

# [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z

---

## IV. Úlohy s výpočty

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor); Jiří Mída (editor): [dokumenty-05] Vybrané úlohy z matematické olympiády. Kategorie Z. Sbírka řešených úloh z III. až XXX. ročníku soutěže. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. pp. 215–246.

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences  
Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/405290>  
provides access to digitized documents strictly for personal use.  
Each copy of any part of this document must contain these  
*Terms of use.*



This document has been digitized, optimized for  
electronic delivery and stamped with digital  
signature within the project *DML-CZ: The Czech  
Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## IV. Úlohy s výpočty

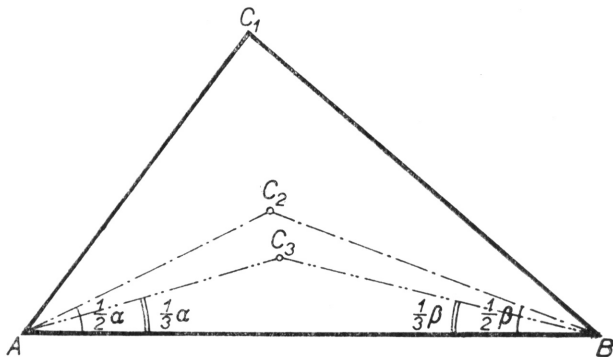
33. V trojúhelníku  $ABC_1$  označme úhly  $\sphericalangle C_1AB = \alpha$ ,  $\sphericalangle ABC_1 = \beta$ ,  $\sphericalangle BC_1A = \gamma$ .

Uvnitř trojúhelníka  $ABC_1$  leží bod  $C_n$  takový, že platí

$$\sphericalangle C_nAB = \frac{1}{n} \cdot \alpha, \quad \sphericalangle ABC_n = \frac{1}{n} \cdot \beta,$$

kde  $n$  je dané přirozené číslo větší než 1.

Vyjádřete velikost úhlu  $\sphericalangle AC_nB$  pomocí úhlu  $\gamma$ .



Obr. 63

**Řešení.** Na obr. 63 jsou trojúhelníky  $ABC_1$ ,  $ABC_2$ ,  $ABC_3$ .  
Výpočet úhlu  $\sphericalangle AC_2B$  je jednoduchý:

$$\sphericalangle AC_2B = 180^\circ - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta = 180^\circ - \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Protože platí  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , je

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma \quad (1)$$

čili

$$\sphericalangle AC_2B = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2} \gamma.$$

Obdobně bychom vypočítali velikost úhlu  $\sphericalangle AC_3B = \gamma_3$   
a obecně pak úhlu  $\sphericalangle AC_nB = \gamma_n$ :

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} = 180^\circ - \frac{1}{n} (\alpha + \beta) \quad (2)$$

Dosadíme-li z (1) do (2), dostaneme

$$\gamma_n = 180^\circ - \frac{1}{n} (180^\circ - \gamma)$$

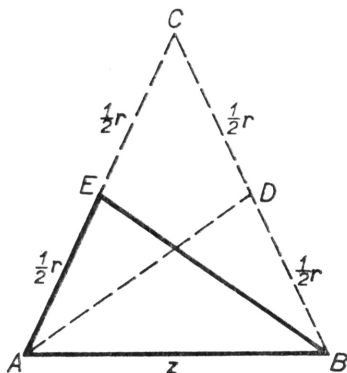
nebo po další úpravě

$$\gamma_n = 180^\circ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \gamma.$$

Toto vyjádření velikosti úhlu  $\gamma_n$  závisí na přirozeném čísle  $n$ , velikosti úhlu  $\gamma$  a konstantě  $180^\circ$ , jak vyžadoval text úlohy.

34. Rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  se základnou  $AB$  má obvod 50 cm. Označte  $D$  střed strany  $BC$  a  $E$  střed strany  $AC$ . Obvod trojúhelníka  $ABE$  je o 8 cm větší než obvod trojúhelníka  $ACD$ .

Vypočítejte velikosti stran trojúhelníka  $ABC$ .



Obr. 64

**Řešení** (obr. 64). Označme  $z = d(AB)$ ,  $r = d(CA) = d(CB)$  v rovnoramenném trojúhelníku  $ABC$  se základnou  $AB$ . Protože body  $E, D$  jsou středy ramen, platí podle věty *sus* zřejmě

$$\triangle AEB \cong BDA. \quad (1)$$

Podle podmínek úlohy je

$$d(AB) + d(BE) + d(AE) - 8 \text{ cm} = d(AD) + d(CD) + d(AC). \quad (2)$$

Protože podle (1) je  $AD \cong BE$ , dostaneme po dosazení do (2) rovnici

$$z + \frac{1}{2} r - 8 \text{ cm} = \frac{1}{2} r + r$$

čili

$$z - r = 8 \text{ cm}. \quad (3)$$

Z podmínky pro obvod trojúhelníka  $ABC$  plyne druhá rovnice pro neznámé  $z, r$ :

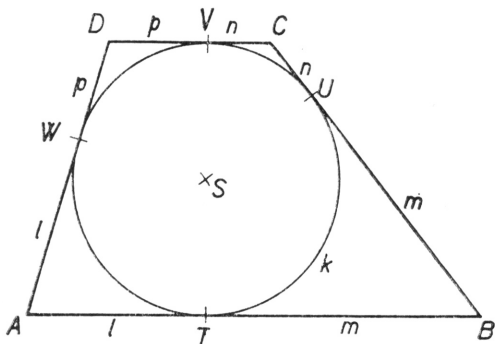
$$z + 2r = 50 \text{ cm} \quad (4)$$

Řešením soustavy (3), (4) dostaneme  $r = 14 \text{ cm}$ ,  $z = 22 \text{ cm}$ , tj.  $d(AB) = 22 \text{ cm}$ ,  $d(CA) = d(CB) = 14 \text{ cm}$ .

