Jarník, Vojtěch: Scholarly works

Vojtěch Jarník
Über einen p-adischen Übertragungssatz

Monatshefte für Math. u. Phys. 48 (1939), pp. 277--287

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500768

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Über einen p-adischen Übertragungssatz.

Von **Vojtěch Jarník** in Prag.

Im folgenden sei p eine fest gewählte Primzahl; kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganze rationale Zahlen, kleine griechische Buchstaben — reelle Zahlen, kleine deutsche Buchstaben — ganze p-adische Zahlen, d. h. Ausdrücke von der Form

$$\mathfrak{a}=a_0+a_1 p+a_2 p^2+\ldots \quad (0\leqq a_i<p \text{ für } i=0,1,\ldots);$$

ist dabei $a_n=0$ für $n>m$, so identifiziert man $\mathfrak{a}$ mit der ganzen rationalen Zahl $a_0+a_1 p+\ldots+a_m p^m$. Wenn $a_f\neq 0$, $a_i=0$ für $0\leqq i<f$, so setzt man $|\mathfrak{a}|_p=p^{-f}$; außerdem $|0|_p=0$.

Definiert man den Abstand $\rho_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ zweier Zahlen

$$\mathfrak{a}=a_0+a_1 p+a_2 p^2+\ldots,\quad \mathfrak{b}=b_0+b_1 p+b_2 p^2+\ldots \tag{1}$$

durch die Gleichungen

$$\rho_1(\mathfrak{a},\mathfrak{a})=0,$$

$$\rho_1(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=p^{-f}, \text{ wenn } a_f\neq b_f,\ a_i=b_i \text{ für } 0\leqq i<f$$

(was man auch durch die Kongruenzen

$$\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{b} \pmod{p^f},\quad \mathfrak{a}\not\equiv\mathfrak{b} \pmod{p^{f+1}}$$

auszudrücken pflegt), so bilden die ganzen p-adischen Zahlen einen kompakten Raum, d. h. einen metrischen Raum, in welchem jede Punktfolge eine konvergente Teilfolge enthält. Dabei bedeutet die Gleichung

$$\lim_{r\to\infty}(a_{0r}+a_{1r}p+a_{2r}p^2+\ldots)=a_0+a_1 p+a_2 p^2+\ldots$$

offenbar, daß es zu jedem $n\geqq 0$ ein $r_0(n)$ gibt, so daß $a_{nr}=a_n$ für alle $r>r_0(n)$. Weiter ist $|\mathfrak{a}|_p=\rho_1(\mathfrak{a},0)$.

Für die beiden Zahlen (1) definiert man

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)p^i,\quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,k=0}^{n}a_i b_k p^{i+k}.$$

Man definiert dann wie üblich $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$, $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$; letzterer Ausdruck ist freilich dann und nur dann eine ganze p-adische Zahl, wenn $\mathfrak{a}\neq 0$, $|\mathfrak{b}|_p\leqq|\mathfrak{a}|_p$. Von den rationalen Zahlen liegen als genau diejenigen im

Bereiche der ganzen p-adischen Zahlen, die sich in der Form $\frac{b}{a}$ mit $a>0$, $p\nmid a$ darstellen lassen.

Für $m>0$ sei E_m die Menge aller Systeme $\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$ von je m ganzen p-adischen Zahlen mit folgender Abstandsdefinition: sind $P=\{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$, $Q=\{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m\}$ zwei Punkte aus E_m, so ist ihr Abstand

$$\rho_m(P, Q)=\underset{1\leq i\leq m}{\mathrm{Max}}\ \rho_1(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i).$$

Offenbar ist E_m ein kompakter Raum, $\rho_m(P, R)\leq \mathrm{Max}\,(\rho_m(P, Q), \rho_m(Q, R))$.

