

[dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

Předmluva

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sběrka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 5–10.

~~Repository of Mathematics of the Czech Academy of Sciences~~
provides access to digitized documents strictly for personal use.
Each copy of any part of this document must contain these
Terms of use.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Předmluva

Dáváme do rukou českým i slovenským čtenářům nové rozšířené a přepracované vydání sbírky řešených soutěžních úloh *matematické olympiády kategorie Z*, tj. úloh určených pro žáky nejvyšších ročníků základních škol.

Při přípravě tohoto nového vydání jsme uvážili zejména to, že nynější žáci 7. a 8. ročníku ZŠ jsou aspoň o rok mladší než žáci dřívějšího nejvyššího ročníku ZDŠ, a tedy jejich matematický fond je podstatně menší. Nejde jenom o matematické vědomosti, ale i o znalost postupů řešení a všeobecně o zkušenosti v řešení úloh. Proto jsme přidali do sbírky hlavně jednodušší úlohy a v řešení jsme se snažili napovídat čtenářům aspoň částečně postup řešení naznačením odpovědí na otázku *»jak na to«*. Zdá-li se vám tato pomoc nedostatečná, uvažte, že jsme byli vázáni zpracovat v podstatě jen úlohy, *které prošly soutěží* a pokud možno je neměnit. Proto jsme upravovali hlavně řešení, v nichž jsme se snažili vyhnout se trikům, kde některé kroky *»padají z nebe«* a které mohou čtenáře znechucovat. Náš názor je, že k řešení úlohy se má dospět postupem *»přirozeným«*, ne pomocí umělých obrátů. K přirozenému postupu patří - zvláště na úrovni kategorie *Z* - *zkoušení, experimentování, vyšetřování speciálních případů, sestavování tabulek*. Velmi často se při řešení tzv. *slovních úloh* podaří pomocí jednoduché tabulky nalézt výrokovou formu potřebnou pro řešení úlohy.

To se osvědčuje zvláště tehdy, když jde o přechod od slovního vyjádření k vyjádření algoritmickému (pomocí matematických symbolů, tzv. sestavování rovnic). Např. máme úlohu s textem:

Jsem dnes tak stár, jako byl můj strýc tehdy, když byl dvakrát tak stár, jako jsem byl já. Jak je dnes stár strýc?

Použijeme pomocné tabulky pro počty let:

	dnes	dříve
já	$2x$	x
strýc		$2x$

Rozdíl stárí strýcova a mého je podle druhého sloupce $2x - x = x$; do prázdného okénka je tedy třeba vepsat $3x$. Úloha má neomezený počet řešení, daný např. tabulkami:

30	15		40	20		20	10
45	30	nebo	60	40	nebo	30	20

Musíme uvážit, že žáky zajímají takové úlohy, k jejichž řešení jim sice vystačí jejich školské vědomosti, ale jejichž výsledek jim není předem znám, na který mohou být zvědaví. Uvedeme dvě ukázky toho druhu.

I. Ke každému přirozenému číslu x lze určit jednociferné číslo $\bar{x}$ takto:

Sestrojíme posloupnost přirozených čísel, jejíž první člen je číslo x a každý další člen je ciferný součet předcházejícího čísla; poslední člen posloupnosti je jednociferné číslo $\bar{x}$.

Např. $x = 21\ 594$; $21\ 594 \rightarrow 2 + 1 + 5 + 9 + 4 = 21 \rightarrow 2 + 1 = 3$, $\bar{x} = 3$.

Nebo $x = 835\ 696$; $835\ 696 \rightarrow 8 + 3 + 5 + 6 + 9 + 6 = 37 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $\bar{x} = 1$. Toto číslo $\bar{x}$ budeme nazývat stručně zbytek.

Budeme zkoumat vztah zbytků dvou činitelů ke zbytku jejich součinu. Je např. $354 \cdot 61 = 21\ 594$, $\overline{354} = 3^*$, $\overline{61} = 7$, $\overline{21\ 594} = 3$, $3 \cdot 7 = 21 = 3$. Jiný příklad: $754 \cdot 96 = 72\ 384$, $\overline{754} = 7$, $\overline{96} = 6$, $\overline{72\ 384} = 6$, $7 \cdot 6 = 42 = 6$. Další příklad: $83 \cdot 50 = 4150$, $\overline{83} = 2$, $\overline{50} = 5$, $\overline{4150} = 1$, $2 \cdot 5 = 10 = 1$.

Příklady tohoto druhu nás vedou k domněnce, že platí obecně:

Vypočteme zbytek z_1 součinu dvou čísel;
vypočteme zbytky z_2, z_3 obou činitelů;
vypočteme zbytek z_4 součinu $z_2 \cdot z_3$;

pak platí

$$z_1 = z_4.$$

Pokuste se vyslovit tuto domněnku slovy. Můžete ji objasnit ještě na dalších číselných příkladech.