**Zkouška.** a)  $d(AB) + d(CA) + d(CB) = 22 \text{ cm} + 2 \cdot 14 \text{ cm} = 50 \text{ cm}$ , což je podmínka úlohy.

b) Vypočítáme  $d(AB) + d(BE) + d(AE) - (d(AC) + d(DC) + d(AD))$ . Protože podle (1) je  $AD \cong BE$ , dostaneme  $d(AB) + d(AE) - d(AC) - d(DC) = 22 \text{ cm} + 7 \text{ cm} - 14 \text{ cm} - 7 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$ , jak žádá text úlohy.

35. Je dán lichoběžník  $ABCD$ , jehož střední příčka má délku 1 a jemuž lze vepsat kružnici. Vypočtete jeho obvod.



Obr. 65

**Řešení** (obr. 65). Kružnice  $k$  vepsaná lichoběžníku  $ABCD$  se dotýká jeho stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  v bodech, které označíme po řadě  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Podle známé vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici platí  $AW \cong AT$ ,  $BT \cong BU$ ,  $CU \cong CV$ ,  $DV \cong DW$ . Délky těchto úsečků označíme  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . Podíváme-li se pozorně na obr. 65, vidíme, že součet délek obou základů je

$$l + m + n + p \quad (1)$$

a že témuž číslu se rovná i součet délek obou ramen. Obvod lichoběžníka je tedy

$$2(l + m + n + p). \quad (2)$$

Nyní využijeme podmínky, že střední příčka má délku 1.

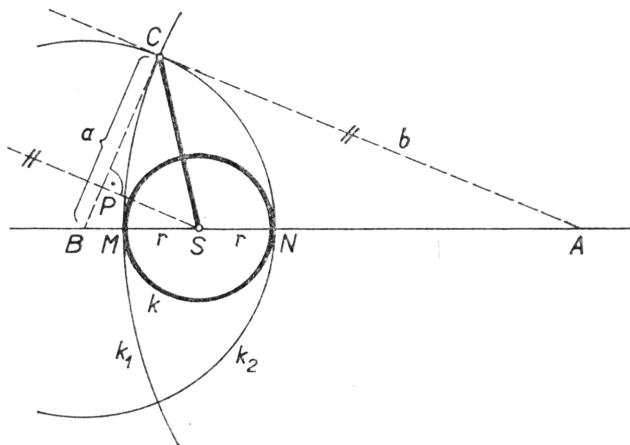
Délka střední příčky se rovná polovině součtu obou základů, tj. podle (1)

$$\frac{1}{2}(l + m + n + p) = 1.$$

Dosadíme-li do výrazu (2), dostáváme, že obvod daného lichoběžníka se rovná číslu 4.

36. Je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  o stranách délek  $d(AC) = b = 12$  cm,  $d(BC) = a = 5$  cm. Sestrojte kružnici  $k = (S; r)$ , která se dotýká uvnitř každé z kružnic  $k_1 = (A; b)$ ,  $k_2 = (B; a)$  a má střed na  $AB$ .

Vypočítejte poloměr  $r$  a vzdálenost  $CS$ .



Obr. 66

**Řešení.** Při rýsování obrázku využijeme toho, že úhel  $ACB$  je pravý; celá konstrukce je patrna z obr. 66. Dotykový bod kružnic  $k$  a  $k_1$  označíme  $M$ . Kružnice  $k$  a  $k_2$  mají dotykový bod  $N$ .

a) Nejprve vypočítáme délku přepony  $c$  v centimetrech:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (cm)}$$

Z polohy bodů na přímce  $AB$  vyplývá, že

$$c = d(BM) + d(MN) + d(NA)$$

čili

$$c = (a - 2r) + 2r + (b - 2r),$$

takže platí

$$c = a + b - 2r.$$

Proto dostaneme

$$2r = a + b - c = 5 \text{ cm} + 12 \text{ cm} - 13 \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

**Odpověď.** Poloměr kružnice  $k$  je  $r = 2 \text{ cm}$ .

b) Úsečka  $CS$  je přeponou pravoúhlého trojúhelníka  $CSP$ , kde bod  $P$  je patou kolmice vedené bodem  $S$  na přímku  $CB$ . Trojúhelníky  $BSP$  a  $BAC$  jsou podle věty *uu* podobné; toho využijeme k určení délek odvěsen trojúhelníka  $CSP$ . Platí

$$\frac{d(BS)}{d(SP)} = \frac{d(BA)}{d(AC)}$$

čili

$$\frac{3 \text{ cm}}{d(SP)} = \frac{13 \text{ cm}}{12 \text{ cm}},$$

takže

$$d(SP) = \frac{36}{13} \text{ cm.} \quad (4)$$

Protože  $CP = CB - PB$ , vypočteme nejprve délku  $PB$ .  
Platí

$$\frac{d(PB)}{d(BS)} = \frac{d(CB)}{d(BA)}$$

čili

$$\frac{d(PB)}{3 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}},$$

takže

$$d(PB) = \frac{15}{13} \text{ cm}$$

a

$$d(CP) = 5 \text{ cm} - \frac{15}{13} \text{ cm} = \frac{50}{13} \text{ cm}. \quad (5)$$

