne úsečku XC ve vnitřním bodě D , právě když bod X je buď vnitřním bodem úsečky AE , anebo vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce AE . Oba případy (obr. 33 a obr. 34) nyní posoudíme samostatně.

V prvním případě platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podle věty o úsekovém úhlu je úhel ABC roven ostrému úhlu φ . Stejnou velikost má i úhel BAD , protože každý tětíkový lichoběžník je rovnoramenný. Bod Y , průsečík různoběžných polopřímek BC a AD , tedy leží v polorovině ACE . Z rovnoramenných trojúhelníků ABY a ACE proto plyne, že úhly AYC a AEC jsou shodné (mají velikost $\pi - 2\varphi$). Podle věty o obvodovém úhlu leží bod Y na oblouku AEC kružnice τ , přesněji uvnitř kratšího z jejích oblouků CE , neboť polopřímka AD leží v úhlu CAE .

Ve druhém případě je úvaha analogická a запиšeme ji stručně: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\sphericalangle ADC| = \varphi = |\sphericalangle BCD|$, průsečík Y různoběžných polopřímek CB a DA leží v polorovině ACE , a protože $|\sphericalangle AYC| = |\sphericalangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ , a to uvnitř jejího kratšího oblouku AE .

b) Ukážeme nyní, že naopak každý vnitřní bod Y kratších oblouků CE a AE kružnice τ je průsečíkem přímek BC a AD některého z uvažovaných lichoběžníků $ABCD$. Opět rozlišíme dva případy podle toho, na kterém z obou oblouků bod Y leží.

Je-li Y vnitřní bod oblouku CE , lze zřejmě sestavit body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležely v uvedeném pořadí

v přímce. Z $D \in k_1$ plyne existence průsečíku X polopřímky CD s vnitřkem úsečky AE (bod D pak odpovídá bodu X podle konstrukce ze zadání úlohy). Zbývá objasnit, proč $AB \parallel CD$. Protože body O a Y leží na různých obloucích AC kružnice τ a přitom $|AO| = |CO|$, je polopřímka YO osou úhlu AYC , takže přímky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ jsou souměrně sdružené podle přímky YO , která je (triviálně) osou souměrnosti kružnice k , neboť prochází jejím středem. Proto podle této osy musí být souměrně sdruženy i průsečíky obou zmíněných přímek $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicí k , tedy (díky určenému pořadí bodů) jednak body A a B , jednak body D a C . Obě úsečky AB a CD jsou proto kolmé na přímkou OY , a jsou tudíž rovnoběžné.

Je-li Y vnitřní bod oblouku AE , sestrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby v přímce ležely body v pořadí D, A, Y , resp. C, B, Y . Polopřímka CD protne přímkou AE v potřebném bodě X (protože $D \neq A$, bude jistě $X \neq A$), pokud platí $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD| < \pi$. To ověříme tak, že užijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu v kružnici k , podle které $|\sphericalangle ECD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAY|$, a protože $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AYC|$, je součet $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD|$ roven součtu dvou úhlů v trojúhelníku ACY . Ze sdruženosti přímek $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podle osy OY úhlu AYC pak opět plyne požadovaná rovnoběžnost $AB \parallel CD$.

Závěr. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE Thaletovy kružnice τ .

A – III – 5

V jednom kroku nahrazujeme dvě čísla a, b jedním přirozeným číslem $\sqrt{ab}$. Protože pro libovolná $a \leq b$ platí $a \leq \sqrt{ab} \leq b$, je zřejmé, že na tabuli budou stále zapsána pouze čísla z množiny $M = \{1, 2, \dots, 33\}$. Je-li přitom číslo a prvočíslem nebo součinem několika různých prvočísel, musí tato prvočísla být obsažena i v rozkladu čísla $\sqrt{ab}$, takže $\sqrt{ab} = ka$ neboli $b = k^2a$ pro některé přirozené k . Je-li $k = 1$, musí být číslo a na tabuli zapsáno vícekrát. Je-li $k \geq 2$, a tedy $b = k^2a \geq 4a$, musí platit $4a \leq 33$, a proto z $b = k^2a \in M$ plyne i $4a \in M$. Na tabuli tudíž zůstanou až do konce jednak všechna prvočísla, která dělí právě jedno z čísel množiny M , jednak všechna ta $a \in M$, která jsou součinem několika různých prvočísel a zároveň splňují podmínku $4a > 33$ neboli $a \geq 9$. V souhrnu jde celkem o 15 nesmazatelných čísel

10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33.

