Eduard Čech; Alfons Fišer; Vítězslav Jozífek; Karel Komínek; Jan Vyšín; Rudolf Zelinka

Geometrie pro druhou třídu středních škol

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 130 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501369

GEOMETRIE

PRO DRUHOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC • PRAHA

GEOMETRIE

PRO DRUHOU TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

1951

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC

PRAHA

ÚVODNÍ POZNÁMKY.

Propedeuticky zaměřené vyučování geometrii v první třídě se opíralo o praktické ověření určité geometrické pravdy a o výsledky geometrických pokusů. Ve druhé třídě jeví se při vyučování geometrii jasně snaha po soustavnosti.

I ve druhé třídě opíráme se stále o názor, o praxi, o ověření si správnosti výsledků, ale zjišťujeme současně vlastnosti, které nějaký útvar má, usuzováním. Hledáme vzájemné souvislosti mezi výsledky jednotlivých úvah. V usuzování se uplatňuje čím dál tím víc methoda deduktivní.

Schopnost dedukovat se nedostaví s věkem, nýbrž musí být soustavně pěstěna, a to včas a od nejjednodušších úvah. Učivo druhé třídy je obsahově velmi jednoduché; musíme ovšem výsledky úvah žákům odůvodnit.

Důkazy jsou v učebnici petitem. Z nich provádíme ty, které máme dobře methodicky připraveny a tolik, na kolik jsou žáci zralí. S prováděním důkazů začínáme u látky nejjednodušší, kde je nejméně předpokladů. Vynecháme-li důkazy u látky předchozí, než kterou probíráme a chceme-li provádět důkaz poučky, kterou právě probíráme, potom tento důkaz nejprve methodicky rozebereme a rozdělíme na malé kroky. Uvážíme vždy, co z předchozího učiva je třeba doplnit a připravit. Vysvětlíme poučku z názoru a probereme se žáky nutné předpoklady k jejímu důkazu. Jednotlivé kroky důkazu oddělíme od sebe.

Bylo by plýtvání časem, kdybychom prováděli důkazy bez součinnosti třídy. Žáci nepřihlížejí pasivně k provádění důkazu, účastní se usuzování aktivně.

V učebnici se postupuje od úsudků nejjednodušších k složitějším. Je nutné, aby žáci byli poučeni o významu deduktivního odvozování poučky. Místo abychom uváděli důkazy základních vět, které vyžadují řady několika úsudků za sebou, což činí žákům obtíže, považujeme za důležitější odvozování jednoduchých důsledků těchto pouček. Hlavní úkol geometrie ve druhé třídě spočívá v tom, aby žák dovedl užívat odvozených geometrických pouček, které si v souvislosti s geometrickými útvary nejlépe osvojí. Tak vniká pozvolna do deduktivního způsobu myšlení. Neomezíme se jen na memorování pouček, rovněž při cvičení se nespokojíme pouhým mechanickým využíváním výsledků matematických úvah.

Látka z geometrie v druhé třídě začíná opakováním a rozšiřováním učiva z prvé třídy. Probírají se dále vlastnosti — shodnost a souměrnost a z nich vyplývající výsledky pro vztahy úhlů a stran trojúhelníka, vztahy kružnice a přímky, důležité pro eukleidovské konstrukce a pro shodnost a konstrukce trojúhelníků. Dále se probírá problém rovnoběžnosti přímek v rovině a z něho plynoucí důsledky pro rovnoběžníky a vztahy jejich prvků. Praktické zhodnocení elementární látky na tomto stupni nám ukazuje kapitola o grafickém určování vzdáleností a výšek. Početní výcvik je zastoupen v úlohách o obsahu, povrchu a objemu s čísly lomenými.

Poněvadž učivo na sebe navazuje, není možné, aby se měnil postup jednotlivých článků. Také přísně systematický postup vyžaduje toho sledu pouček, jak jej uvádí učebnice. Není také možné přistoupit k nové látce bez procvičení principů látky předchozí. Ke každému článku najde učitel řadu úloh, které budou pro žactvo únosné. Výklad učiva zaměříme podle volby vybraných úloh, cvičení ve škole připravíme a tím je žákům přiblížíme. Vyslovené a dokázané poučky obracíme, pokud je to možné. Tam, kde neplatí obrácená poučka, upozorníme vždy na nemožnost obracení.

Elementární látka geometrie druhé třídy je podkladem dalších složitějších úvah, které dosahují četnější aplikace v technické praxi a ke kterým přijdeme v dalších třídách. V technické práci se neobjevují ve větším měřítku samostatné vlastnosti vyvozované v geometrii druhé třídy. To jim ovšem neubírá na důležitosti.

Takto pojaté vyučování geometrii má tedy na zřeteli vedle získávání odborných znalostí, důležitých pro další postup, také zdárný vývoj žákova myšlení, na něž má geometrie svou systematičností značný vliv. Tento výchovný úkol geometrie je zvláště patrný ve druhé třídě také proto, že se k němu přistupuje uvědoměle, plánovitě a že látka geometrie druhé třídy je nejvhodnějším materiálem pro výcvikové usuzování.

Tím připravíme žáky nejen pro další technický výcvik, nýbrž i pro život. Budování našeho lidově demokratického státu vyžaduje občanů nejen odborně vzdělaných, nýbrž i schopných logicky myslit.

Upozornění.

V tomto vydání byl drobnými úpravami zpřesněn text na straně 24, 33, 38, 39, 67, 70, 77, 85, 96, 119 a opraveny tiskové chyby v příkladech 20, 21. Drobné úpravy byly provedeny ve výsledcích příkladů 16b, 17, 30c, 196b, 216.

Při výkladu je třeba spojovat postup deduktivní s induktivním, opírat se stále o názor, o praxi a ověřovat si správnost výsledků. Jádro látky geometrie druhé třídy je v kapitolách I., II. a III. až po článek 6.

Učivo ostatních kapitol je možno vhodně redukovat. Příklady z kapitoly IV. není nutné probírat soustavně. Jsou praktickým užitím probírané theorie v kap. I.—III., kam by měly organicky zapadat. Kapitolu V. probereme, jen pokud čas stačí.

Rozvrh učiva.

Září:	Body a přímky v rovině. Dvě přímky. Polopřímky a úsečky. Kružnice a úhly. Velikost úhlů.
Říjen:	Poloroviny. Shodné geometrické útvary. Souměrnost osová. Strany a úhly trojúhelníka.
Listopad:	První konstruktivní axiom. Kružnice a přímky. Eukleidovská konstrukce. Shodné trojúhelníky.
Prosinec:	Přenášení úhlů. Konstrukce trojúhelníka. Shodnost a určenost pravoúhlých trojúhelníků.
Leden:	Důsledky Eukleidova axiomu. Rovnoběžky a úhly. Součet úhlů v trojúhelníku.
Únor:	Čtyrúhelníky. Strany a úhlopříčky rovnoběžníka.
Březen:	Obdélník, čtverec a kosočtverec. Střední příčky trojúhelníka a lichoběžníka.
Duben:	Další vlastnosti trojúhelníka. Grafické určování vzdáleností a výšek.
Květen:	Početní úlohy o obsahu, povrchu a objemu.
Červen:	Opakování a shrnutí.

Čemu se budete učit.

V první třídě jste se naučili sestrojovat základní útvary, měřit úsečky, některé plochy a úhly. Prvky, t. j. strany a úhly v geometrických obrazcích jsou v různých vztazích. Naučíte se jim rozumět ve druhé třídě. Nebylo by nic platné, kdybyste se seznámili jen s těmito vztahy a neuměli je odvodit. Abychom porozuměli vztahům vyloženým v učebnici, musíme vyjít od jistých jednoduchých vlastností, které si vyslovíme. Z nich dojdeme usuzováním k dalším složitějším vlastnostem. Tak se učíme v geometrii na příkladech tomu, čemu se často v životě říká „myslit". Této schopnosti užijeme ovšem i jinde v jiných předmětech, nejen v matematice. Máme-li se přesvědčit o pravdivosti poučky, kterou vyslovíme, dokazujeme ji. Mnohému z vás se bude zdát dokazování jednoduchých pouček zbytečné; vždyť vyslovená věta je samozřejmá. Nakreslíme-li si obrázek, vidíme vztahy, o kterých mluví poučka. Ale není správné spoléhat se na názor, neboť obrázek nás může mýlit. Takto uhodnutá vlastnost může platit jen pro náš nakreslený obrázek, a ne pro jiný. Proto spoléháme více na to, že vyslovené vlastnosti odvozujeme usuzováním z vlastností, které bezpečně známe.

V geometrii druhé třídy budeme nejprve opakovat látku prvé třídy a ledacos si při této příležitosti doplníme. Potom přijdeme k vlastnostem, z nichž mnohé již známe, ale o nichž jsme nikdy nemluvili tak, abychom je přesně vyjadřovali. Tyto vlastnosti jsou shodnost a souměrnost. Když položíme dva obrazce vhodně na sebe a ty se kryjí, říkáme o nich, že jsou shodné. Ve druhé třídě se dovíte, kdy to nastane. Ze souměrnosti plynou různé vlastnosti, které jsou často tak jednoduché, že mnohého z vás překvapí; musíte se je naučit odůvodnit. Naučíte se rýsovat kolmice užitím jednoho trojúhelníkového pravítka a kružítka. Také o polohách kružnice a přímky jste slyšeli v první třídě. V druhé třídě si tyto polohy odůvodníte. Dovíte se dále o vlastnostech rovnoběžníku a o vztazích úhlopříček a úhlů. V první třídě jste poznali již jeden takový rovnoběžník, a to obdélník. Mluvili jste již o rovnoběžnosti přímek. Tato vlastnost zajímala matematiky od dávných dob. Ve druhé třídě se o rovnoběžnosti dovíte více.

Zajímavé pro vás budou úlohy o určování vzdáleností a výšek. V nich poznáte, jak můžete určit vzdálenost dvou míst, je-li mezi nimi nějaká překážka, takže vzdálenost nemůžete přímo změřit. Nakonec budete počítat úlohy na obsah obdélníka a čtverce, dále na objem a povrch kvádru a krychle. Poznáte, jak se obsah nebo objem změní, změníte-li několikrát jejich rozměry. V technické praxi se ovšem málo setkáte s tak jednoduchými obrazci, jaké probíráte v druhé třídě. Technika používá obrazců složitějších. Abyste jim porozuměli, musíte znát vlastnosti těchto jednoduchých obrazců. A tak vše, čemu se budete učit ve druhé třídě, je důležité proto, abyste porozuměli dalším vlastnostem ve vyšších třídách.

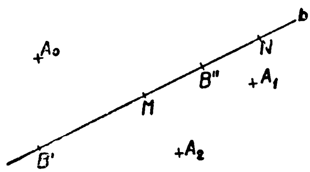
Učivo v geometrii na sebe navazuje; musíte proto znát vlastnosti jednodušší, abyste porozuměli vlastnostem složitějším. Učte se proto pilně hned od začátku, i když se vám bude zdát, že již všemu rozumíte. Takto se připravíte k tomu, abyste se jednou mohli stát pracovníky v továrnách, v průmyslu a v zemědělství a abyste mohli tak přispět k budování našeho lidově demokratického státu.

I. OPAKOVÁNÍ A DOPLNĚNÍ LÁTKY Z I. TŘÍDY.

1. Body a přímky v rovině; dvě přímky.

Víte, že body označujeme písmeny velké abecedy, kdežto přímky a jiné čáry písmeny malé abecedy. Někdy užijeme téhož velkého písmena k označení několika bodů (obr. 1); abychom ty body rozlišili, připisujeme k písmenu dole vpravo číslici, které říkáme index. Na př. A_0, A_1, A_2, což čteme „A nula", „A jedna", „A dvě". Někdy také píšeme „B', B''" a pod. a čteme „B s čárkou", „B se dvěma čárkami".

Přímku rýsujeme podle trojúhelníkového pravítka. Narýsovaná čára je vždy omezená; umíme ji však, pokud nákresna (papír, tabule) stačí, libovolně oběma směry prodloužit. Myšlená přímka je v obou směrech neomezená. Značíme-li narýsovanou přímku malým písmenem, píšeme toto písmeno na okraj narýsované části (písmeno b v obr. 1); činíme tak proto, abychom jméno přímky rychle našli a abychom uvnitř obrazce měli také místo pro pojmenování různých bodů, které se vyskytnou během práce.



Obr. 1.

Na dané (t. j. narýsované) přímce si můžeme zvolit libovolné množství bodů, jež vyznačujeme kratičkými příčkami. V obr. 1 jsou na přímce b vyznačeny body B', B'', M, N. Říkáme, že bod B' leží na přímce b a že přímka b prochází bodem B'.

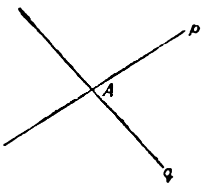
Zvoleným bodem B' prochází libovolné množství přímek; jedním bodem není přímka určena. Zvolíme-li však ještě jiný bod B'', potom oběma body B', B'' už prochází jen jediná přímka. Tento poznatek vyslovíme základní větou:

Přímka je určena dvěma různými body.

Přímku, která prochází body B', B'', nazveme přímka $B'B''$ nebo přímka $B''B'$. Máme-li narýsovat přímku, která prochází body B', B'', pravíme, že oba body spojujeme přímkou nebo že vedeme přímku $B'B''$.

Přímka b v obr. 1 může býti určena body B', B'' nebo body M, N nebo kterýmikoli jinými dvěma různými body. Říkáme, že přímky $B'B''$ a MN splývají nebo že jsou totožné.

Dvě různé přímky p, q nemohou míti víc než jeden společný bod, neboť dvěma různými body podle základní věty prochází jediná přímka; kdyby přímky p, q měly dva společné body M, N, pak by splývaly.



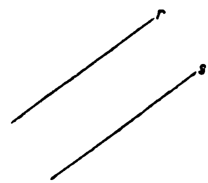
Obr. 2.

Dvě různé přímky p, q, které mají společný bod A, se jmenují různoběžné přímky, krátce různoběžky; společný bod A se jmenuje průsečík obou různoběžek. Také říkáme, že se přímky p, q protínají v bodě A.

Dvě různoběžky p, q si představte na př. jako dvě zkřížené tužky nebo dva zkřížené dráty; k této dvojici můžete přiložit rovnou desku, která představuje část roviny. Tento poznatek vyslovíme takto:

Dvě různoběžky leží vždy v téže rovině.

Dvě různé přímky, které nemají žádný společný bod, nemusí ležet v téže rovině. Takové dvě přímky se jmenují mimoběžné přímky, krátce mimoběžky. Vyšetřování vlastností mimoběžek patří do prostorové geometrie neboli stereometrie; v tomto roce budeme probírat pouze rovinnou geometrii neboli planimetrii, ve které se mimoběžky nevyskytují. V dalších odstavcích budeme jednat pouze o takových geometrických obrazcích, které leží v určité rovině (na př. v naší nákresně).



Obr. 3.

Dvě různé přímky r, s, které leží obě v téže rovině, ale nemají žádný společný bod, se jmenují rovnoběžné přímky, krátce rovnoběžky; ale také dvě splývající přímky, na př. přímky $B'B''$, MN v obr. 1, počítáme za rovnoběžky. Tedy **dvě rovnoběžné přímky buďto nemají žádný společný bod, nebo jsou totožné.** Rovnoběžnost přímek zapisujeme takto: $r \parallel s$ nebo $s \parallel r$.

Geometrické názvy, se kterými jste se v tomto článku seznámili:

Bod — čára — přímka — index — trojúhelníkové pravítko —

nákresna — prodloužit přímku — bod leží na přímce, — přímka prochází bodem — přímka AB — určiti přímku — spojiti dva body přímkou; vésti přímku — různoběžky — mimoběžky — rovnoběžky — průsečík; přímky se protínají — splývající neboli totožné přímky — přímka leží v rovině — rovinná geometrie (planimetrie) — prostorová geometrie (stereometrie).

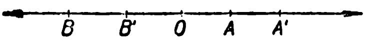
Cvičení.

1. Na modelu kvádru ukažte dvě přímé čáry (hrany kvádru), které jsou a) různoběžné, b) rovnoběžné, c) mimoběžné.
2. Vysvětlete, kdy říkáme, že dvě přímky jsou a) různoběžky, b) rovnoběžky, c) mimoběžky! Co když obě přímky splynou?
3. Užitím přímých čar načrtněte zjednodušené obrazy předmětů tak, aby se v náčrtu vyskytly a) rovnoběžky, b) různoběžky. Na př. zábradlí, příčky železného mostu, plán křižovatky ulic.
4. Vyslovili jsme věty: Dvě různoběžky leží v rovině. Dvě rovnoběžky leží v rovině. Uveďte některé praktické příklady! Na př.: Oba trámy (krokve) na obdélníkové střeše, na něž pokryvač přibíjí latě pro tašky, jsou navzájem rovnoběžné; na trojúhelníkové střeše jsou tyto trámy různoběžné. Střecha představuje část roviny.
5. Vysvětlete, jak si budete počínat při řešení této úlohy: Zvolte v rovině tři různé body M, N, P tak, aby ležely v téže přímce!
   Uveďte praktický příklad, jak si budou počínat žáci M, N, P, kteří se mají postavit do zákrytu! Vysvětlete, jak si budou počínat dělníci při zarážení sloupků k přímému plotu!
6. Vysvětlete postup řešení úlohy, při níž si zvolíte v rovině čtyři různé body A, B, C, D tak, aby žádné tři z nich neležely v přímce!
7. V rovině zvolte bod L; dále zvolte body H_1, H_2, K_1, K_2 tak, aby se obě různé přímky $H_1 H_2$, $K_1 K_2$ protínaly v bodě L!
8. Narýsujte tři přímky tak, aby každé dvě byly různoběžné!
   Kolik bude celkem průsečíků? (Jsou možné dva případy.)
9. Jsou dány čtyři přímky tak, že každé dvě se protínají. Kolik mají celkem průsečíků? (Jsou možné tři případy.)

2. Polopřímky a úsečky.

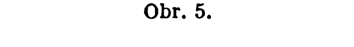
Jednotlivé body přímky jdou na přímce za sebou v určitém pořádku. Na př.: Body vyznačené na přímce v obr. 4 jsou za sebou buď v pořádku $BB'OAA'$, nebo v pořádku $A'AOB'B$.

Někdy je účelné pojmenovat přímku nejen jejími dvěma body, nýbrž i více body; při tom přihlížíme vždy k pořádku bodů na přímce. Proto přímku v obr. 4 můžeme pojmenovat přímka BOA nebo přímka AOB nebo přímka $BB'AA'$, ne však přímka ABO. Řekneme-li, že je dána přímka AOB, víme nejen, že body A, O, B leží na té přímce, nýbrž i víme také, v jakém pořádku jdou za sebou. Místo slova pořádek se v geometrii užívá často slova smysl. Říkáme, že bod může probíhati přímku v jednom nebo ve druhém smyslu, které jsou navzájem opačné. Oba smysly si můžeme vyznačit šipkami jako v obr. 4. K udání smyslu na přímce stačí udat názvy dvou jejích bodů jeden za druhým. Na př. přímku v obr. 4 můžeme probíhati ve smyslu OA nebo BO nebo BA nebo AA', což je stále jeden a týž smysl, nebo také v opačném smyslu AO nebo OB nebo AB atd.

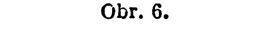


Obr. 4.

Zvolme na přímce bod O (viz stále obr. 4); tím se celá přímka rozdělí na dvě části, kterým říkáme **polopřímky.** Bod O je počátek obou polopřímek. Je-li A kterýkoli bod naší přímky různý od bodu O, potom se polopřímka OA skládá z bodu O a ze všech těch bodů, které ve smyslu OA následují za bodem O. Je tedy v obr. 4 polopřímka OA totožná s polopřímkou OA'; zcela jiná je polopřímka OB opačná k polopřímce OA. Dvě opačné polopřímky mají týž počátek, který je jejich jediný společný bod; dohromady vyplní celou přímku. Každý bod polopřímky, mimo její počátek, se jmenuje vnitřní bod polopřímky. K označení polopřímky užíváme dvou bodů; první z nich je vždy počátek, druhý je kterýkoli vnitřní bod polopřímky. Polopřímka OA je částí přímky OA a určuje v této přímce smysl OA, který nazýváme smysl polopřímky. V obr. 4 mají polopřímky OA, BA obě týž smysl, ale polopřímky AB, BA mají smysly opačné.



Obr. 5.



Obr. 6.

Jsou-li A, B dva různé body na přímce p (obr. 5), potom polopřímka AB a polopřímka BA mají společnou část, kterou nazýváme **úsečka** AB neboli úsečka BA. Body A, B jsou krajní body úsečky AB; ostatní body této úsečky jsou její vnitřní body. Body A, B rozdělí přímku p na tři části (obr. 5):

1° na úsečku AB,

2° na polopřímku AA' neboli prodloužení úsečky AB za bod A,

3° na polopřímku BB' neboli prodloužení úsečky AB za bod B.

První část je omezená, druhá a třetí jsou neomezené.

Je-li V vnitřní bod úsečky AB, rozdělí se tato úsečka na dvě úsečky AV, BV, které mají společný krajní bod V, ale nemají společné vnitřní body. Říkáme, že bod V odděluje bod A od bodu B. Můžeme také říci, že bod V odděluje bod A od bodu B, jestliže polopřímky VA, VB jsou opačné.

Dvě úsečky AB, CD můžeme porovnat podle jejich velikosti neboli délky; výsledek může být trojí:

1. Buď jsou si obě úsečky rovny, což píšeme $\overline{AB} = \overline{CD}$ nebo $\overline{CD} = \overline{AB}$,

2. nebo je úsečka $\overline{AB}$ větší než $\overline{CD}$ a zároveň je $\overline{CD}$ menší než $\overline{AB}$, což píšeme

$$\overline{AB} > \overline{CD} \text{ nebo } \overline{CD} < \overline{AB};$$

3. nebo je úsečka $\overline{CD}$ větší než $\overline{AB}$ a zároveň je $\overline{AB}$ menší než $\overline{CD}$, což píšeme

$$\overline{CD} > \overline{AB} \text{ nebo } \overline{AB} < \overline{CD}.$$

Velikosti úseček můžeme sčítat a odčítat. Součet úseček C_1D_1 a C_2D_2 je roven úsečce AB, což píšeme $\overline{C_1D_1} + \overline{C_2D_2} = \overline{AB}$, jestliže uvnitř úsečky AB lze udati bod V (obr. 6) tak, že $\overline{C_1D_1} = \overline{AV}$, $\overline{C_2D_2} = \overline{BV}$. Vysvětlete podobně, co znamená, že rozdíl úseček C_1D_1 a C_2D_2, z nichž prvá je větší než druhá, je AB. To píšeme $\overline{C_1D_1} - \overline{C_2D_2} = \overline{AB}$.

Uvnitř každé úsečky AB je jediný bod S, pro který platí, že $\overline{AS} = \overline{BS}$. Bod S je střed úsečky AB; rozpůlit úsečku znamená určit její střed.

Vzdálenost dvou různých bodů A, B je velikost úsečky AB; vzdálenost dvou splývajících bodů se rovná nule.

Velikosti úseček neboli vzdálenosti bodů vyjadřujeme číselně délkovými jednotkami, které znáte z první třídy.

Geometrické názvy, s nimiž jste se v tomto článku seznámili: Pořádek bodů na přímce — přímku můžeme probíhati ve dvojím smyslu — opačné smysly — polopřímka OA — její počátek O — její vnitřní body — opačné polopřímky — smysl polopřímky — úsečka AB neboli úsečka BA — její krajní body A, B — její vnitřní body — prodloužení úsečky AB za bod A, za bod B — bod V odděluje bod A od bodu B — velikost (délka) úsečky — vzdálenost dvou bodů — střed úsečky — rozpůlit úsečku — délkové jednotky.

Cvičení.

10. Narýsujte přímku $KLHM$! Kterými jinými způsoby můžete zapsati smysl HK? Kterými způsoby můžete zapsati opačný smysl?

11. Je-li polopřímka UV částí polopřímky MW, co můžete říci o jejich smyslu?

12. Mohou dvě polopřímky téhož smyslu dohromady vyplniti celou přímku?

13. Musí dvě polopřímky opačných smyslů dohromady vyplnit celou přímku?

14. Narýsujte přímku $MABN$! Co vyplní body společné:
a) polopřímkám BA, AN,
b) polopřímkám AM, AN,
c) polopřímkám AM, BN,
d) úsečce AN a polopřímce BN,
e) úsečce AN a polopřímce BM,
f) úsečkám MB, AN,
g) úsečkám MN, AB?

15. V jakém pořádku jsou body C, D, E, F na přímce p, jestliže každý z bodů C, D odděluje E od F a jestliže zároveň D odděluje C od E?

16. Narýsujte přímku $HUKVL$! Ve které části přímky leží: a) body H, K, L vzhledem k úsečce UV; b) body H, U, V vzhledem k úsečce KL; c) body H, U, K vzhledem k úsečce LV?

17. Na přímce MNP je $\overline{MN} = 4$ dm, $\overline{MP} = 5$ dm. Jsou-li S_1, S_2 středy úseček MN, MP, určete vzdálenost $\overline{S_1S_2}$!

18. Na přímce HKL je $\overline{HK} = 2{,}6$ dm; $\overline{KL} = 4$ cm. Jsou-li O_1, O_2 středy úseček HK, KL, určete vzdálenost $\overline{O_1O_2}$!

19. Bod D dělí úsečku $\overline{AB} = 3{,}5$ m na dvě části tak, že $\overline{AD}$ je o 5 dm větší než $\overline{BD}$. Určete velikost úseček AD, BD!

20. Na přímce ECF je $\overline{EF} = 5{,}5$ m; $\overline{CF} - \overline{CE} = 5$ dm. Určete velikost úseček CE, CF!

21. Úsečka AB má střed S. Bod H leží uvnitř úsečky AB ve vzdálenosti 1 cm od středu S. Je-li $\overline{BH} = 3$ cm, čemu se rovná $\overline{AB}$? (Jsou dvě možnosti; načrtněte si obrazce!)

22. Úsečka PQ má střed O. Bod T na přímce PQ má od bodu O vzdálenost 10 cm. Je-li $\overline{PT} = 16$ cm, čemu se rovná $\overline{PQ}$? (Zase jsou dvě možnosti.)

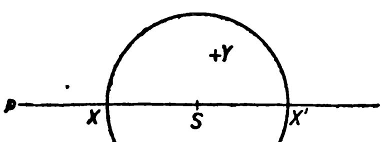
3. Kružnice a úhly.

Je-li dán bod S a úsečka AB, pak všecky body X v rovině, pro které platí $\overline{SX} = \overline{AB}$, vyplní uzavřenou křivou čáru, která se jmenuje kružnice. Bod S je střed kružnice a každá úsečka SX je poloměr kružnice. Všecky poloměry mají stejnou velikost, která se nejčastěji značí písmenem r nebo příslušným řeckým písmenem ϱ. Latinské slovo radius, které znamená poloměr, začíná písmenem r. Pro střed kružnice užíváme nejčastěji písmena S nebo písmena O, ale často užíváme také jiných písmen. Kružnici rýsujeme kružítkem. Jestliže narýsujeme kružnici, jejíž střed je v daném bodě S, pravíme, že vedeme (nebo opisujeme) kružnici **kolem bodu** S. Kružnici se středem S a poloměrem rovným r značíme $(S; r)$. Na př. $(H; 10$ cm$)$ znamená kružnici se středem H a poloměrem rovným 10 cm; $(C; \overline{AB})$ znamená kružnici se středem C a poloměrem rovným úsečce AB. Často také značíme kružnici jedním malým písmenem, nejčastěji písmenem k.

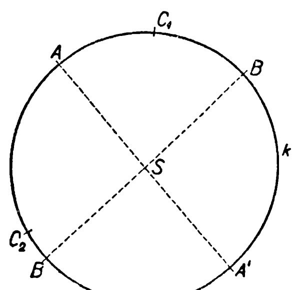
Bod Y (obr. 7a) leží uvnitř kružnice $(S; r)$, jestliže $\overline{SY} < r$; mezi takové body patří také střed S. Bod Z leží vně kružnice, jestliže $\overline{SZ} > r$. Kružnice sama i se svým vnitřkem tvoří plochu, která se jmenuje kruh.

Kružnice tvoří obvod kruhu.

Přímka p (obr. 7a), procházející středem kružnice $(S; r)$, protne kružnici ve dvou bodech X, X', kterým říkáme protější body kružnice. Úsečka XX' je průměr kružnice; S je její střed. Všecky průměry mají touž velikost $2\,r$.



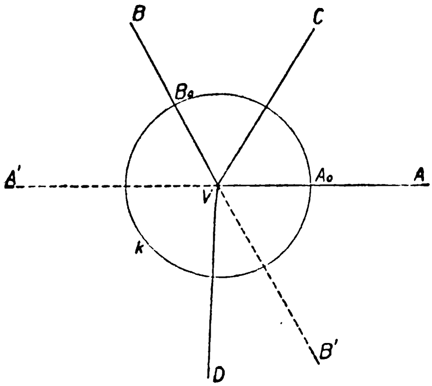
Obr. 7a.



Obr. 7b.

Dva různé body A, B kružnice k (obr. 7b) rozdělí k na dva oblouky se společnými krajními body A, B; každý jiný bod C kružnice k náleží do jediného z obou oblouků a je jeho vnitřním bodem.

Jestliže body A, B nejsou protější, je jeden z obou oblouků větší než druhý. Je to ten, který obsahuje bod A' protější k bodu A i bod B' protější k bodu B.



Obr. 8.

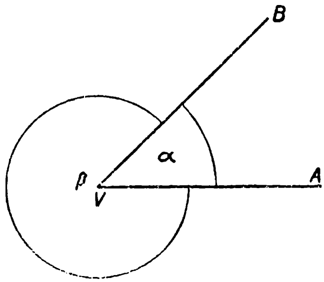
Zvolme nyní libovolně bod V (obr. 8). Soustava všech polopřímek s počátkem V tvoří svazek polopřímek; bod V je vrchol svazku.

Dvě různé polopřímky svazku VA, VB rozdělí svazek na dvě části, které se jmenují úhly; polopřímky VA, VB jsou jejich ramena, bod V je jejich vrchol. Každá jiná polopřímka svazku náleží do jediného z obou úhlů a leží celá (až na bod V) uvnitř tohoto úhlu a vně druhého. Opíšeme-li kolem bodu V libovolnou kružnici k, protne k ramena ve dvou bodech A_0, B_0 a každému z obou úhlů odpovídá jeden oblouk s krajními body A_0, B_0. Úhel sám se nazývá středový úhel příslušný tomu oblouku. Jestliže ramena VA, VB nejsou dvě opačné polopřímky, potom jeden z obou úhlů je dutý a druhý je vypuklý. Dutý úhel přísluší menšímu oblouku, vypuklý většímu. Polopřímky VA', VB', opačné k ramenům VA, VB, leží vně dutého úhlu a uvnitř vypuklého úhlu. Úhly, jejichž ramena jsou dvě opačné polopřímky, na př. VA, VA' v obr. 8, jsou úhly přímé.

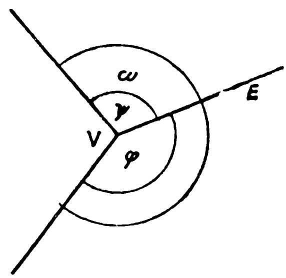
Úhly značíme často řeckými písmeny malé abecedy (obr. 9). Pro zřetelnost připojujeme často ještě obloučck kružnice se středem ve vrcholu; obloučck rýsujeme od ruky. Některá řecká písmena jste poznali již v první třídě. Pro duté úhly, které se vyskytují mnohem častěji než úhly vypuklé, užívá se také označení $\sphericalangle AVB$;

při tom je V vrchol, A a B jsou libovolně zvolené body na ramenech. Označení $\sphericalangle$ užíváme výhradně pro úhly duté.