Podle Pythagorovy věty pak dostaneme

$$\begin{aligned} d(CS) &= \sqrt{(d(CP))^2 + (d(SP))^2} \text{ cm} = \\ &= \sqrt{\frac{2\,500}{13^2} + \frac{1\,296}{13^2}} \text{ cm} = \\ &= \frac{1}{13} \sqrt{3\,796} \text{ cm} = \frac{1}{13} \cdot 61,61 \text{ cm} = 4,74 \text{ cm}. \end{aligned}$$

**Odpověď.** Vzdálenost  $CS \doteq 4,74 \text{ cm}$ .

37. Obdélník  $ABCD$  má rozměry  $d(AB) = 6\frac{3}{5} \text{ cm}$ ,  $d(BC) = 4\frac{2}{3} \text{ cm}$ ; označte  $F$  střed strany  $AB$ . Výpočtem řešte úlohu:

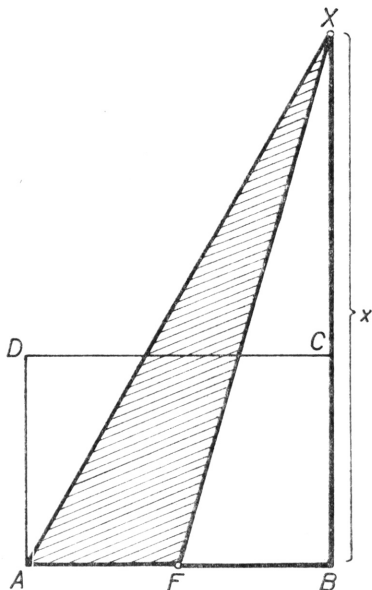
Na polopřímce  $BC$  určete takový bod  $X$ , aby obsah trojúhelníka  $AFX$  byl roven  $\frac{5}{8}$  obsahu obdélníka  $ABCD$ . (Vypočtěte délku  $x$  úsečky  $BX$ .)

**Řešení** (obr. 67). Obsah  $P$  obdélníka  $ABCD$  je

$$P = 6\frac{3}{5} \cdot 4\frac{2}{3} \text{ cm}^2.$$

$\frac{5}{8}$  obsahu  $P$  je

$$6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \text{ cm}^2. \quad (1)$$



Obr. 67

Trojúhelník  $AFX$  má stranu  $AF$  délky

$$d(AF) = 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} \quad (2)$$

a délku příslušné výšky v centimetrech označíme  $x$ ; obsah tohoto trojúhelníka je

$$\frac{1}{2} \cdot d(AF) \cdot x \text{ cm}^2.$$

Dosaďme sem za  $d(AF)$  ze vztahu (2); dostaneme

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \text{ cm}^2.$$

Toto číslo má být rovno číslu (1); tím dostaneme rovnici (v  $\text{cm}^2$ )

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3}.$$

Znásobme tuto rovnici číslem převráceným k číslu  $\frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$ ;

pak se na pravé straně zkrátí  $6 \frac{3}{5}$  a dostaneme pro  $x$  v centimetrech

$$x = \frac{5}{8} \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ cm};$$

odtud postupně dostáváme

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3} \text{ cm},$$

$$x = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3} \text{ cm},$$

$$x = \frac{35}{3} \text{ cm},$$

$$x = 11 \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

**Odpověď.** Délka úsečky  $BX$  je  $11 \frac{2}{3}$  cm.

**Zkouška.** Obsah  $T$  trojúhelníka  $AFX$  je (v  $\text{cm}^2$ )

$$T = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 33 \cdot 1 \cdot 35}{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 11 \cdot 1 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{77}{4}.$$

Pro obsah  $P$  obdélníka  $ABCD$  dostáváme (v  $\text{cm}^2$ )

$$P = 6 \frac{3}{5} \cdot 4 \frac{2}{3} = \frac{33}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{154}{5}.$$

Vypočteme  $\frac{5}{8}$  jeho obsahu

$$\frac{5}{8} P = \frac{154}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{77}{4},$$

a to je skutečně obsah  $T$  trojúhelníka  $AFX$  v  $\text{cm}^2$ .