Ukážeme, že kromě nich bude na tabuli vždy zastoupeno aspoň jedno z čísel množiny $S = \{6, 12, 18, 24\}$ (na začátku tam jsou všechna). Zvolíme-li v jednom kroku čísla a a b , kde např. $a \in S$, a nahradíme je číslem $n = \sqrt{ab}$, musí být i číslo n násobkem šesti, který díky odhadům $a \leq 24$ a $b \leq 33$ splňuje nerovnost $n \leq \sqrt{24 \cdot 33} = 6\sqrt{22} < 30$, takže bude platit $n \in S$. Na tabuli po libovolném počtu kroků tudíž zůstane 15 výše zapsaných čísel a aspoň jedno číslo z S , tedy alespoň 16 čísel, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Počtu 16 čísel na tabuli lze například dosáhnout 17 kroky, popsány níže tak, že mazaná čísla v každém řádku jsou šedá, zatímco nově vzniklé číslo je připsáno na konci dalšího řádku:

1–6, 7, 8–27, 28, 29–33;
1–6, 8–13, 14, 15–27, 29–33, 14;
1–4, 5, 6, 8–13, 15–19, 20, 21–27, 29–33, 14;
1–3, 4, 6, 8–13, 15–19, 21–24, 25, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 10, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11–13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 15–19, 21–24, 26, 27, 29–33, 14, 10;
1–3, 6, 8, 9, 11, 13, 15–19, 21–23, 24, 26, 29–33, 14, 10, 18;
1–3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 18, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 18, 12;
1, 2, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–33, 14, 10, 12, 18;
1, 3, 8, 9, 11, 13, 15–17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 32, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
1, 3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 16;
3, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 12, 6, 4;
9, 11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 4, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6, 6;
11, 13, 15, 17, 19, 21–23, 26, 29–31, 33, 14, 10, 6.

A – III – 6

S ohledem na symetrii stačí uvažovat trojice (a, b, c) , ve kterých $a \geq b \geq c$. Pro „nejmenší“ z nich $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 3)$ a $(4, 2, 2)$ má daný výraz hodnoty 2, $3/2$, $17/8$, $7/2$, resp. $11/4$. Ukážeme-li, že pro všechny ostatní trojice (a, b, c) , které již splňují podmínku $a + b + c \geq 9$, platí nerovnost

$$\frac{a + b + c}{2} - \frac{[a, b] + [b, c] + [c, a]}{a + b + c} \geq \frac{3}{2},$$

bude to znamenat, že hledaná nejmenší hodnota je rovna $3/2$. Vypsanou nerovnost ekvivalentně upravme:

$$(a+b+c)^2 - 2([a,b] + [b,c] + [c,a]) \geq 3(a+b+c),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - [a,b]) + 2(bc - [b,c]) + 2(ca - [c,a]) \geq 3(a+b+c).$$

Protože zřejmě platí $xy \geq [x,y]$ pro libovolná x, y , zanedbáme nezáporné dvojnásobky v levé straně poslední nerovnosti a dokážeme (silnější) nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a+b+c). \quad (1)$$

Z předpokladu $a+b+c \geq 9$ a Cauchyovy nerovnosti $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ plyne

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3(a+b+c) \cdot \frac{a+b+c}{9} \geq 3(a+b+c),$$

a důkaz je hotov.

Poznámky. Místo Cauchyovy nerovnosti jsme mohli přepsat (1) do tvaru

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{27}{4}$$

a tuto nerovnost zdůvodnit umocněním zřejmých nerovností

$$a - \frac{3}{2} \geq \frac{5}{2}, \quad b - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad c - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2},$$

neboť uvažujeme už jen trojice, ve kterých $a \geq 4$, $b \geq c \geq 2$.

Postup z řešení vede rovněž k výsledku, že pro libovolná celá čísla a, b, c větší než 1 platí nerovnost

$$\frac{a+b+c}{2} - \frac{[a,b] + [b,c] + [c,a]}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{6}.$$