Polopřímka VE (obr. 10), jejíž počátek je ve vrcholu úhlu ω a která leží uvnitř ω, rozdělí ω na dva úhly φ, ψ, které nazýváme

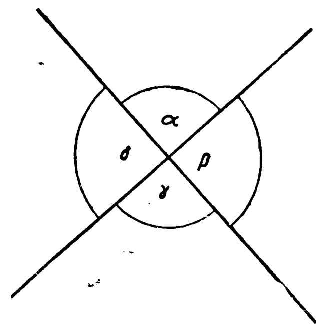


Obr. 9.



Obr. 10.

styčné. Tedy dva styčné úhly mají společný vrchol a mají jediné rameno společné, ale nemají společné vnitřní body. Vedlejšími úhly nazýváme takové dva úhly styčné, které dohromady tvoří úhel přímý. Dvě různoběžky (obr. 11) rozdělí rovinu na čtyři duté úhly α, β, γ, δ, ze kterých můžeme čtverým způsobem vybrat dvojici vedlejších úhlů: α, β; γ, δ; α, δ; β, γ. Ke každému úhlu můžeme najít dva úhly tak, že každý z nich spolu s úhlem α tvoří dvojici vedlejších úhlů; v obr. 11 to jsou úhly β, δ. Takové dva úhly se jmenují úhly vrcholové.



Obr. 11.

V obr. 11 vedle úhlů β, δ také úhly α, γ tvoří dvojici vrcholových úhlů.

Geometrické názvy, s nimiž jste se seznámili v tomto článku:

Kružnice: její střed, poloměr, průměr — kružnice (S; r) — kružnici vedeme nebo opisujeme kolem jejího středu — kružítko — body na kružnici, uvnitř kružnice, vně kružnice — kruh a jeho obvod — protější body na kružnici — oblouk a jeho krajní a vnitřní body — svazek polopřímek a jeho vrchol — úhel, jeho vrchol a ramena, jeho vnitřní body, body vně úhlu — středový úhel příslušný oblouku kružnice — úhly duté, vypuklé a přímé — úhel $\sphericalangle AVB$ — dvojice úhlů styčných, vedlejších, vrcholových.

Cvičení.

23. Cvičte se ve čtení a psaní řeckých písmen!

24. Vyložte slovy, jak se sestrojí k danému $\sphericalangle HKL$ úhel a) vedlejší, b) vrcholový!

25. Zapište pomocí písmen vyskytujících se v obr. 8 oba úhly vedlejší k úhlu $\sphericalangle AVB$ jakož i úhel vrcholový k témuž úhlu!

26. Kolika způsoby lze zapsati $\sphericalangle AVB$ pomocí názvů bodů vyznačených v obr. 8?

4. Velikost úhlů.

I. Stejně jako úsečky můžeme také dva úhly α, β porovnávati podle velikosti. Výsledek srovnání může býti opět trojí:

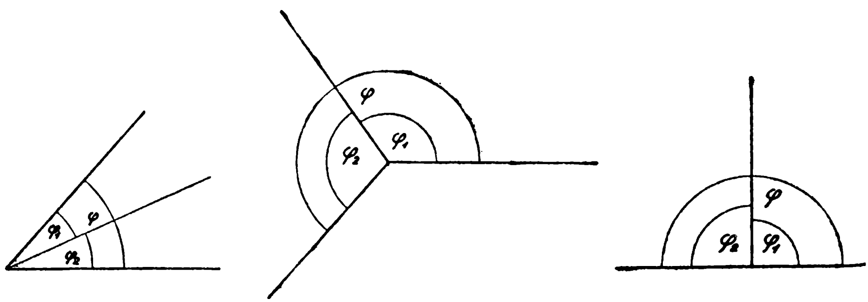
1. Buď jsou si oba úhly rovny, což píšeme $\alpha = \beta$ nebo $\beta = \alpha$,

2. nebo je úhel α větší než β a β je menší než α, což píšeme $\alpha > \beta$ nebo $\beta < \alpha$,

3. nebo je úhel α menší než β a β je větší než α, což píšeme $\alpha < \beta$ nebo $\beta > \alpha$.

Velikosti úhlů můžeme sčítat a odčítat. Součet úhlů α, β je roven úhlu γ, což píšeme $\alpha + \beta = \gamma$, jestliže lze úhel γ rozdělit na dva styčné úhly γ_1, γ_2 tak, že $\gamma_1 = \alpha$, $\gamma_2 = \beta$. Při tom je $\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$ a rozdíl úhlů γ, α se rovná úhlu β, což píšeme $\gamma - \alpha = \beta$.

Každý úhel φ (obr. 12a pro dutý úhel φ, obr. 12b pro vypuklý úhel φ, obr. 12c pro přímý úhel φ) můžeme jediným způsobem



Obr. 12a. Obr. 12b. Obr. 12c.

rozdělit na dva *sobě rovné* styčné úhly φ_1, φ_2. Společné rameno obou úhlů φ_1, φ_2 je *osa úhlu* φ. Tedy *osa úhlu je polopřímka*. *Rozpůlit* úhel znamená určit jeho osu.

Všecky přímé úhly jsou si rovny.

Rozpůlíme-li přímý úhel, dostaneme dva sobě rovné duté úhly, které nazýváme *pravé úhly*. Protože pravý úhel je polovina přímého úhlu, *všecky pravé úhly jsou si rovny*. Víte, že je u nás zvykem značit velikost pravého úhlu písmenem R (latinské slovo rectus znamená pravý). Velikost přímého úhlu je potom $2R$. Pro každý dutý úhel α platí $\alpha < 2R$ a obráceně, jestliže $\alpha < 2R$, pak úhel α je dutý. Pro každý vypuklý úhel β platí $2R < \beta$ a zároveň $\beta < 4R$, což píšeme stručně $2R < \beta < 4R$; obráceně, jestliže $2R < \beta < 4R$, pak úhel β je vypuklý. Pro každý dutý, vypuklý i přímý úhel φ máme $\varphi < 4R$.

Dutý úhel je buď pravý, nebo je menší než pravý a pak se jmenuje *ostrý*, nebo je větší než pravý a pak se jmenuje *tupý*. Společný název pro ostré a tupé úhly je úhel *kosý*. Tedy kosý úhel je takový úhel, který je dutý, ale není pravý. Pro každý ostrý úhel γ platí $\gamma < R$ a obráceně, jestliže $\gamma < R$, pak úhel γ je ostrý. Pro každý tupý úhel δ platí $R < \delta < 2R$ (t. j. $R < \delta$ a zároveň $\delta < 2R$); obráceně, jestliže $R < \delta < 2R$, pak úhel δ je tupý.

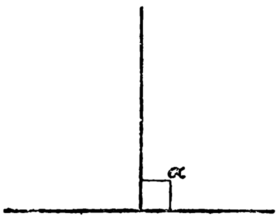
Číselně můžeme vyjádřit velikost úhlu porovnáním s R, t. j. můžeme velikost pravého úhlu zvolit za *úhlovou jednotku*. V praxi se však nejčastěji volí úhlová jednotka devadesátkrát menší než R, která se jmenuje *stupeň*. Značka pro stupeň je malá nula nahoře vpravo. Je tedy $R = 90^\circ$. Měříme-li úhly ve stupních, potom máme

$\omega = 180^\circ$ pro přímý úhel ω,
$\alpha < 180^\circ$ pro dutý úhel α,
$180^\circ < \beta < 360^\circ$ pro vypuklý úhel β,
$\varphi < 360^\circ$ pro každý dutý, vypuklý i přímý úhel φ,
$\varepsilon = 90^\circ$ pro pravý úhel ε,
$\gamma < 90^\circ$ pro ostrý úhel γ,
$90^\circ < \delta < 180^\circ$ pro tupý úhel δ,
$\delta < 180^\circ$; $\delta \neq 90^\circ$ pro kosý úhel δ.

Značka $\neq$, kterou čteme „nerovná se“ nebo „je různé od“, je znamení nerovnosti.

Při přesných měřeních úhlů se užívá v praxi vedle stupňů ještě menších jednotek, a to minut a vteřin, které znáte z první třídy. V této učebnici budeme měřit na stupně. Při školní práci užíváme k měření úhlů úhloměru.

Mnohdy je užitečné vyznačit si v obrazci, že o některém narýsovaném úhlu víme, že je pravý. Je výhodné užít malého čtverečku; v obr. 13 je takto vyznačeno, že úhel α je pravý.



Obr. 13.

II. V první třídě jsme se seznamovali se základními geometrickými pojmy, jako jsou přímka, úsečka, kružnice, obdélník a pod., s jejich názvy a s jejich jednoduchými vlastnostmi. O správnosti každého poznatku jsme se přesvědčovali názorem a měřením. Velmi důležitou pomůckou bylo rýsování vlastních obrazců, a proto jsme se cvičili v užívání pravítek a kružítka. Ve všech těchto směrech budeme pokračovat i ve druhé třídě. Musíme však pečlivě přihlížet k tomu, abychom při získávání nových poznatků nezapomínali na poznatky dřívější. Toho dosáhneme především soustavnou prací. Tisíciletá zkušenost ukázala, že v geometrii je poměrně malá skupina poznatků základních, z nichž se dá snadno jednoduchým usuzováním získat mnohem obsáhlejší skupina poznatků dalších. Stačí proto jednak si zapamatovat poznatky základní, jednak cvičit se v samostatném usuzování. Základní poznatky, které je třeba trvale si vštípit v paměť, nazýváme poučky. První poučky ovšem neodvozujeme usuzováním, protože usuzovat můžeme teprve na základě poznatků předem známých, nýbrž přesvědčujeme se o jejich správnosti zkušenostmi, pokusem a názorem. Poučky, které považujeme za správné z názoru, jmenují se **axiomy**. Je to řecké slovo, které vlastně znamená požadavek. Chceme-li někoho přesvědčit o správnosti geometrického poznatku, požadujeme na něm při dalším usuzování, aby uznal správnost axiomů. Příklad axiomu: Přímka je určena dvěma různými body (viz str. 9). Jiné příklady axiomů poznáme později. Většina pouček, které budeme probírat, nejsou axiomy, nýbrž jsou to poznatky, k nimž se dá dospět usuzováním na základě axiomů a na základě pouček už známých. Takové usuzování se jmenuje **důkaz** poučky. V této učebnici jsou u většiny pouček provedeny i jejich důkazy, ačkoli o správnosti poučky můžeme se většinou přesvědčit bez důkazu vlastními obrazci a názorem. Je proto možné u každé jednotlivé poučky vynechat její důkaz a nazírat na ni jako na axiom, t. j. požadovat, aby se uznala její správnost. Proč jsou tedy v učebnici podávány důkazy pouček? Proto, že bez vlastního usuzování nemůžete se geometrii naučit a že důkazy pouček vám dají vzory, podle nichž budete provádět vlastní usuzování ve cvičeních. Čím pozorněji a soustředěněji budete probírat důkazy pouček, tím lehčeji a úspěšněji získáte usuzovací schopnosti, potřebné nejen pro geometrii a pro školu vůbec, nýbrž i především pro praktický život.

Látka probíraná v tomto článku dává dobrou příležitost k tomu, abychom poznali, v čem spočívají důkazy a abychom překonali počáteční potíže při usuzování.

P^4_1. Je-li $\alpha + \beta = 2R$, jsou buď oba úhly α, β pravé, nebo je jeden ostrý a druhý tupý.

Důkaz. Víme, že $\alpha + \beta = 2R$ neboli $\alpha + \beta = 180°$. Proto je především $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$, t. j. oba úhly α, β jsou duté. Velikost úhlů α, β se dostane, rozdělíme-li 180° na dva díly. Jsou-li oba díly stejné, je každý z nich polovina ze 180° neboli 90°, t. j. oba úhly α, β jsou pravé. Jsou-li oba díly nestejné, je jeden z nich menší a druhý větší než polovina ze 180°, t. j. buďto $\alpha < 90°$, $\beta > 90°$ nebo $\alpha > 90°$, $\beta < 90°$ neboli buď α je ostrý a β tupý, nebo je β ostrý a α tupý.

P^4_2. Jsou-li α, β dva vedlejší úhly, je $\alpha + \beta = 2R$ neboli $\alpha + \beta = 180°$.

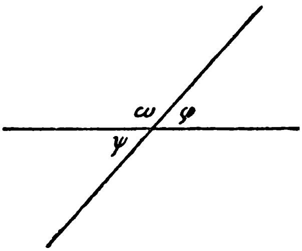
Tato poučka je samozřejmá. Je třeba pouze vědět, že velikost přímého úhlu je $2R$, a znáti, co jsou úhly vedlejší a co znamená součet dvou úhlů. Proč tedy uvádíme poučku P^4_2? Proto — že je užitečné si ji pamatovat, neboť kombinujeme-li ji s jinými poznatky, dospějeme snadno k dalším poučkám.

P^4_3. Ze dvou vedlejších úhlů jsou buďto oba pravé nebo je jeden ostrý a druhý tupý.

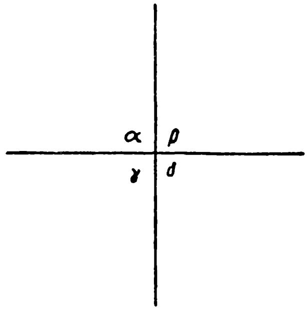
Důkaz spočívá v kombinování obou pouček P^4_1, P^4_2.

P_4^4. Dva vrcholové úhly jsou si rovny.

Důkaz (obr. 14). Narýsujeme-li dva vrcholové úhly φ, ψ, vznikne nám zároveň třetí úhel ω tak, že dvojice φ, ω i dvojice ψ, ω jsou dvojice vedlejších úhlů. Známe-li velikost ω, potom podle P_2^4 dostaneme velikost φ odečtením: $\varphi = 180° - \omega$; velikost ψ dostaneme týmž odečtením: $\psi = 180° - \omega$.
Proto musí býti $\varphi = \psi$.



Obr. 14.



Obr. 15.

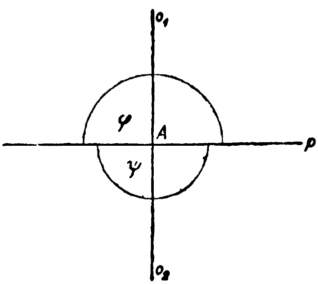
P_5^4. Jestliže víme o jednom ze čtyr úhlů, na něž dvě různoběžky dělí rovinu, že je pravý, jsou všechny čtyři úhly pravé.

Důkaz (obr. 15). Víme-li, že $\alpha = R$, jest $\delta = R$ podle P_4^4. Protože α, β jakož i α, γ jsou dvojice úhlů vedlejších, je $\beta = R$, $\gamma = R$ podle P_3^4.

O dvou různoběžkách PA, PB s průsečíkem P pravíme, že stojí na sobě kolmo nebo že jsou navzájem kolmé, jestliže $\sphericalangle APB = R$. Z poučky P_5^4 plyne, že při tom nezáleží na volbě bodů A, B na daných přímkách. Znak kolmosti je $\perp$; tedy

$$p \perp q \text{ nebo } q \perp p$$

znamená, že přímky p, q stojí na sobě kolmo.



Obr. 16.

P_6^4. Bodem A zvoleným na přímce p prochází jediná přímka $k \perp p$, která se jmenuje kolmice vztyčená k přímce p v jejím bodě A.

Důkaz (obr. 16). Žádaná přímka musí obsahovat osu o_1 přímého úhlu φ jakož i osu o_2 přímého úhlu ψ. Že obě osy leží v téže přímce, plyne z P_5^4.

Jestliže dvě různoběžky nestojí na sobě kolmo, říkáme, že jsou navzájem **kosé**, protože všecky čtyři úhly, na něž ty dvě různoběžky dělí rovinu, jsou úhly kosé.

Mnohdy je pro stručnost výhodné říci o dvou **úsečkách** nebo o dvou **polopřímkách**, že stojí na sobě kolmo. Znamená to ovšem, že stojí na sobě kolmo přímky, jejichž částmi jsou ty úsečky nebo polopřímky.

V tomto článku jste se seznámili s těmito geometrickými názvy:

Velikost úhlu — osa úhlu — rozpůlit úhel — pravý úhel; značka R — úhel ostrý, tupý, kosý — úhlová jednotka; stupeň — znamení nerovnosti $\neq$ — poučka — axiom — důkaz — přímky stojí na sobě kolmo, jsou navzájem kolmé; značka $\perp$ — kolmice vztyčená k přímce v jejím bodě — přímky navzájem kosé.

Cvičení.

27. Uveďte příklady předmětů, na kterých se vyskytují úhly pravé, ostré, tupé!

28. Doplňte! a) Dutý úhel může býti ostrý nebo .... nebo .... .
b) Kosý úhel může býti ..... nebo .... .

29. Vyjádřete ve stupních úhly $\frac{3}{5}R$, $1\frac{2}{3}R$, $2\frac{3}{4}R$, $3\frac{1}{3}R$!
Který z těchto úhlů je a) ostrý, b) tupý, c) vypuklý, d) dutý?

30. a) Co jsou doplňkové úhly? Co jsou výplňkové úhly?
b) Najděte doplňkové úhly k úhlům: $\frac{4}{5}R$, $\frac{5}{9}R$, 63°, $26^\circ\,37'$!
c) Najděte výplňkové úhly k úhlům: $\frac{5}{6}R$, $1\frac{2}{3}R$, $76^\circ\,49''$, $138^\circ\,27'$!
d) Vypočtěte doplňkové úhly α, β: víte-li, že $\alpha = \beta$; víte-li že $\alpha = 3\beta$; víte-li, že $\alpha = \frac{2}{3}\beta$!
e) Vypočtěte výplňkové úhly ω, ε, a) víte-li, že $\omega = \varepsilon$; b) víte-li, že $2\omega = 3\varepsilon$; c) víte-li, že $\varepsilon = \frac{5}{4}\omega$!

31. Je-li α libovolný ostrý úhel, $\beta = \alpha + 50^\circ$, $\gamma = 2\alpha + 10^\circ$, který z úhlů β, γ je jistě dutý?

32. Jaká musí býti velikost úhlu ω, aby úhel $\frac{1}{2}\omega + 15^\circ$ byl úhel ostrý?

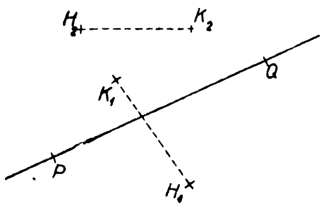
33. Polovina dutého úhlu je úhel ostrý. Dokažte!

34. Je-li polovina úhlu γ úhel ostrý, je γ úhel dutý. Dokažte!

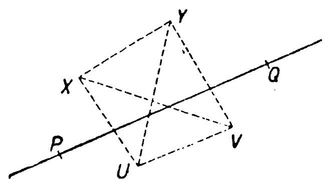
5. Poloroviny.

Zvolme si přímku PQ (obr. 17). Zvolíme-li si v rovině dva různé body H, K, které neleží na přímce PQ, potom úsečka HK může míti s přímkou PQ nejvýš jeden společný bod. Jestliže **úsečka** HK

má s přímkou PQ společný bod, říkáme: přímka PQ odděluje bod H od bodu K. V obr. 17 přímka PQ odděluje bod H_1 od bodu K_1, ale přímka PQ neodděluje bod H_2 od bodu K_2. Z názoru plyne důležitý poznatek, že přímka PQ dělí rovinu na dvě části tak, že přímka PQ odděluje každý bod jedné části od kteréhokoliv bodu druhé části, že však přímka PQ neodděluje od sebe žádné dva body téže části. Tyto dvě části roviny se jmenují **poloroviny** vyťaté přímkou PQ. Body, které leží na přímce PQ, počítáme do obou polorovin a říkáme, že přímka PQ tvoří hranici obou polorovin. Bod, který neleží na přímce PQ, náleží do jediné z obou polorovin a říkáme, že je to vnitřní bod té poloroviny. Obě poloroviny



Obr. 17.



Obr. 18.

vyťaté touž přímkou PQ jsou navzájem opačné. V obr. 18 jsou X, Y vnitřní body jedné z obou polorovin vyťatých přímkou PQ; U, V jsou vnitřní body opačné poloroviny. Přímka PQ odděluje každý z bodů X, Y od každého z bodů U, V; ale přímka PQ neodděluje ani X od Y ani U od V. Úsečky XU, XV, YU, YV protínají přímku PQ každá v jednom bodě.

Úsečky XY, UV nemají společného bodu s přímkou PQ. Polorovinu vyťatou přímkou PQ, která má vnitřní bod H, označíme polorovina PQH nebo QPH. Tedy polorovinu značíme třemi body, z nichž první dva jsou na hranici a třetí je uvnitř poloroviny. Jednu z obou polorovin vyťatých přímkou PQ v obr. 18 můžeme označit PQX nebo QPX nebo PQY nebo QPY; druhou můžeme označit PQU nebo QPU nebo PQV nebo QPV.

Jestliže body H, K neleží na přímce PQ, potom všecky tři výroky:

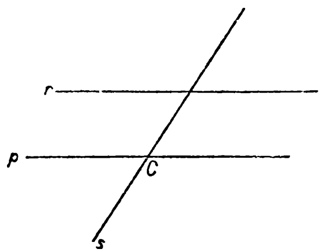
[1] **přímka PQ odděluje bod H od bodu K,**

[2] **poloroviny** PQH, PQK **jsou různé,**

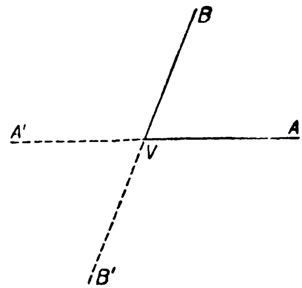
[3] **úsečka** HK **protne přímku** PQ,

znamenají jedno a totéž.

Jestliže (obr. 19) přímka r různá od přímky p je rovnoběžná s p, potom je celá přímka r uvnitř jediné poloroviny vyťaté přímkou p. Jestliže však přímka s je různoběžná s přímkou p, potom průsečík C přímek p, s rozdělí přímku s na dvě polopřímky, z nichž je každá v jiné polorovině vyťaté přímkou p. Odůvodněte!



Obr. 19.



Obr. 20.

Pojem úhlu se dá převésti na pojem poloroviny (obr. 20). Dutý úhel $\sphericalangle AVB$ se skládá z těch bodů, které jsou společné polorovině AVB a polorovině BVA. Vypuklý úhel s týmiž rameny se skládá jednak ze všech bodů poloroviny AVB', jednak ze všech bodů poloroviny BVA'.

Na pojem poloroviny se dá převést také pojem **trojúhelníku** (obr. 21). Trojúhelník je určen, jsou-li dány tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce a které se jmenují vrcholy trojúhelníka.

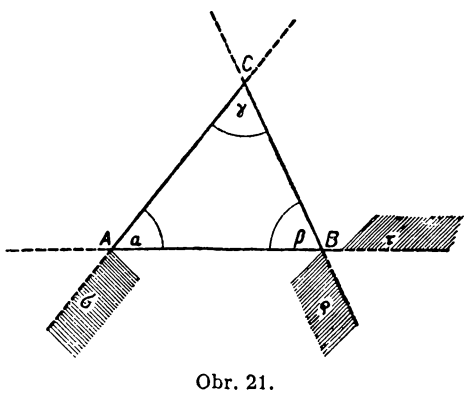
Označme

ϱ polorovinu BCA,

σ polorovinu ACB,

τ polorovinu ABC;

trojúhelník ABC je plocha, která se skládá ze všech bodů společných polorovinám ϱ, σ, τ.



Obr. 21.

Ty body, které leží uvnitř všech tří polorovin ϱ, σ, τ, tvoří **vnitřek** trojúhelníka. Ostatní body trojúhelníka tvoří jeho **obvod**. Obvod trojúhelníka se skládá z úseček BC, CA, AB, které se jmenují **strany** trojúhelníka.

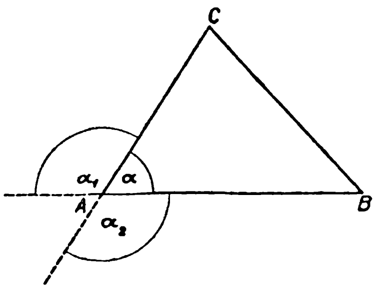
Ty body roviny, které nejsou ani uvnitř ani na obvodě trojúhelníka, tvoří **vnějšek** trojúhelníka. Vnějšek trojúhelníka se skládá z těch bodů, které jsou uvnitř poloroviny opačné k polorovině ϱ, dále z bodů uvnitř poloroviny opačné k σ a posléze z bodů uvnitř poloroviny opačné k τ. Společná část polorovin σ, τ tvoří úhel $\alpha = \sphericalangle BAC$; společná část polorovin ϱ, τ tvoří úhel $\beta = \sphericalangle ABC$; společná část polorovin ϱ, σ tvoří úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$. Trojúhelník ABC je ta část roviny, která je společná úhlu α a polorovině ϱ; týž trojúhelník je také ta část roviny, která je společná úhlu β a polorovině σ. Zároveň je to ta část roviny, která je společná úhlu γ a polorovině τ. Trojúhelník ABC značíme často $\triangle ABC$; řeckého písmene Δ (velká delta) užíváme k označení trojúhelníka vzhledem k jeho tvaru. Strany trojúhelníka se často značí malými písmeny:

$$a \equiv BC, \quad b \equiv AC, \quad c \equiv AB;$$

týmiž písmeny a, b, c značíme také velikosti stran.

Úhly α, β, γ jsou **úhly trojúhelníka**; při každém vrcholu je jeden úhel. Říkáme také, že úhel α leží **proti straně** a a že strana a leží **proti úhlu** α; podobně pro stranu b a úhel β, pro stranu c a úhel γ.

Úhly α, β, γ nazýváme někdy určitěji **vnitřní úhly** trojúhelníka na rozlišení od **vnějších úhlů**. Vnějším úhlem trojúhelníka ABC, na př. při vrcholu A, rozumíme vedlejší úhel k úhlu α. Máme tedy při vrcholu A **co do polohy** dva vnější úhly α_1, α_2 (obr. 22); ale tyto úhly jsou dva úhly vrcholové, tedy sobě rovné podle $\mathbf{P}_4^4$ (str. 22). Proto máme co do velikosti jediný vnější úhel při vrcholu A; jeho velikost je $180^0 - \alpha$.



Obr. 22.

Geometrické názvy, s nimiž jste se v tomto článku seznámili:

Přímka p odděluje bod H od bodu K — poloroviny vyťaté přímkou — opačné poloroviny — hranice poloroviny — vnitřní body poloroviny — trojúhelník, jeho vrcholy, strany, obvod, vnitřek, vnějšek — úhly trojúhelníka; vnitřní a vnější úhly — označení ABC; a, b, c; α, β, γ — úhel α leží proti straně a; strana a leží proti úhlu α.

Cvičení.

35. Jaký úhel zaplňuje svými body jednu polorovinu? Jaký úhel zaujímá a) menší, b) větší část roviny než je polorovina?

36. Na kreslicí papír narýsujte $\sphericalangle MON$; polorovinu OMN položte barvou červenou a polorovinu ONM barvou modrou. Jakou barvu má společná část obou polorovin? Co představuje?

37. Na kreslicí papír narýsujte $\triangle ABC$ (dosti veliký). Položte polorovinu ABC žlutě, polorovinu BCA červeně, polorovinu CAB modře. a) Jakou barvu má vnitřek $\triangle ABC$? b) Která část roviny má barvu oranžovou, která zelenou, která fialovou?

38. Jestliže přímka p neprochází žádným vrcholem $\triangle HKL$, potom p buď neprotne žádnou stranu trojúhelníka, nebo protne právě dvě strany. Odůvodněte! (Uvažujte, který vrchol je ve které polorovině vyťaté přímkou p!)

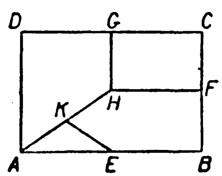
39. Zvolte bod X uvnitř strany AB a bod Y uvnitř strany BC trojúhelníka ABC. Na základě výsledku cvičení č. 38 odůvodněte, že úsečky AY, CX mají společný bod! (Pozorujte $\triangle BCX$!)

40. a) Zvolíte-li dva různé body P, Q uvnitř dutého úhlu α, potom celá úsečka PQ leží uvnitř α. Odůvodněte!
b) Jak zvolíte dva různé body P, Q uvnitř vypuklého úhlu α, aby část úsečky PQ ležela vně α?

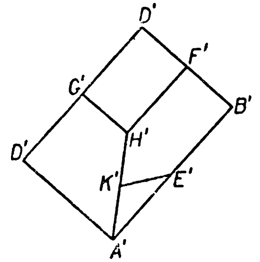
II. SHODNOST A SOUMĚRNOST.

1. Shodné geometrické útvary. (6)

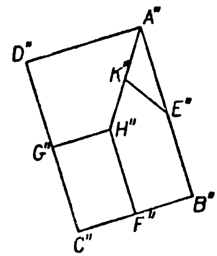
Již v první třídě jsme mluvili o tom, že dva geometrické útvary, které lze beze změny velikosti a tvaru položit na sebe tak, aby se navzájem kryly, nazýváme útvary shodnými. Nyní se budeme shodností zabývati soustavně; při tom budeme vyšetřovat pouze takové útvary, které leží oba v téže rovině. Máme-li v nákresně narýsován jakýkoli útvar (obr. 23a), můžeme jej obkreslit na průsvitný papír, potom změnit polohu průsvitného papíru a překreslit zpátky do nákresny; dostaneme nový útvar shodný s původním. Každému bodu, přímce, úsečce, úhlu atd. původního útvaru odpovídá bod, přímka, úsečka, úhel atd. v novém útvaru, který je **obrazem** bodu, přímky atd. původního útvaru. Přitom můžeme k novému útvaru dospěti buď tak, že posouváme průsvitný papír po nákresně (obr. 23b), nebo také tak, že napřed obrátíme průsvitný papír naruby a teprve potom jej posouváme (obr. 23c). V prvním případě dostaneme útvar **přímo shodný**, ve druhém útvar **nepřímo shodný** s útvarem původním. Jestliže bod X se pohybuje po obvodě obdélníka $ABCD$ (obr. 23a), který je částí



Obr. 23a.



Obr. 23b.



Obr. 23c.

původního útvaru, a to tak, že vnitřek obdélníka je stále nalevo od pohybu bodu X, t. j. tak, že bod X vyjde z polohy A postupně přes polohy B, C, D až se zase vrátí do původní polohy A, potom při přímé shodnosti (obr. 23b) obraz X' bodu X se pohybuje po obvodě obdélníka $A'B'C'D'$ tak, že vnitřek obdélníka se jeví stále nalevo. Naproti tomu při nepřímé shodnosti (obr. 23c) obraz X'' bodu X se pohybuje po obvodě obdélníka $A''B''C''D''$ tak, že vnitřek obdélníka se jeví stále napravo. Nebudeme však rozdíl mezi přímou a nepřímou shodností podrobněji zkoumat. Zato je pro nás velmi důležité, že **při přímé i nepřímé shodnosti se zachová nezměněna velikost každé úsečky a velikost každého úhlu.**

Budeme zkoumati otázku, do jaké míry je možné při shodnosti změnit polohu jednotlivých bodů původního útvaru. Na tuto otázku je odpověď snadná. Zvolme nejprve v původním útvaru libovolně bod A (viz stále obr. 23a). Je zřejmé, že polohu obrazu bodu

A si můžeme zvolit v nákresně zcela libovolně. Jestliže si však dále v původním útvaru zvolíme druhý bod B, potom polohu jeho obrazu si už nemůžeme libovolně zvolit, protože vzdálenost $\overline{AB}$ se musí zachovat nezměněna. Naproti tomu si však můžeme jako obraz polopřímky AB zvolit libovolnou polopřímku, jejímž počátkem je zvolený obraz bodu A. Když byl zvolen obraz bodu A a obraz polopřímky AB, je z názoru patrno, že už nemůžeme nic dále volit až na to, že máme ještě volbu mezi shodností přímou a nepřímou. Poloha shodného obrazu celého původního útvaru je potom už naprosto jednoznačně stanovena. Tedy:

V daném geometrickém útvaru zvolme libovolně dva různé body A, B. Zvolme dále libovolně bod A' a polopřímku $A'U$ s počátkem A'. K danému útvaru můžeme pouze dvojím způsobem určit útvar shodný tak, aby obrazem bodu A byl zvolený bod A', obrazem polopřímky AB byla zvolená polopřímka $A'U$.