**Poznámka.** Promyslíte-li si text úlohy, uvážíte-li, které údaje jsou pro řešení úlohy podstatné, a nebudete-li hned dosazovat numerické údaje, zjednoduší se celý výpočet takto:

$$\text{Označme } d(AB) = a, d(AF) = \frac{1}{2}a, d(BC) = b, d(BX) = x.$$

Podle textu úlohy má platit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot x = \frac{5}{8} a \cdot b.$$

Po výpočtu  $x$  dostaneme

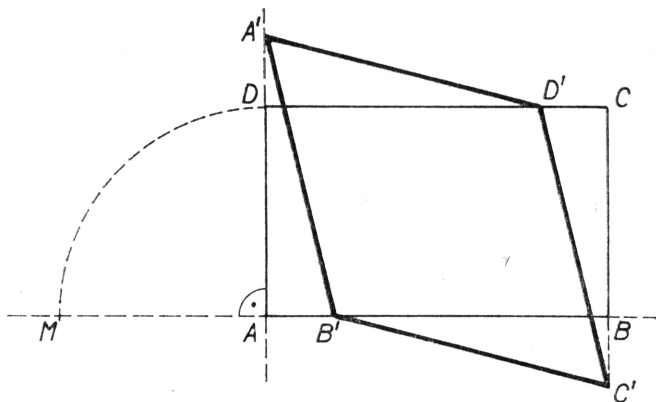
$$x = \frac{5}{2} b$$

a po dosazení za  $b = 4 \frac{2}{3} \text{ cm} = \frac{14}{3} \text{ cm}$  (za  $a$  není třeba dosazovat) je

$$x = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{3} \text{ cm} = \frac{35}{3} \text{ cm} = 11 \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

**38.** Je dán obdélník  $ABCD$ , jehož strany mají délky  $d(AB) = a$ ,  $d(BC) = b$ ,  $a > b$ . Na polopřímkách  $BA$ ,  $CB$ ,  $DC$ ,  $AD$  sestrojte po řadě body  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $A'$  tak, aby platilo  $AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD'$  a aby  $A'B'C'D'$  byl kosočtverec.

Vypočtěte nejprve délku úseku  $d(AA') = x$ , a pak kosočtverec sestrojte.



Obr. 68

**Řešení.** Budiž  $A'B'C'D'$  kosočtverec (obr. 68). Označme  $d(AA') = d(BB') = d(CC') = d(DD') = x$ . Pak je  $d(AB') = d(CD') = |a - x|$  (nevíme, zda je  $a > x$  nebo  $x > a$ ); obdobně je  $d(BC') = d(DA') = |b - x|$ . Podle Pythagorovy věty a z toho, že  $A'B'C'D'$  je kosočtverec, je

$$\begin{aligned} (d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 &= (d(B'C'))^2, \\ (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2 &= (d(C'D'))^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Protože je  $B'C' \cong C'D'$ , plyne z (1)

$$(d(BB'))^2 + (d(BC'))^2 = (d(CC'))^2 + (d(CD'))^2,$$

protože je  $d(BB') = d(CC') = x$ , dostáváme

$$|b - x|^2 = |a - x|^2. \quad (2)$$

Základy druhých mocnin v rovnici (2) jsou absolutní hodnoty, tedy nezáporná čísla, a proto můžeme každou ze stran rovnice (2) odmocnit a dostaneme správnou rovnici

$$|a - x| = |b - x|. \quad (3)$$

Připustíme-li možnosti jednak  $a > x$  nebo  $a < x$ , jednak  $b > x$  nebo  $b < x$ , dostaneme po odstranění absolutních hodnot dvě rovnice

$$a - x = b - x, \quad (I)$$

$$a - x = x - b. \quad (II)$$

První rovnice je vyloučena, poněvadž je  $a > b$ . Z druhé rovnice plyne

$$x = \frac{1}{2} (a + b). \quad (4)$$

Obrácením postupu zjistíme, že  $A'B'C'D'$  je při takto zvoleném  $x$  skutečně kosočtverec. Vzorec (4) zároveň ukazuje, že je

$$b < x < a,$$

tj. body  $C'$ ,  $A'$  leží vně obdélníka,  $B'$ ,  $D'$  na jeho stranách (viz obr. 68).

**Konstrukce.** Na polopřímce opačné k  $AB$  sestrojíme bod  $M$  tak, aby bylo  $d(AM) = b$ . Pak je  $d(BM) = a + b$  a  $B'$  je středem úsečky  $BM$ , neboť je  $d(BB') = \frac{1}{2} d(BM) = \frac{1}{2} (a + b)$ . Další body  $A'$ ,  $C'$ ,  $D'$  snadno doplníme.

**Poznámka.** Předpokládáme-li, že na obr. 68 je znázorněno řešení úlohy, zjistíme, že

$$\triangle B'BC' \cong \triangle C'CD'$$

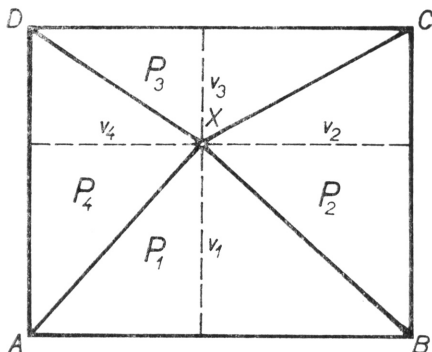
(podle věty *Ssu*, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí  $d(B'B) = d(C'C) = x$ ,  $d(B'C') = d(C'D')$ , kde  $B'C' > B'B$ ). Proto je

$$BC' \cong CD',$$

tj.  $|a - x| = |b - x|$  a obdobnou úvahou jako v uvedeném řešení zjistíme platnost vzorce (4).

39. Je dán obdélník  $ABCD$  o rozměrech  $d(AB) = 2$  m,  $d(AD) = 1,6$  m. Uvnitř tohoto obdélníka leží bod  $X$ ; přitom jsou obsahy trojúhelníků  $ABX$ ,  $BCX$ ,  $CDX$ ,  $DAX$  po řadě úměrné číslům 5, 6, 3, 2.

