Otakar Borůvka

Transformationes des équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Séminaire Dubreil-Pisot. Algèbre et Théorie des nombres, tome 14, no. 2, 1960-61, exp. no. 22, 1-18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500090

# TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE

par Otukar BORŮVKA

1. - Les équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre dans le domaine réel ont été étudiées, depuis l'époque de STURM, par de nombreux auteurs. Surtout dans ces dernières dizaines d'années, la théorie en question a fait de grands progrès. On s'est occupé à fond des propriétés d'oscillation, du comportement asymptotique des intégrales, de problèmes aux limites, de solutions périodiques, etc. Cependant une partie importante de la théorie considerée, à savoir celle des transformations des équations differentielles en question, restait toujours ouverte. Le but de la présente conférence est de donner un aperçu d'une théorie récente des transformations en question, théorie qui présente, me semble-t-il, quelque intérêt tant au point de vue de la variété des résultats obtenus, que pour ses nombreuses applications.

2. - L'origine de la théorie des transformations considérées remonte, précisément à l'époque de STURM, à l'illustre géomètre allemand E. E. KUMMER. Dans son Mémoire en latin "De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis", inséré en 1834 dans un programme de cours à Liegnitz et republié en 1887 dans le Journal de Crelle ([1]), KUMMER s'occupe du problème suivant :

Étant donnees deux équations différentielles du second ordre

(a) $$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \quad ,$$

(A) $$Y'' + P(T)\, Y' + Q(T)\, Y = 0$$

il s'agit de trouver des fonctions $w(t)$ , $X(t)$ de manière que, pour toute intégrale $Y$ de l'équation (A), par exemple, la fonction composée

$$y(t) = w(t)\, Y[X(t)]$$

([1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 100, 1887, p. 1-9.

soit une intégrale de l'équation (a). En d'autres termes, il s'agit de transformer, les unes dans les autres, de la manière indiquée ci-dessus, les intégrales des équations (a) , (A).

A la base de ce problème de transformation, KUMMER développe une théorie gravitant autour d'une certaine équation différentielle non-linéaire du troisième ordre, et indique d'intéressantes applications de ses résultats.

La théorie de KUMMER a trouvé diverses extensions au cours du XIXe siècle, surtout dans le domaine des equations linéaires ordinaires d'ordres supérieurs. Cependant, les raisonnements originaux de KUMMER n'ont pas eté approfondis de manière à former une théorie satisfaisante du point de vue moderne. C'est là, probablement, la raison pour laquelle la théorie des transformations en question ne se trouve pas dans les livres même les plus récents s'occupant de ces questions, bien que la nature de nombreux problèmes classiques et modernes dans ce domaine laisse prévoir son importance. Les raisonnements de KUMMER reposent sur les seuls procédés de différentiation et sur certaines opérations algébriques, tandis que les questions plus profondes d'intégration, surtout les théorèmes précis concernant l'existence et l'unicité des intégrales de l'équation du troisième ordre mentionnée plus haut, y sont entièrement négligées. Voilà les problèmes de départ dont doit s'occuper toute révision moderne de la théorie de KUMMER pour qu'on puisse en attendre un progrès essentiel de la théorie des transformations considérée.

Il s'agit, dans la suite, de matières concernant le domaine réel et de caractère global. Nous supposons les équations (a) , (A) de la forme

$$\text{(a)} \qquad y'' = q(t)\, y \quad ,$$

$$\text{(A)} \qquad Y'' = Q(T)\, Y$$

ce qui ne restreint pas la généralité et comporte quand même certaines simplifications. Nous supposons que les coefficients $q$ , $Q$ sont des fonctions continues dans les intervalles ouverts $j = (a\,,\,b)$ , $J = (A\,,\,B)$ , les cas $a$ , $A = -\infty$ , $b$ , $B = \infty$ n'étant pas exclus.

3. — Du point de vue de la théorie considérée il paraît utile de distinguer les équations différentielles linéaires (a) d'après le nombre de zéros de leurs intégrales.

L'équation (a) est dite <u>du type</u> (m), pour un nombre naturel $m(\geq 1)$ quelconque, si elle admet des intégrales s'annulant dans l'intervalle j précisément m fois, mais si elle n'en admet pas qui s'annulent $m+1$ fois.

Si $m=1$, l'équation (a) n'admet pas, dans l'intervalle j, de nombres conjugués ([2]).

Si $m \geq 2$, elle en admet. Dans ce cas, il y a dans l'intervalle j deux suites privilégiées formées chacune de $m-1$ nombres mutuellement conjugués, suites, dont l'une, constamment croissante, $a_1 < a_2 < \dots < a_{m-1}$ s'appelle la <u>suite fondamentale à gauche</u>, l'autre, constamment décroissante, $b_{-1} > b_{-2} > \dots > b_{-m+1}$ s'appelle la <u>suite fondamentale à droite</u>. Le nombre $a_1$ représente le plus grand nombre dans j pour lequel il n'y a pas de valeurs conjuguées à gauche, le nombre $b_{-1}$ à son tour est le plus petit nombre dans j pour lequel il n'y a pas de valeurs conjuguées à droite. On a toujours les inégalités suivantes :

$$a < b_{-m+1} \leq a_1 < b_{-m+2} \leq a_2 < b_{-m+3} \leq a_3 < \dots$$

$$\leq a_{m-3} < b_{-2} \leq a_{m-2} < b_{-1} \leq a_{m-1} < b \quad .$$

Dans ces formules ou bien tous les signes $=$ sont valables, de sorte que les deux suites fondamentales de nombres conjugués coïncident, et alors l'équation (a) s'appelle <u>spéciale</u> ; ou bien aucun signe $=$ n'est valable, de sorte que les deux suites en question sont différentes l'une de l'autre, et alors l'équation (a) s'appelle <u>générale</u> ou bien <u>non-spéciale</u>.