Při tom jedna možnost dává útvar přímo shodný a druhá útvar nepřímo shodný s útvarem původním.

Výsledek, ke kterému jsme dospěli, je výhodné upravit tak, aby poloha shodného útvaru byla stanovena jednoznačně a aby nebylo třeba rozlišovat mezi přímou a nepřímou shodností.

Z názoru je patrno, že platí toto:

V daném geometrickém útvaru zvolme libovolně tři body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Zvolme dále libovolně bod A', polopřímku $A'U$ s počátkem A' a polorovinu vyťatou přímkou $A'U$. K danému útvaru můžeme jediným způsobem určit útvar shodný tak, aby obrazem bodu A byl zvolený bod A', obrazem polopřímky AB byla zvolená polopřímka $A'U$ a aby obrazem poloroviny ABC byla zvolená polorovina.

Tuto poučku jsme odvodili názorem. Odvodit ji usuzováním na základě známých nám pouček je nemožné. Je to axiom (viz str. 20), který můžeme nazvat **axiomem shodnosti.** Na základě axiomu shodnosti dospějeme v tomto oddíle usuzováním k řadě důležitých geometrických pouček.

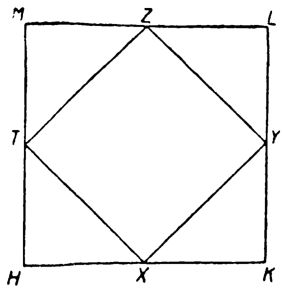
Geometrické názvy, s nimiž jste se seznámili v tomto článku,

Shodnost přímá a nepřímá — obraz bodu, přímky, úsečky, úhlu a pod. při shodnosti — axiom shodnosti.

Cvičení.

41. Narýsujte obrazec složený ze dvou čtverců $HKLM$, $XYZT$ podobný obr. 24! Zvolte obraz bodu H, polopřímky HZ a poloroviny HZK a sestrojte pomocí průsvitného papíru shodný obrazec! Proveďte to dvojím způsobem tak, aby shodnost byla nejprve přímá a potom nepřímá!

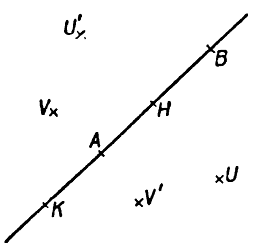
42. Opakujte cvičení 41 s tím rozdílem, že místo od obr. 24 vyjdete od složitějšího obrazce vlastní volby!



Obr. 24.

2. Souměrnost osová. (7)

Zvolme v jakémkoli geometrickém útvaru dva různé body A, B! Přímka AB rozdělí rovinu na dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2. Podle axiomu shodnosti máme k danému útvaru jediný shodný útvar, ve kterém obrazem bodu A je týž bod A, obrazem polopřímky AB je táž polopřímka AB a obrazem poloroviny ϱ_1 je táž polorovina ϱ_1. Je lehké uhodnout, o který shodný útvar tu běží. Je to prostě útvar totožný s útvarem původním.

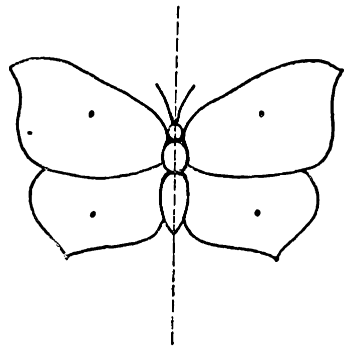


Obr. 25.

Podle axiomu shodnosti máme však k danému útvaru také jediný útvar shodný, v němž obrazem bodu A je týž bod A, obrazem polopřímky AB je táž polopřímka AB, ale obrazem poloroviny ϱ_1 je opačná polorovina ϱ_2. Obraz bodu B musí ležet na polopřímce AB v téže vzdálenosti od A jako bod B. Ale takovým bodem je na polopřímce AB jedině bod B; proto bod B, stejně jako bod A, splyne se svým obrazem. Podobně obrazem každého jiného bodu H na polopřímce AB je týž bod H (obr. 25) a také obrazem kteréhokoli bodu K na opačné polopřímce je týž bod K. Tedy vůbec každý bod na přímce AB je totožný se svým obrazem neboli, jak krátce říkáme, je to **samodružný bod** při naší shodnosti. Jiných samodružných bodů však není, neboť bod, který neleží na přímce AB, leží uvnitř jedné z obou polorovin ϱ_1, ϱ_2. Leží-li bod U uvnitř poloroviny ϱ_1, leží jeho obraz U' uvnitř poloroviny ϱ_2 a je tedy různý od

U; leží-li bod V uvnitř poloroviny ϱ_2, leží jeho obraz V' uvnitř poloroviny ϱ_1 a je zase různý od V. Dospěli jsme k důležitému výsledku:

P_1^7. Ke každé přímce AB máme jedinou shodnost, při které všecky body přímky AB jsou samodružné, kdežto bod C, který neleží na přímce AB, je vždy od svého obrazu oddělen přímkou AB. Taková shodnost se jmenuje **osová souměrnost**; přímka AB je **osa souměrnosti.**



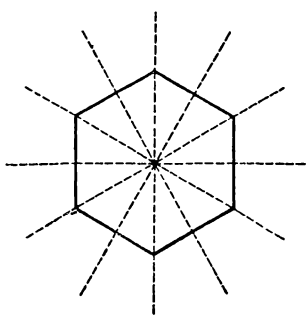
Obr. 26.

V životě se setkáváme velmi často s útvary (obr. 26), které lze rozdělit na dvě poloviny, které velmi přibližně přejdou jedna ve druhou osovou souměrností; takové útvary jmenujeme o s o v ě s o u m ě r n ý m i. Jsou dokonce útvary osově souměrné podle několika os, na př. pravidelný šestiúhelník má šest os souměrnosti, vyčárkovaných v obr. 27.

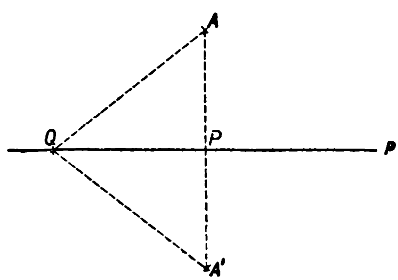
Osová souměrnost je důležitým prostředkem ke snadnému odvozování geometrických pouček. Ukážeme si to ihned na příkladě:

P_2^7. Daným bodem A lze vésti k dané přímce p jedinou přímku $k \perp p$.

D ů k a z. Jestliže bod A leží na přímce p, je nám to již známo (P_6^4 na str. 22). Jestliže bod A neleží na přímce p (obr. 28), zvolme přímku p za osu souměrnosti a určeme obraz A' bodu A. Body A, A' jsou od sebe odděleny



Obr. 27.



Obr. 28.

přímkou p a proto úsečka AA' protne přímku p v nějakém bodě P. Zvolme ještě libovolně jiný bod Q přímky p. Body P, Q jsou samodružné, a proto obrazem úhlu $\sphericalangle APQ$ je $\sphericalangle A'PQ$. Avšak souměrnost je shodnost, která zachová velikost úhlů, a proto úhly $\sphericalangle APQ$, $\sphericalangle A'PQ$ jsou si rovny. Protože tvoří dohromady úhel přímý, jsou to úhly pravé. Tedy přímka AP stojí kolmo na přímce p. Naproti tomu přímka AQ nestojí kolmo na přímce p. Neboť zase máme $\sphericalangle AQP = \sphericalangle A'QP$ a oba sobě rovné úhly $\sphericalangle AQP$, $\sphericalangle A'QP$ tvoří dohromady dutý úhel $\sphericalangle AQA'$, který je menší než $180°$, a proto jeho polovina $\sphericalangle AQ'P$ je menší než $90°$, t. j. $\sphericalangle AQP$ je ostrý.

Jestliže bod A neleží na přímce p, potom přímka $k \perp p$ procházející bodem A, která je jediná podle $\mathbf{P}^7_2$, jmenuje se **kolmice spuštěná z bodu A na přímku p**. Její průsečík P s přímkou p se jmenuje **pata** kolmice spuštěné z bodu A na přímku p. Zároveň jsme dokázali:

$\mathbf{P}^7_3$. Je-li P pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku p a je-li Q kterýkoli jiný bod přímky p, potom úhel $\sphericalangle AQP$ je ostrý.

Osou úsečky AA' nazýváme kolmici vztyčenou k přímce AA' ve středu úsečky AA' (obr. 28). Platí:

$\mathbf{P}^7_4$. Budiž p osa souměrnosti. Budiž A' obraz bodu A, který neleží na p. Potom přímka p je osou úsečky AA'.

Důkaz (obr. 28). Víme již, že $p \perp AA'$. Je-li P průsečík úsečky AA' s přímkou p, pak bod P je samodružný, a proto obrazem úsečky AP je úsečka $A'P$. Z toho plyne, že $\overline{AP} = \overline{A'P}$, t. j. že P je střed úsečky AA'.

Z poučky $\mathbf{P}^7_4$ je patrné, jak můžeme pomocí dvou pravítek sestrojit útvar souměrný osově k danému útvaru. Z každého bodu A daného útvaru spustíme kolmici na osu souměrnosti a od paty P této kolmice naneseme $\overline{PA'} = \overline{AP}$; tím dostaneme obraz A' bodu A.

Mimo to je také patrné:

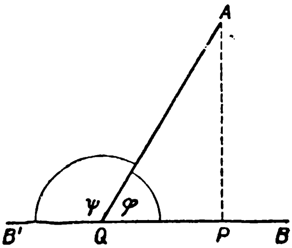
$\mathbf{P}^7_5$. Jestliže při osové souměrnosti obrazem bodu A je bod A', potom obrazem bodu A' je bod A.

$\mathbf{P}^7_6$. Jsou-li A, A' dva různé body, potom existuje jediná osová souměrnost, při které obrazem bodu A je bod A'. Osou souměrnosti je osa úsečky AA'.

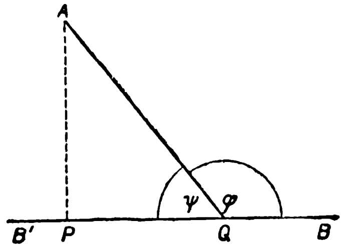
Dále plyne z poučky $\mathbf{P}^7_3$:

$\mathbf{P}^7_7$. Je-li $\varphi = \sphericalangle AQB$ kosý úhel a je-li P pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku QB, potom při ostrém φ je P uvnitř polopřímky QB a při tupém φ je P uvnitř opačné polopřímky QB'.

Důkaz (obr. 29a při ostrém, obr. 29b při tupém φ). Označíme-li $\psi = \sphericalangle AQB'$, potom podle $\mathbf{P}^4_3$ jediný z úhlů φ, ψ je ostrý. Úhel $\sphericalangle AQP$, který je ostrý podle $\mathbf{P}^7_3$, musí splynout s jedním z úhlů φ, ψ, a proto splyne s φ, je-li φ ostrý, a splyne se ψ, je-li ψ ostrý, t. j. je-li φ tupý.



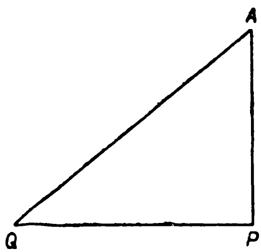
Obr. 29a.



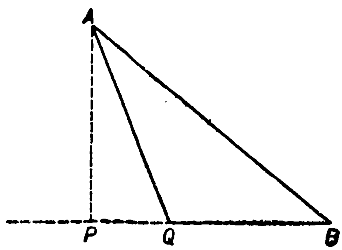
Obr. 29b.

$\mathbf{P}^7_8$. Je-li jeden úhel trojúhelníka pravý, jsou oba ostatní ostré.

Důkaz (obr. 30). Označme P jako vrchol, při němž je úhel pravý. Označme Q jako vrchol, o němž chceme dokázati, že při něm je úhel ostrý. Je-li A třetí vrchol, potom P je pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku PQ, takže $\sphericalangle AQP$ je ostrý podle $\mathbf{P}^7_3$. Stejně dokážeme, že také $\sphericalangle QAP$ je ostrý.



Obr. 30.



Obr. 31.

$\mathbf{P}^7_9$. Je-li jeden úhel trojúhelníka tupý, jsou oba ostatní ostré.

Důkaz (obr. 31). Označme Q jako vrchol, při němž je úhel tupý. Označme B jako vrchol, o němž chceme dokázati, že při něm je úhel ostrý. Je-li A třetí vrchol a je-li P pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku QB, potom podle $\mathbf{P}^7_7$ bod P padne na polopřímku opačnou ke QB, a proto úhel $\sphericalangle ABQ$ splyne s úhlem $\sphericalangle ABP$, který je ostrý podle $\mathbf{P}^7_8$.

Z pouček $\mathbf{P}^7_8$ a $\mathbf{P}^7_9$ plyne, že jsou tři druhy trojúhelníků. Ostroúhlý trojúhelník má všecky tři úhly ostré. Tupoúhlý trojúhelník má jeden úhel tupý a dva ostré. Pravoúhlý trojúhelník má jeden úhel pravý a dva ostré. U pravoúhlého trojúhelníka strana proti pravému úhlu se jmenuje **přepona**; ostatní dvě strany jsou **odvěsny** pravoúhlého trojúhelníka. Dále je zřejmé:

P_{10}^{7}. Jestliže dva úhly trojúhelníka jsou si rovny, jsou oba ostré.

Geometrické názvy, s nimiž jste se seznámili v tomto článku:

Samodružný bod při shodnosti — osová souměrnost — osa souměrnosti — osově souměrné útvary — kolmice spuštěná z bodu na přímku; její pata — osa úsečky — trojúhelník ostroúhlý, tupoúhlý, pravoúhlý — přepona a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka.

Cvičení.

43. Zvolte přímku p za osu souměrnosti! Uvnitř každé z obou polorovin vyťatých přímkou p zvolte dva body A, B a C, D a sestrojte jejich obrazy s užitím dvou pravítek (kružítka užijte jen k přenášení úseček).

44. Zvolte osu souměrnosti p a dva body H, K tak, aby
a) jeden z nich ležel na ose p,
b) oba ležely uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p,
c) byly od sebe odděleny přímkou p.
Narýsujte obraz $H'K'$ úsečky HK!
Zvolte bod L uvnitř úsečky $H'K'$! Kde musí ležet jeho obraz?

45. Narýsujte trojúhelník $\triangle XYZ$ a zvolte osu souměrnosti p tak, aby ležela celá vně trojúhelníka. Narýsujte obraz $\triangle X'Y'Z'$. Je-li P pata kolmice spuštěné z bodu X na přímku YZ, narýsujte její obraz P', nemáte-li bod P vůbec rýsovat!

46. Narýsujte (nepravidelný) čtyrúhelník $ABCD$ a sestrojte jeho obraz při osové souměrnosti tak, aby obrazem vrcholu A byl a) vrchol B, b) vrchol C, c) střed strany CD.

47. Písmeno **A** má svislou osu souměrnosti, písmeno **B** má vodorovnou osu souměrnosti. Hledejte všecka písmena souměrná: 1. podle svislé osy, 2. podle vodorovné osy, 3. podle svislé i podle vodorovné osy.

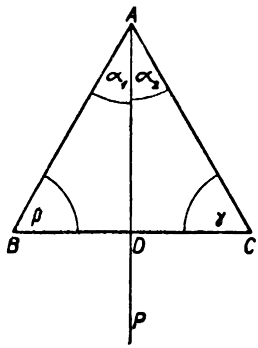
3. Strany a úhly trojúhelníka. (8)

Na základě osové souměrnosti si nyní odvodíme důležité poučky o velikosti stran a úhlů trojúhelníka.

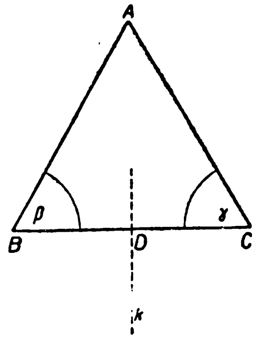
P_{1}^{8}. Jsou-li si rovny dvě strany trojúhelníka, jsou si rovny také protější úhly.

Důkaz (obr. 32). Zvolme $\triangle ABC$ tak, aby bylo $\overline{AB} = \overline{AC}$. Máme se přesvědčit, že musí býti $\beta = \gamma$. Narýsujme si osu AP úhlu α. Polopřímka AP rozdělí úhel α na dva sobě rovné úhly α_1, α_2. Přímku AP zvolíme za osu souměrnosti. Úhel $\alpha_1 = \sphericalangle BAP$ má za obraz jemu rovný úhel s týmž ramenem AP, ale ležící v polorovině APC, t. j. obrazem úhlu α_1 bude úhel α_2. Proto obrazem polopřímky AB bude polopřímka AC, a protože $\overline{AB} = \overline{AC}$, obrazem úsečky AB bude úsečka AC, obrazem vrcholu B bude vrchol C. Docela stejně vychází, že obrazem vrcholu C bude vrchol B. Protože bod A je samodružný, obrazem úhlu $\beta = \sphericalangle ABC$ bude úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$, a proto je $\beta = \gamma$. Zároveň jsme se přesvědčili, že náš $\triangle ABC$ je osově souměrný; jeho osou souměrnosti je přímka AP.

K poučce $\mathbf{P}_1^8$ si nyní odvodíme obrácenou poučku. Původní poučka měla předpoklad (co jsme věděli), že $\overline{AB} = \overline{AC}$, a měla tvrzení (co jsme dokazovali), že $\beta = \gamma$. Obrácená poučka má předpoklad $\beta = \gamma$ a tvrzení $\overline{AB} = \overline{AC}$. Obrácená poučka tedy zní:



Obr. 32.



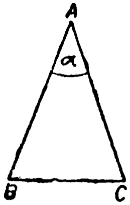
Obr. 33.

$\mathbf{P}_2^8$. Jsou-li si rovny dva úhly trojúhelníka, jsou si rovny také protější strany.

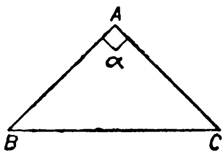
Důkaz. Zvolme $\triangle ABC$ tak, aby bylo $\beta = \gamma$. Máme se přesvědčit, že musí býti $\overline{AB} = \overline{AC}$. Narýsujme si osu úsečky BC, t. j. přímku $k \perp BC$, která prochází středem D úsečky BC. Přímku k zvolíme za osu souměrnosti. Obrazem bodu B bude bod C. Obrazem poloroviny BCA bude táž polorovina BCA. Obrazem úhlu β, který má vrchol B, jedno rameno BD a který leží v polorovině BCA, bude úhel jemu rovný, který bude mít vrchol C, jedno rameno CD a který bude ležet v polorovině BCA; to znamená, že obrazem úhlu β bude úhel γ. Docela stejně vychází, že obrazem úhlu γ bude úhel β. Tedy obrazem našeho $\triangle ABC$ bude trojúhelník, který s ním má totožnou stranu BC i oba úhly β, γ. Proto náš $\triangle ABC$ je osově souměrný a obrazem strany AB je strana AC, takže $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Z našich dvou pouček plyne, že trojúhelníky, které mají dvě strany sobě rovné, jsou tytéž jako trojúhelníky, které mají dva úhly sobě rovné. Takové trojúhelníky se jmenují rovnoramenné; dvě strany sobě rovné jsou ramena, třetí strana je základna.

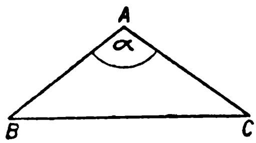
Tedy u **rovnoramenného trojúhelníka** obě ramena jsou si rovna a oba úhly při základně jsou si rovny. Podle $\mathbf{P}^7_{10}$ úhly při základně jsou vždy ostré; naproti tomu úhel proti základně může býti ostrý (obr. 34a), pravý (obr. 34b) nebo tupý (obr. 34c). Jsou také trojúhelníky, jejichž všecky tři strany jsou si rovny neboli, což znamená totéž, jejich všecky tři úhly jsou si rovny; to jsou **trojúhelníky rovnostranné**. Trojúhelník,



Obr. 34a.



Obr. 34b.

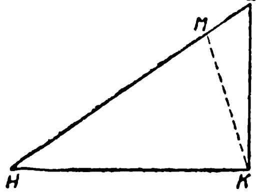


Obr. 34c.

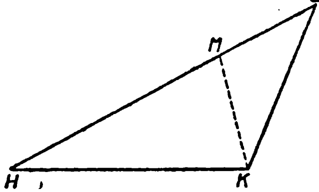
jehož každá strana má jinou velikost neboli, což zase znamená totéž, jehož každý úhel má jinou velikost, jmenuje se **různostranný**.

Připomeňme si ještě, že jsme zjistili, že rovnoramenný $\triangle ABC$ je osově souměrný. Jeho osa souměrnosti protne stranu BC v bodě D (obr. 32 a 33). Při důkaze poučky $\mathbf{P}^3_1$ jsme poznali, že polopřímka AD půlí úhel proti základně. Protože obrazem bodu B je bod C, podle $\mathbf{P}^7_4$ přímka AD je osou úsečky BC. Z toho plyne, že písmeno D znamená týž bod v obr. 32 jako v obr. 33. Tedy:

$\mathbf{P}^8_3$. **Je-li D střed základny BC rovnoramenného $\triangle ABC$, potom polopřímka AD je osou $\measuredangle BAC$ a přímka AD stojí kolmo na přímce BC.**



Obr. 35a.



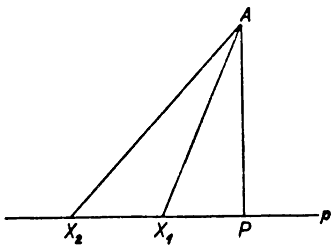
Obr. 35b.

$\mathbf{P}_4^8$. Strana trojúhelníka, která leží proti pravému nebo tupému úhlu, je větší než druhé dvě strany.

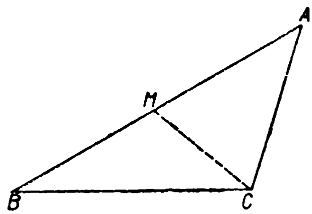
Důkaz. V trojúhelníku $\triangle HKL$ mějme při vrcholu K úhel pravý (obr. 35a) nebo tupý (obr. 35b) a dokažme na př., že strana HL je větší než strana HK. Na polopřímce HL určeme bod M tak, že $\overline{HM} = \overline{HK}$. Jestliže M padne dovnitř úsečky HL, je $\overline{HL} > \overline{HK}$. Máme odůvodnit, že tomu tak bude v každém případě. Avšak $\triangle HMK$ je rovnoramenný trojúhelník a $\sphericalangle\ HKM$ je úhel při jeho základně, o kterém víme (str. 36, řádek 3 shora), že je vždy ostrý. Proto je $\sphericalangle\ HKM$ menší než $\sphericalangle\ HKL$, takže bod M musí padnout dovnitř úsečky HL.

$\mathbf{P}_5^8$. Pata P kolmice spuštěné z bodu A na přímku p je blíže bodu A než každý jiný bod přímky p. Jestliže bod X přímky p se vzdaluje od bodu P, potom vzdálenost $\overline{AX}$ se stále zvětšuje.

Důkaz (obr. 36). Je-li X kterýkoli jiný bod přímky p, máme v $\triangle APX$ při vrcholu P pravý úhel, a proto $\overline{AX} > \overline{AP}$ podle $\mathbf{P}_4^8$. Dále máme dokázati, že v trojúhelníku $\triangle AX_1X_2$ je $\overline{AX_2} > \overline{AX_1}$. Podle $\mathbf{P}_8^7$ $\sphericalangle\ AX_1P$ je ostrý, a proto podle $\mathbf{P}_3^4$ (str. 21) $\sphericalangle\ AX_1X_2$ je tupý, tedy $\overline{AX_2} > \overline{AX_1}$ podle $\mathbf{P}_4^8$.



Obr. 36.



Obr. 37.

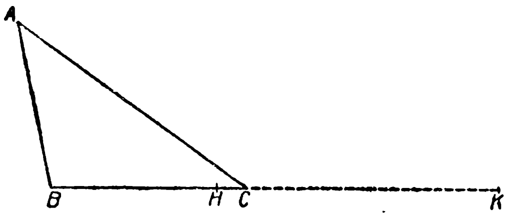
Vzdálenost $\overline{AP}$ bodu A od paty kolmice, spuštěné na přímku p, se jmenuje vzdálenost bodu A od přímky p nebo vzdálenost přímky p od bodu A, protože je nejkratší ze všech vzdáleností $\overline{AX}$ bodu A od jednotlivých bodů X přímky p.

$\mathbf{P}_6^8$. Rozdíl dvou stran trojúhelníka je vždy menší než strana třetí.

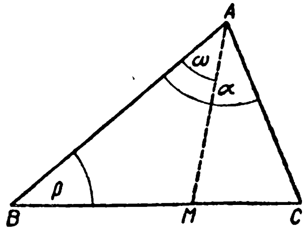
Důkaz. Jestliže dvě strany jsou si rovny, je jejich rozdíl roven nule a jistě je menší než strana třetí. Budiž tedy na př. v $\triangle ABC$ (obr. 37) strana AB větší než strana AC. Uvnitř úsečky AB určeme bod M tak, že $\overline{AM} = \overline{AC}$. Rozdíl stran AB, AC je roven úsečce BM; máme tedy dokázati, že $\overline{BC} > \overline{BM}$. Avšak $\triangle AMC$ je rovnoramenný a $\sphericalangle\ AMC$ je úhel při jeho základně je tedy ostrý (str. 36, řádek 3), a proto podle $\mathbf{P}_3^4$ $\sphericalangle BMC$ je tupý, takže z trojúhelníka $\triangle BMC$ vychází podle $\mathbf{P}_4^8$, že $\overline{BC} > \overline{BM}$.

$\mathbf{P}_7^8$. Součet dvou stran trojúhelníka je vždy větší než strana třetí.

Důkaz. Máme dokázati, že na př. v $\triangle ABC$ je $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$. Jestliže $\overline{AB} = \overline{BC}$ nebo $\overline{AB} > \overline{BC}$, je to zřejmé. Jestliže však $\overline{AB} < \overline{BC}$ (obr. 38), můžeme si uvnitř úsečky BC najít bod H tak, že bude $\overline{AB} = \overline{BH}$. Úsečka HC je rovna rozdílu stran BC, AB, a tedy podle $\mathbf{P}_5^8$ je $\overline{HC} < \overline{AC}$. Jestliže si tedy na polopřímce HC určíme bod K tak, že $\overline{HK} = \overline{AC}$, padne bod K na prodloužení úsečky HC za bod C, a proto bude $\overline{BC} < \overline{BK}$. Ale úsečka BK se skládá z úseček BH, HK, ze kterých je jedna rovna úsečce AB a druhá úsečce AC. Proto je $\overline{BK} = \overline{AB} + \overline{AC}$, a protože $\overline{BC} < \overline{BK}$, je $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.



Obr. 38.



Obr. 39.

$\mathbf{P}_8^8$. Jestliže dva úhly trojúhelníka si nejsou rovny, potom proti většímu z nich leží větší strana než proti menšímu.

Důkaz. Budiž na př. $\alpha > \beta$ v trojúhelníku $\triangle ABC$ (obr. 39); máme dokázati, že $\overline{BC} > \overline{AC}$. Protože je $\alpha > \beta$, můžeme uvnitř strany BC určit bod M tak, že úhel $\omega = \sphericalangle BAM$ je roven úhlu β. Ježto $\beta = \omega$, plyne z $\triangle MAB$ podle $\mathbf{P}_2^8$, že $\overline{BM} = \overline{AM}$. Avšak $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC}$, takže $\overline{BC} = \overline{AM} + \overline{MC}$. Z $\triangle AMC$ však plyne podle $\mathbf{P}_7^8$, že $\overline{AM} + \overline{MC} > \overline{AC}$, takže $\overline{BC} > \overline{AC}$.

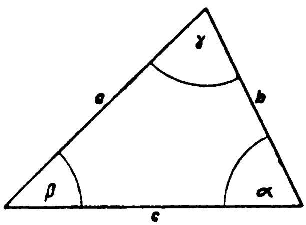
$\mathbf{P}_9^8$. Jestliže dvě strany trojúhelníka si nejsou rovny, potom proti větší z nich leží větší úhel než proti straně menší.

Důkaz (obr. 40). Budiž třeba $a > b$; máme dokázati, že $\alpha > \beta$. Rozhodně nastane jeden ze tří případů: I. $\alpha = \beta$; II. $\alpha < \beta$, III. $\alpha > \beta$. V případě I. by podle $\mathbf{P}_2^8$ bylo $a = b$, proto tento případ odpadá. V případě II. by podle $\mathbf{P}_8^8$ bylo $a < b$, proto také tento případ odpadá. Zbývá jedině případ III.: $\alpha > \beta$. Poučka $\mathbf{P}_9^8$ je obrácením poučky $\mathbf{P}_8^8$.

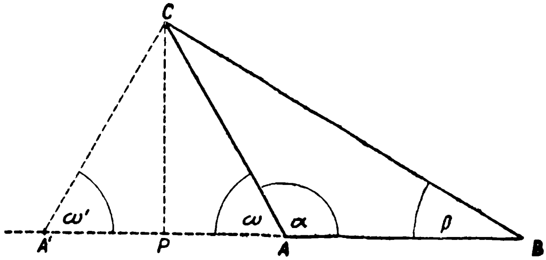
$\mathbf{P}_{10}^8$. Součet dvou úhlů trojúhelníka je menší než úhel přímý.

Důkaz. Dokažme na př., že v $\triangle ABC$ je vždy $\alpha + \beta < 2R$.

Jsou-li oba úhly ostré, je to zřejmé. Je-li jeden pravý, je druhý ostrý podle $\mathbf{P}^7_8$, což je také zřejmé. Zbývá pouze případ, že na př. α je úhel tupý (obr. 41). Budiž P pata kolmice spuštěné z bodu C na přímku AB. Protože $\alpha = \sphericalangle CAB$ je tupý, podle $\mathbf{P}^7_7$ padne P na prodloužení úsečky AB za bod A. Zvolme přímku CP za osu souměrnosti a sestrojme obraz A' bodu A. Ježto $CP \perp PA$, padne podle $\mathbf{P}^7_4$ bod A' na prodloužení úsečky AP za bod P. Bod C je samodružný, a proto $\overline{AC} = \overline{A'C}$, takže podle $\mathbf{P}^8_1$ $\triangle CAA'$ má při vrcholech A, A' sobě rovné úhly ω, ω'! Ježto α je tupý, $\triangle ABC$ dá podle $\mathbf{P}^8_4$, že $\overline{BC} > \overline{AC}$. Protože však $\overline{AC} = \overline{A'C}$, je $\overline{BC} > \overline{A'C}$, takže $\triangle A'BC$ dá podle $\mathbf{P}^8_9$, že $\omega' > \beta$.



Obr. 40.

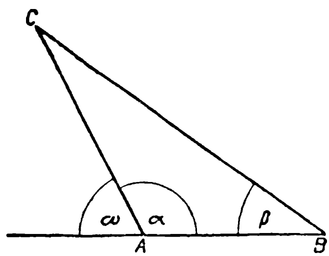


Obr. 41.

Ježto $\omega' = \omega$, je tedy $\omega > \beta$, a proto $\alpha + \omega > \alpha + \beta$. Avšak $\alpha + \omega = 2R$, tedy $2R > \alpha + \beta$.