- Vypočtěte obsah každého z těchto čtyř trojúhelníků.
- Vypočtěte vzdálenost bodu  $X$  od přímek  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ .
- Sestrojte obdélník  $ABCD$  v měřítku 1 : 20 a v něm bod  $X$ , který vyhovuje požadavkům úlohy.



Obr. 69

**Řešení** (obr. 69). a) Je  $d(AB) = 20$  dm,  $d(BC) = 16$  dm. Obsah  $P$  daného obdélníka  $ABCD$  je  $320$  dm<sup>2</sup>. Označme  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  obsahy (v decimetrech čtverečných) trojúhelníků  $ABX$ ,  $BCX$ ,  $CDX$ ,  $DAX$ . Podle textu úlohy platí

$$P_1 = 5d, P_2 = 6d, P_3 = 3d, P_4 = 2d, \quad (1)$$

kde číslo  $d > 0$  musíme vypočítat. Platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

neboli (v dm<sup>2</sup>)

$$320 = 5d + 6d + 3d + 2d;$$

odtud postupně dostaneme

$$16d = 320,$$

$$d = \frac{320}{16},$$

$$d = 20.$$

Ze vztahů (1) pak dostáváme

$$P_1 = 100 \text{ dm}^2, P_2 = 120 \text{ dm}^2, P_3 = 60 \text{ dm}^2, P_4 = 40 \text{ dm}^2. (2)$$

Čísla  $P_1, P_2, P_3, P_4$  jsou zřejmě úměrná číslům 5, 6, 3, 2, jak se přesvědčíme násobením čísel (2) číslem  $\frac{1}{20}$ . Součet  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 320 \text{ dm}^2$ .

b) Označme po řadě  $v_1, v_2, v_3, v_4$  vzdálenosti bodu  $X$  od přímk  $AB, BC, CD, DA$  neboli výšky trojúhelníků  $ABX, BCX, CDX, DAX$ . Platí po řadě (délky úseček v decimetrech, obsahy v decimetrech čtverečných):

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot v_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot v_2,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot v_3,$$

$$P_4 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot v_4$$

neboli

$$100 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_1,$$

$$120 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_2,$$

$$60 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_3,$$

$$40 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_4.$$

Po zkrácení a záměně stran rovnic dostáváme

$$10v_1 = 100, 8v_2 = 120, 10v_3 = 60, 8v_4 = 40.$$

Násobme obě strany každé z rovnic po řadě čísly  $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}$ ;  
dostaneme

$$v_1 = 10, v_2 = \frac{120}{8}, v_3 = \frac{60}{10}, v_4 = \frac{40}{8}$$

neboli v decimetrech

$$v_1 = 10 \text{ dm}, v_2 = 15 \text{ dm}, v_3 = 6 \text{ dm}, v_4 = 5 \text{ dm}.$$

Zřejmě platí  $v_1 + v_3 = d(BC)$ , tj. 16 dm, dále  $v_2 + v_4 = d(AB)$ , tj. 20 dm.

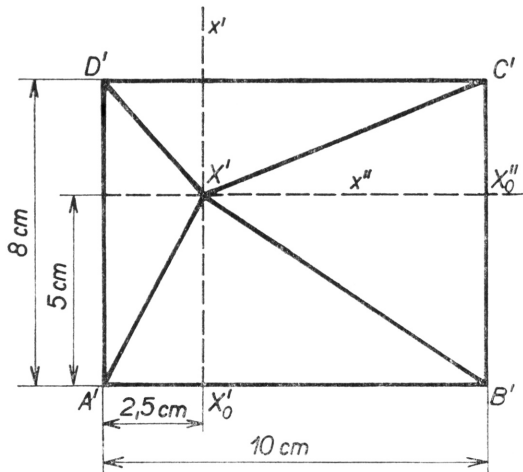
c) (Délky úseček udáváme v decimetrech; obr. 70 zmenšen.)  
Obdélník  $ABCD$  znázorníme obdélníkem  $A'B'C'D'$  v měřítku 1 : 20, tj.

$$d(A'B') = \frac{1}{20} d(AB), d(B'C') = \frac{1}{20} d(BC)$$

neboli

$$d(A'B') = \frac{1}{20} \cdot 20 \text{ dm} = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm},$$

$$d(B'C') = \frac{1}{20} \cdot 16 \text{ dm} = \frac{8}{10} \text{ dm} = 8 \text{ cm}.$$



Obr. 70

Sestrojení obdélníka  $A'B'C'D'$  je z vypočítaných rozměrů zřejmé.

Nyní platí

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{v_2}{v_4} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}. \quad (3)$$

Úsečku  $A'B'$  délky 1 dm rozdělíme v poměru 3 : 1 [viz (3)]. Provedeme to tak, že ji rozdělíme na 4 rovné díly: délka jednoho

dílu je  $\frac{1}{4} \cdot d(A'B') = \frac{1}{4}$  dm; části budou  $\frac{3}{4}$  dm,  $\frac{1}{4}$  dm. Označ-

me  $X'_0$  bod úsečky  $A'B'$ , pro nějž platí  $d(A'X'_0) = \frac{1}{4}$  dm neboli

$$d(B'X'_0) = \frac{3}{4} \text{ dm (tj. } d(A'X'_0) = 2,5 \text{ cm).}$$

Úsečku  $B'C'$  délky  $0,8 \text{ dm} = 8 \text{ cm}$  rozdělíme v poměru  $5 : 3$ . Provedeme to takto: Rozdělíme ji na 8 rovných dílů: délka jednoho dílu je  $\frac{1}{8} d(B'C') = \frac{1}{8} \cdot 0,8 \text{ dm} = 0,1 \text{ dm}$ , tj.  $1 \text{ cm}$ .