A côté des équations de type fini, dont nous venons de parler, on distingue trois espèces d'équations <u>de type infini</u>, suivant que la seule extrémité gauche ou la seule extrémité droite ou bien les deux extrémités de l'intervalle j sont des points d'accumulation des zéros des intégrales de l'équation correspondante.

Remarquons que, grâce à la théorie des transformations, on est arrivé à déterminer toutes les équations (a) qui sont d'un type fini ou infini quelconque, donné d'avance.

---

([2]) Rappelons qu'on appelle <u>conjugués</u> deux nombres $a'$, $b' \in j$ $(a' \neq b')$ s'il existe des intégrales de l'équation (a) qui s'annulent simultanément en $a'$ et $b'$.

4. - Cela étant, nous allons commencer par indiquer, rapidement, un procédé qui paraît ouvrir la voie la plus directe et en même temps la plus simple à la théorie en question. Pour éviter dès le commencement certains cas exceptionnels, nous supposons que les équations (a) , (A) sont de types (2) au moins, de sorte que toute intégrale de chacune de ces équations possède au moins un zéro.

Soient $r$ , $\mathcal{R}$ les espaces linéaires formés des intégrales des équations (a) , (A). Nous choisissons à volonté, dans chacun de ces espaces, une base $u, v \in r$ , $U, V \in \mathcal{R}$, c'est-à-dire un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes, $u$ , $v$ et $U$ , $V$ des équations (a) , (A) ; nous désignons par $w$ , $W$ les wronskiens correspondants, $w = uv' - u'v$ , $W = UV' - U'V$ . Au moyen de ces bases nous définissons une correspondance linéaire entre les espaces $r$ , $\mathcal{R}$, en associant l'une à l'autre deux intégrales quelconques $y \in r$ , $Y \in \mathcal{R}$, formées avec les mêmes coordonnées constantes, $\gamma_1$ , $\gamma_2$ par rapport aux bases en question : $y = \gamma_1 u + \gamma_2 v$ , $Y = \gamma_1 U + \gamma_2 V$ . Par la fonction $y \to Y$ se trouve definie une application $p$ de l'espace $r$ sur l'espace $\mathcal{R}$ : le nombre $\tau = \frac{w}{W}$ s'appelle la <u>caractéristique</u> de l'application $p$ . De même, par la fonction $Y \to y$ se trouve définie une application $P$ de l'espace $\mathcal{R}$ sur $r$ à la caractéristique $\mathcal{T} = \frac{W}{w}$ . Les applications $p$ , $P$ sont évidemment inverses l'une de l'autre et leurs caractéristiques possèdent la même propriété : $\tau\mathcal{T} = 1$ .

Nous exprimons les bases $u$ , $v$ , $U$ , $V$ en coordonnées polaires, en termes de leurs amplitudes

$$\rho(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} , \qquad P(T) = \sqrt{U^2(T) + V^2(T)}$$

et de certaines phases $\alpha(t)$ , $A(T)$ . Remarquons qu'il y a pour chaque base $u$ , $v$ et $U$ , $V$ précisément un système dénombrable de phases qui diffèrent l'une de l'autre par des multiples entiers de $\pi$ . Les phases $\alpha$ , $A$ de chaque système sont définies par la propriété d'être des fonctions continues dans l'intervalle $j$ ou bien $J$ et d'y satisfaire, à l'exception des zéros des intégrales $v$ , $V$ aux équations suivantes :

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} , \qquad \operatorname{tg} A(T) = \frac{U(T)}{V(T)} .$$

Or, d'après notre supposition, chacune des intégrales $u$ , $U$ possède au moins un zéro, $t_0 \in j$ , $T_0 \in J$ . Il existe précisément une phase $\alpha$ pour la base $u$ , $v$ et précisément une $A$ pour la base $U$ , $V$ , qui satisfont aux relations

$\alpha(t_0) = \Lambda(T_0) = 0$ . Ce sont précisément ces phases $\alpha$ , $\Lambda$ vérifiant les relations en question que nous choisissons dans la suite. Nous avons alors les formules

$$u(t) = \varepsilon\rho(t) \sin \alpha(t) , \qquad v(t) = \varepsilon\rho(t) \cos \alpha(t)$$

$$U(T) = EP(T) \sin \Lambda(T) , \qquad V(T) = EP(T) \cos \Lambda(T) \tag{1}$$

$$(\varepsilon , E = \pm 1 \; ; \; \varepsilon = \operatorname{sgn} v(t_0) , \quad E = \operatorname{sgn} V(T_0)) \qquad ,$$

et nous voyons que deux intégrales correspondantes quelconques $y$ , $Y$ s'expriment par les formules suivantes

$$y(t) = \varepsilon k_1 \rho(t) \sin[\alpha(t) + k_2] , \qquad Y(T) = E k_1 P(T) \sin[\Lambda(T) + k_2] \tag{2}$$

les $k_1$ , $k_2$ étant des constantes arbitraires. Ajoutons, que les fonctions $\rho$ , $\alpha$ , de même que les $P$ , $\Lambda$ , sont liées suivant les formules

$$\alpha'(t) = \frac{-w}{\rho^2(t)} , \qquad \Lambda'(T) = \frac{-W}{P^2(T)} \qquad . \tag{3}$$