Ist K eine Kugel in E_m (d. h. die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkte P einen Abstand $<\rho$ haben, wo ρ eine gegebene positive Zahl ist), so gibt es genau ein ganzes $f\geqq 0$, so daß K genau aus allen Punkten X von E_m mit $\rho_m(P, X)\leqq p^{-f}$ besteht; K heiße dann eine Kugel f-ter Ordnung. Es gibt genau eine Kugel nullter Ordnung, nämlich E_m selbst. Je zwei Kugeln derselben Ordnung sind punktfremd und jede Kugel f-ter Ordnung ist Vereinigungsmenge von p^m verschiedenen Kugeln $(f+1)$-ter Ordnung. Jede Kugel f-ter Ordnung enthält genau einen Punkt $\{a_1, \ldots, a_m\}$ mit $0\leqq a_i<p^f$ $(1\leqq i\leqq m)$. Jede Kugel ist offenbar eine offene und zugleich abgeschlossene Menge.

Ist $M\subset E_m$, so überdecke man M durch eine (endliche oder unendliche) Folge von Kugeln

$$K_1,\ K_2, \ldots \qquad (\mathfrak{K})$$

und man setze

$$\sigma(\mathfrak{K})=\sum_n p^{-mf_n},$$

wo f_n die Ordnung von K_n bedeutet. Es sei μM („äußeres Maß" von M) die untere Grenze von $\sigma(\mathfrak{K})$ für alle derartigen Folgen $(\mathfrak{K})$, welche die Menge M überdecken.

Wir brauchen nur folgende triviale Eigenschaften von μM:

1) Aus $M\subset N$ folgt $\mu M\leqq \mu N$.

2) $\mu\,(\sum_{n=1}^{\infty} M_n)\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\mu M_n$

(also insbesondere: ist M abzählbar, so ist $\mu M=0$).

3) Ist K eine Kugel f-ter Ordnung, so ist $\mu K=p^{-mf}$. Denn $\mu K\leqq p^{-mf}$ ist klar; wäre $\mu K<p^{-mf}$, so könnte man nach dem Borelschen Satze sogar eine *endliche* Folge $(\mathfrak{K})$ mit $\sigma(\mathfrak{K})<p^{-mf}$ finden, die K überdeckt. Durch Unterteilung der Kugeln von $(\mathfrak{K})$ könnte man erreichen, daß alle Kugeln von $(\mathfrak{K})$ von derselben Ordnung f_0 wären, so daß ihre Anzahl $<p^{m(f_0-f)}$ wäre. Dann könnten aber diese Kugeln die Kugel K nicht überdecken — Widerspruch.

Ist also $\mu . M = 0$, so kann M keine Kugel enthalten. Gilt eine Eigenschaft für alle Punkte von E_m mit Ausnahme der Punkte einer Menge M mit $\mu . M = 0$, so wollen wir sagen, daß diese Eigenschaft „fast überall" gilt.

Herr Mahler[1]) hat folgenden Übertragungssatz bewiesen (der einem bekannten Khintchineschen Übertragungssatz für reelle Zahlen entspricht):

Es sei $m \geqq 1$, $\gamma \geqq m+1$; es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ganze p-adische Zahlen, welche folgende Eigenschaft besitzen:

A Zu jedem ξ_0 gibt es ein $\xi > \xi_0$ und $m+1$ Zahlen $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$, von welchen die m ersten nicht sämtlich durch p teilbar sind, mit

$$\operatorname{Max}\left(|x_1|, \ldots, |x_{m+1}|\right) \leqq \xi, \; |x_1 \alpha_1 + \ldots + x_m \alpha_m + x_{m+1}|_p \leqq \xi^{-\gamma}.$$

Dann haben die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ auch folgende Eigenschaft:[2])

B Zu jedem η_0 gibt es ein $\eta > \eta_0$ und $m+1$ Zahlen $y, y_1, \ldots, y_m$ mit

$$p \nmid y, \; \operatorname{Max}\left(|y|, |y_1|, \ldots, |y_m|\right) \leqq \eta,$$
$$|y \alpha_i - y_i|_p \leqq c_1(m, p, \delta)\, \eta^{-\delta} \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

wenn

$$\delta = \frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}$$

gesetzt wird.