Části budou:

$$0,1 \text{ dm} \cdot 5 = 0,5 \text{ dm}; 0,1 \text{ dm} \cdot 3 = 0,3 \text{ dm}.$$

Na úsečce  $B'C'$  sestrojíme bod  $X_0''$  tak, aby platilo  $d(B'X_0'') = 0,5 \text{ dm}$  neboli  $d(C'X_0'') = 0,3 \text{ dm}$  (tj.  $d(C'X_0'') = 3 \text{ cm}$ ).

Nyní sestrojíme bodem  $X_0'$  přímku  $x' \parallel B'C'$ , bodem  $X_0''$  přímku  $x'' \parallel A'B'$ . Průsečík přímek  $x', x''$  je bod  $X'$ . Tím je celá úloha rozřešena.

**40.** V rovnoramenném lichoběžníku  $ABCD$  má větší základna  $AB$  délku  $4 \text{ cm}$ ; úhlopříčky lichoběžníka jsou navzájem kolmé a dělí se v poměru  $2 : 1$ .

Vypočtěte poloměr kružnice lichoběžníku opsané.

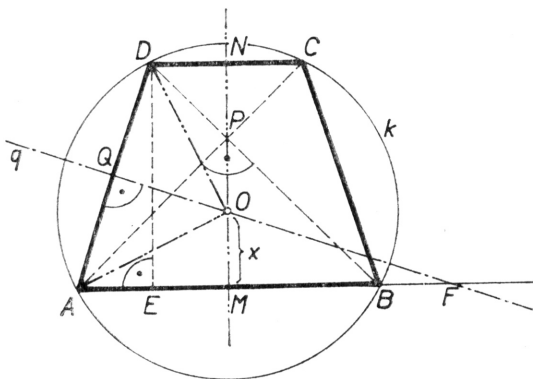
**Řešení.** V této i v každé jiné geometrické úloze, kterou řešíme početně, velmi záleží na pořízení zřetelného obrázku, na jeho vhodném označení i postupném doplňování dosaženými výsledky nebo na vhodném uplatňování známých geometrických vět.

Na obrázku lichoběžníka  $ABCD$ , o němž předpokládáme, že má dané vlastnosti (obr. 71), označíme  $P$  průsečík úhlopříček a  $M, N$  po řadě středy úseček  $AB, CD$ . Přímka  $MN$  je osou souměrnosti lichoběžníka a dělí i úhel  $APB$  na dva shodné úhly, takže  $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPM = 45^\circ$ . Proto pravoúhlý trojúhelník  $AMP$  ( $\sphericalangle AMP = 90^\circ$ ) je rovnoramenný a platí

$$d(AM) = d(MP) = 2 \text{ cm}; \quad d(AP) = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Pak podle podmínky úlohy je  $d(PC) = \sqrt{2} \text{ cm}$  a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků  $AMP$  a  $CNP$  vyplývá, že  $d(PN) = 1 \text{ cm}$ , takže  $d(MN) = 3 \text{ cm}$  a dále  $d(NC) = 1 \text{ cm}$ , takže  $d(DC) = 2 \text{ cm}$ .

Střed  $O$  kružnice opsané lichoběžníku leží na přímce  $MN$  a např. na ose  $q$  strany  $AD$ . Dokážeme-li, že průsečík přímek  $MN$  a  $q$  padne dovnitř úsečky  $MN$  tak, jak nám vyšlo na obrázku, pak budeme moci při výpočtu poloměru  $r = d(AO) = d(BO)$  použít trojúhelníky  $AMO$  a  $BNO$ .



Obr. 71

Nejprve tedy početní ověření polohy bodu  $O$  mezi body  $M$ ,  $N$ : Střed úsečky  $AD$  označme  $Q$ ; bod  $Q$  přímky  $q$  leží tedy uvnitř polorovin  $MNA$ ,  $AMN$  a  $NDA$ . Označme dále  $E$  patu kolmice bodem  $D$  k přímce  $AB$ ; tu je  $d(AE) = d(AM) -$

—  $d(ME) = 2 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}$ . V pravoúhlém trojúhelníku  $ADE$  o přeponě  $AD$  pak podle Pythagorovy věty platí:

$$(d(AD))^2 = (d(AE))^2 + (d(DE))^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \text{ (v cm}^2\text{)}$$

čili

$$d(AD) = \sqrt{10} \text{ cm}; d(AQ) = \frac{1}{2} \sqrt{10} \text{ cm}.$$

Protože z trojúhelníku  $AED$  vyplývá, že úhel  $DAE$  je ostrý, protnou se přímky  $q$  a  $AE$  v bodě  $F$  a vytvoří rovněž pravoúhlý trojúhelník  $AQF$ . Trojúhelníky  $AED$  a  $AQF$  jsou podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků podobné, a platí pak např.

$$\frac{d(AE)}{d(AD)} = \frac{d(AQ)}{d(AF)};$$

odtud po dosazení za  $d(AE) = 1 \text{ cm}$ ,  $d(AD) = \sqrt{10} \text{ cm}$  a  $d(AQ) = \frac{1}{2} \sqrt{10} \text{ cm}$  dostaneme

$$d(AF) = 5 \text{ cm}.$$

Avšak  $d(AB) = 4 \text{ cm}$ , takže bod  $F$  padne do poloroviny  $MNB$ ; bod  $Q$  leží v polorovině opačné. Potom bod  $O$  úsečky  $QF$  leží uvnitř poloroviny  $ABD$ , a tedy i uvnitř úsečky  $MN$ .