Considérons alors l'équation

$$\alpha(t) = \Lambda(T) \qquad . \tag{4}$$

Cette équation est vérifiée, évidemment, par les valeurs $t_0 \in j$ , $T_0 \in J$ . Puisque chaque phase $\alpha$ , $\Lambda$ va constamment en croissant ou en décroissant, il existe précisément une fonction $T = X(t)$ , définie dans un voisinage $i \subset j$ de $t_0$ , qui prend pour $t = t_0$ la valeur $T_0$ et satisfait identiquement, dans l'intervalle $i$ , à l'équation (4) ; nous avons en vue le plus large intervalle $i$ jouissant de cette propriété. De même, il existe précisément une fonction $t = x(T)$ , définie dans un voisinage $I \subset J$ de $T_0$ , qui prend pour $T = T_0$ la valeur $t_0$ et vérifie identiquement, dans $I$ , l'équation (4) ; $I$ désigne le plus large intervalle ayant la dite propriété. L'intervalle $I$ représente, évidemment, l'ensemble des valeurs de la fonction $X$ dans l'intervalle $i$ , $I = X(i)$ , et on a de même, $i = x(I)$ . On voit que les fonctions $X$ , $x$ sont inverses l'une de l'autre, et s'expriment par les formules

$$X(t) = \Lambda^{-1}[\alpha(t)] , \qquad x(T) = \alpha^{-1}[\Lambda(T)] \qquad .$$

Finalement, on s'assure que ces fonctions appartiennent à la classe $C_3$ et satisfont aux équations différentielles non-linéaires du troisième ordre

$$\text{(b)} \qquad -\{X\,,\,t\} + Q(X)\,X'^2 = q(t) \quad ,$$

$$\text{(B)} \qquad -\{x\,,\,T\} + q(x)\,\dot{x}^2 = Q(T) \quad ,$$

les $\{X\,,\,t\}$ , $\{x\,,\,T\}$ étant les dérivées schwarziennes des fonctions $X$ , $x$ aux points $t$ , $T$ :

$$\{X\,,\,t\} = \frac{1}{2}\times\frac{X'''(t)}{X'(t)} - \frac{3}{4}\times\frac{X''^2(t)}{X'^2(t)}\,, \qquad \{x\,,\,T\} = \frac{1}{2}\times\frac{\dddot{x}(T)}{\dot{x}(T)} - \frac{3}{4}\times\frac{\ddot{x}^2(T)}{\dot{x}^2(T)} \;.$$

Ajoutons, que les équations (b) , (B) peuvent être remplacées par l'équation unique suivante

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X'(t)}\right)'' + Q(X)\,X'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\dot{x}(T)}\right)^{\cdot\cdot} + q(x)\,\dot{x}(T) \quad ,$$

les valeurs $t$ , $T$ étant liées l'une à l'autre par les formules $T = X(t) \in I$ , $t = x(T) \in i$ .

Cela étant, revenons aux formules (2). Nous voyons que les intégrales $y$ , $Y$ se transforment l'une dans l'autre, moyennant des fonctions $x$ , $X$ , d'après les formules

$$y(t) = \varepsilon E\frac{\rho(t)}{P[X(t)]}\times Y[X(t)]\,, \qquad Y(T) = E\varepsilon\frac{P(T)}{\rho[x(T)]}\times y[x(T)] \quad ,$$

qui, à leur tour, peuvent être mises, d'après les formules (3), (4), sous la forme

$$\varepsilon\sqrt[4]{|\tau|}\;y(t) = E\sqrt[4]{|\tau|}\frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \quad ,$$

$$E\sqrt[4]{|\tau|}\;Y(T) = \varepsilon\sqrt[4]{|\tau|}\frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \quad .$$

Pour simplifier ces formules normons les intégrales $y$ , $Y$ en les multipliant par les quantités $\varepsilon\sqrt[4]{|\tau|}$ , $E\sqrt[4]{|\tau|}$ , et conservons pour les intégrales normées les mêmes notations $y$ , $Y$ . Les formules ci-dessus sont alors

$$y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}} \quad ,$$

$$Y(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \quad ,$$

et elles peuvent être remplacées par la relation symétrique suivante

$$\sqrt[4]{|X'(t)|}\; y(t) = \sqrt[4]{|\dot{x}(T)|}\; Y(T) \quad ; \tag{5}$$

les quantités $t$ , $T$ intervenant dans cette relation sont, naturellement, les valeurs des fonctions $X$ , $x$ définies plus haut, $t = x(T) \in i$ , $T = X(t) \in I$ .