Wird also $\beta_1 = \beta_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ bzw. $\beta_2 = \beta_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ als die obere Grenze derjenigen Zahlen γ bzw. δ definiert, für welche das System $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ die Eigenschaft A bzw. B besitzt, so ist

$$m+1 \leqq \beta_1 \leqq \infty, \; \frac{m+1}{m} \leqq \beta_2 \leqq \infty \quad (m \geqq 1),$$

$$\beta_2 = \beta_1 \text{ für } m = 1,$$

(2) $$\beta_2 \geqq \frac{m\beta_1}{1+\beta_1(m-1)} \text{ für } m > 1$$

---

[1]) K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Časopis 68 (1938/9).

[2]) $c_1(m, p, \delta)$ bedeutet eine natürliche Zahl, die nur von m, p, δ abhängt; analog in ähnlichen Fällen. Für $m = 1$ sind freilich die Eigenschaften A und B (mit $c_1 = 1$, $\delta = \gamma$) identisch. Ohne die Eigenschaft B zu ändern, kann man $y > 0$ fordern. Setzt man $\xi = p^r$ $(r > 0)$ und beachtet man, daß sich die $(p^r + 1)^{(m+1)}$ Zahlen $x_1 \alpha_1 + \ldots + x_m \alpha_m + x_{m+1}$ $(0 \leq x_i < p^r)$ auf $p^{(m+1)r}$ Restklassen modulo $p^{(m+1)r}$ verteilen, so sieht man mit Hilfe des Schubfachprinzips leicht, daß A mit $\gamma = m+1$ für jedes System $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ gilt (wenn bei der Anwendung des Schubfachprinzips Zahlen $x_1, \ldots, x_{m+1}$ herauskommen, die sämtlich durch p teilbar sind, so dividiere man durch die höchste in $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ enthaltene Potenz von p).

(wobei $\frac{m\cdot\infty}{1+\infty(m-1)}$ als $\frac{m}{m-1}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{m\tau}{1+\tau(m-1)}$ gelesen werden soll ($m>1$); analog in ähnlichen Fällen).[3]) Das Ziel dieser Note ist, den folgenden Satz zu beweisen, der zeigt, daß die Mahlersche Schranke (2) scharf ist:

Satz 1. *Ist* $m>1$, *so gibt es zu jedem* γ *mit* $m+1\leqq\gamma\leqq\infty$ *ein System* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ *mit*

$$\beta_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\gamma,\quad \beta_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}.$$

Dieser Satz folgt offenbar aus den beiden folgenden Sätzen:

Satz 2. *Zu jedem* γ *mit* $2\leqq\gamma\leqq\infty$ *gibt es ein nicht rationales* α *mit* $\beta_1(\alpha)=\gamma$.

Satz 3. *Es sei* $2\leqq\gamma\leqq\infty$, $m>1$; *es sei* α_1 *eine Zahl mit* $\beta_1(\alpha_1)=\gamma$. *Dann ist für alle Punkte* $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ *des Raumes* E_{m-1}

$$\beta_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\geqq\operatorname{Max}(m+1,\gamma),\tag{3}$$

$$\beta_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\geqq\operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m},\frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right).\tag{4}$$

Für fast alle Punkte $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ *ist sogar*

$$\beta_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=\operatorname{Max}(m+1,\gamma),\tag{5}$$

$$\beta_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=\operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m},\frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right).\tag{6}$$

Aus den Sätzen 2, 3 folgt unmittelbar, *daß es zu jedem* γ *mit* $m+1\leqq\gamma\leqq\infty$ *ein System* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ *mit* $\beta_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\gamma$ *gibt.* Diese Sätze ergeben aber auch einen analogen Satz für β_2:

Satz 4: *Es sei* $m>0$, $\frac{m+1}{m}\leqq\delta\leqq\infty$. *Dann gibt es ein System* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ *mit*

$$\beta_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=\delta.$$

Beweis: Für $m=1$ ist dies der Satz 2. Es sei also $k>1$ und Satz 4 sei wahr für $m=k-1$. Da der Ausdruck $\frac{k\gamma}{1+\gamma(k-1)}$ alle Werte des Intervalls $\frac{k+1}{k}\leqq\delta\leqq\frac{k}{k-1}$ durchläuft, wenn γ von $k+1$ bis ∞ läuft, so ist Satz 4 nach den Sätzen 2, 3 für $m=k$, $\delta\leqq\frac{k}{k-1}$ wahr. Ist aber $\delta>\frac{k}{k-1}$, so gibt es nach Satz 4 mit $m=k-1$ ein System $\{\alpha_1,\ldots,$