Nyní už vypočteme poloměr  $r = d(AO) = d(DO)$  opsané kružnice z trojúhelníků  $AMO$  a  $DNO$ . Pomocně označíme  $d(MO) = x$ , takže je  $d(NO) = 3 - x$  (oba údaje jsou v centi-

metrech). Podle Pythagorovy věty pro uvedené pravoúhlé trojúhelníky dostaneme:

$$(d(AM))^2 + (d(MO))^2 = r^2, \quad (d(ON))^2 + (d(ND))^2 = r^2$$

(vše v cm<sup>2</sup>) neboli

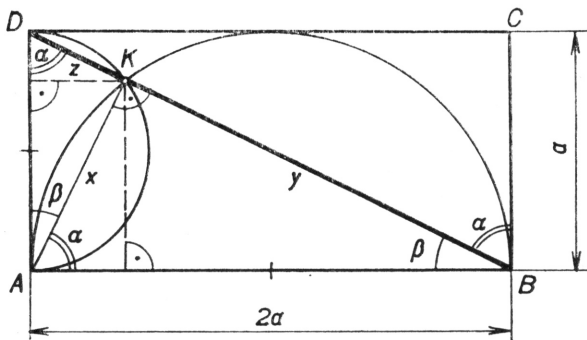
$$4 + x^2 = r^2, \quad (3 - x)^2 + 1^2 = r^2. \quad (1)$$

Porovnáním obou vyjádření  $r^2$  dostaneme rovnici

$$4 + x^2 = 9 - 6x + x^2 + 1$$

a z ní vypočteme  $x = 1$ , což značí, že bod  $O$  je středem úsečky  $MP$ . Dosazením do (1) dostaneme  $r^2 = 5$  (v  $\text{cm}^2$ ) čili  $r = \sqrt{5} \text{ cm} \doteq 2,24 \text{ cm}$ .

**Odpověď.** Hledaný poloměr opsané kružnice je  $r = \sqrt{5}$  cm.



Obr. 72

**41.** Je dán obdélník  $ABCD$ , v němž  $d(AB) = 2a$ ,  $d(BC) = a$ . Nad stranami  $AB$ ,  $AD$  jako nad průměry jsou sestrojeny kružnice, které kromě bodu  $A$  mají společný ještě bod  $K$ .

- Dokažte, že bod  $K$  leží na úhlopříčce  $BD$ .
- Vypočítejte vzdálenosti bodu  $K$  od vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $D$ .

**Řešení.** a) Poněvadž podle Thaletovy věty (viz obr. 72) je

$$\sphericalangle AKD = 90^\circ \text{ a zároveň } \sphericalangle AKB = 90^\circ,$$

leží body  $B$ ,  $K$ ,  $D$  v přímce, tj. na úhlopříčce  $BD$  daného obdélníka.

- Označme (v centimetrech)

$$d(AK) = x, d(BK) = y, d(BD) = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka  $ABK$  plyne

$$x^2 + y^2 = 4a^2,$$

a podobně z pravoúhlého trojúhelníka  $ADK$  plyne

$$x^2 + (a\sqrt{5} - y)^2 = a^2.$$

Upravujeme druhou rovnici

$$x^2 + y^2 - 2ay\sqrt{5} + 5a^2 = a^2.$$

Dosadíme z první rovnice

$$4a^2 - 2ay\sqrt{5} + 4a^2 = 0$$

a odtud

$$y = \frac{4a}{\sqrt{5}}, \quad x = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Nakonec ještě dostaneme (v centimetrech)

$$d(DK) = a\sqrt{5} - y = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

**Jiné řešení.** Označme  $d(DK) = z$  (v centimetrech). Z podobnosti  $\triangle AKB \sim \triangle DKA$  (věta *uu*) plyne

$$z : x = x : y.$$

Dosadíme-li

$$z = a\sqrt{5} - y, \tag{1}$$

dostáváme

$$ay\sqrt{5} - y^2 = x^2,$$

odtud s použitím vztahu

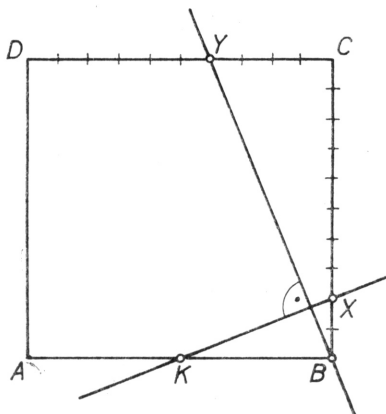
$$x^2 + y^2 = 4a^2 \tag{2}$$

plyne  $y = \frac{4a}{\sqrt{5}}$ . Z (1) pak určíme  $z$ . Z (2) můžeme určit  $x$ .