Pour terminer ces considérations il reste seulement à préciser la position des intervalles $i$ , $I$ dans les intervalles $j$ , $J$ ; $i$ et $I$ sont, rappelons-le les intervales de définition des fonctions $X$ , $x$ . Sans entrer dans les details, nous nous contentons de remarquer que la position des intervalles $i$ , $I$ dans les intervalles $j$ , $J$ dépend des relations existant entre les quantités

$$c_1 = \lim_{t \to a+} \alpha(t) \ , \quad c_2 = \lim_{t \to b-} \alpha(t) \ ; \qquad C_1 = \lim_{T \to A+} A(T) \ , \quad C_2 = \lim_{T \to B-} A(T) \ .$$

On démontre que les intervalles $i$ , $I$ s'etendent toujours, dans un certain sens, jusqu'aux extrémités des intervalles $j$ , $J$ . En particulier, dans le cas $c_1 = C_1$ , $c_2 = C_2$ ou bien $c_1 = C_2$ , $c_2 = C_1$ , les intervalles $i$ , $j$ et, en même temps, les intervalles $I$ , $J$ , sont identiques.

Nous sommes arrivés au résultat suivant :

Étant donnée une correspondance linéaire entre les espaces $r$ , $\mathcal{R}$ , il existe des fonctions mutuellement inverses, $T = X(t)$ , $t = x(t)$ , définies dans certains intervalles (les plus larges) $i \subset j$ , $I \subset J$ , qui jouissent de la propriété que deux intégrales correspondantes quelconques des équations (a) , ($A$), convenablement normées, $y \in r$ , $Y \in \mathcal{R}$ , se transforment l'une dans l'autre, dans les intervalles $i$ , $I$ suivant la formule (5). Les fonctions $X$ , $x$ sont définies par la relation $\alpha(t) = A(T)$ , $\alpha$ , $A$ étant des phases convenables des équations (a) , ($A$), et satisfont aux équations non-linéaires du troisième ordre (b) , (B) ; leurs intervalles de définition, $i$ , $I$ , s'étendent toujours, dans un certain sens du mot, aux extrémités des intervalles $j$ , $J$ et peuvent se confondre, dans des cas particuliers, avec ces derniers.

Nous avons encore à compléter nos résultats par la remarque que, inversement, pour toutes les fonctions $w(t)$, $X(t)$ satisfaisant au problème de KUMMER, il existe toujours une correspondance linéaire entre les espaces $r$, $R$ qui détermine ces fonctions de la manière indiquée ci-dessus, à l'aide de phases convenables $\alpha$, $A$ des équations (a), (A).

5. – Nous nous trouvons maintenant au coeur de la théorie des transformations considérées, en face de plusieurs problèmes sérieux qui concernent surtout le rôle des équations non-linéaires du troisième ordre (b), (B) dans la théorie en question. On a, à ce sujet, les résultats suivants, valables pour toutes les équations (a), (A) (non seulement pour celles de type (2)) :

Pour chaque solution $X(t)$ de l'équation (b), la fonction inverse $x(T)$ représente une solution de l'équation (B) ; inversement, pour chaque solution $x(T)$ de l'équation (B), la fonction inverse $X(t)$ constitue une solution de l'équation (b).

Pour chaque intégrale $Y(T)$ de l'équation (A), et chaque solution $X(t)$ de l'équation (b), la fonction composée

$$y(t) = \frac{Y[X(t)]}{\sqrt{|X'(t)|}}$$

représente une intégrale de l'équation (a) ; en même temps on a la formule inverse :

$$Y(T) = \frac{y[x(T)]}{\sqrt{|\dot{x}(T)|}} \quad ,$$

$x(T)$ étant la fonction inverse de $X(t)$. On a des résultats analogues pour chaque intégrale $y(t)$ de l'équation (a), et chaque solution $x(T)$ de l'équation (B).

Le théorème suivant sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (b) joue un rôle important :

<u>Soient</u> $t_0 \in j$, $X_0 \in J$, $X'_0$ $(\neq 0)$, $X''_0$ <u>des nombres arbitraires. Il existe précisément une intégrale</u> $X(t)$ <u>de l'équation (b), définie dans un intervalle ouvert</u> $i$, <u>qui satisfait aux conditions initiales de Cauchy</u>

$$X(t_0) = X_0 , \qquad X'(t_0) = X'_0 , \qquad X''(t_0) = X''_0 \quad ,$$

et qui est en même temps la plus large en ce sens que toute intégrale de l'équation (b), vérifiant les mêmes conditions initiales, en fait partie. L'intégrale $X(t)$ et la fonction inverse $x(T)$ s'expriment par les formules

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)] \, , \qquad x(T) = \alpha^{-1}[A(T)] \quad ,$$

les $\alpha$ , $A$ étant les phases s'annulant en $t_0$ , $X_0$ , formées de couples d'intégrales convenables des équations (a) , ($A$).

6. — Un autre complexe de questions concernant la théorie considérée s'attache aux transformations appelées complètes.

Nous avons vu que, dans certaines conditions d'égalité existant entre les quantités $c_1$ , $c_2$ et $C_1$ , $C_2$ mentionnées plus haut, les fonctions $X$ , $x$ , solutions de l'équation $\alpha(t) = A(T)$ , existent dans les intervalles $(i =)\ j$ , $(I =)\ J$ entiers, de sorte que les intégrales $y$ , $Y$ se transforment l'une dans l'autre suivant la formule (5), non seulement dans certains voisinages $i$ , $I$ des valeurs initiales $t_0$ , $T_0$ , mais dans toute leur étendue. Nous appelons complètes les solutions $X$ , $x$ jouissant de la dite propriété, et désignons par le même nom les transformations des équations (a) , ($A$) réalisées, au sens de la formule (5), par les transformations complètes $X$ , $x$ .

Dans la suite nous nous bornons au cas, où les équations (a) , ($A$) sont de types finis $\geqslant 2$ .