---

[3]) Der Wert von β_1 und β_2 ändert sich offenbar nicht, wenn man sich in A und B auf Zahlen ξ und η von der Gestalt p^r $(r>0)$ beschränkt.

$\mathfrak{a}_{k-1}\}$ mit $\beta_2(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{k-1}) = \delta$; wird $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k-1}$ gesetzt, so ist offenbar $\beta_2(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k) = \delta$.

Der Beweis des Satzes 3 erfolgt durch eine Methode, die ich schon einmal[4] bei einer analogen Frage (aber damals mit reellen statt mit p-adischen Zahlen) benutzt habe. Wir beginnen mit einigen trivialen Hilfssätzen.

Hilfssatz 1. *Ist K eine Kugel r-ter Ordnung in E_1*[5]*, $r \geqq 2t+1 > 0$, so enthält K höchstens einen Punkt $\frac{x_1}{x}$ mit*

$$p \nmid x, \quad \text{Max}\,(|x|, |x_1|) < p^t.$$

Beweis. Wären $\frac{x_1}{x}$, $\frac{y_1}{y}$ zwei verschiedene solche Punkte, so wäre

$$\frac{x_1}{x} \equiv \frac{y_1}{y} \pmod{p^r}, \quad 0 \neq x_1 y - x y_1 \equiv 0 \pmod{p^r},$$

$$2p^{2t} > |x_1 y - x y_1| \geqq p^r \geqq p^{2t+1} \text{ — Widerspruch.}$$

Hilfssatz 2. *Es sei K eine Kugel r-ter Ordnung in E_1, $0 \leqq r \leqq 2t+1$; A sei die Anzahl aller in K liegenden Punkte $\frac{x_1}{x}$ mit*

$$p \nmid x, \quad \text{Max}\,(|x|, |x_1|) < p^t.$$

Dann ist

$$A \leqq p^{2t-r+1}.$$

Beweis. Die betrachteten Zahlen $\frac{x_1}{x}$ liegen alle in einer und derselben Restklasse mod p^r, also in höchstens p^{2t-r+1} Restklassen mod p^{2t+1}; wäre $A > p^{2t-r+1}$, so müßten zwei verschiedene solche Zahlen $\frac{x_1}{x}$, $\frac{y_1}{y}$ in einer und derselben Restklasse mod p^{2t+1} liegen; also wäre

$$0 \neq x_1 y - x y_1 \equiv 0 \pmod{p^{2t+1}}, \quad 2p^{2t} > |x_1 y - x y_1| \geqq p^{2t+1},$$

was einen Widerspruch liefert.

Hilfssatz 3. *Es sei $M_1, M_2 \ldots$ eine Mengenfolge in E_m; M sei die Menge derjenigen Punkte aus E_m, die in unendlichvielen Mengen M_r liegen. Ist die Reihe $\sum_r \mu . M_r$ konvergent, so ist $\mu . M = 0$.*

Beweis. Für jedes $k > 0$ ist

$$M \subset \sum_{r=k}^{\infty} M_r, \quad \text{also} \quad \mu . M \leqq \mu . \sum_{r=k}^{\infty} M_r \leqq \sum_{r=k}^{\infty} \mu . M_r.$$

[4]) V. Jarník, Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matemat.-fizyczne 43 (1935).

[5]) K ist also eine „Restklasse" mod p^r.

Hilfssatz 4. *Für fast alle Punkte* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *aus* E_m *ist* $\beta_2 = \frac{m+1}{m}$ (*also, nach dem Mahlerschen Satz*, $\beta_1 = m+1$).