$\mathbf{P}^8_{11}$. V trojúhelníku je vnější úhel při jednom vrcholu větší než vnitřní úhel při jiném vrcholu.

Důkaz (obr. 42). Porovnejme v $\triangle ABC$ na př. vnější úhel ω při vrcholu A s vnitřním úhlem β při vrcholu B. Jest $\alpha + \omega = 2R$, ale podle $\mathbf{P}^8_{10}$ jest $\alpha + \beta < 2R$. Proto $\beta < \omega$.



Obr. 42.

Geometrické názvy, s kterými jste se seznámili v tomto článku:

Předpoklad a tvrzení poučky — obrácená poučka — rovnoramenný trojúhelník; jeho ramena a jeho základna — rovnostranný trojúhelník — různostranný trojúhelník — vzdálenost bodu A od přímky p neboli vzdálenost přímky p od bodu A.

Cvičení.

48. Vyslovte obrácenou poučku k poučce $\mathbf{P}^8_1$ a obrácenou poučku k poučce $\mathbf{P}^8_2$! Co pozorujete?

49. Kterému trojúhelníku říkáme a) rovnoramenný, b) rovnostranný, c) různostranný?

50. Co víte o velikostech úhlů při základně rovnoramenného trojúhelníka?

51. Jaký může býti úhel proti základně rovnoramenného trojúhelníka? Kolik druhů rovnoramenných trojúhelníků tedy rozeznáváme? Narýsujte je od ruky!

52. Dokažte, že rameno rovnoramenného trojúhelníka je vždy větší než polovina jeho základny!

53. V obr. 32 je $\beta = \gamma$ a $\overline{BD} = \overline{DC}$. a) Proč je $\overline{AB} = \overline{AC}$? b) Proč je trojúhelník ABD pravoúhlý? c) Vyhledejte v obr. 32 ještě jeden pravoúhlý trojúhelník! d) Proč je $\alpha_1 = \alpha_2$? e) Která z úseček BD, AD, AC je největší?

54. V obr. 32 je $\overline{AB} = \overline{AC}$ a $\sphericalangle ADC = R$. Uvnitř úsečky AC zvolte bod F a na úsečce AB určete bod E tak, aby $\overline{AE} = \overline{AF}$. Dokažte, že a) $\overline{EB} = \overline{FC}$, b) $\sphericalangle FEB = \sphericalangle EFC$, c) $\alpha_1 = \alpha_2$, d) $EF \perp AP$.

55. Narýsujte od ruky trojúhelník ABC tak, aby úhel β byl a) tupý, b) pravý! Uvnitř strany BC zvolte bod X. Dokažte, že platí $\overline{AB} < \overline{AX} < \overline{AC}$.

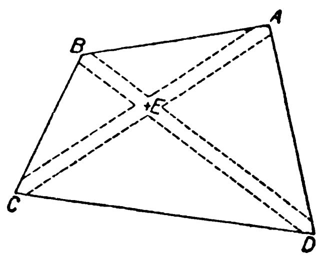
56. V rovnoramenném trojúhelníku je jedna strana 25 cm, druhá 10 cm; která z nich je základna?

57. Rozhodněte, existuje-li $\triangle ABC$, ve kterém by platilo:

a) $a = 37{,}4$ cm, $b = 25{,}3$ cm, obvod $= 123$ cm;
b) $a = 49{,}8$ cm, $b = 12{,}5$ cm, obvod $= 1$ m;
c) $a = 37{,}3$ cm, $c = 24{,}9$ cm, obvod $= 125$ cm;
d) $a = 50{,}1$ cm, $c = 13{,}6$ cm, obvod $= 1$ m.

58. Rozhodněte, zda je možné, aby poměr stran v trojúhelníku byl: a) 2 : 3 : 4, b) 1 : 2 : 3!

59. V obr. 43 body A, B, C, D, E představují obrazy pěti obcí na mapě. Místa A, C a místa B, D jsou spojena silnicemi; vedle toho jsou obce spojeny cestami AB, BC, CD, DA. a) Proč je cesta $ABCDA$ kratší než cesta $ACBDA$ nebo $ABDCA$? b) Listonoš, který vyšel z obce A, má navštívit všechny obce a vrátit se zpět do obce A; proč je cesta $AEBCDA$ pro něho výhodnější než cesta $ACBDA$? (Všimněte si dvojitých čar v obr. 43!)



Obr. 43.

60. Víte-li, že úhly při základně BC rovnoramenného trojúhelníka ABC jsou vždy ostré, co platí o velikostech stran a, b, c, je-li úhel α a) tupý, b) pravý?

61. Osa úhlu β trojúhelníka ABC, v němž je $\overline{AB} = \overline{AC}$, protne protější stranu v bodě B'. Dokažte, že je $\overline{BB'} > \overline{B'C}$! (Proč je $\sphericalangle BB'A > \gamma$?).

62. Rozhodněte především, je-li možný $\triangle ABC$ o stranách:
a) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm; b) $a = 6$ m, $b = 36$ dm, $c = 60$ dm! Seřaďte jeho úhly α, β, γ podle velikosti!

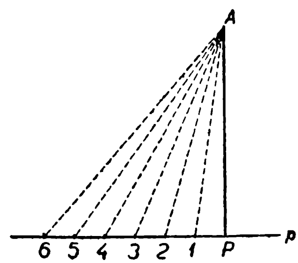
63. Rozhodněte, zda je možné, aby úhly β, γ byly úhly trojúhelníka ABC, jestliže: a) $\beta = 119\frac{1}{2}°$, $\gamma = 53\frac{1}{2}°$; b) $\beta = 91°$, $\gamma = 89°$; c) $\beta = 117\frac{3}{4}°$, $\gamma = 63\frac{1}{4}°$?

64. V rovnoramenném trojúhelníku ABC o základně BC je úhel $\gamma = 46°$. Vypočtěte vnější úhel β', který je vedlejší k úhlu β! Odůvodněte, proč je $\alpha < 134°$!

4. První konstruktivní axiom. Kružnice a přímka. (9)

Zvolme přímku p a mimo ni bod A. Označme P patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku p. Jestliže bod X přímky p se vzdaluje od bodu P, víme ($\mathbf{P}_5^8$ na str. 37), že zároveň se vzdáleností $\overline{PX}$ se zvětšuje také vzdálenost $\overline{AX}$. Ježto $\triangle APX$ má pravý úhel při vrcholu P, podle $\mathbf{P}_4^8$ je $\overline{AX} > \overline{PX}$, vzdálenost $\overline{AX}$ se zvětšuje nade všecky meze. Přitom však vzdálenost $\overline{AX}$ se zvětšuje pomaleji než vzdálenost $\overline{PX}$. Neboť (obr. 36 na str. 37) zvětší-li se vzdálenost $\overline{PX}$ o úsečku $\overline{X_1X_2}$, potom vzdálenost $\overline{AX}$ se zvětší o rozdíl $\overline{AX_2} - \overline{AX_1}$, který podle $\mathbf{P}_6^3$ je jistě menší než $\overline{X_1X_2}$.

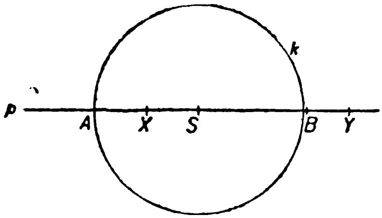
Z předchozího plyne, že je-li dána úsečka d větší než $\overline{AP}$, můžeme na přímce p najít bod X tak, aby vzdálenost $\overline{AX}$ byla přibližně rovna d. Jestliže na př. zanedbáme chyby menší než 0,1 mm, můžeme usuzovati takto (viz obr. 44, ve kterém je však pro zřetelnost délka 0,1 mm nahrazena délkou mnohem větší): Na přímce si určíme postupně body P, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* . . ., jejichž vzdálenost od P se stále zvětšuje, a to tak, že po každé vzroste o 0,1 mm. Vzdálenosti $\overline{AP}$, $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\overline{A3}$, $\overline{A4}$ se také stále zvětšují. Budou nejprve menší než d, ale později budou větší než d; přitom každé zvětšení bude menší než 0,1 mm. Proto mezi body *1*, *2*, *3*, *4* . . . bude takový bod X, že $\overline{AX} \doteq d$ s chybou menší než 0,1 mm. Tím je dokázána přibližná správnost poučky:



Obr. 44.

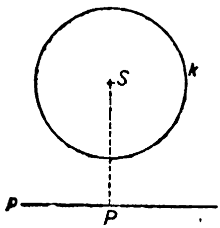
$\mathbf{P}_1^9$. Je-li *d* úsečka větší než vzdálenost $\overline{AP}$ bodu *A* od přímky *p*, potom na každé z obou polopřímek, na které pata *P* kolmice spuštěné z bodu *A* na přímku *p* rozdělí přímku *p*, je jeden (a pouze jeden) bod, jehož vzdálenost od *A* je rovna *d*.

Správnost poučky $\mathbf{P}_1^9$ je z názoru jasná; přibližnou správnost jsme právě odvodili na základě pouček nám už známých. Přesnou správnost poučky $\mathbf{P}_1^9$ takto odvoditi nelze; je to axiom, který nazveme **první konstruktivní axiom,** a to z důvodů, jež se brzy vyjasní. Potřebujeme jej, abychom mohli zkoumat vzájemnou polohu přímky a kružnice.

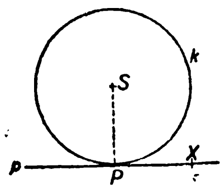


Obr. 45.

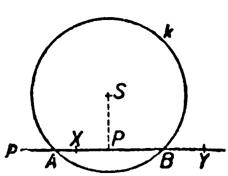
Počněme přímkou *p*, která prochází středem *S* kružnice *k* (obr. 45). Velikost poloměru kružnice *k* označme jako obvykle *r*. Víme, že na přímce *p* jsou dva body *A*, *B*, které leží na kružnici *k*. Úsečka *AB* je průměr kružnice *k*. Je-li *X* vnitřní bod úsečky *AB*, je $\overline{SX} < r$ a bod *X* leží uvnitř *k*; leží-li *Y* na prodloužení úsečky *AB*, je $\overline{SY} > r$ a bod *Y* leží vně *k*.



Obr. 46a.



Obr. 46b.



Obr. 46c.

Nyní zkoumejme přímku *p*, která neprochází středem *S* kružnice *k*. Spusťme z bodu *S* kolmici $SP \perp p$ a označme *P* její patu, takže $d = \overline{SP}$ je vzdálenost přímky *p* od středu *S* kružnice *k*. Rozeznávejme tři případy: 1. $d > r$ (obr. 46a), 2. $d = r$ (obr. 46b), 3. $d < r$ (obr. 46c).

V případě 1. je $\overline{SP} > r$ a pro každý jiný bod *X* přímky *p* podle $\mathbf{P}_5^8$ je tím spíše $\overline{SX} > r$. Tedy:

P_2^9. Je-li vzdálenost přímky *p* od středu kružnice *k* větší než poloměr, leží celá přímka *p* vně kružnice *k*. Taková přímka *p* se jmenuje nesečna kružnice *k*.

V případě 2. je $\overline{SP} = r$, ale pro každý jiný bod X přímky p podle P_5^8 jest $\overline{SX} > r$. Tedy:

P_3^9. Je-li vzdálenost přímky *p* od středu *S* kružnice *k* rovna poloměru, potom pata *P* kolmice spuštěné z bodu *S* na přímku *p* leží na kružnici *k*, ale všecky ostatní body přímky *p* leží vně kružnice *k*. Taková přímka *p* se jmenuje tečna kružnice *k* a bod *P* je její bod dotyku. Také říkáme, že *p* je tečna kružnice *k* v bodě *P* této kružnice a že se přímka *p* dotýká kružnice v bodě *P*. Zároveň vidíme, že platí tato poučka:

P_4^9. Je-li *P* libovolný bod kružnice *k*, potom tečna kružnice *k* v bodě *P* je kolmice vztyčená v bodě *P* na přímku spojující *P* se středem kružnice.

V případě 3. je $\overline{SP} < r$. Podle prvního konstruktivního axiomu P_1^9 jsou na přímce p dva body A, B tak, že $\overline{SA} = r$, $\overline{SB} = r$. Z P_5^8 plyne, že pro vnitřní body X úsečky AB platí $\overline{SX} < r$, kdežto pro body Y na prodloužení úsečky AB platí $\overline{SY} > r$. Tedy:

P_5^9. Je-li vzdálenost přímky *p* od kružnice *k* menší než poloměr, má přímka *p* s kružnicí *k* dva společné body *A*, *B*. Vnitřní body úsečky *AB* leží uvnitř *k*. Body na prodloužení úsečky *AB* leží vně *k*. Taková přímka *p* se jmenuje **sečna kružnice** *k* a úsečka *AB* se jmenuje **tětiva kružnice** *k*. Říkáme, že sečna kružnici protíná (ve dvou bodech), kdežto tečna se kružnice dotýká (v jednom bodě).

Všimněte si, že poučka P_5^9 platí také pro přímky procházející středem, které proto také počítáme mezi sečny.

P_6^9. Leží-li bod *C* uvnitř kružnice *k*, potom každá přímka *p* procházející bodem *C* protne kružnici *k* ve dvou bodech.

Důkaz: Ani nesečna ani tečna neobsahuje žádný bod uvnitř *k*, proto přímka *p* musí býti sečnou.

V tomto článku jste se seznámili s těmito geometrickými názvy:

První konstruktivní axiom — nesečna kružnice — tečna kružnice, její bod dotyku — sečna a tětiva kružnice — sečna kružnici protíná ve dvou bodech — tečna se kružnice dotýká v jednom bodě.

Cvičení.

65. Je dána přímka p a bod A, který má od přímky p vzdálenost 39 mm. Rozhodněte, zda je možné na přímce p určit bod X tak, aby vzdálenost $\overline{AX}$ byla a) 47 mm, b) 39 mm, c) $38\frac{1}{2}$ mm. Kolik je takových bodů v jednotlivých případech? Jaká je poloha těchto bodů vzhledem k patě P kolmice spuštěné z bodu A na přímku p?
V případě a) leží hledaný bod X, o němž platí $\overline{AX} = 47$ mm, uvnitř úsečky YY', kde $\overline{PY'} = 8$ mm. Dokažte!

66. a) Je dána kružnice (S; 45 mm) a libovolný bod X tak, že $\overline{SX} =$ $= 21$ mm. Bodem X je vedena přímka XS, na které leží body A, B kružnice. Rozhodněte, zda bod X leží uvnitř průměru AB, a určete vzdálenosti $\overline{AX}$, $\overline{BX}$ (obr. 45).
b) Proveďte cvičení znovu pro bod X, jestliže je $\overline{SX} = 56$ mm.

67. V kružnici (S; 48 mm) je veden průměr AB. Dále je dán libovolný bod X, který neleží na přímce AB, při čemž vzdálenost $\overline{SX} = 29$ mm. a) Dokažte, že vzdálenosti $\overline{XA}$, $\overline{XB}$ jsou jistě menší než 77 mm, ale rozhodně větší než 19 mm. b) Kde by musil ležet bod X, aby bylo na př. $\overline{XA} = 77$ mm nebo aby bylo $\overline{XA} = 19$ mm?

68. Narýsujte kružnici (S; 29 mm) a zvolte libovolně body X, Y, ale tak, aby bylo $\overline{SX} = 62$ mm a $\overline{XY} = 31$ mm. Dokažte, že oba body X, Y leží vně dané kružnice! (Rozeznávejte dva případy: 1. body S, X, Y leží na téže přímce, 2. body S, X, Y neleží na téže přímce.)

69. Narýsujte přímku p a zvolte bod S tak, aby jeho vzdálenost od přímky p byla 5,8 cm. Kolem bodu S opište kružnici k o poloměru a) $r = 5$ cm, b) $r = 5{,}8$ cm, c) $r = 6{,}3$ cm. Před narýsováním kružnice k rozhodněte, zda bude přímka p sečnou nebo nesečnou nebo tečnou kružnice k. Jestliže zjistíte, že přímka p je tečnou kružnice k, potom dříve než kružnici opíšete, určete dotykový bod P. Ve kterém případě musíte užít prvního konstruktivního axiomu?

70. Kolem bodu S opište kružnici k poloměrem $r = 3{,}5$ cm. Na kružnici k zvolte bod A a sestrojte dva styčné úhly $\sphericalangle\, USA = 107°$ a $\sphericalangle\, ASV =$ $= 136°$. Průsečíky polopřímek SU, SV s kružnicí k označte B, C. Sestrojte v bodech A, B, C tečny kružnice.

71. Narýsujte přímku t a zvolte na ní bod T! Určete střed S kružnice k o poloměru $r = 2{,}7$ cm, která se dotýká přímky t v bodě T! (Takové kružnice jsou dvě.)

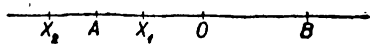
5. Eukleidovské konstrukce. (10)

Kolmici vztyčenou ve středu O úsečky AB na přímku AB jsme nazvali na str. 32 osou úsečky AB.

P_1^0. Střed O úsečky AB rozdělí přímku AB na dvě opačné polo-

přímky OA, OB. (1) Pro bod O platí $\overline{AO} = \overline{BO}$. (2) Pro vnitřní bod X polopřímky OA platí $\overline{AX} < \overline{BX}$. (3) Pro vnitřní bod Y polopřímky OB platí $\overline{AY} > \overline{BY}$.

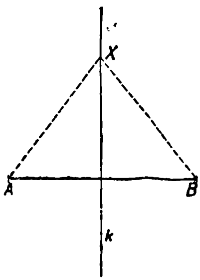
Důkaz. Tvrzení (1) je zřejmé a tvrzení (2), (3) se od sebe liší pouze výměnou názvů A, B obou daných bodů. Stačí proto dokázat tvrzení (2) (obr. 47). Mezi vnitřní body polopřímky OA patří nejprve bod A sám; jest $\overline{AA} = 0$, tedy $\overline{AA} < \overline{BA}$. Mezi vnitřní body polopřímky OA patří dále každý vnitřní bod X_1 úsečky OA. Jest $\overline{AX_1} < \overline{AO}$, $\overline{AO} = \overline{BO}$, $\overline{BO} < \overline{BX_1}$, tedy $\overline{AX_1} < \overline{BX_1}$. Mezi vnitřní body polopřímky OA patří posléze každý bod X_2 na prodloužení úsečky AB za bod A. Jest $\overline{AX_2} < \overline{OX_2}$, $\overline{OX_2} < \overline{BX_2}$, tedy $\overline{AX_2} < \overline{BX_2}$.



Obr. 47.

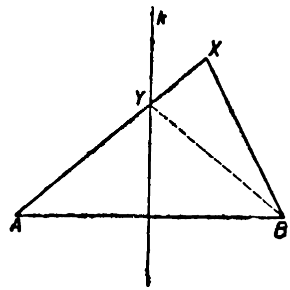
P_2^{10}. Pro každý bod X na ose úsečky AB platí $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Důkaz (obr. 48). Osu k úsečky AB zvolme za osu souměrnosti. Bod X je samodružný a obrazem bodu A podle P_6^7 je bod B. Proto $\overline{AX} = \overline{BX}$.



Obr. 48.

Je-li k osa úsečky AB, potom úsečka AB protne přímku k, a proto jsou body A, B od sebe odděleny přímkou k. Jestliže bod X neleží na ose k, potom je bod X přímkou k oddělen od jednoho z bodů A, B.



Obr. 49.

P_3^{10}. Je-li bod X oddělen od bodu A osou úsečky AB, jest $\overline{AX} > \overline{BX}$. Je-li X oddělen od bodu B osou úsečky AB, jest $\overline{AX} < \overline{BX}$.

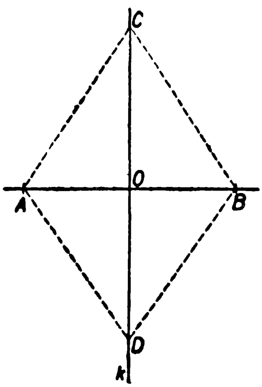
Důkaz stačí provésti pro první tvrzení. Leží-li X na přímce AB, plyne výsledek z P_1^{10}. Proto zkoumejme (obr. 49) bod X mimo přímku AB, který je oddělen od A osou k úsečky AB. Úsečka AX protne přímku k v bodě Y. Jest $\overline{AY} = \overline{BY}$ podle P_2^{10}. Avšak $\overline{AX} = \overline{AY} + \overline{YX}$, a proto $\overline{AX} = \overline{BY} + \overline{YX}$. Trojúhelník $\triangle BXY$ podle P_7^8 dá $\overline{BY} + \overline{YX} > \overline{BX}$, a proto $\overline{AX} > \overline{BX}$.

Z P_3^{10} plyne, že poučku P_2^{10} můžeme obrátit:

P_4^{10}. Je-li $\overline{AX} = \overline{BX}$, musí bod X ležet na ose úsečky AB.

Neboť jinak by X byl osou oddělen buď od A nebo od B a podle $\mathbf{P}_3^{10}$ by bylo v prvním případě $\overline{AX} > \overline{BX}$, ve druhém $\overline{AX} < \overline{BX}$.

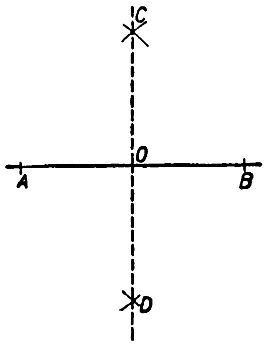
Osu úsečky AB můžeme sestrojit tak, že rozpůlíme úsečku AB, třeba zkusmo, a potom vztyčíme kolmici pomocí trojúhelníkových pravítek. To umíme již z první třídy. Nyní se naučíme jiné konstrukci osy úsečky, ve které se neužívá půlení zkusmo a ve které se také neužívá pravého úhlu na našich pravítkách. Konstrukce, které se naučíme, pochází ze starověku. Ve starém Řecku byla geometrie na velké výši a kolem r. 300 př. n. l. napsal řecký geometr Eukleides, který žil v Alexandrii v Egyptě, knihu s názvem Základy (řecky Stoicheia, latinsky Elementa), která se stala nejrozšířenější vědeckou knihou vůbec a měla nesmírný vliv na vývoj matematiky. Staří Řekové neznali papír; své konstrukce prováděli na voskových deskách nebo na uhlazeném písku. Veškeré konstrukce zakládali pouze na těchto prostředcích:



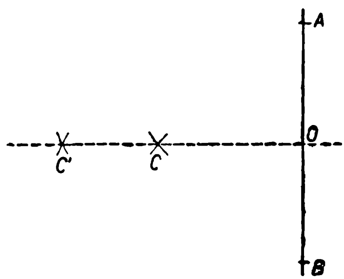
Obr. 50.

1. spojit dva body přímkou,
2. narýsovat kružnici s daným středem a poloměrem,
3. určit průsečíky narýsovaných přímek a kružnic.

Takovým konstrukcím říkáme **eukleidovské konstrukce.** Provedeme si eukleidovskou konstrukci osy úsečky AB. Mysleme si nejprve (obr. 50), že osa k je již sestrojena. Jest $k \perp AB$ a přímka k prochází středem O úsečky AB. Je tedy O pata kolmice spuštěné z bodu A na přímku AB. Zvolíme-li si libovolnou délku r větší než $\overline{AO}$, t. j. větší než polovina úsečky AB, potom podle $\mathbf{P}_1^9$ jsou na přímce k právě dva body C, D tak, že $\overline{AC} = r$, $\overline{AD} = r$. Podle $\mathbf{P}_2^{10}$ je také $\overline{BC} = r$, $\overline{BD} = r$. Mimo osu k podle $\mathbf{P}_4^{10}$ není už v rovině žádný jiný bod X, pro který by platilo $\overline{AX} = r$, $\overline{BX} = r$. Z toho plyne, že opíšeme-li kolem bodů A, B dvě kružnice k_1, k_2 s týmž poloměrem r, protnou se tyto kružnice v bodech C, D a nemají žádný jiný společný bod. Jakmile máme body C, D, pak žádaná osa je přímka CD. Tím dostáváme hledanou eukleidovskou konstrukci osy úsečky AB: Kolem bodů A, B opíšeme týmž poloměrem r dvě kružnice; poloměr r musí však býti větší než polovina úsečky AB. Obě kružnice mají dva společné body C, D a přímka CD je hledaná osa úsečky AB. Při praktickém provedení volíme poloměr r rovný aspoň třem čtvrtinám úsečky AB; je-li poloměr příliš malý, jsou body C, D příliš blízko sebe a konstrukce je nepřesná. Poloměr r nesmí také býti příliš velký, aby body C, D nevyšly z mezí nákresny. Kružnice nerýsujeme celé, nýbrž pouze malé obloučky v blízkosti průsečíků C, D (obr. 51). Je-li přímka AB blízko okraje nákresny, bude jeden z bodů C, D, třeba D,



Obr. 51.



Obr. 52.

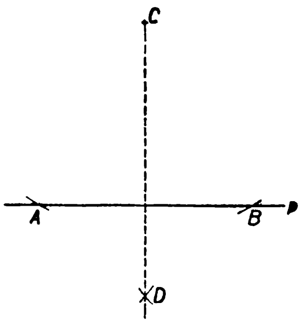
mimo nákresnu (obr. 52). Pomůžeme si tím, že rýsujeme znovu kolem bodů A, B kružnice zase týmž, ale větším poloměrem r', a dostaneme další bod C'; hledaná osa je přímka CC'.

Eukleidovská konstrukce středu O úsečky AB záleží v tom, že najdeme osu CD úsečky AB a určíme její průsečík O s přímkou AB. Z přímky CD přitom rýsujeme pouze malou část v blízkosti bodu O.

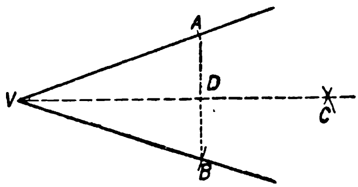
Eukleidovská konstrukce kolmice k vztyčené k přímce AO v bodě O této přímky se provádí takto (obr. 51, 52): Na prodloužení úsečky AO za bod O určíme kružítkem bod B tak, že $\overline{AO} = \overline{OB}$; osa úsečky AB je hledaná kolmice k. Protože jeden bod O kolmice k již známe, stačí narýsovat jen bod C; bodů D nebo C' není třeba, můžeme jich však užít ke kontrole přesnosti.

Snadno provedeme také eukleidovskou konstrukci kolmice spuštěné k přímce p z bodu C (obr. 53). Kolem bodu C opíšeme kružnici s poloměrem r větším než je vzdálenost bodu C od přímky p a označíme A, B její průsečíky s přímkou p. Podle $\mathbf{P}^{10}_{4}$ osa úsečky AB, kterou umíme eukleidovsky sestrojit, prochází bodem C. Protože osa úsečky AB je mimo to kolmá na AB, splyne s hledanou kolmicí. Protože jeden bod C kolmice už známe, stačí známým způsobem sestrojit jediný její další bod D.

Eukleidovská konstrukce osy dutého úhlu s vrcholem V dá se provésti takto (obr. 54):



Obr. 53.

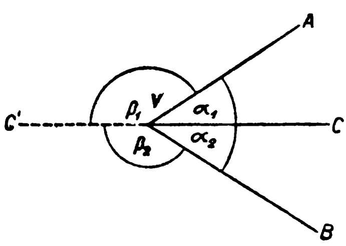


Obr. 54.

Nejprve si kružítkem určíme na ramenech daného úhlu body A, B tak, že $\overline{VA} = \overline{VB}$. Je-li D střed úsečky AB, potom z $\mathbf{P}^{8}_{3}$ soudíme jednak, že žádaná osa úhlu je polopřímka VD, jednak, že přímka VD je osou úsečky AB, takže ji umíme eukleidovsky sestrojit. Protože bod V známe, stačí sestrojit jediný další bod C.

Touž konstrukcí dostaneme také osu vypuklého úhlu, neboť platí poučka:

$\mathbf{P}^{10}_{5}$. Jestliže polopřímka VC je osou dutého úhlu $\sphericalangle AVB$, potom opačná polopřímka VC' je osou vypuklého úhlu s týmiž rameny VA, VB.



Obr. 55.

Důkaz (obr. 55). Víme, že $\alpha_1 = \alpha_2$, a máme dokázati, že také $\beta_1 = \beta_2$. Avšak podle $\mathbf{P}^{4}_{2}$ jest $\beta_1 = 2R - \alpha_1$, $\beta_2 = 2R - \alpha_2$. Protože $\alpha_1 = \alpha_2$, musí býti $\beta_1 = \beta_2$.

Další eukleidovské konstrukce poznáme později.

Geometrické názvy, s kterými jste se seznámili v tomto článku:

Eukleides a jeho Základy (Elementa, Stoicheia) — eukleidovské konstrukce.

Cvičení.

72. Na dané přímce AB zvolte bod X! Jestliže bod X je bodem úsečky AB, potom platí $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AB}$. Která rovnost platí o velikostech úseček AX, XB, AB, jestliže bod X je na prodloužení úsečky AB za bod a) A, b) B?

73. Co platí o velikosti stran AC, BC trojúhelníka ABC, jestliže osa k strany AB a) prochází bodem C; b) protíná stranu BC; c) protíná stranu AC? Co platí o úhlech α, β?

74. V kružnici (S; 4,5 cm) si zvolte tětivu AB, která neprochází středem S. Dokažte, že osa k tětivy AB prochází středem dané kružnice a půlí úhel $\sphericalangle ASB$. Odtud jen užitím dvou trojúhelníkových pravítek snadno narýsujete osu k dané tětivy AB.

75. Vysvětlete, kterým konstrukcím říkáme eukleidovské a na čí počest tyto konstrukce tak nazýváme?

Cvičení 76 až 80 proveďte eukleidovsky!

76. Narýsujte úsečku $\overline{AB} = 57$ mm ve čtyřech různých polohách a určete její osu! Popište tuto konstrukci!

77. Zvolte přímku p a na ní bod O; v bodě O vztyčte kolmici k k přímce p. Popište konstrukci!

78. S pomocí úhloměru narýsujte úhel: a) $\alpha = 81°$; b) $\beta = 155°$; c) $\gamma = 257°$ a sestrojte jeho osu! Který úhel jste tím zároveň rozpůlili? Popište konstrukci!

79. Narýsujte eukleidovsky pravý úhel a jeho polovinu!

80. Sestrojte eukleidovsky tyto úhly: $45°$; $22\frac{1}{2}°$; $135°$; $112\frac{1}{2}°$; $157\frac{1}{2}°$!

81. Cvičení č. 76 proveďte pro případ, kdy úsečka AB je blízko okraje nákresny!

82. Narýsujte dva vedlejší úhly $\alpha = \sphericalangle AOB$, $\beta = \sphericalangle BOC$ a sestrojte jejich osy OA', OB'. Dokažte, že je $OA' \perp OB'$. Jak tedy zní výsledná poučka?

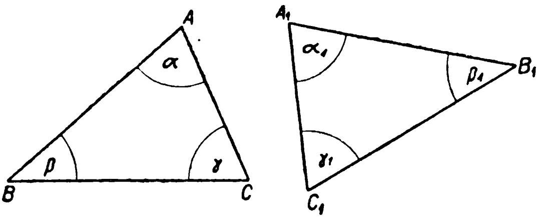
6. Shodné trojúhelníky. (11)

Ze všech shodných útvarů jsou nejdůležitější shodné trojúhelníky. V tomto článku i v dalším se naučíme, jak se pozná, že dva trojúhelníky jsou shodné. Takové dva shodné trojúhelníky vidíme v obr. 56a, 56b. Jeden na druhý lze položit tak, že vrchol A se kryje s vrcholem A_1, vrchol B s vrcholem B_1, vrchol C s vrcholem

C_1. To zapíšeme takto

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Znamení shodnosti je $\cong$. Vrcholy trojúhelníka ABC jsme mohli napsat v libovolném pořádku; místo $\triangle\ ABC$ jsme mohli napsat na př. $\triangle CAB$. Jakmile se však rozhodneme pro určitý pořádek vrcholů prvého trojúhelníka, je už tím předepsán i pořádek vrcholů trojúhelníka druhého, protože ze zápisu shodnosti trojúhelníků musí býti patrno, který vrchol s kterým vrcholem se bude krýt po přemístění. Proto shodnost našich trojúhelníků můžeme zapsati také



Obr. 56a. Obr. 56b.

$$\triangle CAB \cong \triangle C_1A_1B_1 \text{ nebo } \triangle BCA \cong \triangle B_1C_1A_1 \text{ a pod.}$$

Nesprávné by bylo v našem případě na př. $\triangle ABC \cong \triangle A_1C_1B_1$, protože strana AB se nemůže krýt se stranou A_1C_1, která je menší. Při zápise shodnosti trojúhelníků nezáleží na tom, který trojúhelník zapíšeme dřív, a proto můžeme psáti také na př.