Voici d'abord les résultats fondamentaux concernant l'existence et la généralité des transformations complètes en question :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (a) , ($A$) de types finis, admettant des points conjugués, soient complètement transformables l'une dans l'autre consistent en ceci que les équations en question soient du même type et toutes les deux non-spéciales ou toutes les deux spéciales.

Si ces conditions sont vérifiées, il existe toujours des solutions complètes constamment croissantes et en même temps d'autres constamment décroissantes $X(t)$ de l'équation (b), qui réalisent la transformation et qui prennent, pour un nombre $t_0 \in j$ choisi arbitrairement, une valeur $T_0 \in J$ donnée d'avance ; cette valeur $T_0$ peut être prise dans l'intervalle $J$ , dans une certaine mesure, arbitrairement.

On obtient toutes les solutions complètes constamment croissantes et de même toutes celles qui sont constamment décroissantes, $X(t)$, en choisissant à volonté une phase de l'équation (A) par exemple $A(T)$, s'annulant en $T_0$, et en prenant les différentes phases $\alpha(t)$ de l'équation (a), s'annulant en $t_0$ et vérifiant les conditions d'égalité entre les quantités $c_1$, $c_2$ et $C_1$, $C_2$ mentionnées plus haut. Les solutions en question sont alors données par la formule :

$$X(t) = A^{-1}[\alpha(t)] \quad .$$

Dans le cas des équations (a), (A) non-spéciales il existe, en somme, une famille de $\infty^1$ solutions complètes de l'équation (b) constamment croissantes et autant de solutions complètes constamment décroissantes. Si, par contre, les équations (a), (A) sont spéciales, il existe, en somme, une famille de $\infty^2$ solutions complètes de l'équation (b) constamment croissantes et, de même, une famille de la même puissance de solutions constamment décroissantes.

On peut même aller plus loin et analyser la structure de l'ensemble formé par toutes les solutions complètes de l'équation (b).

Nous venons d'indiquer que les solutions complètes de l'équation (b) dépendent d'un ou de deux paramètres, suivant que les équations (a), (A) sont générales ou spéciales. Cette différence exerce, naturellement, son influence sur la structure de l'ensemble des solutions complètes en question. En tout cas l'ensemble des solutions complètes de l'équation (b) se compose de deux familles $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$, dont l'une, $\mathfrak{M}$, est formée de fonctions constamment croissantes, l'autre, $\overline{\mathfrak{M}}$, de fonctions constamment décroissantes.

En ce qui concerne l'analyse de la structure de l'ensemble des solutions complètes nous nous bornons, pour rester dans les grandes lignes, au cas général, c'est-à-dire au cas des équations (a), (A) non-spéciales. Nous avons dit que, dans ces cas, chaque famille $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ contient $\infty^1$ de solutions complètes.

Or, dans ce cas, toute fonction $X \in \mathfrak{M}$ passe par les $2(m-1)$ points fixes $(a_\nu, A_\nu)$, $(b_{-\nu}, B_{-\nu})$ et toute fonction $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ par les points $(a_\nu, B_{-\nu})$, $(b_{-\nu}, A_\nu)$ ; $\nu = 1, \dots, m-1$. Les $a_\nu$, $b_{-\nu}$ et $A_\nu$, $B_{-\nu}$ désignent les membres des suites fondamentales correspondantes de points conjugués. Les courbes représentées par les différentes fonctions $X \in \mathfrak{M}$, $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ se trouvent situées dans certains domaines, $D$, $\overline{D}$, formés des points fixes en question et des intérieurs de certains domaines rectangulaires ayant leurs sommets en ces points et en d'autres points qui sont encore déterminés par les membres des suites fondamentales de points conjugués. Les courbes en question recouvrent les domaines $D$ , $D$ entièrement.

Chaque ensemble $\mathfrak{M}$ , $\overline{\mathfrak{M}}$ admet une loi d'ordination à l'aide de valeurs de ses éléments de telle façon qu'il est semblable à l'ensemble des nombres positifs ordonnés par valeurs croissantes. Il y a, par conséquent, dans ces ensembles $\mathfrak{M}$ , $\overline{\mathfrak{M}}$ des sous-ensembles dénombrables qui sont denses en eux. Si toutes les intégrales de l'equation (A) sont bornées, chaque fonction $X \in \mathfrak{M}$ ou $X \in \overline{\mathfrak{M}}$ peut être approchée, dans l'intervalle $j$ , par des éléments d'un des sous-ensembles dénombrables en question, avec une approximation arbitrairement donnée.

7. – Pour indiquer une application de cette théorie nous allons déterminer toutes les équations (a) d'un type fini $(m)$, $m \geqslant 2$ , quelconque.

Soit alors $m \geqslant 2$ un nombre naturel quelconque.

On voit aisement que, l'équation

$$Y'' = - Y \qquad , \tag{A}$$

prise dans l'intervalle $J = (0 , \overline{m - \frac{1}{2}}\,\pi)$ ou bien $J' = (0 , m\pi)$ est précisément du type $(m)$ , non-spéciale dans le premier cas et spéciale dans l'autre.