Beweis. Für $r > 0$ sei M_r die Vereinigungsmenge aller Kugeln der Ordnung

$$\delta(r) = \left[\frac{m+1}{m} r + 2 \frac{\log r}{\log p}\right] + 1$$

in E_m, welche mindestens einen Punkt

(7) $$\left\{\frac{x_1}{x}, \ldots, \frac{x_m}{x}\right\}$$

mit

(8) $$p \nmid x, \ \mathrm{Max}\,(|x|, |x_1|, \ldots, |x_m|) < p^r$$

enthalten. M_r besteht also aus höchstens $(2p^r)^{m+1}$ Kugeln der Ordnung $\delta(r)$, also

$$\mu M_r \leqq 2^{m+1} \, p^{r(m+1) - m\delta(r)} < 2^{m+1} \, r^{-2m},$$

also ist $\Sigma \mu M_r$ konvergent. Soll aber $\beta_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) > \frac{m+1}{m}$ sein, so muß es unendlichviele Werte von $r > 0$ geben, für welche es einen Punkt (7) mit (8) und

$$\left|\alpha_i - \frac{x_i}{x}\right|_p \leqq p^{-\delta(r)} \qquad (1 \leqq i \leqq m)$$

gibt, d. h. $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ muß in unendlichvielen Mengen M_r liegen; Hilfssatz 3 ergibt dann die Behauptung.

Beweis des Satzes 2. Der Fall $\gamma = 2$ ist durch den Hilfssatz 4 mit $m = 1$ erledigt. Zweitens: die unabzählbar vielen Zahlen

$$\alpha = 1 + d_1 p^{1!} + d_2 p^{2!} + d_3 p^{3!} + \ldots \qquad (d_i = 0 \text{ oder } 1)$$

(unter welchen es höchstens abzählbar viele rationale gibt) genügen sämtlich der Bedingung $\beta_1(\alpha) = \infty$.

Es genügt also, den Fall

$$2 < \gamma < \infty$$

zu betrachten.

Man definiere drei Folgen

$$x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots; \ y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots$$

folgendermaßen (n ist im Folgenden stets $\geqq 0$):[6])

---

[6]) Die Folgen (9) erinnern an den Kettenbruchalgorithmus. Eine Theorie der Kettenbrüche für p-adische Zahlen hat Herr Mahler entwickelt; vgl. K. Mahler, Zur Approximation p-adischer Irrationalzahlen, Nieuw Archief voor Wiskunde 18 (1934), 22—34.

$$(9)\quad \begin{cases} x_{-1}=1,\ x_0=1,\ x_{n+1}=x_n+p^{f_{n+1}}x_{n-1}; \\ y_{-1}=0,\ y_0=1,\ y_{n+1}=y_n+p^{f_{n+1}}y_{n-1}; \end{cases}$$

$$(10)\qquad p^{f_{n+1}} > \frac{x_n^{\gamma-1}}{x_{n-1}} \geqq p^{f_{n+1}-1}.$$

Offenbar ist $f_{n+1}>0,\ 0<x_0<x_1<x_2<\ldots,\ 0<y_1<y_2<\ldots,$ $y_n \leqq x_n,$

$$(11)\qquad 2px_n^{\gamma-1} > x_n + px_n^{\gamma-1} \geqq x_{n+1} > x_n^{\gamma-1},\ f_{n+1}\to\infty \text{ für } n\to\infty.$$

Aus (9) folgt weiter $(p, x_n y_n)=1$ und

$$|x_{n+1}y_n - x_n\ y_{n+1}| = p^{f_{n+1}}|x_n y_{n-1} - x_{n-1}y_n|,$$

also

$$(12)\qquad \begin{aligned} |x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}| &= p^{f_1+f_2+\ldots+f_{n+1}} = \\ &= \frac{(x_{n+1}-x_n)\ (x_n-x_{n-1})\ldots(x_1-x_0)}{x_{n-1}\ x_{n-2}\ \ldots\ x_{-1}}; \end{aligned}$$

aus $p \nmid x_n$, $p \nmid y_n$ und (12) folgt $(x_n, y_n)=1$; aus (12) folgt

$$(13)\qquad \left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|_p = \left|x_{n+1}\,y_n - x_n\,y_{n+1}\right|_p = \frac{1}{|x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}|}.$$