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC.$$

U trojúhelníka měříme šest základních prvků: tři strany a tři úhly. U $\triangle ABC$ (obr. 56a) jsou to

$$a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ c = \overline{AB},$$
$$\alpha = \sphericalangle BAC,\ \beta = \sphericalangle ABC,\ \gamma = \sphericalangle ACB;$$

u $\triangle A_1B_1C_1$ (obr. 58b) jsou to

$$a_1 = \overline{B_1C_1},\ b_1 = \overline{A_1C_1},\ c_1 = \overline{A_1B_1},$$
$$\alpha_1 = \sphericalangle B_1C_1A_1,\ \beta_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1,\ \gamma_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1.$$

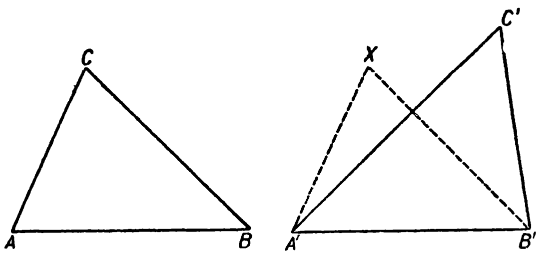
Jelikož $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$; jest

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1,\ \alpha = a_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1.$$

Z těchto šesti rovností můžeme obráceně soudit na shodnost $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Poučky o shodnosti trojúhelníků, které si odvodíme v tomto článku, ukazují, že i když nám není známo, že se každá strana a každý úhel jednoho trojúhelníka rovná straně nebo úhlu trojúhelníka druhého, nýbrž jen když z šesti shodností známe pouze některé tři (ne libovolné tři, ale vhodně volené tři), můžeme soudit na shodnost trojúhelníků.

$\mathbf{P}_1^{11}$. Jestliže v trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ jest $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, potom existuje jediný trojúhelník $\triangle A'B'X$ shodný s trojúhelníkem $\triangle ABC$, který má s $\triangle A'B'C'$ společnou stranu $A'B'$ a jehož třetí vrchol je v polorovině $A'B'C'$. Je-li $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, leží bod X na polopřímce $A'C'$. Je-li $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, leží bod X na polopřímce $B'C'$.

Důkaz. Podle axiomu shodnosti (str. 29) můžeme k $\triangle ABC$ jediným způsobem určit shodný obraz tak, že obrazem bodu A je bod A', že obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$ a že obrazem poloroviny ABC je polorovina $A'B'C'$. Bod B leží na polopřímce AB ve vzdálenosti $\overline{AB}$ od bodu A; jeho obraz leží na polopřímce $A'B'$ v téže vzdálenosti $\overline{AB}$ od obrazu A' bodu A. Protože $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jest B' obraz bodu B. Označme X (obr. 57a, b) obraz bodu C.



Obr. 57a. Obr. 57b.

Je tedy $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$ a bod X leží v polorovině $A'B'C'$. Protože při shodnosti se velikosti úhlů nemění, jest

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'X, \qquad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'X.$$

Je-li $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, musí oba úhly $\sphericalangle B'A'X$, $\sphericalangle B'A'C'$ splynout, a proto leží X na polopřímce $A'C'$. Podobně je-li $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'X$, musí oba úhly $\sphericalangle A'B'X$, $\sphericalangle A'B'C'$ splynout, a proto leží X' na polopřímce $B'C'$.

$\mathbf{P}_2^{11}$. Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném. To je poučka shodnosti sus (t. j. strana, úhel, strana).

Důkaz. V trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ budiž na př. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$. Ježto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, podle $\mathbf{P}_1^{11}$ můžeme v polorovině $A'B'C'$ určit bod X tak, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$. Ježto $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, podle $\mathbf{P}_1^{11}$ leží bod X na polopřímce $A'C'$. Ze shodnosti plyne $\overline{AC} = \overline{A'X}$; ježto $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, jest $\overline{A'X} = \overline{A'C'}$. Bod X tedy splyne s bodem C', takže $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

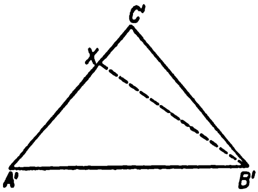
P$^{11}_{3}$. Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech k ní přilehlých. To je poučka shodnosti usu (t. j. úhel, strana, úhel).

Důkaz. V trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ budiž na př. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$; $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$. Ježto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, podle **P**$^{11}_{1}$ můžeme v polorovině $A'B'C'$ určit bod X tak, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$. Ježto $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, podle **P**$^{11}_{1}$ leží bod X i na polopřímce $A'C'$ i na polopřímce $B'C'$. Je tedy bod X průsečík přímek $A'C'$, $B'C'$, t. j. bod X splyne s bodem C' a jest $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

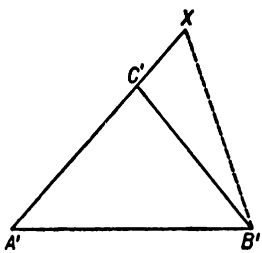
P$^{11}_{4}$. Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně, v jednom úhlu k ní přilehlém a v úhlu k ní protějším. To je poučka shodnosti suu (t. j. strana, úhel, úhel).

Důkaz. V trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ budiž na př. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$. Ježto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, podle **P**$^{11}_{1}$ můžeme v polorovině $A'B'C'$ určit bod X tak, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$. Ježto $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, podle **P**$^{11}_{1}$ leží bod X na polopřímce $A'C'$. Ze shodnosti plyne $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'XB'$. Protože $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, musí býti

$$\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A'XB'.$$



Obr. 58a.



Obr. 58b.

Z toho snadno usoudíme, že bod X musí splynout s bodem C'. Neboť kdyby body X, C' nesplynuly, ležel by bod X buďto uvnitř úsečky $A'C'$ (obr. 58a) nebo na prodloužení této úsečky za bod C' (obr. 58b). Avšak trojúhelník $\triangle B'C'X$ by podle **P**$^{8}_{11}$ (str. 39) dal v prvním případě $\sphericalangle A'XB' > \sphericalangle A'C'B'$, ve druhém $\sphericalangle A'C'B' > \sphericalangle A'XB'$, což je oboje nemožné. Tedy bod X splyne s bodem C' a máme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

P$^{11}_{5}$. Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech stranách. To je poučka shodnosti sss (t. j. strana, strana, strana).

Důkaz. V trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ budiž

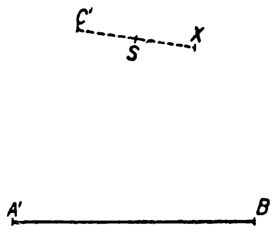
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} = \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Ježto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, podle **P**$^{11}_{1}$ můžeme v polorovině $A'B'C'$ určit bod X tak, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$. Ze shodnosti plyne $\overline{AC} = \overline{A'X}$, $\overline{BC} = \overline{B'X}$.

Ježto také $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, musí býti

$$\overline{A'C'} = \overline{A'X}, \qquad \overline{B'C'} = \overline{B'X}.$$

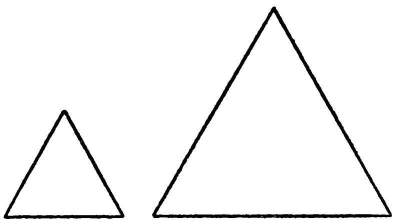
Kdyby body C', X nesplynuly (obr. 59), plynulo by z toho podle $\mathbf{P}_4^{10}$ (str. 45), že by oba body A', B' ležely na ose úsečky $C'X$, t. j. přímka $A'B'$ by byla osou úsečky $C'X$. To je nemožné, neboť osa úsečky $C'X$ prochází jejím středem S, který neleží na přímce $A'B'$.

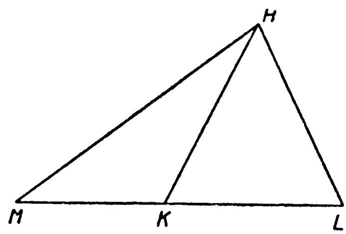


Obr. 59.

Trojúhelníky, které se shodují ve třech úhlech, nemusí býti shodné; poučka shodnosti uuu by byla nesprávná. Neboť z první třídy je vám známo, že každý úhel rovnostranného trojúhelníka se rovná 60°. Proto dva rovnostranné trojúhelníky se shodují ve všech úhlech, a přesto nemusí býti shodné (obr. 60).

Rovněž poučka shodnosti ssu by byla nesprávná; dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a v úhlu proti jedné


Obr. 60.



Obr. 61.

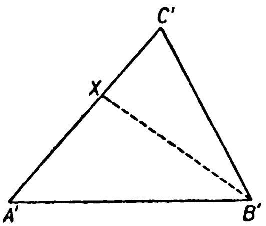
z nich, nemusí býti shodné. Zvolme na př. (obr. 61) rovnoramenný trojúhelník $\triangle HKL$ se základnou KL a bod M na prodloužení úsečky KL. Vzniknou dva trojúhelníky $\triangle MHK$, $\triangle MHL$, které mají společnou stranu MH, společný úhel při vrcholu M a strana HK prvního je rovna straně HL druhého. Přesto nejsou ty dva trojúhelníky shodné. Platí však poučka:

$\mathbf{P}_6^{11}$. Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich. To je poučka shodnosti Ssu (t. j. větší strana, menší strana, úhel).

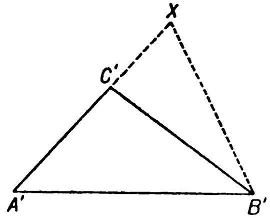
Důkaz. V trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ budiž

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \ \overline{BC} = \overline{B'C'}, \ \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C', \ \overline{BC} > \overline{AB},$$

tedy $\overline{B'C'} > \overline{A'B'}$. Ježto $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, podle $\mathbf{P}_1^{11}$ můžeme v polorovině $A'B'C'$ určit bod X tak, že $\triangle ABC \cong \triangle A'B'X$. Ježto $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, podle $\mathbf{P}_1^{11}$ leží bod X na polopřímce $A'C'$. Ze shodnosti plyne $\overline{BC} = \overline{B'X}$, takže jest $\overline{B'X} = \overline{B'C'}$, $\overline{B'X} > \overline{A'B'}$. Kdyby body C', X nesplynuly, ležel by bod X buďto uvnitř úsečky $A'C'$ (obr. 62a), nebo na jejím prodloužení za bod C' (obr. 62b). V obou případech by bylo $\overline{B'C'} = \overline{B'X}$, takže podle $\mathbf{P}_1^8$ (str. 34) a $\mathbf{P}_{10}^7$ (str. 34) bychom v $\triangle B'C'X$ měli ostré úhly při vrcholech C', X. Proto bychom podle $\mathbf{P}_3^4$ měli v prvém případě v $\triangle A'B'X$ při vrcholu X úhel tupý, ve druhém případě v $\triangle A'B'C'$ zase úhel tupý. Z toho by plynulo podle $\mathbf{P}_4^8$ v prvním případě $\overline{B'X} < \overline{A'B'}$, ve druhém $\overline{B'C'} < \overline{A'B'}$, a obojí je nemožné. Tedy bod X musí splynout s bodem C' a máme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Obr. 62a.



Obr. 62b.

Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili:

Shodné trojúhelníky — poučky shodnosti: sus, usu, suu, sss, Ssu — značka shodnosti.

Cvičení.

83. Vysvětlete, co znamená, že dva trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ jsou shodné!

84. Kolik je základních prvků u trojúhelníka $\triangle MNP$? Zapište je pomocí písmen M, N, P, jimiž jsou označeny vrcholy trojúhelníka.

85. O dvou trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle FDE$ víme, že je $\triangle ABC \cong \triangle FDE$. Narýsujte od ruky náčrtek těchto dvou trojúhelníků (jeden po případě zvolte libovolně a druhý narýsujte užitím průsvitného papíru); jejich strany označte a, b, c, f, d, e a úhly α, β, γ, φ, δ, ε!

a) Zapište všech šest rovností mezi základními prvky!

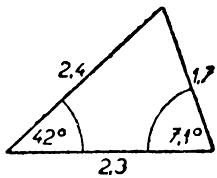
b) Ve svých obrázcích si dvě sobě rovné strany vyznačte stejnou značkou, na př. malým kroužkem, čtverečkem, trojúhelníčkem nebo tak, že je přetrhnete jednou kratičkou čarou, po případě dvěma nebo třemi kratičkými čarami. Totéž učiňte i na obloučcích sobě rovných úhlů! Z takto upraveného obrázku ihned vidíte, které základní prvky obou trojúhelníků jsou si rovny.

86. Víte-li, že je $\triangle MNP \cong \triangle TUV$, zapište shodnost těchto trojúhelníků ještě pěti jinými, a přece správnými způsoby!

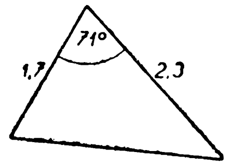
87. Jestliže je $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$, zjistěte, které z těchto zápisů jsou jistě správné: a) $\triangle LJK \cong \triangle ZYX$; b) $\triangle YXZ \cong \triangle KLJ$; c) $\triangle ZXY \cong \cong \triangle LJK$; d) $\triangle JKL \cong \triangle XZY$.

V následujících cvičeních 88 až 95 máte po každé hledati v obrazci dva shodné trojúhelníky podle poučky (sus) nebo (usu). Shodnost trojúhelníků správně zapište a po každé udejte značku poučky, podle které na shodnost usuzujete. Užijte názvů vrcholů. Zapište, kterých tří rovností mezi základními prvky obou trojúhelníků jste použili k vyšetření shodnosti. Jako důsledek shodnosti zapište ještě tři rovnosti mezi zbývajícími základními prvky. Narýsujte si vždy od ruky vlastní obrazce; sobě rovné prvky vyznačte nápadným způsobem, jak je uvedeno ve cvičení č. 85b. V tištěných obrázcích je jednotka jiná než 1 cm.

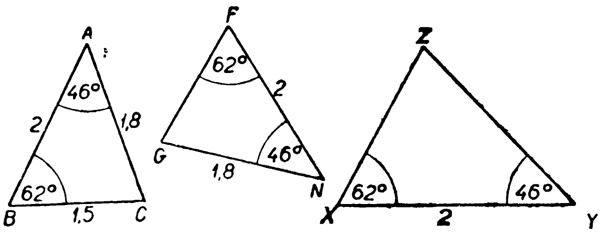
88. Viz obr. 63.
89. Viz obr. 64.
90. Viz obr. 65.
91. Viz obr. 66.
92. Viz obr. 67.
93. Viz obr. 68.
94. Viz obr. 69.



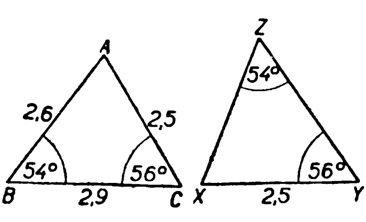
Obr. 63a.



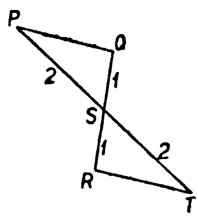
Obr. 63b.



Obr. 64.

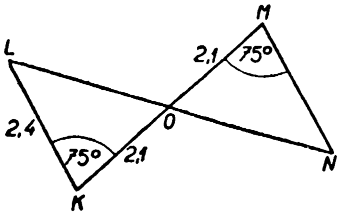


Obr. 65.

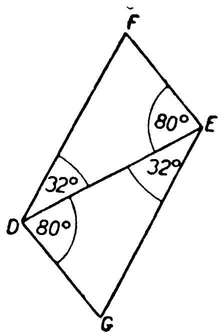


Obr. 66.

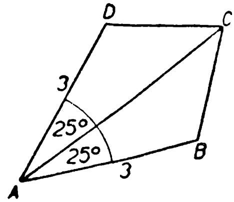
95. V obr. 70 máte po každé k trojúhelníku $\triangle ABC$ vyhledat shodný trojúhelník.



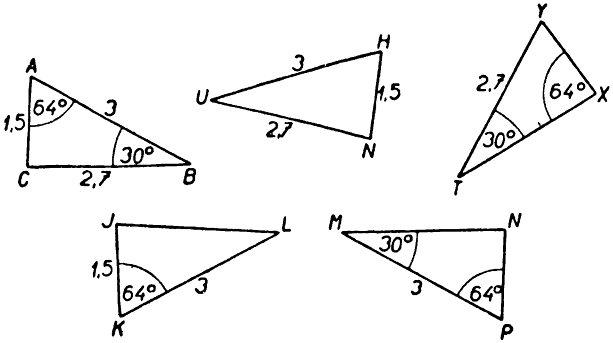
Obr. 67.



Obr. 68.



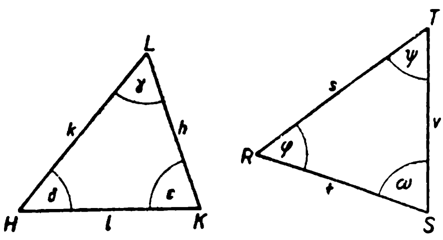
Obr. 69.



Obr. 70.

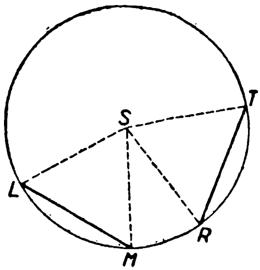
96. Trojúhelníky $\triangle MHK$, $\triangle MHL$ v obr. 61 se shodují ve společné straně MH, ve stranách $\overline{HK} = \overline{HL}$ a v úhlu $\sphericalangle HML$, tedy ve dvou stranách a v úhlu proti jedné z nich. Vysvětlete, proč přesto nejsou shodné. (Dokažte, že je $\overline{HM} > \overline{HK} = \overline{HL}$ a přečtěte si poučku Ssu!)

Cvičení 97 až 105 se vztahují k obr. 71, který není správně narýsován a vysvětluje pouze označení. Po každé si od ruky narýsujte vlastní obrazec jako ve cvičení č. 88. Potom rozhodněte, zdali oba trojúhelníky musí být shodné. V kladném případě zapište správně shodnost i značku poučky, podle které na shodnost usuzujete.
Jako důsledek zapište další tři rovnosti mezi zbývajícími základními prvky!

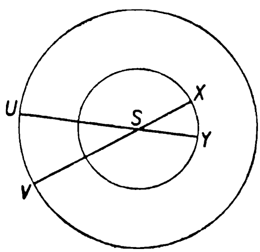


Obr. 71.

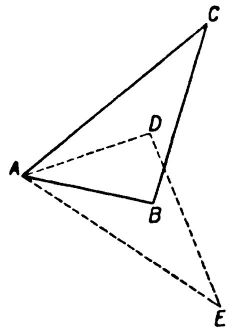
97. $l = t$, $k = s$, $\delta = \psi$.
98. $l = s$, $\delta = \psi$, $\varepsilon = \varphi$.
99. $l = t$, $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \psi$.
100. $\delta = \varphi$, $\varepsilon = \omega$, $\gamma = \psi$.
101. $k = v$, $h = t$, $\gamma = \omega$.
102. $h = t$, $\gamma = \omega$, $\delta = \psi$.
103. $h = s$, $l = t$, $k = v$.
104. $l = s$, $h = v$, $\delta = \varphi$.
105. $h = v$, $l = t$, $\delta = \varphi$, při čemž je $h > l$.
106. V obr. 72 je S střed kružnice k. Dokažte: a) Je-li $\overline{LM} = \overline{RT}$, je $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$. b) Je-li $\sphericalangle LSM = \sphericalangle RST$, je $\overline{LM} = \overline{RT}$ a $\overline{LR} = \overline{MT}$; proto je $\sphericalangle MLR = \sphericalangle MTR$.



Obr. 72.

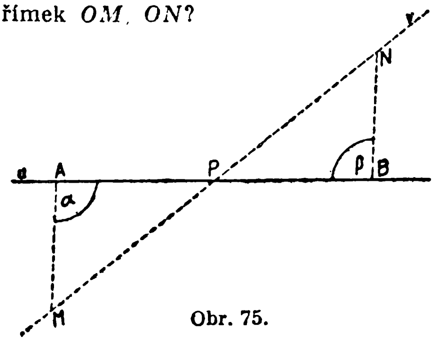


Obr. 73.



Obr. 74.

107. V obr. 73 je S střed obou kružnic. Dokažte, že je $\overline{UX} = \overline{VY}$.
108. V obr. 74 je $\triangle ABC \cong \triangle ADE$. Dokažte, že je $\overline{CD} = \overline{BE}$.
109. Narýsujte dutý úhel $\sphericalangle MON$ a sestrojte jeho osu OU. Z libovolného bodu A uvnitř osy OU spusťte kolmici na přímky OM, ON a označte B, C jejich paty. Dokažte, že je $\triangle OAB \cong \triangle OAC$! Co tedy platí o vzdálenostech bodu A od přímek OM, ON?
110. V obr. 75 je $\overline{AM} = \overline{BN}$ a $\alpha = \beta$; dokažte, že P je střed úsečky AB. Proveďte takto konstrukci středu P úsečky $\overline{AB} = 6{,}7$ cm, při čemž si zvolíte $\alpha = \beta = R$.
111. Narýsujte dvě různoběžky u, v (obr. 75), jejich průsečík označte P. Na přímce v zvolte body M, N tak, aby $\overline{PM} = \overline{PN} = 4{,}3$ cm. Označte A, B paty

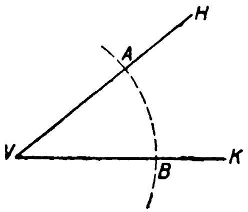


Obr. 75.

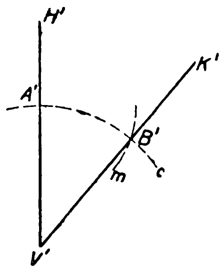
kolmic spuštěných z bodů M, N k přímce u. Nejsou-li přímky u, v k sobě kolmé, pak je $\overline{PA} = \overline{PB}$ a $\overline{MA} = \overline{NB}$; dokažte! Co když je $u \perp v$?

7. Přenášení úhlu. Konstrukce trojúhelníka. (12)

Budiž dán $\sphericalangle\, HVK$ (obr. 76). Zvolíme-li polopřímku $V'H'$ (obr. 76b), jakož i jednu polorovinu vyťatou přímkou $V'H'$, soudíme z axiomu shodnosti (str. 29), že ve zvolené polorovině lze určiti jediný $\sphericalangle\, H'V'K' = \sphericalangle\, HVK$ tak, aby jedním ramenem byla daná polopřímka $V'H'$. Sestrojení $\sphericalangle\, H'V'K'$ se nazývá přenesení úhlu $\sphericalangle\, HVK$. Přenesení $\sphericalangle\, HVK$ eukleidovskou konstrukcí jste poznali už v 1. třídě. Nyní si odůvodníme její správnost na základě pouček shodnosti. Kolem bodu V opíšeme s libovolným poloměrem kružnici (obr. 76a), která protne ramena VH, VK daného úhlu v bodech A, B. Kolem bodu V' opíšeme s týmž poloměrem kružnici c (obr. 76b), která protne zvolenou polopřímku $V'H'$ v bodě A' a dosud neznámou polopřímku $V'K'$ v bodě B', který tedy také je dosud neznámý. Podle poučky sus soudíme, že $\triangle VAB \cong \triangle V'A'B'$, a proto musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Hledaný bod B' tedy leží na kružnici m opsané kolem bodu A' poloměrem $\overline{AB}$. Obráceně, jestliže bod B' je ve zvolené polorovině a leží na obou kružnicích c, m, jest $\triangle VAB \cong \triangle V'A'B'$ podle poučky sss, a proto $\sphericalangle\, AVB = \sphericalangle\, A'V'B'$ neboli $\sphericalangle\, HVK = \sphericalangle\, H'V'K'$. Tím je odvozena správnost následující eukleidovské konstrukce přenesení úhlu HVK. Kolem bodu V opíšeme libovolnou kružnici, která protne ramena VH, VK v bodech A, B. S týmž poloměrem opíšeme kružnici c kolem bodu V', která protne zvolenou polopřímku VH v bodě A'. Dále opíšeme kolem bodu A' kružnici m s poloměrem rovným $\overline{AB}$. Obě kružnice c, m mají ve zvolené polorovině jediný průsečík B', a polopřímka $V'B'$ je hledané druhé rameno přeneseného úhlu.



Obr. 76a.



Obr. 76b.

Nyní si vyslovíme poučky o shodnosti trojúhelníků v poněkud pozměněném tvaru; pozměněné poučky budeme nazývat poučky určenosti trojúhelníků. Začneme poučkou sus:

$\mathbf{P}^{12}_{1}$. **Trojúhelník je určen, známe-li velikost dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného.** To je poučka určenosti sus.

Slova „trojúhelník je určen" neznamenají ovšem, že by byla určena poloha trojúhelníka. Určeny jsou pouze velikost a tvar trojúhelníka. Sestrojíme-li dva trojúhelníky s předepsanou velikostí dvou stran a úhlu jimi sevřeného, budou shodné a bude možné položit jeden na druhý tak, aby se navzájem kryly. Podobný smysl mají slova „trojúhelník je určen" v ostatních poučkách určenosti:

$\mathbf{P}^{12}_{2}$. **Trojúhelník je určen, známe-li velikost jedné strany a velikost obou úhlů přilehlých.** To je poučka určenosti usu.

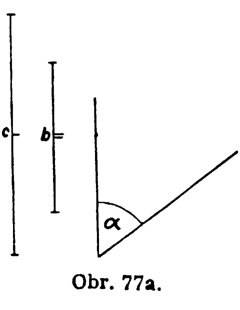
$\mathbf{P}^{12}_{3}$. **Trojúhelník je určen, známe-li velikost jedné strany, velikost jednoho úhlu přilehlého a velikost úhlu k ní protějšího.** To je poučka určenosti suu.

$\mathbf{P}^{12}_{4}$. **Trojúhelník je určen, známe-li velikost všech stran.** To je poučka určenosti sss.

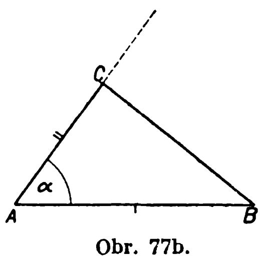
$\mathbf{P}^{12}_{5}$. **Trojúhelník je určen, známe-li velikost dvou stran a velikost úhlu proti větší z nich.** To je poučka určenosti Ssu.

Každé poučce určenosti odpovídá úloha sestrojit trojúhelník, jsou-li dány velikosti jeho tří prvků (stran nebo úhlů). Tyto úlohy se dají řešit eukleidovsky. Budeme je řešit tak, že si zvolíme také polohu jedné strany, jejíž velikost je předepsána; tuto stranu označíme AB. Aby poloha trojúhelníka byla zcela určitá, zvolíme si (viz $\mathbf{P}^{11}_{1}$) ještě polorovinu vyťatou přímkou AB a třetí vrchol C umístíme do zvolené poloroviny. V následujících obrazcích je poloha strany AB zvolena vodorovně a bod C je nad přímkou AB. Cvičte však tyto konstrukce také v jiných polohách!

Poučce sus odpovídá úloha: Sestrojit $\triangle ABC$, je-li dána (obr. 77a) velikost stran b, c a velikost úhlu α.



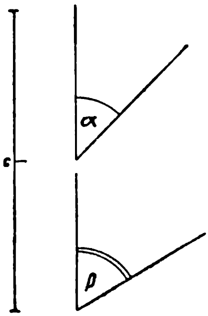
Obr. 77a.



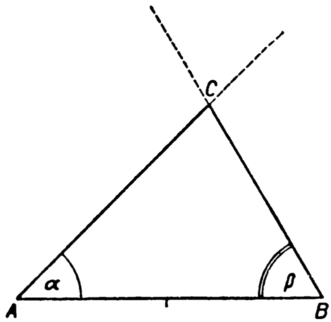
Obr. 77b.

Řešení (obr. 77b): Zvolíme úsečku AB rovnou c a zvolíme polorovinu vyťatou přímkou AB. Do zvolené poloroviny přeneseme eukleidovsky úhel α tak, aby jedním ramenem byla polopřímka AB. Kružnice opsaná kolem bodu A s poloměrem rovným b protne druhé rameno ve třetím vrcholu C žádaného $\triangle ABC$. Je zřejmé, že konstrukce je možná při libovolných velikostech b, c, α; úhel α ovšem musí býti dutý.

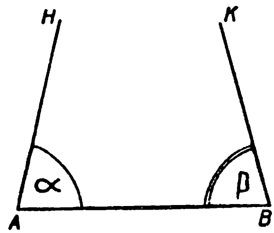
Poznámka. V obrazci 77a je úsečka c vyznačena jednou příčkou, úsečka b dvěma příčkami, úhel α obloučkem. V obr. 77b jsou vyznačeny stejnými značkami příslušné prvky $\triangle ABC$.



Obr. 78a.



Obr. 78b.



Obr. 79.

Poučce usu odpovídá úloha: Sestrojit $\triangle ABC$, je-li dána velikost strany c a velikost úhlů α, β (obr. 78a).

Řešení (obr. 78b): Zvolíme úsečku AB rovnou c a zvolíme polorovinu vyťatou přímkou AB. Do zvolené poloroviny přeneseme eukleidovsky úhly α, β tak, aby vrchol prvního byl v bodě A, vrchol druhého v bodě B a aby jedno rameno každého přeneseného úhlu obsahovalo úsečku AB. Druhá ramena přenesených úhlů se protnou ve třetím vrcholu žádaného $\triangle ABC$. Podle $\mathbf{P}_{10}^{8}$ (str. 38) tato konstrukce je možná pouze tehdy, jestliže $\alpha + \beta < < 2R$. Poučka $\mathbf{P}_{10}^{8}$ zaručuje pouze, že kdyby nebylo $\alpha + \beta < 2R$, konstrukce by byla nemožná. Jestliže však $\alpha + \beta < 2R$, je konstrukce vždycky možná. To plyne z poučky:

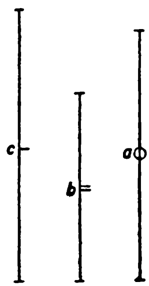
$\mathbf{P}_{6}^{12}$. Jestliže v téže polorovině vyťaté přímkou AB jsou dány úhly $\alpha = \sphericalangle BAH$, $\beta = \sphericalangle ABK$ a jestliže je $\alpha + \beta < 2R$, potom polopřímky AH, BK se protnou. (Obr. 79.)

Poučku $\mathbf{P}_6^{12}$ nelze dokázati na základě známých nám pouček; je to axiom, který nazveme **Eukleidův axiom.** Správnost Eukleidova axiomu je zřejmá z názoru, jestliže $\alpha + \beta$ je znatelně menší než $2R$. Eukleidův axiom má velký historický význam. Po více než 2 000 let se matematikové marně snažili poučku $\mathbf{P}_6^{12}$ dokázat z pouček nám známých. Slavný ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793—1856), zvaný Koperník geometrie, po prvé dokázal, že je to nemožné. Eukleidův axiom má velmi důležité důsledky, které budeme probírat ve třetím díle této učebnice.