Or, soit (a) une équation non-spéciale du type $(m)$ . D'après la théorie ci-dessus, les équations (a) , (A) peuvent être transformées complètement l'une dans l'autre. Il existe, par conséquent, une fonction $X(t)$ constamment croissante, définie par une expression de la forme $X(t) = A^{-1}[\alpha(t)]$ , qui réalise une application de l'intervalle $j$ sur l'intervalle $J$ et satisfait, par conséquent, aux conditions

$$\lim_{t \to a+} X(t) = 0 , \qquad \lim_{t \to b-} X(t) = \overline{m - \frac{1}{2}}\,\pi \tag{1}$$

en représentant, en même temps, une solution de l'équation (b) :

$$q(t) = - \{X , t\} - X'^2(t) \qquad . \tag{2}$$

Inversement, si l'on prend une fonction arbitraire $X(t)$ telle que, dans l'intervalle $j$ , 1° sont valables les formules (1),

2° $X'(t) > 0$ ,

3° $X(t) \in C_3$ ,

et qu'on forme la fonction $q(t)$ d'après la formule (2), à l'aide de la fonction $X(t)$ , alors l'équation (a) correspondante est précisément du type (m) . En effet, la fonction $Y(T) = k_1 \sin(T + k_2)$ étant l'intégrale générale de l'équation (A), la fonction composée

$$y(t) = \frac{k_1 \sin[X(t) + k_2]}{\sqrt{X'(t)}}$$

représente l'intégrale générale de l'équation (a). On voit aisément, en se servant des propriétés 1°, 2° mentionnées ci-dessus, que cette intégrale $y$ entraîne des intégrales particulières s'annulant, dans l'intervalle $j$ , précisément $m - 1$ fois et d'autres qui s'annulent précisément $m$ fois.

On arrive ainsi au théorème suivant :

Pour que l'équation (a) soit du type (m) , $m \geq 2$ , et non-spéciale, il faut et il suffit que la fonction $q$ puisse être mise sous la forme

$$q(t) = -\{X , t\} - X'^2 \quad ,$$

$X \in C_3$ étant une fonction qui vérifie les relations

$$\lim_{t\to a+} X(t) = 0 , \quad \lim_{t\to b-} X(t) = (m - \tfrac{1}{2})\,\pi , \quad X'(t) > 0 \quad .$$

Un resultat analogue à lieu s'il s'agit de l'équation (a) spéciale : Dans ce cas la fonction $X \in C_3$ est assujettie à verifier les relations

$$\lim_{t\to a+} X(t) = 0 , \quad \lim_{t\to b-} X(t) = m\pi \quad , \quad X'(t) > 0 \quad .$$

8. - Les résultats précédents s'appliquent, manifestement aussi, s'il s'agit de transformer une équation différentielle du deuxième ordre (a) en elle même. Je me permettrai de donner un bref aperçu d'une théorie à ce sujet, cette fois dans le cas où l'équation (a) est oscillatoire, c'est-à-dire de type ir[illegible]i,

et jouit de la propriété que ses intégrales possèdent, vers les deux extrémités de l'intervalle $j$, une infinité de zéros. Pour fixer les idées, je suppose que l'intervalle $j$ soit l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$. Le cas en question va nous donner l'occasion de rappeler une théorie assez étendue, dite "théorie de dispersions", dans laquelle apparaîssent de nouveaux éléments de nature algébrique.

Cela étant, supposons que la fonction $q$ soit continue dans l'intervalle $j = (-\infty, \infty)$ et que ses intégrales soient oscillatoires de manière à avoir vers les deux extrémités de l'intervalle $j$ une infinité de zéros. Pour quelques circonstances qui se présenteront au cours de nos considérations, il est utile de supposer davantage, c'est-à-dire que la fonction $q$ est toujours négative. Cette supposition supplémentaire n'est pas nécessaire, bien entendu, s'il s'agit seulement de transformations de l'équation (a) en elle même.

Soit $t \in j$ un nombre arbitraire et soit $u$ ou $v$ une intégrale de l'équation (a) qui s'annule ou dont la dérivée s'annule en $t$. Soit $n = 1, 2, \ldots$, et désignons par

$\varphi_n(t)$ ou $\varphi_{-n}(t)$ le n-ième zéro de l'intégrale $u$ qui suit ou qui précède le zéro $t$ ;

$\psi_n(t)$ ou $\psi_{-n}(t)$ le n-ième zéro de la fonction $v'$ qui suit ou qui précède le zéro $t$ ;

$\chi_n(t)$ ou $\chi_{-n}(t)$ le n-ième zéro de la fonction $u'$ qui suit ou qui précède le nombre $t$ ;

$\omega_n(t)$ ou $\omega_{-n}(t)$ le n-ième zéro de l'intégrale $v$ qui suit ou qui précède le nombre $t$.

Soit $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nous appelons la fonction $\varphi_\nu, \psi_\nu, \chi_\nu, \omega_\nu$ la dispersion centrale de première, seconde, troisième, quatrième espèce d'indice $\nu$, et en particulier, la fonction $\varphi_1, \psi_1, \chi_1, \omega_1$ la dispersion centrale fondamentale de l'espèce correspondante. Ces définitions ne dépendent manifestement pas du choix particulier des intégrales $u$ et $v$. La dénomination "dispersions" est justifiée par ceci, que les fonctions correspondantes décrivent, en quelque sorte, la dispersion des zéros des intégrales de l'équation (a) et de leurs dérivées : l'attribut "centrales" sera justifié, au moins dans le cas de dispersions de première espèce, par nos considérations ultérieures.