Für alle hinreichend großen n ist nach (11)

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > x_n^{\gamma-2} > 2, \text{ also } x_n > \frac{2^n}{c_2(\gamma)}, \text{ also } \frac{x_n}{x_{n+1}} < c_3(\gamma)2^{-n(\gamma-2)},$$

sodaß $\prod\limits_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) > \frac{1}{c_4(\gamma)}$ konvergiert. Für hinreichend große n ist also nach (12) und wegen $0<y_n\leqq x_n$

$$2x_n\,x_{n+1} \geqq |x_{n+1}\ y_n - x_n\ y_{n+1}| > \frac{(x_{n+1}-x_n)\,(x_n-x_{n-1})}{c_4(\gamma)} > \frac{x_n\,x_{n+1}}{4\,c_4(\gamma)}.$$

Für $n \geqq k$ ($k=c_5(\gamma)$) ist also nach (13)

$$(14)\qquad \frac{4\,c_4(\gamma)}{x_{n+1}^{\gamma}} < \frac{1}{4\,p\,x_n^{\gamma}} < \frac{1}{2\,x_n\,x_{n+1}} \leqq \left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|_p < \frac{4\,c_4(\gamma)}{x_n\,x_{n+1}} < \frac{4\,c_4(\gamma)}{x_n^{\gamma}}.$$

Ist $h>1$, $|\mathfrak{a}_1|_p > |\mathfrak{a}_i|_p$ für $2\leqq i\leqq h$, so ist offenbar

$$|\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\ldots+\mathfrak{a}_h|_p = |\mathfrak{a}_1|_p.$$

Aus (14) folgt also für $k\leqq n<h$

$$(15)\qquad \rho_1\left(\frac{x_n}{y_n}, \frac{x_h}{y_h}\right) = \left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y_h}\right|_p = \left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|_p.$$

Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\alpha$ (im Raume E_1) und es ist (Grenzübergang $h\to\infty$ in (15)) für $n\geqq k$

$$(16)\qquad \rho_1\left(\alpha,\frac{x_n}{y_n}\right)=\left|y_n\alpha-x_n\right|_p=\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right|_p;$$

nach (14) ist also $\beta_1(\alpha)\geqq\gamma$ (man beachte $0<y_n\leqq x_n$).

Man setze nun

$$(17)\qquad A=\frac{1}{16p\,c_4(\gamma)},\quad B=4pA^{-\gamma},\ \text{also}\ A^\gamma B>(4c_4(\gamma))^{-1}.$$

Man setze weiter voraus, daß es drei Zahlen u, v, ξ mit

$$(18)\qquad \begin{cases} p\nmid v,\ \xi\geqq Ax_k,\ \operatorname{Max}(|u|,|v|)\leqq\xi,\\ |v\alpha-u|_p<\dfrac{1}{B\xi^\gamma}\end{cases}$$

gibt. Dann gibt es ein $n\geqq k$ mit

$$(19)\qquad Ax_{n+1}>\xi\geqq Ax_n,$$

$$(20)\qquad \left|\frac{u}{v}-\frac{x_n}{y_n}\right|_p<\operatorname{Max}\left(\frac{4c_4(\gamma)}{x_n^\gamma},\frac{1}{B\xi^\gamma}\right)=\frac{4c_4(\gamma)}{x_n^\gamma}$$

((20) folgt aus (16), (14), (18), (19), (17)). Es ist aber nach (19), (17)

$$(21)\qquad |uy_n-vx_n|\leqq 2x_n\xi<2Ax_nx_{n+1}<4pAx_n^\gamma=\frac{x_n^\gamma}{4c_4(\gamma)};$$

wegen (20) ist also $uy_n-vx_n=0$, also

$$(22)\qquad |v\alpha-u|_p=|y_n\alpha-x_n|_p>\frac{1}{4p\,x_n^\gamma}\geqq\frac{A^\gamma}{4p\,\xi^\gamma}=\frac{1}{B\xi^\gamma}$$

(nach (16), (14), (19), (17)). Die Formel (22) steht aber im Widerspruch zu (18); also gibt es keine u, v, ξ mit (18), also ist $\beta_1(\alpha)\leqq\gamma$. Also ist $\beta_1(\alpha)=\gamma$ und wegen $\beta_1(\alpha)<\infty$ ist α nicht rational.