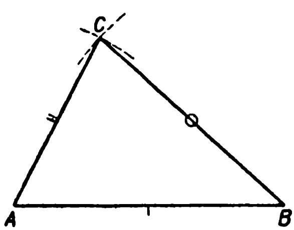
Konstrukci trojúhelníka odpovídající poučce suu, budeme probírati až v oddíle III (str. 76).

Poučce sss odpovídá úloha: Sestrojit $\triangle ABC$, je-li dána (obr. 80a) velikost všech tří stran a, b, c.

Řešení (obr. 80b): Zvolíme úsečku AB rovnou c a polorovinu vyťatou přímkou AB. Kolem bodu A opíšeme kružnici s poloměrem b; kolem bodu B opíšeme kružnici s poloměrem a. Obě kružnice mají uvnitř zvolené poloroviny jeden společný bod C, který je třetím vrcholem žádaného $\triangle ABC$. Podle $\mathbf{P}_6^8$ (str. 37) a $\mathbf{P}_7^8$ (str. 38) tato konstrukce je možná pouze tehdy, jestliže součet úseček a, b je větší než c a jestliže zároveň rozdíl úseček a, b je menší než c. Poučky $\mathbf{P}_6^8$, $\mathbf{P}_7^8$ zaručují pouze, že konstrukce je nemožná, nejsou-li tyto podmínky splněny. Jestliže však ty podmínky jsou splněny, je konstrukce vždycky možná. To plyne z poučky:



Obr. 80a.



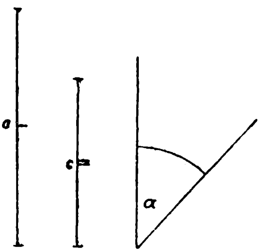
Obr. 80b.

$\mathbf{P}_7^{12}$. Jsou-li A, B dva různé body a jsou-li úsečky r_1, r_2 takové, že jejich součet je větší než $\overline{AB}$ a zároveň jejich rozdíl je menší než $\overline{AB}$, potom kružnice opsaná kolem A s poloměrem r_1 a kružnice opsaná kolem B s poloměrem r_2 mají dva společné body, a to po jednom uvnitř každé z obou polorovin vyťatých přímkou AB.

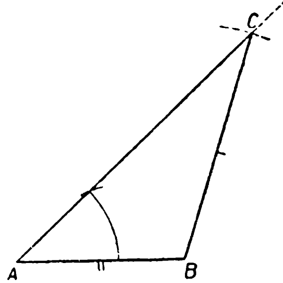
Přibližná správnost poučky $\mathbf{P}_7^{12}$ by se dala dokázat na základě pouček nám známých (viz odůvodnění přibližné správnosti poučky $\mathbf{P}_1^9$ na str. 42); nebudeme to však probírat. Přesná správnost poučky $\mathbf{P}_7^{12}$ se nedá dokázat na základě známých pouček. Je to axiom, který nazveme **druhým konstruktivním axiomem.** Můžeme jej vyslovit také takto:

$\mathbf{P}_8^{12}$. **Jestliže součet úseček *a*, *b* je větší než úsečka *c* a zároveň rozdíl úseček *a*, *b* je menší než úsečka *c*, potom existuje trojúhelník, jehož strany jsou rovny úsečkám *a*, *b*, *c*.**

Poučce Ssu odpovídá úloha: Sestrojit $\triangle ABC$, je-li dána (obr. 81a) velikost stran *a*, *c* a velikost úhlu α, při čemž je $a > c$.



Obr. 81a.



Obr. 81b.

Řešení (obr. 81b): Zvolíme úsečku AB rovnou c a polorovinu vyťatou přímkou AB. Do zvolené poloroviny přeneseme eukleidovsky úhel α tak, aby jedním ramenem přeneseného úhlu byla polopřímka AB. Kružnice opsaná kolem bodu B s poloměrem rovným dané úsečce a protne druhé rameno v jediném bodě C, který je třetím vrcholem žádaného $\triangle ABC$.

Tato konstrukce je vždy možná, je-li ovšem úhel α dutý. To se dá dokázat na základě prvního konstruktivního axiomu $\mathbf{P}_1^9$ (str. 42), ale nebudeme to probírat.

Přehled geometrických výrazů:

Přenášení úhlů — poučky určenosti: sus, suu, sss, Ssu — Eukleidův axiom — druhý konstruktivní axiom.

Cvičení.

112. Zvolte si úhel $\sphericalangle MVN = \omega$ a stranou polopřímku OA. Sestrojte graficky oba styčné úhly $\sphericalangle BOA$, $\sphericalangle COA$ tak, aby $\sphericalangle BOA = \omega$, $\sphericalangle COA = \omega$!

113. Zvolte si úhel $\sphericalangle KSL = \alpha$! Sestrojte úhel a) 2α, b) 3α. Kolik stupňů smí úhel α nejvýše měřit, nemá-li být úhel 3α větší než $4R$?

114. Narýsujte dosti velký trojúhelník $\triangle ABC$! Sestrojte graficky úhel $\alpha + \beta + \gamma$!

115. Narýsujte vypuklý úhel $\omega > 3R$; stranou si zvolte přímku VA a mimo ni bod P! Víte, že vypuklý úhel zaujímá jednu polorovinu a ještě část poloroviny opačné. Přeneste úhel ω do nové polohy ω' tak, aby polopřímka VA byla jedním jeho ramenem a aby úhel ω': a) zaujímal celou polorovinu VAP; b) nezaujímal celou polorovinu VAP.

116. Narýsujte dosti velký trojúhelník $\triangle ABC$ s tupým úhlem α; vypuklý úhel o ramenech AB, AC označte ψ! Sestrojte graficky tyto tři úhly: a) $2\beta + \gamma$; b) $\psi + \frac{1}{2}\alpha - 2\gamma$; c) $\beta + \frac{1}{2}\psi - \frac{3}{2}\gamma$.

117. Vysvětlete význam rčení „trojúhelník je určen, známe-li velikosti dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného“. Kolik je možno narýsovat trojúhelníků z těchto prvků? Co však o všech víme?

118. Vyslovte památný Eukleidův axiom a na obr. 79 vysvětlete, jak rozhodnete o tom, že se polopřímky AH, BK protnou!

119. Rozhodněte, zda se musí polopřímky AH, BK v obr. 79 protnout, jestliže je: a) $\sphericalangle\ HAB = 91°$, $\sphericalangle\ KBA = 88\frac{1}{2}°$; b) $\sphericalangle\ HAB = 99\frac{1}{2}°$, $\sphericalangle\ KBA = 80\frac{1}{2}°$; c) $\sphericalangle\ HAB = 99°$, $\sphericalangle\ KBA = 81\frac{1}{2}°$. Co můžete říci ve cvičení č. 119c o polopřímkách AH', BK', které jsou opačné k polopřímkám AH, BK?

120. Od ruky narýsujte trojúhelník $\triangle ABC$ a vyznačte v něm nápadně takové tři základní prvky, aby jimi byl trojúhelník určen podle poučky určenosti: a) sus, b) usu, c) suu, d) sss, e) Ssu! Ve všech těchto úlohách s výjimkou cvičení 120c, udejte podmínky, které musí splňovat tři vyznačené základní prvky, aby bylo možné z nich sestrojit trojúhelník.

Ve cvičeních 121 až 125 máte sestrojit trojhelník $\triangle ABC$ podle daných údajů. Obrazce rýsujte podle vzorů uvedených v učebnici (viz obr. 77, 78, 80, 81)! Před provedením konstrukce si vždy zkratkou do sešitu zapište, které poučce určenosti úloha odpovídá; potom rozhodněte, zda je konstrukce možná.

121. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů!

a) $b = 57$ mm, $c = 48$ mm, $\alpha = 42°$. Změřte a, β, γ!
b) $a = 85$ mm, $c = 52$ mm, $\beta = 113°$. Změřte b, α, γ!
c) $a = 36$ mm, $b = 66$ mm, $\gamma = 147°$. Změřte c, α, β!
d) $a = 73$ mm, $b = 43$ mm, $\gamma = 25°$. Změřte c, α, β!

122. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů!

a) $c = 72$ mm, $\alpha = 43°$, $\beta = 59°$. Změřte a, b, γ!
b) $a = 35$ mm, $\beta = 126°$, $\gamma = 34°$. Změřte b, c, α!
c) $b = 43$ mm, $\alpha = 27°$, $\gamma = 132°$. Změřte a, c, β!
d) $a = 69$ mm, $\beta = 83°$, $\gamma = 42°$. Změřte b, c, α!

123. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů; po každé změřte všecky strany a úhly!

a) $a = 83$ mm, $b = 57$ mm, $\alpha = 153°$.
b) $b = 64$ mm, $c = 42$ mm, $\beta = 37°$.
c) $c = 8$ cm, $a = 7$ cm, $\gamma = 35°$.

124. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů a pokaždé změřte α, β a γ!
a) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.
b) $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, $c = 54$ mm.
c) $a = 9$ cm, $b = 58$ mm, $c = 46$ mm.
d) $a = 37$ mm, $b = 7$ cm, $c = 54$ mm.

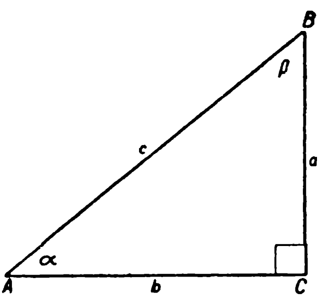
125. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC podle daných údajů! Základna je BC.
a) $b = 6$ cm, $\gamma = 45°$.
b) $a = 5$ cm, $\beta = 65°$.
c) $a = 7$ cm, $c = 4,5$ cm.

126. Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož strana je 6,3 cm!

127. Zvolte body A, B tak, aby $\overline{AB} = 7,3$ cm. Určete v rovině bod C tak, aby $\overline{AC} = 3,9$ cm a $\overline{BC} = 5,2$ cm! a) Takové body jsou dva. Dokažte! b) Jsou-li C, C' hledané body, potom přímka AB je osou úsečky CC'. Dokažte to!

8. Shodnost a určenost pravoúhlých trojúhelníků. (13)

U pravoúhlých $\triangle ABC$ (obr. 82) volíme označení nejčastěji tak, že pravý úhel je při vrcholu C. Je tedy $\gamma = R$, c je přepona, a, b jsou odvěsny; úhly α, β jsou ostré podle $\mathbf{P}^{7}_{8}$ (str. 33). Podle $\mathbf{P}^{8}_{4}$ (str. 37) jest $c > a$, $c > b$.



Obr. 82.

Z obecných pouček shodnosti trojúhelníků plynou následující poučky shodnosti pravoúhlých trojúhelníků.

$\mathbf{P}^{13}_{1}$. **Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v obou odvěsnách.** Plyne z poučky sus.

$\mathbf{P}^{13}_{2}$. **Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné odvěsně a v přilehlém ostrém úhlu.** Plyne z poučky usu.

$\mathbf{P}^{13}_{3}$. **Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné odvěsně a v protějším ostrém úhlu.** Plyne z poučky suu.

P^{13}_{4}. Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v přeponě a v jednom přilehlém (ostrém) **úhlu.** Plyne opět z poučky suu.

P^{13}_{5}. Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v přeponě a v jedné odvěsně. Plyne z poučky Ssu.

Také tyto poučky si vyslovíme znovu ve tvaru pouček určenosti.

P^{13}_{6}. Pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li velikost obou odvěsen.

P^{13}_{7}. Pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li velikost jedné odvěsny a přilehlého ostrého úhlu.

P^{13}_{8}. Pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li velikost jedné odvěsny a protějšího ostrého úhlu.

P^{13}_{9}. Pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li velikost přepony a jednoho přilehlého (ostrého) **úhlu.**

P^{13}_{10}. Pravoúhlý trojúhelník je určen, známe-li velikost přepony a jedné odvěsny.

Všecky tyto poučky lze shrnouti v jedinou: pravoúhlý trojúhelník je určen, jsou-li známy velikosti kterékoli dvojice vybrané z pěti prvků c, a, b, α, β, vyjma dvojici α, β. Zvolené velikosti mohou býti libovolné; jenom v případě $\mathbf{P}^{13}_{10}$ musí býti přepona větší než odvěsna.

Každé z pouček $\mathbf{P}^{13}_{6}$ až $\mathbf{P}^{13}_{10}$ odpovídá úloha sestrojit eukleidovsky pravoúhlý trojúhelník ze dvou daných prvků. Vyložte sami, jak se provádějí konstrukce odpovídající poučkám $\mathbf{P}^{13}_{6}$, $\mathbf{P}^{13}_{7}$, $\mathbf{P}^{13}_{9}$, $\mathbf{P}^{13}_{10}$! U poučky $\mathbf{P}^{13}_{10}$ sestrojte trojúhelník tak, aby odvěsna měla předem zvolenou polohu! Později (str. 92) se naučíme, jak se sestrojuje pravoúhlý trojúhelník s danou velikostí přepony a jedné odvěsny, je-li předepsána poloha přepony. Později (str. 76) také poznáme, jak se provádí konstrukce odpovídající poučce $\mathbf{P}^{13}_{8}$.

V tomto článku nebyly zavedeny nové geometrické výrazy.

Cvičení.

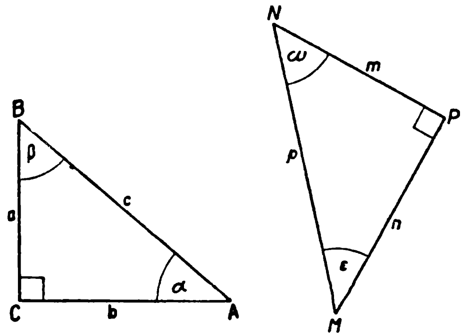
Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle MNP$ v obr. 83 nejsou přesně narýsovány. Víme o nich, že $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, při čemž je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle MPN = R$. Ve cvičeních č. 128 až 130 je udána jedna dvojice základních prvků, ve kterých se oba trojúhelníky shodují. Máte vyhledat a zapsat ještě jednu dvojici sobě rovných základních prvků, která by zaručovala, že oba trojúhelníky jsou shodné. To lze učinit zpravidla několika způsoby. Potom shodnost zapište, připojte k ní značku poučky shodnosti, které jste při tom použili a některou ze značek $\mathbf{P}_1^{13}$ až $\mathbf{P}_5^{13}$.

128. Je $a = m$.

129. Je $c = p$.

130. Je $\beta = \varepsilon$.

131. Vysvětlete, proč není možné, aby ve shodných pravoúhlých trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle MNP$ v obr. 83, kde $\sphericalangle\, ACB = \sphericalangle\, MPN = R$, platilo $c = n$!



Obr. 83.

132. V rovnoramenném trojúhelníku $\triangle ABC$ o základně BC spusťte z vrcholů B a C kolmice na protější strany a označte B', C' jejich paty. Dokažte, že je a) $\overline{BB'} = \overline{CC'}$, b) $\sphericalangle\, ABB' = \sphericalangle\, ACC'$, d) $\overline{AB'} = \overline{AC'}$.

133. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC podle daných údajů ($\sphericalangle\, ACB = R$). Zároveň vždy uveďte, které poučce určenosti pravoúhlého trojúhelníka odpovídá daná dvojice základních prvků!

a) $a = 3{,}5$ cm, $b = 4{,}8$ cm.
b) $a = 6$ cm, $\beta = 32°$.
c) $c = 8$ cm, $\beta = 39°$.
d) $a = 72$ mm, $c = 81$ mm.
e) $b = 5{,}4$ cm, $\alpha = 56°$.
f) $b = 4{,}3$ cm, $c = 7{,}5$ cm.

134. Dokažte, že pravoúhlý trojúhelník $\triangle ABC$, v němž je $\sphericalangle\, ACB = R$, může být rovnoramenný jen tím způsobem, že $\overline{AC} = \overline{BC}$! Potom narýsujte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $\triangle HKL$, v němž je $\sphericalangle\, KLH = R$ a $\overline{KL} = 4{,}7$ cm!

III. ROVNOBĚŽKY A ROVNOBĚŽNÍKY.

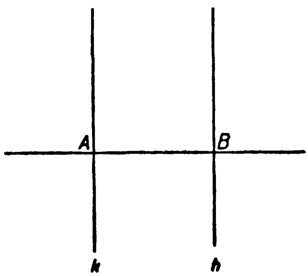
1. Důsledky Eukleidova axiomu. (14)

$\mathbf{P}_1^{14}$. Buďtež A, B dva různé body. Kolmice k, h vztyčené v bodech A, B na přímku AB jsou spolu rovnoběžné.

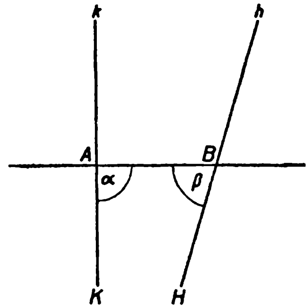
Důkaz (obr. 84). Kdyby přímky k, h měly společný bod C, vznikl by $\triangle ABC$ se dvěma pravými úhly, což je nemožné podle $\mathbf{P}_8^7$ (str. 33). Tedy přímky k, h nemají žádný společný bod a jsou rovnoběžné.

$\mathbf{P}^{14}_{2}$. Buďtež A, B dva různé body. Veďme bodem A kolmici k na přímku AB; bodem B veďme přímku h, která nestojí kolmo na přímce AB. Potom přímky k, h jsou navzájem různoběžné.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, jestliže přímka h splyne s přímkou AB. Jestliže přímka h nesplyne s přímkou AB (obr. 85), usuzujeme takto: V každé z obou polorovin vyťatých přímkou AB vznikne úhel, jehož jedním ramenem je polopřímka BA a jehož druhé rameno je částí přímky h. Tyto dva úhly nejsou pravé a jsou vedlejší, proto podle $\mathbf{P}^{4}_{3}$ (str. 21) jeden z nich je ostrý. Tento ostrý úhel budiž $\beta = \sphericalangle ABH$. Na přímce k zvolme bod K v polorovině ABH, takže úhel $\alpha = \sphericalangle BAK$ je pravý. Je tedy $\alpha = R$, $\beta < R$, takže $\alpha + \beta < 2R$, a proto podle Eukleidova axiomu $\mathbf{P}^{12}_{6}$ (str. 60) mají polopřímky AK, BH společný bod C. Bod C leží na obou přímkách k, h, které jsou zřejmě různé. Tedy k, h jsou různoběžky.



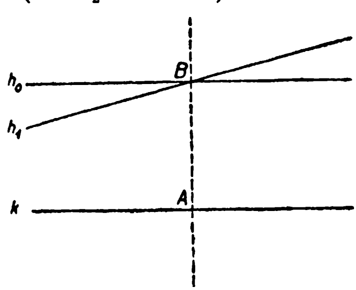
Obr. 84.



Obr. 85.

$\mathbf{P}^{14}_{3}$. Daným bodem B lze vésti k dané přímce k jedinou rovnoběžku.

Důkaz. Jestliže bod B leží na přímce k, je zřejmě přímka k jediná rovnoběžka vedená bodem B s přímkou k. Jestliže bod B neleží na přímce k (obr. 86), spusťme z něho kolmici na přímku k (viz $\mathbf{P}^{7}_{2}$ na str. 31) a označme A její patu. Je-li h_0 kolmice vztyčená v bodě B na přímku BA, je h_0 rovnoběžná s přímkou k podle $\mathbf{P}^{4}_{1}$. Je-li však h_1 kterákoli jiná přímka vedená bodem B, je h_1 různoběžná s přímkou k podle $\mathbf{P}^{14}_{2}$. Tedy h_0 je jediná rovnoběžka s přímkou k vedená bodem B.



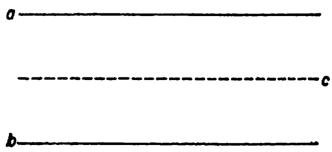
Obr. 86.

$\mathbf{P}^{14}_{4}$. Jsou-li dvě přímky a, b rovnoběžné s třetí přímkou c, jsou přímky a, b spolu rovnoběžné.

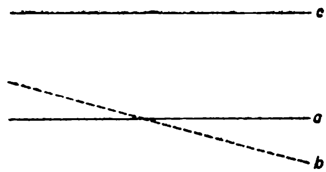
Důkaz. To je zřejmé, jestliže přímky a, b splynou. Jestliže však přímky a, b nesplynou (obr. 87), nemohou mít žádný společný bod C, neboť bodem C podle $\mathbf{P}^{14}_{3}$ prochází jediná rovnoběžka s přímkou c. Proto přímky a, b nemají žádný společný bod a jsou spolu rovnoběžné.

$\mathbf{P}^{14}_{5}$. Jsou-li a, c rovnoběžky a jestliže přímka b protne přímku a, pak přímka b protne také přímku c.

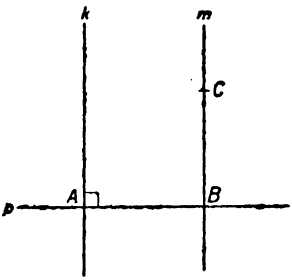
Důkaz (obr. 88). Kdyby přímky b, c byly rovnoběžky, pak by podle $\mathbf{P}^{14}_{4}$ také a, b byly rovnoběžky, což je nemožné.



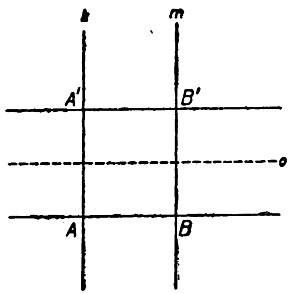
Obr. 87.



Obr. 88.



Obr. 89.



Obr. 90.

$\mathbf{P}^{14}_{6}$. Jsou-li k, m rovnoběžky a stojí-li přímka k kolmo na přímce p, stojí také přímka m kolmo na přímce p.

Důkaz. To je zřejmé, jestliže rovnoběžky k, m splynou. Jestliže rovnoběžky k, m nesplynou (obr. 89), nemají žádný společný bod. Budiž A průsečík kolmic k, p. Bodem C libovolně zvoleným na přímce m můžeme podle $\mathbf{P}^{7}_{2}$ vésti kolmici h na přímku p; budiž B průsečík přímek h, p. Podle $\mathbf{P}^{14}_{1}$ jsou přímky k, h spolu rovnoběžné. Tedy bodem C procházejí přímky m, h, které obě jsou rovnoběžné s přímkou k, takže přímky m, h splynou podle $\mathbf{P}^{14}_{3}$. Tedy přímka m je kolmá na přímku p.

$\mathbf{P}^{14}_{7}$. Jsou-li k, m rovnoběžky, mají všecky body přímky m stejnou vzdálenost v od přímky k; v je zároveň vzdálenost všech bodů k od přímky m. Říkáme, že v je **vzdálenost rovnoběžek k, m.**

Důkaz. Jestliže rovnoběžky k, m splynou, vzdálenost v je v tomto případě rovna nule. Jestliže rovnoběžky k, m nesplynou (obr. 90), zvolme bod B

libovolně na přímce m. Jeho vzdálenost od přímky k je rovna $\overline{AB}$, je-li A pata kolmice spuštěné z bodu B na přímku k. Podle $\mathbf{P}_6^{14}$ stojí také přímka m kolmo na přímce AB, takže $\overline{AB}$ je zároveň vzdálenost bodu A od přímky m. Je-li nyní B' kterýkoli jiný bod přímky m, budiž o osa úsečky BB'. Zvolíme-li o za osu souměrnosti, jest B' obrazem bodu B podle $\mathbf{P}_6^7$. Přímka BB' neboli přímka m stojí kolmo na o, takže podle $\mathbf{P}_6^{14}$ také rovnoběžka k stojí kolmo na o. Z bodu A lze spustit na přímku o jedinou kolmici (viz $\mathbf{P}_2^7$ na str. 31), která tedy splyne s k. Je-li však A' obraz bodu A, jest $AA' \perp o$ podle $\mathbf{P}_4^7$; proto bod A' leží na k. Ježto $\sphericalangle BAA' = R$ a velikost úhlu se při souměrnosti nemění, je také $\sphericalangle B'A'A = R$, t. j. $A'B' \perp k$, a proto $\overline{A'B'}$ je vzdálenost bodu B' od přímky k. Avšak $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. Tím je dokázáno, že body B, B', libovolně zvolené na přímce m, mají oba touž vzdálenost $\overline{AB}$ od přímky k. Stejně také dva body libovolně zvolené na přímce k mají oba touž vzdálenost od přímky m. Je-li nyní X libovolný bod přímky k, Y libovolný bod přímky m, je vzdálenost bodu Y od přímky k i vzdálenost bodu X od přímky m rovna vzdálenosti $\overline{AB} = m$.

$\mathbf{P}_8^{14}$. Jsou-li k, m rovnoběžky a je-li C libovolný bod v rovině, prochází bodem C jediná přímka t kolmá zároveň na k i na m. Jsou-li A, B průsečíky přímky t s přímkami k, m, je $\overline{AB}$ rovno vzdálenosti rovnoběžek k, m.

To plyne z $\mathbf{P}_2^7$, $\mathbf{P}_6^{14}$ a $\mathbf{P}_7^{14}$.

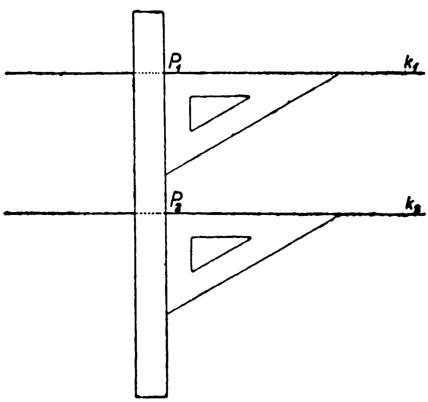
Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili:

Vzdálenost dvou rovnoběžek.

Cvičení.

135. Vysvětlete, proč v obr. 91 obě kolmice k_1, k_2, vztyčené na přímku P_1P_2 ve dvou různých bodech P_1, P_2 užitím trojúhelníkového pravítka jsou navzájem rovnoběžné! Uveďte důvod, proč nemohou mít společný bod!

136. Obr. 85 není přesně narýsován. Víme však, že kolmice AB vztyčená v bodě B na přímku k určuje s přímkou h úhel $\beta = 91°$. Dokažte, že přímky k, h jsou různoběžné a rozhodněte, zda jejich průsečík X leží v polorovině ABK nebo v polorovině k ní opačné.



Obr. 91.

137. Kolik rovnoběžek můžeme vést daným bodem B k dané přímce k? Jak je tomu v případě, že bod B leží na přímce k?

138. Máme-li bodem B, který na dané přímce k neleží (obr. 86), vést přímku $h_0 \parallel k$, můžeme si počínat takto: Užitím trojúhelníkových pravítek spustíme z bodu B na přímku k kolmici BA; potom vztyčíme kolmici $h_0 \perp BA$. Dokažte! Užijte tohoto postupu k sestrojení rovnoběžky na školním hřišti!

139. Narýsujte přímku $p \equiv ABC$; v bodech A, B, C vztyčte na přímku p kolmice a, b, c! Co soudíte o vzájemné poloze kterýchkoli dvou z přímek a, b, c?

140. Zvolte dva body A, B tak, aby byly odděleny danou přímkou p! Bodem A veďte přímku $a \parallel p$ a bodem B přímku $b \parallel p$! Přímky a, b jsou dvě různé rovnoběžky; proč?

141. Jsou-li v obr. 88 přímé čáry $a \parallel c$ obrazy dvou blízkých silnic na mapě a je-li přímá čára b obrazem přímé železniční trati, co soudíte o vzájemné poloze čar b a c?

142. Dvě rovnoběžné přímé silnice jsou v obr. 89 zobrazeny přímkami $k \parallel m$; třetí silnice zobrazená přímkou p se křižuje se silnicí k v bodě A pod pravým úhlem.
a) Vysvětlete, proč se přímky p, m musí protnout v určitém bodě B (viz $\mathbf{P}^{14}_{5}$). b) Proč je úhel $\sphericalangle ABC$ rovněž pravý? (Kolmice h vztyčená v bodě B na přímku p je rovnoběžná s k; ale $h \equiv m$ podle $\mathbf{P}^{14}_{3}$.)

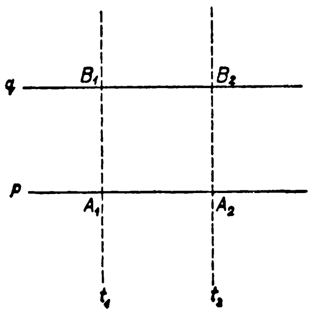
2. Rovnoběžky a úhly. (15)

Dva různé body A_1, A_2, zvolené na přímce p (obr. 92), určují v této přímce smysl A_1A_2 (viz str. 12). Je-li nyní q jiná přímka rovnoběžná s přímkou p, vedeme (viz $\mathbf{P}^{14}_{8}$) body A_1, A_2 společné kolmice t_1, t_2 k oběma přímkám p, q, které protnou přímku q v bodech B_1, B_2, jež určují v přímce q smysl B_1B_2. Řekneme, že smysl A_1A_2 v přímce p a smysl B_1B_2 v přímce q jsou **souhlasné smysly.**

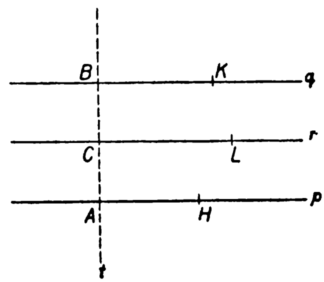
Lehko se nahlédne, že tento pojem souhlasných smyslů nezávisí ani na volbě bodu A_1, ani na volbě bodu A_2. Neboť obě různé přímky t_1, t_2 jsou rovnoběžné podle $\mathbf{P}^{14}_{1}$, a proto úsečka A_2B_2 neprotne přímku t_1. Můžeme tedy říci, že smysl A_1A_2 a smysl B_1B_2 jsou souhlasné, jestliže body A_2, B_2 nejsou od sebe odděleny přímkou A_1B_1. Z toho plyne, že pojem souhlasných smyslů nezávisí na volbě bodu A_2. Podobně však můžeme říci, že smysl A_1A_2 a smysl B_1B_2 jsou souhlasné, jestliže body A_1, B_1 nejsou od sebe odděleny přímkou A_2B_2; proto pojem souhlasných smyslů nezávisí na volbě bodu A_1.

Mluvili jsme dosud o dvou různých rovnoběžkách p, q; jestliže přímky p, q splynou (a tedy jsou rovnoběžné), potom souhlasný smysl znamená prostě týž smysl.

$\mathbf{P}^{15}_{1}$. Mají-li rovnoběžky p, r souhlasný smysl a mají-li také rovnoběžky q, r souhlasný smysl, mají i rovnoběžky p, q souhlasný smysl.



Obr. 92.

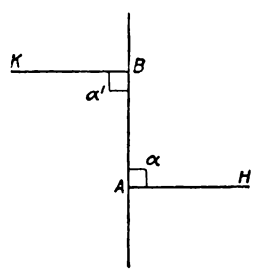


Obr. 93.

Důkaz. Nejsou-li všecky tři přímky p, q, r různé, je to zřejmé. Nechť tedy (obr. 93) přímky p, q, r jsou všecky různé. Zvolme bod C na r a vztyčte v něm kolmici t k přímce r, která podle P^{14}_{6} stojí kolmo na přímkách p, q a protne je v bodech A, B. Daný smysl budiž AH na přímce p, BK na přímce q, CL na přímce r. Protože smysl AH a smysl CL jsou souhlasné, leží oba body H, L v téže polorovině vyťaté přímkou t. Protože smysl BK a smysl CL jsou souhlasné, leží oba body K, L v téže polorovině vyťaté přímkou t. Tedy oba body H, K leží v téže polorovině vyťaté přímkou t a smysly BK, CL jsou souhlasné.

O polopřímkách AH, BK pravíme: 1. že jsou **souhlasně rovnoběžné,** jestliže $AH \parallel BK$ a smysly AH, BK jsou souhlasné; 2. že jsou **nesouhlasně rovnoběžné,** jestliže $AH \parallel BK$ a smysly AH, BK nejsou souhlasné.