Mnohé z čtenářů bude asi zajímat odpověď na otázku, *zda*li ta věta opravdu obecně platí a *proč*, tj. otázka odůvodnění věty. Jistě si vzpomenou na aritmetiku, kde ciferný součet souvisí

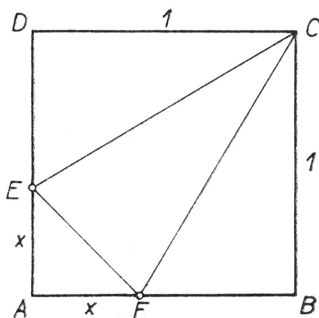
*) Zápis 354 znamená zbytek čísla 354.

úzce s kritériem dělitelnosti devíti. Nebudeme větu dokazovat, prozradíme jen, že důkaz se opírá o vzorec

$$x = \bar{x} + 9n,$$

kde x je přirozené číslo, $\bar{x}$ jednociferné číslo, $9n$ vhodný násobek devíti; je tedy $\bar{x}$ zbytek při dělení čísla x devíti.

II. Druhá ukázka je z geometrie. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1 (obr. 1). Jemu je vepsán rovnoramenný trojúhelník EFC ($CE = CF$). Tím se rozdělí čtverec $ABCD$ na čtyři trojúhelníky. Rozdělení je takové, že tři pravoúhlé trojúhelníky AEF , CDE , CBF mají obsahy sobě rovné. Jaký obsah má trojúhelník CEF ?



Obr. 1

Tato úloha je problém s algebraickými výpočty. Označíme délky $AE = AF = x$ a vyjádříme obsahy:

$$\triangle AEF = \frac{1}{2} x^2, \quad \triangle CDE = \triangle CBF = \frac{1}{2} (1 - x).$$

Z požadavku úlohy $\triangle AEF = \triangle CDE$ dostaneme pro délku x rovnici:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Na levé straně provedeme *úpravu, která stojí za zapamatování*:

$$(*) \quad (x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 1 = 0$$

a dále

$$(**) \quad x = \tfrac{1}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Obsah $\triangle CEF$ dostaneme ze vztahu

$$\triangle CEF = 1 - \tfrac{3}{2}x^2,$$

když do něj dosadíme za x ze vztahu (**).

Úloha je ukázka složitější úpravy algebraických výrazů. Úprava (*) málo přesahuje rámec školské matematiky; ale nezapomeňte, že cíl *MO* není jen soutěžit, ale také se něčemu ne příliš složitému navíc přiučit. Uvažte ještě, že matematika není jen *řešení úloh*, ale je třeba také se seznámit se základními poznatky (pojmy a větami), *které tvoří tzv. teorii*.

Především jsme se však snažili zdůraznit, vyložit a rozvést pracovní metody a postupy, neboť ty jsou pravým klíčem ke studiu matematiky.

Ve sbírce jsme ponechali s malými úpravami rozčlenění na kapitoly podle témat. Má tedy toto vydání 12 kapitol s tímto obsahem:

- Úlohy z aritmetiky přirozených čísel
- Úlohy z algebry
- Úlohy logického charakteru

- Úlohy z reality
- Úlohy na konstrukce čar vzniklých pohybem bodů
- Úlohy na výpočet velikostí obrazců a ploch
- Důkazové úlohy v geometrii
- Geometrické úlohy s výpočty
- Nerovnosti v geometrii
- Úlohy na množiny všech bodů dané vlastnosti
- Konstrukční úlohy
- Stereometrické úlohy

Budou-li se zdát čtenářům některé úlohy příliš těžké, ať uváží, že sbírka je určena žákům, kteří mají zvláštní zájem o matematiku a jistě, třeba minimální schopnosti pro ni. Úlohy rázu školských cvičení by takovým žákům nic nedaly. Jak už jsme řekli, je třeba, aby soutěžní úlohy splnily i své studijní poslání - aby se řešitelé naučili něčemu novému, aspoň pokud jde o způsoby řešení úloh.

Nakonec ještě jedna poznámka k označování (symbolice). V tomto novém vydání byly přizpůsobeny zápisy novému způsobu zavedenému do škol. To se týká hlavně geometrie; tak např. Pythagorův vzorec se místo dřívějšího

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

píše

$$(d(AC))^2 + (d(BC))^2 = (d(AB))^2.$$

Postiženy jsou zejména výpočty týkající se délky úsečky, neboť pro délku úsečky se vyskytují v různých knihách znaky AB , $\overline{AB}$, $|AB|$, $d(AB)$. Velikosti úhlu se tyto změny nedotkly.

Autoři