Beweis des Satzes 3. (3) ist trivial; (4) folgt aus (2), (3). Es genügt also, für fast alle Punkte $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ die Ungleichung

$$(23)\qquad \beta_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\leqq\operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m},\frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right)$$

zu beweisen; denn aus (4), (23) folgt (6) und aus (6), (2), (3) folgt (5). Für $\gamma=\infty$ ist aber (23), d. h.

$$\beta_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\leqq\frac{m}{m-1},$$

nach Hilfssatz 4 für fast alle $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ wahr, da offenbar

$$\beta_2(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\leqq\beta_2(\alpha_2,\ldots,\alpha_m).$$

Es genügt also, (23) für fast alle $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ unter der Voraussetzung $2 \leqq \gamma < \infty$ zu beweisen.

Zu diesem Zweck sei A die Menge aller $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ mit

$$\beta_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) > \operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m}, \frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right);$$

für beliebiges δ sei $B(\delta)$ die Menge aller $\{\alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ mit

$$\beta_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) > \delta.$$

Es sei $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$ eine Folge mit

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = \operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m}, \frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right);$$

dann ist $A = \sum_{n=1}^{\infty} B(\delta_n)$; wir sollen $\mu A = 0$ [7]) beweisen; dazu genügt es also, für jedes δ mit

$$\delta > \operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m}, \frac{m\gamma}{1+\gamma(m-1)}\right) \tag{24}$$

die Gleichung

$$\mu B(\delta) = 0 \tag{25}$$

zu beweisen.

Es sei also δ eine Zahl mit (24); man wähle ein $\varkappa$ mit

$$\varkappa > \gamma, \ \delta > \operatorname{Max}\left(\frac{m+1}{m}, \frac{m\varkappa}{1+\varkappa(m-1)}\right). \tag{26}$$

Wegen $\varkappa > \gamma$ gibt es ein ξ_0, so daß aus $p \nmid u$, $\operatorname{Max}(|u|, |v|) > \xi_0$ folgt

$$|u\alpha_1 - v|_p > (\operatorname{Max}(|u|, |v|))^{-\varkappa}.$$

Es ist also α_1 nicht rational und es gibt ein $k > 0$, so daß aus $p \nmid u$ folgt

$$|u\alpha_1 - v|_p > p^{-k}(\operatorname{Max}(|u|, |v|))^{-\varkappa}. \tag{27}$$

Es sei $r > 0$; eine Kugel K (in E_{m-1}) von der Ordnung $[\delta r]$ heiße eine $\{r\}$—Kugel, wenn es $m+1$ Zahlen $x, x_1, \ldots, x_m$ mit

$$p \nmid x, \ x > 0, \ \operatorname{Max}(|x|, |x_1|, \ldots, |x_m|) < p^r, \tag{28}$$

$$|x\alpha_1 - x_1|_p \leqq p^{-[\delta r]} \tag{29}$$

gibt, so daß der Punkt $\left\{\frac{x_2}{x}, \ldots, \frac{x_m}{x}\right\}$ in K liegt (d. h. so daß die Ungleichungen

$$|x\alpha_i - x_i|_p \leqq p^{-[\delta r]} \ (i = 2, 3, \ldots, m)$$

---

[7]) Es handelt sich freilich um das Maß in E_{m-1}.

für jeden Punkt $\{\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$ von K gelten). Bei gegebenem $r > 0$ sei M_r die Vereinigungsmenge aller $\{r\}$-Kugeln. Soll $\{\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$ zu $B(\delta)$ gehören, d. h. soll $\beta_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m) > \delta$ sein, so muß offenbar der Punkt $\{\mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m\}$ für unendlichviele Werte von r zu M_r gehören; um also (25) zu beweisen, genügt es (nach Hilfssatz 3) zu zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mu\, M_r \tag{30}$$

konvergiert.