$\mathbf{P}^{15}_{2}$. Buďtež A, B dva různé body. Leží-li polopřímky AH, BK v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB a je-li $\alpha = \alpha'$, $\alpha = \sphericalangle BAH$, $\alpha' = \sphericalangle ABK$, jsou polopřímky AH, BK nesouhlasně rovnoběžné.

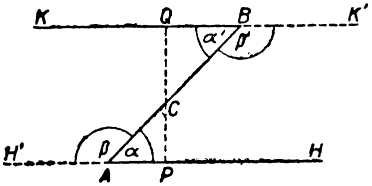


Obr. 94.

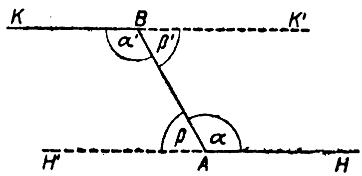
Důkaz. I. Budiž $\alpha = R$, tedy také $\alpha' = R$ (obr. 94). Přímky AH, BK jsou rovnoběžné podle P^{14}_{1}. Že smysly AH, BK nejsou souhlasné, je zřejmé.

II. Budiž $\alpha < R$, tedy také $\alpha' < R$ (obr. 95). Označme AH' polopřímku opačnou k AH a označme BK' polopřímku opačnou k BK; položme $\beta = \sphericalangle BAH'$, $\beta' = \sphericalangle ABK'$.

Podle $\mathbf{P}_2^4$ jest $\alpha + \beta = 2R$, $\alpha' + \beta' = 2R$. Ježto $\alpha = \alpha'$, jest také $\beta = \beta'$, $\alpha + \beta' = 2R$, $\alpha' + \beta = 2R$. Kdyby se protaly polopřímky AH, BK' v bodě C, vznikl by $\triangle ABC$ se dvěma úhly α, β'; ježto $\alpha + \beta' = 2R$, je to nemožné podle $\mathbf{P}_{10}^8$. Protože také $\alpha' + \beta = 2R$, soudíme podobně, že ani polopřímky AH', BK se nemohou protnout. Tedy AH, BK se nemohou protnout ani v polorovině ABH, ani v polorovině ABK; proto se neprotnou vůbec a jsou rovnoběžné. Zbývá dokázati, že smysly AH, BK nejsou souhlasné. Proto zvolme bod C uvnitř úsečky AB a veďme jím přímku kolmo na AH, tedy podle $\mathbf{P}_6^{14}$ také kolmo na BK. Jsou-li P, Q průsečíky této přímky s přímkami AH, BK, soudíme z $\mathbf{P}_7^7$, že bod P padne na polopřímku AH a že bod Q padne na polopřímku BK. Ježto úsečka AB protne přímku PQ, smysly AP, BQ nejsou souhlasné. Avšak AP je týž smysl jako AH, BQ je týž smysl jako BK.



Obr. 95.



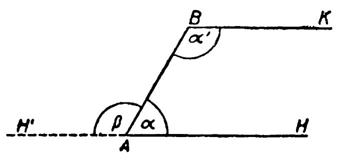
Obr. 96.

III. Budiž $\alpha > R$, tedy $\alpha' > R$ (obr. 96). Zase označme AH', BK' polopřímky opačné k polopřímkám AH, BK a položme $\beta = \sphericalangle BAH'$, $\beta' = \sphericalangle ABK'$. Opět je $\alpha + \beta = 2R$, $\alpha' + \beta' = 2R$. Ježto $\alpha = \alpha'$, musí býti $\beta = \beta'$. Avšak $\beta < R$, $\beta' < R$, a z části II našeho důkazu soudíme, že polopřímky AH', BK' jsou nesouhlasně rovnoběžné. Proto také polopřímky AH, BK jsou nesouhlasně rovnoběžné.

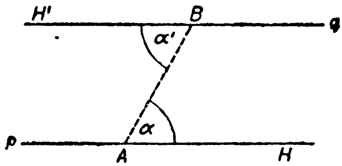
$\mathbf{P}_3^{15}$. Buďtež A, B dva různé body. Leží-li polopřímky AH, BK obě v téže polorovině, vyťaté přímkou AB, a je-li $\alpha + \alpha' = 2R$, kde $\alpha = \sphericalangle BAH$, $\alpha' = \sphericalangle ABK$, jsou polopřímky AH, BK souhlasně rovnoběžné.

Důkaz (obr. 97.) Označme AH' polopřímku opačnou k polopřímce AH a položme $\beta = \sphericalangle BAH'$. Podle $\mathbf{P}_2^4$ je $\alpha + \beta = 2R$. Ježto také $\alpha + \alpha' = 2R$, je $\beta = \alpha'$. Mimo to leží polopřímky AH', BK v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB. Proto soudíme z $\mathbf{P}_2^{15}$, že polopřímky AH', BK jsou nesouhlasně rovnoběžné, takže polopřímky AH, BK jsou souhlasně rovnoběžné.

Zvolme bod B mimo přímku p (obr. 98). Podle $\mathbf{P}^{14}_{3}$ prochází bodem B jediná rovnoběžka q s přímkou p. Z poučky $\mathbf{P}^{15}_{2}$ vyplývá, jak lze sestrojit tuto rovnoběžku. Na přímce p zvolíme libovolně bod A a vytkneme polopřímku AH. Potom přeneseme úhel $\alpha = \sphericalangle BAH$ do nové polohy $\alpha' = \sphericalangle ABH'$ tak, aby body H, H' byly od sebe odděleny přímkou AB. Protože přenášení úhlů umíme provádět eukleidovsky, poznali jsme eukleidovskou konstrukci rovnoběžky. Mimo to je patrné, že platí tyto tři poučky:



Obr. 97.



Obr. 98.

$\mathbf{P}^{15}_{4}$. Buďtež A, B dva různé body. Leží-li body H, K mimo přímku AB a je-li $AH \parallel BK$, jsou polopřímky AH, BK:

1. souhlasně rovnoběžné, nejsou-li body H, K od sebe odděleny přímkou AB (obr. 97),

2. nesouhlasně rovnoběžné, jsou-li body H, K od sebe odděleny přímkou AB (obr. 94—96).

$\mathbf{P}^{15}_{5}$ (obrácení poučky $\mathbf{P}^{15}_{2}$). Buďtež A, B dva různé body. Leží-li body H,K mimo přímku AB, jsou-li polopřímky AH, BK nesouhlasně rovnoběžné, jest $\alpha = \alpha'$ (obr. 94—96), **při čemž jsme označili $\sphericalangle BAH = \alpha$, $\sphericalangle ABK = \alpha'$.**

$\mathbf{P}^{15}_{6}$ (obrácení poučky $\mathbf{P}^{15}_{3}$). Buďtež A, B dva různé body. Leží-li body H, K mimo přímku AB, jsou-li polopřímky AH, BK souhlasně rovnoběžné, jest $\alpha + \alpha' = 2R$ (obr. 97), **při čemž jsme označili $\sphericalangle BAH = \alpha$, $\sphericalangle ABK = \alpha'$.**

Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili:

Souhlasný smysl dvou rovnoběžek — souhlasně rovnoběžné polopřímky — nesouhlasně rovnoběžné polopřímky.

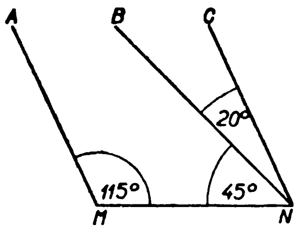
Cvičení.

143. Narýsujte dvě rovnoběžky $a \parallel b$! Na přímce a si zvolte tři různé body A_1, A_2, A_3 v pořádku $A_1A_2A_3$! Paty kolmic, spuštěných z bodů A_1,

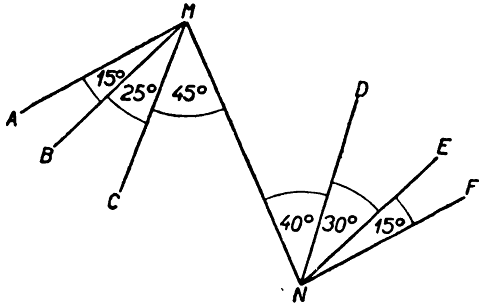
A_2, A_3 na přímku b, označte B_1, B_2, B_3! Na přímce b nyní určete smysl: a) souhlasný se smyslem A_2A_3; b) nesouhlasný se smyslem $A_3\,A_2$!

144. V obr. 95 je $\beta = 2\alpha$; $\beta' = \frac{4}{3} R$. Dokažte, že polopřímky AH', BK' jsou nesouhlasně rovnoběžné.

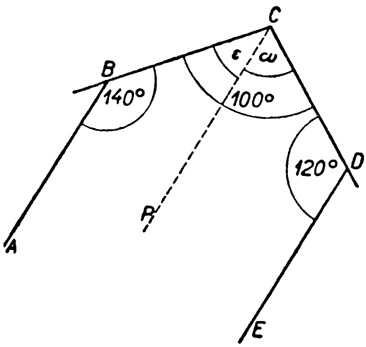
145. a) Zkoumejte, je-li v obr. 99 nějaký pár rovnoběžných polopřímek! b) Opakujte s obr. 100!



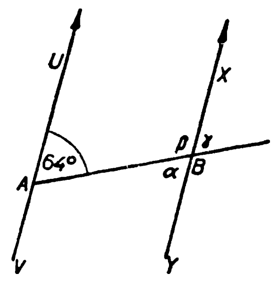
Obr. 99.



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

146. Dokažte, že polopřímky BA, DE v obr. 101 jsou souhlasně rovnoběžné! (Užijte pomocné polopřímky $CP \parallel BA$; určete ε, pak ω!)

V dalších cvičeních 147 až 151 si narýsujte od ruky vlastní obrazec, ale raději větší, abyste mohli do něho vepsat velikosti úhlů, na které se ve cvičení tážete. Přímky, které jsou na obrázcích opatřeny šipkami, jsou navzájem rovnoběžné.

147. V obr. 102 určete velikosti úhlů a rozhodněte o smyslech dvojice polopřímek: a) AU, BY; b) AV, BY!

148. V obr. 103 určete velikosti úhlů: a) α, δ; b) β, γ! Potom dokažte, že polopřímky MN, QR jsou nesouhlasně rovnoběžné!

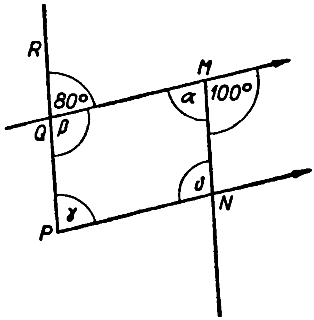
149. V obr. 104 je $\beta = 107°$, $\gamma = 35\frac{1}{2}°$. Určete ε!

150. V obr. 105 určete α! (Co víte o součtu úhlů ω, ε? Všimněte si polopřímek AH, BK!)

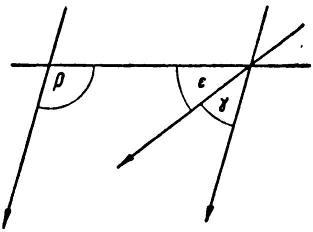
151. V obr. 106 je $\gamma = 112°$, $\delta = 58°$. Určete $\sphericalangle\, COD$! (Veďte pomocnou polopřímku $OM \parallel p$ a určete úhly ε, ω!)

152. Proveďte eukleidovsky konstrukci úlohy (viz obr. 98): Daným bodem B veďte přímku q rovnoběžnou s danou přímkou p! (Na přímce p zvolte bod A a sestrojte úhel $\sphericalangle\, ABH' = \sphericalangle\, BAH$ tak, že polopřímky AH, BH' leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AB!)

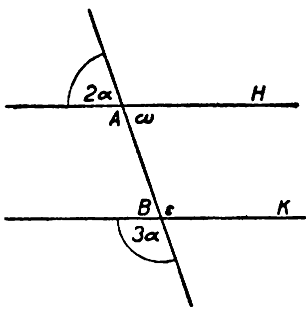
153. Předchozí cvičení č. 152 (srovnej obr. 94) proveďte znovu tak, že eukleidovsky spustíte z bodu B kolmici BA na přímku $p \equiv AH$ a potom v bodě B opět eukleidovsky vztyčíte kolmici $q \perp AB$.



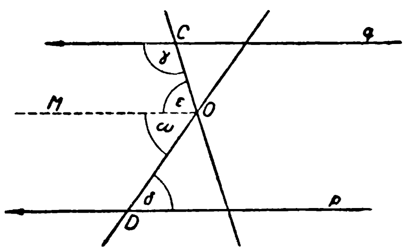
Obr. 103.



Obr. 104.



Obr. 105.



Obr. 106.

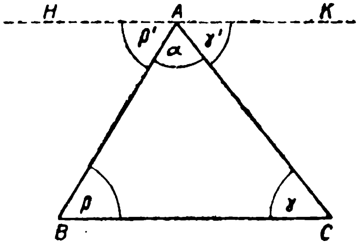
3. Součet úhlů trojúhelníka. (16)

P^{16}_{1}. Součet všech tří úhlů trojúhelníka je roven 2 *R*.

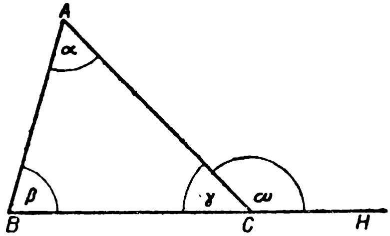
D ů k a z (obr. 107). Vrcholem A trojúhelníka $\triangle ABC$ veďme rovnoběžku s přímkou BC. Při vrcholu A vzniknou vedle úhlu α ještě dva úhly

$\beta' = \sphericalangle BAH$, $\gamma' = \sphericalangle CAK$, které jsou oba styčné s úhlem α. Všecky tři úhly α, β', γ' dávají dohromady úhel přímý, tedy $\alpha + \beta' + \gamma' = 2R$. Ježto α, β', jsou dva styčné úhly se společným ramenem AB, jsou body C, H od sebe odděleny přímkou AB. Podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ jsou tedy polopřímky AH, BC nesouhlasně rovnoběžné, takže z $\mathbf{P}^{15}_{5}$ plyne, že $\beta' = \beta$. Stejně vyjde $\gamma' = \gamma$. Protože $\alpha + \beta' + \gamma' = 2R$, je tedy $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

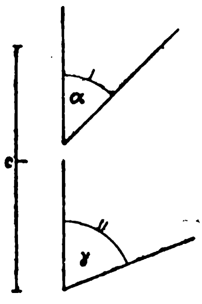
$\mathbf{P}^{16}_{2}$. Vnější úhel trojúhelníka při kterémkoli vrcholu je roven součtu obou vnitřních úhlů při ostatních vrcholech.



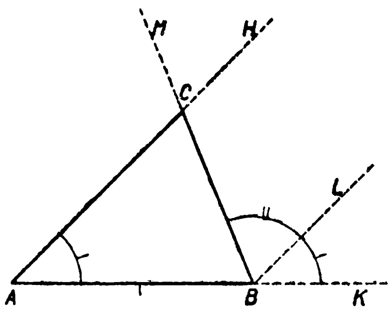
Obr. 107.



Obr. 108.



Obr. 109a.



Obr. 109b.

Důkaz (obr. 108): Budiž na př. ω vnější úhel $\triangle ABC$ při vrcholu C. Podle $\mathbf{P}^{4}_{2}$ je $\omega = 2R - \gamma$. Podle $\mathbf{P}^{16}_{1}$ je však $2R - \gamma = \alpha + \beta$. Tedy $\omega = \alpha + \beta$.

Z poučky $\mathbf{P}^{16}_{1}$ plyne dále:

$\mathbf{P}^{16}_{3}$. Součet obou ostrých úhlů pravoúhlého trojúhelníka je roven R.

Na str. 61 jsme odložili na pozdější dobu eukleidovskou konstrukci trojúhelníka, odpovídající poučce $\mathbf{P}^{12}_{3}$. Na základě poučky $\mathbf{P}^{16}_{2}$ můžeme provésti tuto konstrukci: Máme sestrojit $\triangle ABC$, je-li dána (obr. 109) velikost strany c a velikost úhlů α, γ. Aby konstrukce byla možná, musí býti $\alpha + \gamma < 2R$ podle $\mathbf{P}^{8}_{10}$.

Řešení (obr. 109b): Zvolíme úsečku AB dané velikosti c a zvolíme polorovinu vyťatou přímkou AB; budiž BK polopřímka opačná k polopřímce BA. Daný úhel α přeneseme do dvou nových poloh $\sphericalangle BAH$, $\sphericalangle KBL$ tak, aby ramena AH, BL byla ve zvolené polorovině. Dále přeneseme daný úhel γ do nové polohy $\sphericalangle LBM$, ve které je styčným k úhlu $\sphericalangle KBL$. Polopřímky AH, BM se protnou ve třetím vrcholu C žádaného $\triangle ABC$. Zároveň vidíme, že konstrukce je vždy možná, je-li splněna podmínka $\alpha + \beta < 2R$.

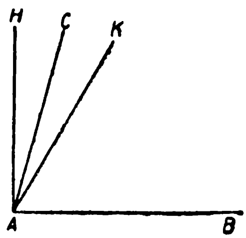
Je-li α úhel pravý, dostáváme konstrukci pravoúhlého trojúhelníka na základě odvěsny a protějšího ostrého úhlu (viz $\mathbf{P}^{13}_{8}$ na str. 65). Proveďte sami tuto konstrukci!

Z poučky $\mathbf{P}^{16}_{1}$ plyne podle $\mathbf{P}^{8}_{1}$:

$\mathbf{P}^{16}_{4}$. **Velikost každého úhlu rovnostranného trojúhelníka je rovna 60°.**

Na základě této poučky můžeme snadno eukleidovsky sestrojit úhel 60°. Proveďte!

Umíme nyní eukleidovsky sestrojit úhly 90° a 60°. Mimo to však umíme také eukleidovsky sestrojit úhel rovný součtu nebo rozdílu dvou úhlů (grafické sčítání a odčítání) a dále umíme eukleidovsky rozpůlit úhel (str. 48). Na základě toho umíme eukleidovsky sestrojovat rozmanité úhly. Máme-li na př. sestrojit $\sphericalangle BAC = 75°$ tak, aby rameno AB bylo dáno a aby rameno AC leželo v dané polorovině vyťaté přímkou AB, sestrojíme (obr. 110): Nejprve v dané polorovině polopřímky AH, AK tak, aby byl $\sphericalangle BAH = 90°$, $\sphericalangle BAK = 60°$. Je-li AC osa $\sphericalangle HAK$, je $\sphericalangle BAC = 75°$. Odůvodněte a proveďte!



Obr. 110.

V tomto článku nebyly zavedeny nové geometrické výrazy.

Cvičení.

154. Pravoúhlý trojúhelník má jeden úhel a) 63°; b) 26°; c) $\frac{2}{3}$ R; d) $x°$ a druhý $2x°$, e) $\frac{1}{2}$ $x°$ a druhý $\frac{1}{3}$ $x°$. Určete velikost druhého ostrého úhlu!

155. Jmenujte velikost třetího úhlu trojúhelníka, jsou-li dva a) 64°, 52°; b) 97°, 39°; c) 4°, 9°; d) 91°, 89°. Která z těchto úloh není možná; vysvětlete proč!

156. Najděte číslo x, když úhly trojúhelníka jsou a) $x°$, $2x°$, $3x°$; b) $3x°$, $4x°$, $5x°$!

157. Úhly trojúhelníka jsou v poměru 2 : 3 : 4; určete je!

158. Trojúhelník $\triangle CDE$ má při vrcholu C úhel 32°. Jaký úhel má při vrcholu D, když vnější úhel při vrcholu E je a) 100°, b) 85°, c) 136°?

Ve cvičeních 159 až 164 máte vypočíst úhly označené řeckými písmeny. Rýsujte vlastní obrazce od ruky!

159. Viz obr. 111.

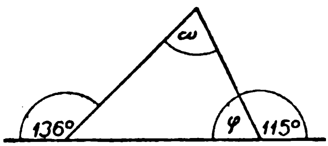
160. Viz obr. 112.

161. Viz obr. 113.

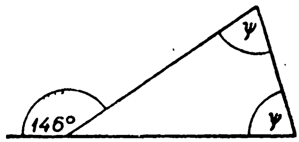
162. Viz obr. 114.

163. Viz obr. 115.

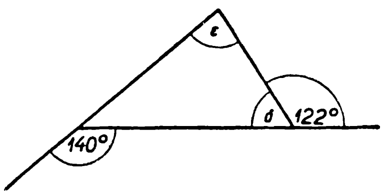
164. Viz obr. 116.



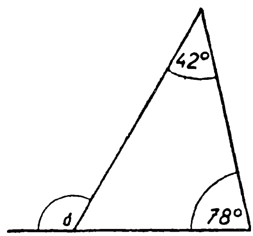
Obr. 111.



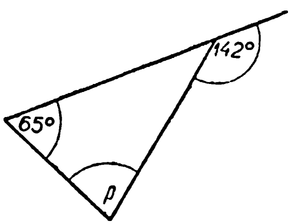
Obr. 112.



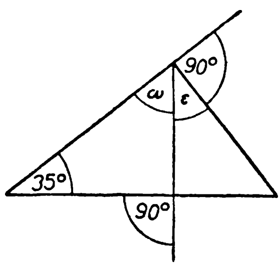
Obr. 113.



Obr. 114.



Obr. 115.



Obr. 116.

165. V obr. 117 je $AP \perp BC$; vypočtěte $\sphericalangle PAB$!

166. V trojúhelníku $\triangle ABC$ je $\beta = 30°$, $\gamma = 56°$. Osa úhlu α protne stranu BC v bodě X. a) Seřaďte podle velikosti úsečky AB, AX, AC! b) Která ze tří úseček AX, BX, CX je největší a která nejmenší?

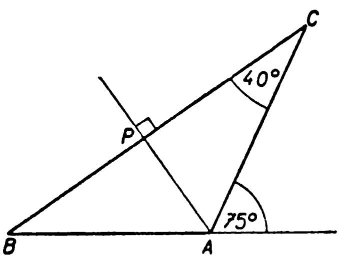
167. V trojúhelníku $\triangle ABC$ je $b = c$, $\beta = 62°$. Co je větší a nebo b?

168. Rovnoramenný trojúhelník má při základně úhel a) 25°, b) 64°. Vypočtěte úhel proti základně!

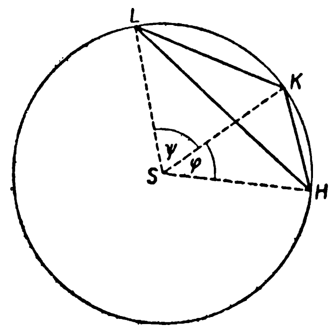
169. Jeden úhel rovnoramenného trojúhelníka měří 74°. Vypočtěte ostatní úhly. (Dvoje řešení.)

170. V obr. 118 je $\varphi = 42°$, $\psi = 66°$; S je střed kružnice. Vypočtěte úhly trojúhelníka HKL.

171. Zvolte polopřímku AL a narýsujte v jedné z obou polorovin vyťatých přímkou AL rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$ tak, aby strana $\overline{AB} = 4{,}5$ cm a bod B padl na polopřímku AL! Tím jste eukleidovsky narýsovali úhel $\sphericalangle CAB = 60°$; konstrukci co nejvíce zjednodušte a popište ji!



Obr. 117.



Obr. 118.

172. Sestrojte eukleidovsky tyto úhly: 60°, 120°, 30°, 15°, 75° (viz obr. 110), 150°, 165°, 105°, $67\frac{1}{2}°$, $52\frac{1}{2}°$!

173. Narýsujte eukleidovsky pravý úhel tak, že sestrojíte úhel 120° a potom oblouk mezi 60° a 120° rozpůlíte!

Ve cvičeních 174 až 176 neužívejte při konstrukci úhloměru, nýbrž sestrojte úhly eukleidovsky! Rozhodněte vždy předem, podle které poučky určenosti je trojúhelník dán.

174. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ podle daných údajů!

a) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $\beta = 82\frac{1}{2}°$.
b) $a = 77$ mm, $\alpha = 45°$, $\gamma = 105°$.
c) $b = 39$ mm, $c = 55$ mm, $\alpha = 112\frac{1}{2}°$.
d) $b = 6{,}1$ cm, $\alpha = 67\frac{1}{2}°$, $\gamma = 52\frac{1}{2}°$.
e) $a = 7{,}5$ cm, $c = 8$ cm, $\beta = 75°$.

175. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $\triangle ABC$ podle daných údajů; základna je BC!

a) $a = 47$ mm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$.
b) $a = 72$ mm, $\alpha = 97\frac{1}{2}°$.
c) $b = 5$ cm, $\beta = 75°$.
d) $a = 8{,}4$ cm, $c = 5{,}3$ cm.

176. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $\triangle ABC$ podle daných údajů! (Jest $\sphericalangle ACB = R$.)

a) $a = 5\frac{1}{2}$ cm, $\alpha = 52\frac{1}{2}°$.
b) $c = 7$ cm, $\alpha = 22\frac{1}{2}°$.
c) $a = 67$ mm, $\beta = 30°$.
d) $c = 8$ cm, $a = b$. (Jak velké jsou úhly α, β?)

4. Čtyrúhelníky. (17)

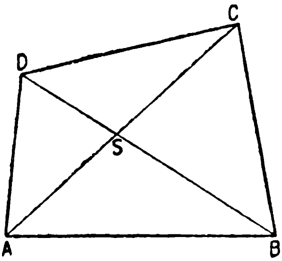
Buďtež dány (obr. 119) dvě úsečky AC, BD, které se protínají v bodě S. Vzniknou nám čtyři trojúhelníky: $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, $\triangle DAS$, které dohromady tvoří část roviny, která se jmenuje **čtyrúhelník.** Body A, B, C, D jsou **vrcholy** čtyrúhelníka. Úsečky AB, BC, CD, DA jsou **strany** čtyrúhelníka. Všecky čtyři strany dohromady tvoří **obvod** čtyrúhelníka; ostatní body čtyrúhelníka tvoří jeho **vnitřek.** Ty body roviny, které nejsou ani uvnitř, ani na obvodě, tvoří **vnějšek** čtyrúhelníka. Úsečky AC, BD jsou **úhlopříčky** čtyrúhelníka. Dva vrcholy jsou sousední nebo protější podle toho, zda jsou krajními body strany nebo úhlopříčky. Dvě strany jsou sousední nebo protější podle toho, zda obsahují nebo neobsahují společný vrchol.

Úhlopříčka AC rozdělí čtyrúhelník na dva trojúhelníky: $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, které mají společnou stranu AC. Podobně rozdělí čtyrúhelník úhlopříčka BD.

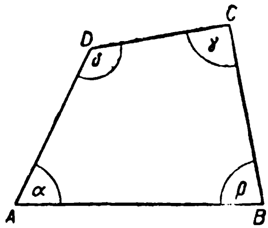
Duté úhly (obr. 120)

$\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCD$, $\delta = \sphericalangle ADC$ jsou **úhly čtyrúhelníka.**

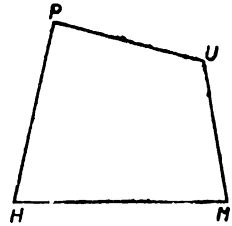
Nejčastěji označujeme vrcholy čtyrúhelníka písmeny A, B, C, D a úhly písmeny α, β, γ, δ, jako v obr. 120, ale mnohdy užíváme také jiného označení. Na př. v obr. 121 máme čtyrúhelník, který můžeme označit $HMUP$ nebo $PUMH$, a také jinak. Píšeme však vrcholy vždy tak, aby nikdy nepřišly dva protější vrcholy za sebou, takže v obr. 121 nemáme čtyrúhelník *HMPU* ani *HUMP*. Dvě protější strany čtyrúhelníka mohou býti různoběžné nebo rovnoběžné. Rozeznáváme tři druhy čtyrúhelníků:



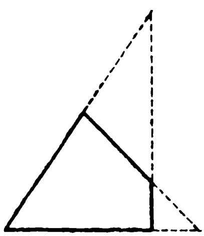
Obr. 119.

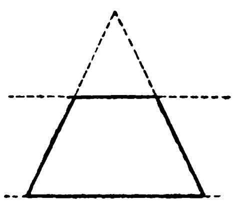


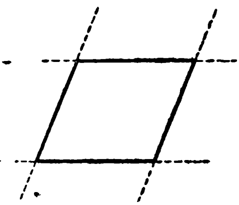
Obr. 120.



Obr. 121.


Obr. 122a.


Obr. 122b.


Obr. 122c.

I. U **různoběžníka** (obr. 122a) jsou každé dvě protější strany různoběžné.

II. U **lichoběžníka** (obr. 122b) jsou dvě protější strany rovnoběžné a jmenují se jeho **základny**; druhé dvě protější strany jsou různoběžné a jmenují se **ramena** lichoběžníka.

III. U **rovnoběžníka** (obr. 122c) jsou každé dvě protější strany rovnoběžné.

$\mathbf{P}^{17}_{1}$. **Jsou-li** *AB*, *CD* **základny lichoběžníka** *ABCD*, **jest** $\alpha + \delta = 2R$, $\beta + \gamma = 2R$.

Důkaz (obr. 123). Polopřímky *AB*, *DC* jsou souhlasně rovnoběžné podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ a proto je $\alpha + \delta = 2R$ (podle $\mathbf{P}^{15}_{6}$). Stejně se dokáže $\beta + \gamma = 2R$.

$\mathbf{P}^{17}_{2}$. **Každé dva sousední úhly rovnoběžníka mají součet 2*R*.**

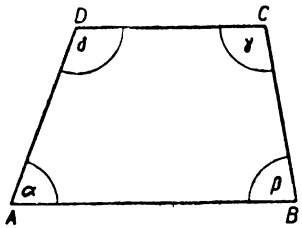
To se dokáže stejně jako předešlá poučka.

$\mathbf{P}^{17}_{3}$. Jestliže ve čtyrúhelníku $ABCD$ je na př. $\alpha + \delta = 2R$, jest $AB \parallel CD$, a proto čtyrúhelník je buď lichoběžník se základnami AB, CD, nebo je to rovnoběžník.

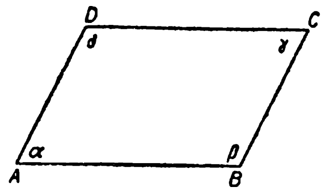
Důkaz (obr. 123). Polopřímky AB, DC leží obě v téže polorovině vyťaté přímkou AD. Jelikož $\alpha + \delta = 2R$, jest $AB \parallel CD$ podle $\mathbf{P}^{15}_{3}$.

$\mathbf{P}^{17}_{4}$. Každé dva protější úhly rovnoběžníka jsou si rovny.

Důkaz (obr. 124). Dokažme na př., že $\alpha = \gamma$. Ježto vrcholy A, B jsou sousední, je $\alpha + \beta = 2R$ podle $\mathbf{P}^{17}_{2}$, tedy $\alpha = 2R - \beta$. Ale také vrcholy B, C jsou sousední, takže $\beta + \gamma = 2R$ zase podle $\mathbf{P}^{17}_{2}$, tedy $\gamma = 2R - \beta$. Proto $\alpha = \gamma$.



Obr. 123.



Obr. 124.

$\mathbf{P}^{17}_{5}$. Součet úhlů čtyrúhelníka je $4R$ neboli $360°$.

Důkaz. Pro lichoběžník plyne naše poučka z $\mathbf{P}^{17}_{1}$ a stejně pro rovnoběžník z $\mathbf{P}^{17}_{2}$, je však správná i pro různoběžník (obr. 125). Úhlopříčka BD rozdělí čtyrúhelník na dva trojúhelníky a je proto patrno, že součet úhlů čtyřúhelníka dostaneme, sečteme-li všecky úhly obou trojúhelníků. Poučka tedy plyne z $\mathbf{P}^{16}_{1}$.