Les dispersions centrales que nous venons de définir sont accessibles à une analyse détaillée et jouissent de remarquables propriétés. Nous nous contenterons d'en indiquer quelques-unes :

Les dispersions centrales de première espèce, auxquelles on ajoute la fonction $\varphi_0(t) = t$ , forment un groupe cyclique infini qui est engendré par la dispersion centrale fondamentale $\varphi_1$ et dont l'élément-unité est l'identité $\varphi_0(t) = t$ ; les dispersions centrales de première espèce d'indices pairs forment un sous-groupe dans le groupe en question. On a des résultats analogues en ce qui concerne les dispersions centrales de seconde espèce.

Toutes les dispersions centrales possèdent partout des dérivées continues du premier ordre qui s'expriment par des formules simples et élégantes. On a par exemple pour toute dispersion centrale de première espèce, $\varphi$ , et pour toute dispersion centrale de troisième espèce, $\chi$ , les formules suivantes, dans lesquelles $u$ désigne n'importe quelle intégrale de l'équation (a) :

$$\varphi'(t) = \frac{u^2[\varphi(t)]}{u^2(t)} \quad \text{pour} \quad u(t) \neq 0 , \qquad \varphi'(t) = \frac{u'^2(t)}{u'^2[\varphi(t)]} \quad \text{pour} \quad u(t) = 0 \; :$$

(1)

$$\chi'(t) = -\frac{1}{q[\chi(t)]}\frac{u'^2[\chi(t)]}{u^2(t)} \quad \text{pour} \quad u(t) \neq 0 ,$$

$$\chi'(t) = -\frac{1}{q[\chi(t)]}\frac{u'^2(t)}{u^2[\chi(t)]} \quad \text{pour} \quad u(t) = 0 \quad .$$

Ces formules entraînent que chaque dispersion centrale de première espèce appartient à la classe $C_3$ . Plus généralement, si la fonction $q$ appartient à la classe $C_k$ $(k = 0 , 1 , \ldots)$ , toutes les dispersions centrales de première espèce appartiennent à la classe $C_{k+3}$ et les dispersions centrales d'espèces plus élevées à la classe $C_{k+1}$ .

Les valeurs des dérivées des dispersions centrales fondamentales peuvent s'exprimer à l'aide de valeurs de la fonction $q$ . On a par exemple les formules

$$\varphi'(t) = \frac{q(t_1)}{q(t_3)} , \qquad \chi'(t) = \frac{q(t_1)}{q[\chi(t)]} \quad ,$$

les quantités $t_1$ , $t_3$ vérifiant les inégalités

$$t < t_1 < \chi(t) < t_3 < \varphi(t) \quad .$$

Ces résultats conduisent à des théorèmes remarquables au sujet de fonctions composées. On démontre, par exemple, le théorème suivant :

Soit $q$ une fonction continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, qui est toujours négative et telle que l'équation $y'' = q(t)\,y$ soit oscillatoire. Dans ces conditions, il existe deux fonctions $X(t)$, $Y(t)$, definies dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, qui satisfont aux inégalités $t < X(t) < Y(t)$ et jouissent de la propriété que la fonction composée $q[X(t)] : q[Y(t)]$ possède partout une dérivée continue du deuxième ordre. Si la fonction $q$ est constamment croissante, ou bien constamment décroissante, alors les fonctions $X$, $Y$ sont elles-mêmes continues.

Or revenons aux transformations de l'équation (a) en elle-même. La liaison entre la théorie de ces transformations et celle des dispersions centrales constitue la première formule (1) ci-dessus, qui exprime la dérivée de la dispersion centrale de première espèce et d'indice $\nu(= 0, \pm 1, \dots)$

$$\varphi_\nu'(t) = \frac{u^2[\varphi_\nu(t)]}{u^2(t)} \qquad (u(t) \neq 0) \qquad .$$

On en tire la formule

$$(2) \qquad (-1)^\nu\, u(t) = \frac{u[\varphi_\nu(t)]}{\sqrt{\varphi_\nu'(t)}} \qquad ,$$

valable pour toute valeur $t \in (-\infty, \infty)$. Nous voyons que chaque intégrale $u$ de l'équation (a) se transforme, complètement, à l'aide de toute dispersion centrale de première espèce, $\varphi_\nu(t)$, en elle-même, au sens de la formule (2). On trouve ainsi une solution particulière du problème primitif de Kummer dans le cas spécial de transformation d'une équation (a) en elle-même, solution donnée par les fonctions

$$w(t) = 1 : \sqrt{\varphi_\nu'(t)} \,, \qquad X(t) = \varphi_\nu(t) \qquad .$$

Il en résulte, que toute dispersion centrale de première espèce satisfait à l'équation non-linéaire du troisième ordre

$$(b) \qquad -\{X, t\} + q(X)\, X'^2 = q(t) \qquad ,$$

qui est, naturellement, un cas particulier de l'équation (b) ou (B) considérée plus haut. L'équation $(\overline{b})$ peut être mise sous la forme symétrique suivante

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{X'(t)}}\right)'' + q(X)\, X'(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\dot{x}(T)}}\right)^{\cdot\cdot} + q(x)\, \dot{x}(T) \quad ,$$

où l'on a utilisé les notations usuelles.