Es sei $D(r)$ die Anzahl aller $\{r\}$-Kugeln, $C(r)$ die Anzahl aller Paare x, x_1 mit

$$p \nmid x,\ x > 0,\ \operatorname{Max}(|x|, |x_1|) < p^r,\ |x\mathfrak{a}_1 - x_1|_p \leqq p^{-[\delta r]}. \tag{31}$$

Dann ist (man beachte (28))

$$\mu\, M_r \leqq p^{-(m-1)[\delta r]} D(r), \tag{32}$$

$$D(r) \leqq C(r) \cdot 2^{m-1} p^{r(m-1)}. \tag{33}$$

Um $C(r)$ abzuschätzen, verfahren wir wie folgt: ist x, x_1 ein Zahlenpaar mit (31), so gibt es genau ein Zahlenpaar u, v und genau ein t mit $1 \leqq t \leqq r$, so daß

$$\frac{v}{u} = \frac{x_1}{x}, \tag{34}$$

$$p \nmid u,\ u > 0,\ (u, v) = 1, \tag{35}$$

$$p^{t-1} \leqq \operatorname{Max}(|u|, |v|) < p^t, \tag{36}$$

$$|u\mathfrak{a}_1 - v|_p \leqq p^{-[\delta r]},\ \text{d. h. } \frac{v}{u} \equiv \mathfrak{a}_1 \pmod{p^{[\delta r]}} \tag{37}$$

((37) folgt aus $p \nmid ux$, (34), (31)). Für jedes ganze t mit $1 \leqq t \leqq r$ sei $C(r, t)$ die Anzahl aller Paare u, v mit (35), (36), (37); da jedem solchen Paare u, v höchstens p^{r-t+1} Paare x, x_1 mit (34), (31) entsprechen, so ist

$$C(r) \leqq \sum_{t=1}^{r} p^{r-t+1} C(r, t). \tag{38}$$

Aus (37), (27) folgt

$$p^{-k-t\alpha} < p^{-[\delta r]},$$

$k + t\alpha > [\delta r]$. Es ist also

$$C(r, t) = 0 \text{ für } t \leqq \frac{[\delta r] - k}{\alpha} \tag{39}$$

und nach (35), (36), (37) und den Hilfssätzen 1, 2 ist

(40) $$C(r, t) \leqq 1 \text{ für } 2t+1 \leqq [\delta r],$$

(41) $$C(r, t) \leqq p^{2t-[\delta r]+1} \text{ für } 2t+1 \geqq [\delta r].$$

Nach (39), (40), (41), (38), (33), (32) ist

$$\mu\, M_r \leqq p^{-(m-1)[\delta r]} \cdot 2^{m-1}\, p^{r(m-1)} \sum p^{r-t+1}\left(p^{2t-[\delta r]+1}+1\right),$$

wo über alle t mit $\frac{[\delta r]-k}{\alpha} < t \leqq r$ summiert wird.

Indem man die Ungleichung $[\delta r] > \delta r - 1$ beachtet und die geometrischen Reihen Σp^t, Σp^{-t} summiert, bekommt man

$$\mu\, M_r \leqq 2^{m-1}\, p^{m+3}\, p^{r(-(m-1)\delta+(m-1)+1+1-\delta)} +$$
$$+ 2^{m-1}\, p^{m+1+\frac{k+1}{\alpha}}\, p^{r\left(-(m-1)\delta+(m-1)+1-\frac{\delta}{\alpha}\right)}.$$

Nach (26) ist aber

$$-(m-1)\delta+(m-1)+1+1-\delta = -m\delta+m+1 < 0,$$

$$-(m-1)\delta+(m-1)+1-\frac{\delta}{\alpha} < -\frac{(m-1)m\alpha}{1+\alpha(m-1)} + m - \frac{m}{1+\alpha(m-1} = 0,$$

so daß die Reihe (30) tatsächlich konvergiert.

(Eingegangen: 6. II. 1939.)