Rychleji lze  $x$  určit z podobnosti  $\triangle ABK \sim \triangle DBA$  (věta *uu*), odkud plyne

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

42. Je dán čtverec  $ABCD$  o straně  $a = 10$  cm. Každá ze stran  $BC$ ,  $CD$  je rozdělena devíti body na deset shodných úsečků. Střed  $K$  strany  $AB$  je spojen s dělicím bodem  $X$  strany  $BC$  a vrchol  $B$  je spojen s dělicím bodem  $Y$  strany  $CD$ . Které dělicí body  $X$ ,  $Y$  musíme vybrat, aby přímky  $KX$ ,  $BY$  byly navzájem kolmé?



Obr. 73

**Řešení.** Dělicí bod na straně  $BC$  označme  $X$  a dělicí bod na straně  $CD$  označme  $Y$  (obr. 73). Aby přímky  $KX$ ,  $BY$  byly k sobě kolmé, musí platit

$$\triangle KBX \sim \triangle BCY.$$

Odtud máme

$$d(BX) : d(BK) = d(CY) : d(BC), \quad (1)$$

ale

$$d(BK) = \frac{a}{2} = 5 \text{ cm},$$

$$d(BC) = a = 10 \text{ cm}.$$

Dále ještě označme

$$d(BX) = \alpha,$$

$$d(CY) = \beta,$$

kde pro přirozená čísla  $\alpha$ ,  $\beta$  (v centimetrech) platí

$$0 < \alpha < 10, 0 < \beta < 10.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

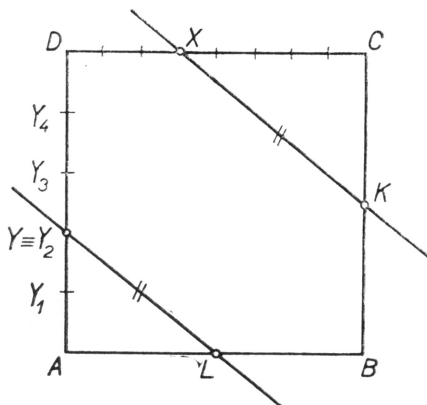
$$\alpha : \frac{a}{2} = \beta : a,$$

$$\beta = 2\alpha.$$

Vyhovují tyto hodnoty:

|          |   |   |   |   |
|----------|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\beta$  | 2 | 4 | 6 | 8 |

Úloha má podle toho čtyři různá řešení.



Obr. 74

43. Je dán čtverec  $ABCD$ . Stranu  $CD$  rozdělte na  $n$  shodných dílů tak, aby na ní existoval dělicí bod  $X$  takový, že

$$KX \parallel YL. \quad (1)$$

$K$  je střed strany  $BC$ ,  $L$  je střed strany  $AB$  a  $Y$  je dělicí bod na straně  $AD$ , která je rozdělena na 5 shodných dílů.

Určete nejmenší  $n$  této vlastnosti.

**Řešení** (obr. 74). Ze vztahu (1) plyne

$$\triangle ALY \sim \triangle CXK,$$

tj.

$$\frac{d(AY)}{d(AL)} = \frac{d(CK)}{d(CX)}. \quad (2)$$

Označíme-li délku strany čtverce  $a$ , potom rovnost (2) nabývá tvaru

$$\frac{r \cdot \frac{a}{5}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{s \cdot \frac{a}{n}}, \quad (3)$$

kde  $r, s$  jsou přirozená čísla vyhovující nerovnostem

$$1 \leq r < 5, \quad 1 \leq s < n. \quad (4)$$

Vztah (3) po úpravě zní

$$4rs = 5n. \quad (5)$$

Z poslední rovnosti je zřejmé, že  $n$  je násobkem 4. Nejmenší takové  $n$  jsou 4. Pro  $n = 4$  dává (5)

$$rs = 5,$$

což však nelze splnit čísla  $r, s$  vyhovujícími nerovností (4). Pro  $n = 8$  rovnost (5) zní

$$rs = 10.$$

Této nerovnosti vyhovují čísla  $r = 2, s = 5$ , která také splňují nerovnosti (4). Potom  $d(AY) = \frac{2}{5}a, d(CX) = \frac{5}{8}a$ . V tomto případě skutečně platí (1).

**Závěr.** Nejmenší  $n$  požadované vlastnosti je  $n = 8$ .

**Jiné řešení.** Označme  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  dělicí body na straně  $AD$  (viz obr. 74). Ze vztahu (2) plyne

$$d(CX) = \frac{d(CK) \cdot d(AL)}{d(AY)} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{d(AY)}.$$

Pro  $Y_1$  platí

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{a} = \frac{5}{4}a, \text{ tj. } X \text{ by nebyl bodem úsečky } DC;$$

pro  $Y_2$  je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{2a} = \frac{5}{8}a, \text{ tj. } n = 8;$$

pro  $Y_3$  je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{3a} = \frac{5}{12} a, \text{ tj. } n = 12;$$

pro  $Y_4$  je

$$d(CX) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{4a} = \frac{5}{16} a, \text{ tj. } n = 16.$$

**Závěr.** Nejmenší  $n$  požadované vlastnosti je tedy  $n = 8$ .