Conformément au théorème général sur l'existence et l'unicité de solutions de l'équation (b), il existe précisément une solution $X$ de l'équation $(\overline{b})$, définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, qui déterminée par les valeurs initiales données arbitrairement : $t_0$, $X_0 = X(t_0)$, $X'_0 = X'(t_0)$ $(\neq 0)$, $X''_0 = X''(t_0)$. Toute solution $X$ transforme chaque intégrale $u(t)$ de l'équation (a) dans une intégrale $v(t)$ de la même équation suivant la formule $v(t) = u[X(t)] : \sqrt{|X'(t)|}$, et on obtient de cette façon toutes les transformations en question. On démontre que toutes les solutions $X$ de l'équation $(\overline{b})$, définies dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, forment un groupe continu $\mathfrak{G}$ dépendant de trois paramètres.

Les solutions $X$ peuvent être obtenues par un procédé constructif fondé sur la considération des correspondances linéaires dans l'espace linéaire formé des intégrales de l'équation (a). Nous n'insisterons pas sur ce sujet afin de pouvoir dire encore quelques mots sur la structure algébrique du groupe $\mathfrak{G}$, c'est-à-dire, répétons-le, du groupe continu à trois paramètres, formé des solutions $X$ de l'équation $(\overline{b})$, definies dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

On démontre que toutes les solutions $X$ de l'équation $(\overline{b})$ constamment croissantes forment un sous-groupe invariant $\mathfrak{P}$ dans le groupe $\mathfrak{G}$, sous-groupe d'indice 2, tandis que toutes les solutions constamment décroissantes forment l'autre classe du groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$.

Désignons par $\mathfrak{C}$ le groupe formé par toutes les dispersions centrales de première espèce et par $\mathfrak{S}$ son sous-groupe formé de toutes les dispersions centrales de première espèce d'indices pairs. On a alors les relations

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{P} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{S} \quad .$$

Soient $X \in \mathfrak{G}$ une solution quelconque et $u$, $v$ deux intégrales arbitraires, linéairement indépendantes, de l'équation (a). On a alors les formules

$$\frac{u(X)}{\sqrt{|X'|}} = c_{11}\, u + c_{12}\, v \quad ,$$

$$\frac{v(X)}{\sqrt{|X'|}} = c_{21}\, u + c_{22}\, v$$

où les coefficients $c_{11}$ , $c_{12}$ , $c_{21}$ , $c_{22}$ sont bien déterminés. Le déterminant de la matrice C de ces coefficients est égale à sgn X' . En faisant correspondre à la solution X la matrice C , on obtient une représentation homomorphe d du groupe $\mathfrak{G}$ sur le groupe $\mathfrak{C}$ formé des matrices carrées unimodulaires du deuxième ordre. En se servant de cette représentation d on démontre que le groupe $\mathfrak{S}$ est un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{G}$ et le groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{C}$ . On démontre même que le groupe $\mathfrak{C}$ représente le centre du groupe $\mathfrak{P}$ ; ceci justifie la dénomination de dispersions centrales.

9. - La théorie des transformations a permis de résoudre, au sujet des équations différentielles linéaires du deuxième ordre plusieurs problèmes sérieux, surtout de la nature suivante : étant données d'avance certaines propriétés des intégrales, déterminer toutes les équations différentielles (a) dont les intégrales possèdent ces propriétés.

Nous avons déjà vu qu'on a déterminé, à l'aide de la théorie des transformation toutes les équations (a) de type fini ou infini quelconque, c'est-à-dire, rappelons-le, toutes les équations dont les intégrales possédant un nombre maximum de zéros donné d'avance. Voici d'autres problèmes de cette nature qui ont été résolus récemment :

On a déterminé toutes les équations (a) oscillatoires dont les intégrales s'annulent à des distances égales, de même que toutes les équations (a) oscillatoires pour lesquelles il existe des couples d'intégrales linéairement indépendantes, u , v , telles que les zéros de chacune d'entre elles coïncident avec les zéros de la dérivée de l'autre ; on a aussi déterminé toutes les équations (a) oscillatoires pour lesquelles la suite de zéros de chaque intégrale est convexe (problème de M. G. SZEGÖ).

En outre, on a utilisé avec succès la théorie en question pour la solution de quelques problèmes aux limites, pour l'élargissement de la théorie de Floquet dans le cas de la fonction q non-périodique et pour plusieurs problèmes de différent nature au sujet des équations différentielles linéaires d'ordres plus élevés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORŮVKA (Otukar). - Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre [en russe, avec un résumé en français] Czech. J., t. 3 (78), 1953, p. 199-255.

[2] BORŮVKA (Otukar). - Sur la transformation des intégrales des équations différentielles lineaires ordinaires du second ordre, Annali di Mat. pura ed appl., t. 41, 1956, p. 325-342.

[3] BORŮVKA (Otukar). - Théorie analytique et constructive des transformations différentielles linéaires du second ordre, Bull. math. Soc. Sc. math. phys. R. P. R., t. 1 (49), 1957, p. 125-130.

[4] BORŮVKA (Otukar). - Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre, Annali di Mat. pura ed appl., t. 49, 1960, p. 229-251.

[5] BORŮVKA (Otukar). - Sur la structure de l'ensemble des transformations différentielles linéaires complètes du second ordre, Annali di Mat. pura ed appl. (à paraître).

Voir en outre les travaux au sujet des équations différentielles linéaires ordinaires du deuxième ordre et d'ordres supérieurs, publiés, durant ces dernières années dans le Czechoslovak mathematical Journal, par différents auteurs : Marko ŠVEC, Michal GREGUŠ, Mir. LAITOCH et autres.