$\mathbf{P}^{17}_{6}$. Jsou-li si rovny každé dva protější úhly čtyrúhelníka, je to rovnoběžník.

Důkaz (obr. 124). Máme $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Tedy $\alpha + \delta = \beta + \gamma$. Avšak $\alpha + \delta$ a $\beta + \gamma$ dohromady dají $4R$ podle $\mathbf{P}^{17}_{5}$, tedy $\alpha + \delta$ dá polovinu ze $4R$, t. j. $\alpha + \delta = 2R$, takže $AB \parallel CD$ podle $\mathbf{P}^{17}_{3}$. Protože $\beta = \delta$, $\alpha + \delta = 2R$, je také $\alpha + \beta = 2R$, takže $AD \parallel BC$ zase podle $\mathbf{P}^{17}_{3}$.

V obr. 126 vidíme čtyrúhelník $ABCD$ osově souměrný podle osy AC. Takový čtyrúhelník se jmenuje **deltoid**; úhlopříčka AC je osa deltoidu.

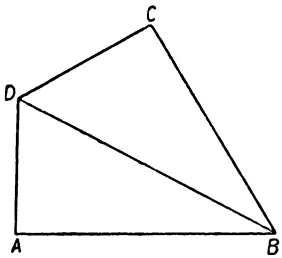
$\mathbf{P}^{17}_{7}$. Úhlopříčky deltoidu stojí na sobě kolmo.

$\mathbf{P}^{17}_{8}$. Osa deltoidu půlí druhou úhlopříčku deltoidu.

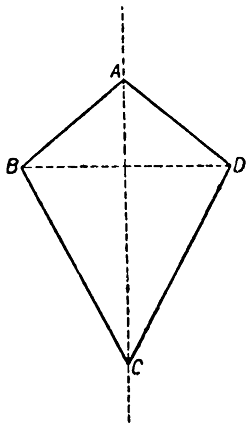
D ů k a z y (obr. 126). Vzhledem k ose souměrnosti AC je bod D obrazem bodu B, takže podle $\mathbf{P}^{7}_{4}$ přímka AC je osou úsečky BD, t. j. stojí kolmo na BD a prochází středem úsečky BD.

$\mathbf{P}^{1\,7}_{\;9}$. Jestliže ve čtyrúhelníku *ABCD* úhlopříčky stojí na sobě kolmo a úhlopříčka *BD* je půlena úhlopříčkou *AC*, je to deltoid s osou *AC*.

D ů k a z. Přímka AC stojí kolmo na BD a prochází středem úsečky BD. Je to tedy osa úsečky BD a zvolíme-li ji za osu souměrnosti (podle $\mathbf{P}^{7}_{6}$), je obrazem bodu B bod D. Ježto body A, C jsou samodružné, $ABCD$ je deltoid s osou AC.



Obr. 125.



Obr. 126.

Geometrické názvy, s kterými jsme se v tomto článku seznámili:

Čtyrúhelník; jeho vrcholy, strany, úhlopříčky, úhly, obvod, vnitřek, vnějšek — sousední a protější vrcholy čtyrúhelníka — sousední a protější strany čtyrúhelníka — čtyrúhelník *ABCD* — různoběžník — lichoběžník, jeho základny a ramena — rovnoběžník — deltoid; jeho osa.

Cvičení.

177. U čtyrúhelníka z obr. 119 jmenujte všecky páry a) sousedních vrcholů, b) protějších vrcholů, c) sousedních úhlů, d) protějších úhlů, e) sousedních stran, f) protějších stran!

178. Sestrojte čtyrúhelník *ABCD* podle označení v obr. 119, je-li dáno: $\overline{SA} = 3{,}5$ cm, $\overline{SB} = 4{,}3$ cm, $\overline{SC} = 2{,}9$ cm, $\overline{SD} = 5$ cm, $\sphericalangle ASB = 60°$! Označte jeho strany a úhly!

179. Vysvětlete, kterému čtyrúhelníku říkáme a) různoběžník, b) lichoběžník, c) rovnoběžník! Ke každé odpovědi narýsujte od ruky obrazec, řádně jej označte a odpověď zapište stručně, užívajíce tohoto označení!

180. Vypočtěte čtvrtý úhel čtyrúhelníka, když tři vnitřní úhly měří a) 76°, 96°, 112°; b) 118°, 73°, 48°; c) 89°, 123°, 86°!

181. Jeden vnitřní úhel čtyřúhelníka měří 113°. Všecky ostatní jsou si rovny.

182. Vypočtěte ostatní úhly rovnoběžníka $ABCD$, víte-li, že

a) $\alpha = 98°$; b) $\beta = 82\frac{1}{2}°$; c) $\gamma = 138\frac{2}{3}°$; d) $\delta = \frac{2}{3}\gamma$!

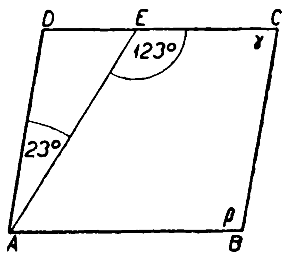
183. Vypočtěte ostatní úhly lichoběžníka $ABCD$, v němž je $AB \parallel CD$, víte-li, že

a) $\alpha = 72°$, $\beta = 43°$;
b) $\alpha = 69°$, $\gamma = 114°$;
c) $\delta = 3\alpha$, $\gamma = \frac{3}{2}\beta$;
d) $\alpha = \frac{3}{5}\delta$, $\beta : \gamma = 4 : 5$!

184. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ je: $\alpha = \gamma = 60°$, $\beta = 2\delta$. Určete β, δ.

185. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ je a) $\alpha = \gamma = 60°$, $\beta = \delta$; b) $\alpha = \beta = 80°$, $\gamma = \delta = 100°$. Který je to čtyrúhelník a které jeho strany jsou rovnoběžné, které různoběžné?

186. Ve čtyrúhelníku $ABCD$ je: a) $\alpha = \gamma = 63°$, $\delta = 117°$; dokažte, že je to rovnoběžník! b) $\alpha = 55°$, $\beta = 44°$, $\delta = 2\alpha + 15°$; dokažte, že je to lichoběžník, v němž je $AB \parallel CD$!



Obr. 127.

187. V obr. 127 je $ABCD$ rovnoběžník; určete úhly β, γ a $\sphericalangle EAB$!

188. Vysvětlete, kterému čtyrúhelníku říkáme deltoid! Narýsujte od ruky obrazec, označte jeho vrcholy a napište odpověď slovy!

189. O čtyrúhelníku $ABCD$ v obr. 119 (str. 81) víme, že $AC \perp BD$ a $\overline{AS} = \overline{SC}$. Který je to čtyrúhelník? Má tento čtyrúhelník osu?

190. Vypočtěte zbývající úhly v deltoidu $ABCD$ z obr. 126, víte-li, že

a) $\alpha = 75°$, $\beta = 103°$;
b) $\gamma = 96\frac{3}{4}°$, $\delta = 49\frac{1}{2}°$!

Ve cvičeních 191 a 192 ve čtyrúhelníku $ABCD$ stručně značíme $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$.

191. Sestrojte eukleidovsky deltoid $ABCD$ z obr. 126 podle daných údajů (AC je osa deltoidu): a) $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $e = 86$ mm; b) $a = 37$ mm, $e = 75$ mm, $f = 46$ mm! Kolika prvky je tedy deltoid určen?

192. Sestrojte eukleidovsky čtyrúhelník $ABCD$ podle daných údajů:

a) $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\beta = 105°$.
b) $a = 54$ mm, $b = 38$ mm, $c = 34$ mm, $f = 62$ mm, $\alpha = 75°$!

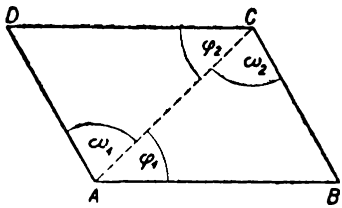
Kolika prvky je tedy čtyrúhelník určen?

5. Strany a úhlopříčky rovnoběžníka. (18)

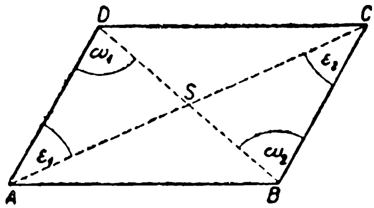
$\mathbf{P}^{18}_{1}$. Každé dvě protější strany rovnoběžníka jsou si rovny.

Důkaz (obr. 128). Dokažme na př., že je $\overline{AB} = \overline{CD}$. Veďme úhlopříčku AC a zaveďme úhly φ_1, φ_2, ω_1, ω_2 jako v obrazci. Body B, D jsou od sebe odděleny přímkou AC. Tedy podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ jsou polopřímky AB, CD nesouhlasně rovnoběžné a podle $\mathbf{P}^{15}_{5}$ jest $\varphi_1 = \varphi_2$. Podobně podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ jsou polopřímky AD, CB nesouhlasně rovnoběžné a podle $\mathbf{P}^{15}_{5}$ jest $\omega_1 = \omega_2$. Ježto $\varphi_1 = \varphi_2$, $\omega_1 = \omega_2$ jest $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ podle usu ($\mathbf{P}^{11}_{3}$ str. 52). Z toho plyne $\overline{AB} = \overline{CD}$.

$\mathbf{P}^{18}_{2}$. Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$ je na př. $AB \parallel CD$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, je to rovnoběžník.



Obr. 128.



Obr. 129.

Důkaz (obr. 128). Jelikož víme, že $AB \parallel CD$, potřebujeme pouze dokázati, že také $AD \parallel BC$. Opět veďme úhlopříčku AC a zaveďme úhly φ_1, φ_2, ω_1, ω_2 jako v obrazci. Body B, D jsou od sebe odděleny přímkou AC. Ježto $AB \parallel CD$, jsou podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ polopřímky AB, CD nesouhlasně rovnoběžné a podle $\mathbf{P}^{15}_{5}$ jest $\varphi_1 = \varphi_2$. Ježto $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\varphi_1 = \varphi_2$, jest $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ podle sus ($\mathbf{P}^{11}_{2}$ na str. 51). Z toho soudíme, že $\omega_1 = \omega_2$. Ježto polopřímky AD, CB leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou AC a ježto $\omega_1 = \omega_2$, podle $\mathbf{P}^{15}_{2}$, jsou polopřímky AD, CB nesouhlasně rovnoběžné a $AD \parallel BC$.

$\mathbf{P}^{18}_{3}$. Jestliže každé dvě protější strany čtyřúhelníka jsou si rovny, je to rovnoběžník.

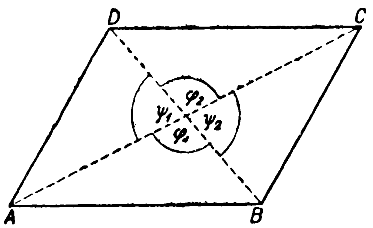
Důkaz (obr. 128). Máme dokázati, že $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Opět zaveďme úhly φ_1, φ_2, ω_1, ω_2. Nyní jest $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ podle sss ($\mathbf{P}^{11}_{5}$ na str. 52). Z toho soudíme, že $\varphi_1 = \varphi_2$, $\omega_1 = \omega_2$. Ježto body B, D jsou od sebe odděleny přímkou AC, leží polopřímky AB, CD v opačných polorovinách vyťatých přímkou AC. Totéž platí o polopřímkách AD, BC. Ježto $\varphi_1 = \varphi_2$, vychází z $\mathbf{P}^{15}_{2}$, že polopřímky AB, CD jsou nesouhlasně rovnoběžné, tedy $AB \parallel CD$. Ježto $\omega_1 = \omega_2$, vychází z $\mathbf{P}^{15}_{2}$, že také polopřímky AD, CB jsou nesouhlasně rovnoběžné, tedy $AD \parallel BC$.

$\mathbf{P}^{18}_{4}$. Úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí.

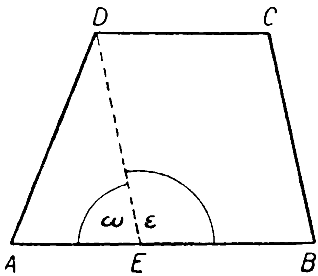
Důkaz (obr. 129). Označme S průsečík úhlopříček a zaveďme úhly ε_1, ε_2, ω_1, ω_2 jako v obrazci. Polopřímky AD, CB jsou podle $\mathbf{P}^{15}_{4}$ nesouhlasně rovnoběžné, takže podle $\mathbf{P}^{15}_{5}$ jest $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Úplně stejně soudíme také, že $\omega_1 = \omega_2$. Podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ jest $\overline{AD} = \overline{BC}$. Ježto $\overline{AD} = \overline{BC}$, jest $\triangle SAD \cong \triangle SCB$ podle usu ($\mathbf{P}^{11}_{3}$ na str. 52) a z toho soudíme, že $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{DS} = \overline{BS}$. Tedy bod S je střed obou úhlopříček AC, BD.

$\mathbf{P}^{18}_{5}$. Jestliže úhlopříčky čtyrúhelníka se navzájem půlí, je to rovnoběžník.

Důkaz (obr. 130). Je-li S průsečík úhlopříček, jest $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{BS} = \overline{DS}$. Zavedeme-li úhly φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 jako v obrazci, jest $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$ podle $\mathbf{P}^{4}_{4}$. Ježto $\overline{AS} = \overline{CS}$, $\overline{BS} = \overline{DS}$, $\varphi_1 = \varphi_2$, jest $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ podle usu ($\mathbf{P}^{11}_{3}$ na str. 52), a tedy $\overline{AB} = \overline{CD}$. Podobně je také $\triangle ADS \cong \triangle CBS$ podle sus, a tedy $\overline{AD} = \overline{BC}$. Proto $ABCD$ je rovnoběžník podle $\mathbf{P}^{18}_{3}$.



Obr. 130.



Obr. 131.

$\mathbf{P}^{18}_{6}$. Základny lichoběžníka si nemohou býti rovny.

Důkaz. Kdyby v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD bylo $\overline{AB} = \overline{CD}$, protože $AB \parallel CD$, podle $\mathbf{P}^{18}_{2}$ by to byl rovnoběžník, a ne lichoběžník.

V obr. 131 je znázorněn libovolný lichoběžník $ABCD$ s větší základnou AB a s menší základnou CD. Uvnitř úsečky AB můžeme určit bod E tak, že $\overline{BE} = \overline{CD}$. Ježto $\overline{BE} = \overline{CD}$, $BE \parallel CD$, je $BCDE$ rovnoběžník podle $\mathbf{P}^{18}_{2}$, takže podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ je $\overline{DE} = \overline{BC}$. Mimo to podle $\mathbf{P}^{17}_{2}$ je v obrazci $\beta + \varepsilon = 2R$; podle $\mathbf{P}^{4}_{2}$ je však také $\omega + \varepsilon = 2R$. Tedy $\beta = 2R - \varepsilon$, $\omega = 2R - \varepsilon$, a proto musí býti $\beta = \omega$. Jestliže tedy v obr. 131 je $\overline{BE} = \overline{CD}$, je také $\overline{DE} = \overline{BC}$, $\beta = \omega$. Toho užijeme v následujících dvou poučkách.

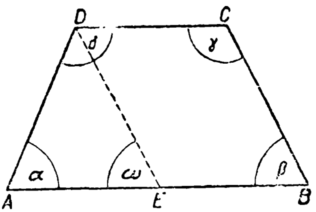
Rovnoramenný lichoběžník je takový, jehož obě ramena jsou si rovna.

$\mathbf{P}^{18}_{7}$. U rovnoramenného lichoběžníka máme při každé základně dva sobě rovné úhly.

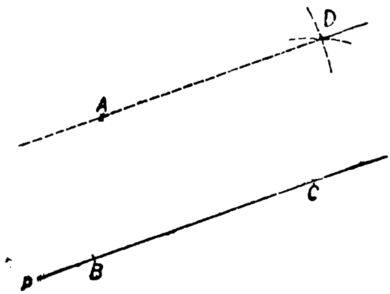
Důkaz (obr. 132). V obrazci jest opět $\overline{BE} = \overline{CD}$, tedy $\overline{DE} = \overline{BC}$, $\beta = \omega$. V našem případě jest však $\overline{AD} = \overline{BC}$, tedy $\overline{AD} = \overline{DE}$, a proto podle $\mathbf{P}^{8}_{1}$ jest $\alpha = \omega$. Ježto také $\beta = \omega$, musí býti $\alpha = \beta$, t. j. úhly při základně AB jsou si rovny. Podle $\mathbf{P}^{17}_{1}$ je však $\delta = 2R - \alpha$, $\gamma = 2R - \beta$. Ježto $\alpha = \beta$, je $\gamma = \delta$, t. j. také úhly při základně CD jsou si rovny.

$\mathbf{P}^{18}_{8}$. Jestliže oba úhly při některé základně lichoběžníka jsou si rovny, je lichoběžník rovnoramenný.

Důkaz (obr. 132). I. Budiž nejprve $\alpha = \beta$, t. j. při větší základně máme dva sobě rovné úhly. Opět máme $\overline{DE} = \overline{BC}$, $\beta = \omega$. Ježto $\alpha = \beta$, jest $\alpha = \omega$, takže podle $\mathbf{P}^{8}_{2}$ je $\overline{AD} = \overline{DE}$. Ježto také $\overline{DE} = \overline{BC}$, jest $\overline{AD} = \overline{BC}$. t. j. lichoběžník je rovnoramenný.



Obr. 132.



Obr. 133.

II. Jestliže víme, že $\gamma = \delta$, uvážíme, že podle $\mathbf{P}^{17}_{1}$ je $\alpha = 2R - \delta$, $\beta = 2R - \gamma$, takže je také $\alpha = \beta$ a můžeme pokračovat jako v části I.

Na str. 73 jsme poznali eukleidovskou konstrukci rovnoběžky k dané přímce p procházející daným bodem A. Naučíme se nyní jinému způsobu konstrukce rovnoběžky (obr. 133). Na přímce p si zvolíme dva různé body B, C. Kružítkem si určíme bod D (oddělený přímkou AC od bodu B) tak, aby bylo $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$. Podle $\mathbf{P}^{18}_{3}$ bude $ABCD$ rovnoběžník, takže přímka AD je žádaná rovnoběžka.

Geometrické názvy, se kterými jste se v tomto článku seznámili:

Rovnoramenný lichoběžník.

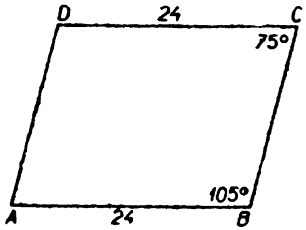
Cvičení.

193. **Kterému čtyrúhelníku říkáme rovnoběžník? Která poučka platí o jeho protějších stranách?**

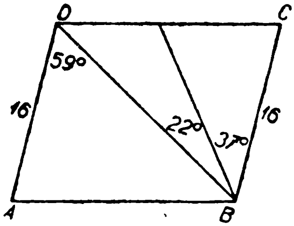
194. Ve čtyrúhelníku $MNPQ$ je $\overline{MN} = \overline{PQ}$ a $MN \parallel PQ$. Který je to čtyrúhelník?

195. Ve čtyrúhelníku $HJKL$ je $\overline{HJ} = \overline{KL}$ a $\overline{JK} = \overline{LH}$. Který je to čtyrúhelník?

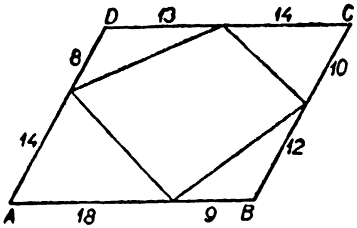
Udejte důvod, proč čtyrúhelníky $ABCD$ v obrázcích 134 až 137 jsou rovnoběžníky. Vzdálenosti sousedních bodů na úsečkách těchto obrázků jsou udány v mm.



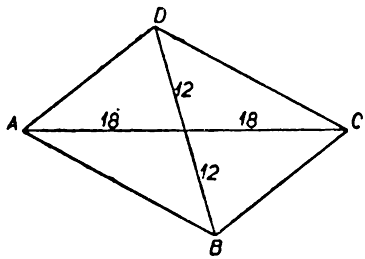
Obr. 134.



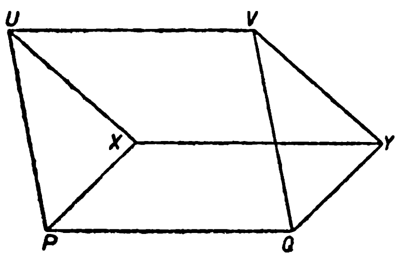
Obr. 135.



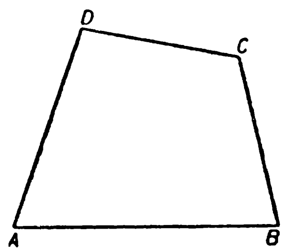
Obr. 136.



Obr. 137.



Obr. 138.



Obr. 139.

196. a) Obr. 134. b) Obr. 135. c) Obr. 136. d) Obr. 137.

197. V obr. 138 jsou $PQYX$, $PQVU$ dva rovnoběžníky. Dokažte, že také $XYVU$ je rovnoběžník!

198. a) Kterému čtyrúhelníku říkáme lichoběžník? Co víte o velikostech jeho základen? b) Který lichoběžník se jmenuje rovnoramenný?

199. V lichoběžníku $MNPQ$ je $MN \parallel PQ$.
a) Může platit $\overline{MN} = \overline{PQ}$? Který je to pak čtyrúhelník?
b) Jestliže je $\sphericalangle MQP = \sphericalangle NPQ$, který je to lichoběžník?
c) Jestliže je $\sphericalangle MNP = \sphericalangle NPQ$, co soudíte o velikostech těchto úhlů? Jak byste nazvali tento lichoběžník?

Ve cvičeních 200 až 203 máte sestrojit čtyrúhelník $ABCD$ podle daných údajů. Pro stručnost je užito tohoto obvyklého označení (viz obr. 139) stran a úhlopříček: $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$, $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$. Bod S je průsečík úhlopříček. Úhly rýsujte eukleidovsky)!

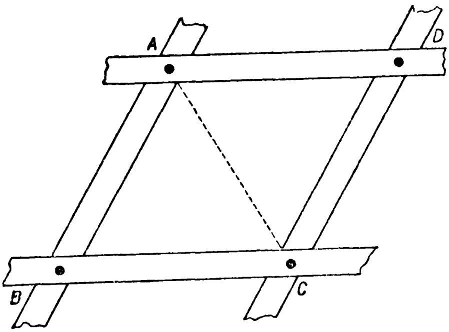
200. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno:
a) $a = 4$ cm, $d = 5$ cm, $e = 6$ cm.
b) $b = 4{,}3$ cm, $c = 5{,}2$ cm, $\alpha = 75°$.
c) $a = 5{,}3$ cm, $b = 4{,}1$ cm, $\gamma = 120°$.
d) $e = 61$ mm, $f = 93$ mm, $\sphericalangle ASB = 60°$.
e) $e = 92$ mm, $a = 69$ mm, $\sphericalangle ASB = 105°$ (nejprve sestrojte $\triangle ABS$! Čím je určen?). Kolika prvky je tedy určen rovnoběžník?

201. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ (je $AB \parallel CD$) podle daných údajů; ve cvičeních c) až e) užijete pomocného trojúhelníka AED jako v obr. 131!
a) $a = b = 65$ mm, $c = 39$ mm, $\beta = 45°$.
b) $a = 45$ mm, $c = 67$ mm, $e = 60$ mm, $\beta = 105°$. (Nejprve sestrojte $\triangle ABC$!)
c) $a = 8$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm, $d = 3\frac{1}{2}$ cm.
d) $a = 88$ mm, $c = 40$ mm, $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$.
e) $a = 85$ mm, $b = 63$ mm, $c = 31$ mm, $\alpha = 75°$.
Kolika údaji je tedy určen lichoběžník?

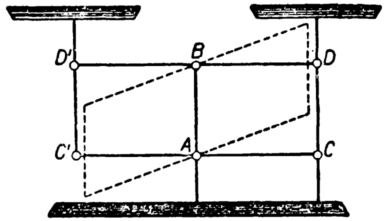
202. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ (je $AB \parallel CD$), je-li dáno: $c = 42$ mm, $d = 56$ mm, $\beta = 67\frac{1}{2}°$! (Sestrojte nejprve pomocný $\triangle AED$ jako v obr. 132.)
Uveďte jiný způsob určení rovnoramenného lichoběžníka! Kolik to bude údajů?

203. Narýsujte přímku BC a mimo ni bod A! Bodem A veďte eukleidovsky rovnoběžku AD k přímce BC (viz obr. 133)! Kterého čtyrúhelníka k této konstrukci vlastně užíváte?

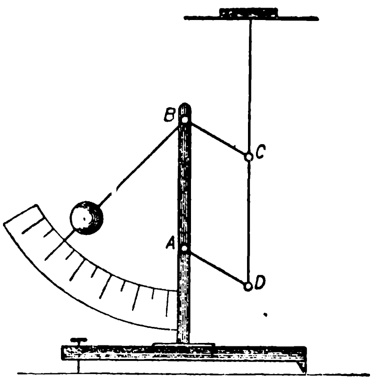
204. V obr. 140 máme „kloubový" rovnoběžník $ABCD$. Co platí o jeho stranách? Chceme-li zabránit pohyblivosti tohoto rovnoběžníka v „kloubech" A, B, C, D, musíme jej vyztužit příčkou, na př. BD nebo AC. Odůvodněte geometricky, proč potom ustane pohyblivost!
Vysvětlete, proč jsou podobným způsobem vyztužovány mostní konstrukce nebo zednická lešení! Uveďte jiné příklady!



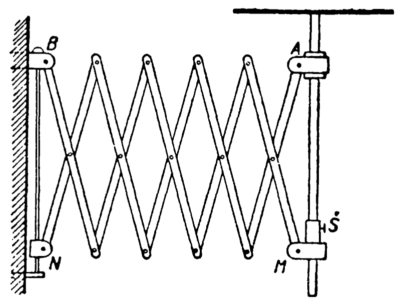
Obr. 140.



Obr. 141.



Obr. 142.



Obr. 143.

205. Vysvětlete, proč misky vah (obr. 141) nebo miska listovních vážek (obr. 142) zůstávají stále ve vodorovné poloze!

206. Vysvětlete, proč lékařský stolek v obr. 143 zůstává stále ve stejné výši, i když jím pohybujeme ve směru *BA* nebo *NM*! („Klouby" *A*, *B* jsou stále ve stejné výši, „klouby" *M*, *N* se pohybují svisle.)

6. Obdélník, kosočtverec a čtverec. (19)

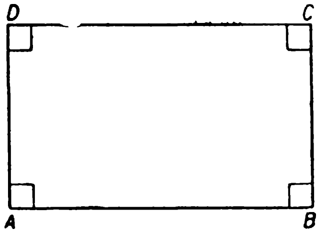
Čtyrúhelník, jehož všecky úhly jsou pravé, se jmenuje **obdélník** (obr. 144).

P^{19}_{1}. Každý obdélník je rovnoběžník.

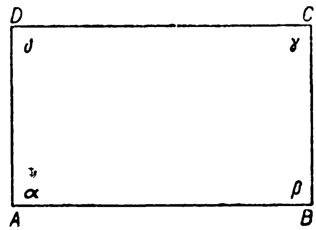
To plyne z P^{17}_{6}.

$\mathbf{P}^{19}_{2}$. Jestliže o jednom úhlu rovnoběžníka *ABCD* víme, že je pravý, je *ABCD* obdélník.

Důkaz. Podle $\mathbf{P}^{17}_{2}$ je $\alpha + \beta = 2R$, $\alpha + \delta = 2R$. Podle $\mathbf{P}^{17}_{4}$ je $\gamma = \alpha$. Je-li $\alpha = R$, musí tedy býti také $\beta = R$, $\delta = R$, $\gamma = R$ a $ABCD$ je obdélník. (Obr. 145.)



Obr. 144.



Obr. 145.

$\mathbf{P}^{19}_{3}$. Jestliže o třech úhlech čtyrúhelníka *ABCD* víme, že jsou pravé, je *ABCD* obdélník.

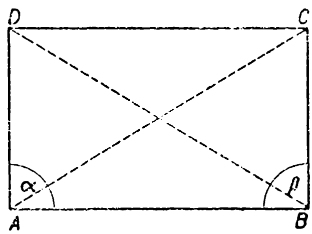
To plyne z $\mathbf{P}^{17}_{5}$.

$\mathbf{P}^{19}_{4}$. Obě úhlopříčky obdélníka jsou si rovny.

Důkaz (obr. 146). Podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ a $\mathbf{P}^{19}_{1}$ je $\overline{AD} = \overline{BC}$. Pravoúhlé $\triangle ABC$, $\triangle BAD$ mají společnou odvěsnu AB a druhé odvěsny BC, AD jsou si rovny. Jsou tedy shodné podle $\mathbf{P}^{13}_{1}$, takže jejich přepony si jsou rovny, t. j. $\overline{AC} = \overline{BD}$.

$\mathbf{P}^{19}_{5}$. Jestliže obě úhlopříčky rovnoběžníka *ABCD* jsou si rovny, je *ABCD* obdélník.

Důkaz (obr. 146). Ježto $ABCD$ je rovnoběžník, podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ je $\overline{AD} = \overline{BC}$. Mimo to je $\overline{AC} = \overline{BD}$, takže $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ podle poučky sss ($\mathbf{P}^{11}_{5}$ na str. 52). Z toho plyne, že $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$ neboli $\beta = \alpha$. Avšak $\alpha + \beta = 2R$ podle $\mathbf{P}^{17}_{2}$, takže $\alpha = R$, $\beta = R$. Tedy $ABCD$ je obdélník podle $\mathbf{P}^{19}_{2}$.

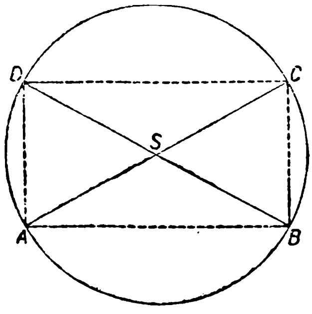


Obr. 146.

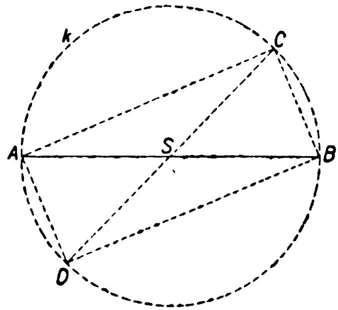
$\mathbf{P}^{19}_{6}$. Jsou-li *AC*, *BD* dva různé průměry kružnice (*S*; *r*), je *ABCD* obdélník.

Důkaz (obr. 147). Jest $\overline{AS} = r$, $\overline{BS} = r$, $\overline{CS} = r$, $\overline{DS} = r$, takže úhlopříčky čtyrúhelníka $ABCD$ se navzájem půlí. Tedy $ABCD$ je rovnoběžník podle $\mathbf{P}^{18}_{5}$. Mimo to je $\overline{AC} = 2r$, $\overline{BD} = 2r$, takže $ABCD$ je obdélník podle $\mathbf{P}^{19}_{5}$.

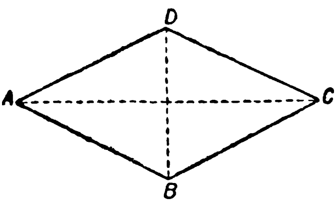
Poučka $\mathbf{P}^{13}_{10}$ praví, že pravoúhlý $\triangle ABC$ (s pravým úhlem $\gamma = R$) je určen, známe-li velikost přepony $\overline{AB} = c$ a velikost jedné odvěsny $\overline{BC} = a$. Sestrojit takový $\triangle ABC$ dosud umíme (str. 65) při dané poloze odvěsny a. Máme-li takový $\triangle ABC$ sestrojit při dané poloze přepony c, můžeme postupovat takto (obr. 148): Zvolíme úsečku $\overline{AB} = c$ a najdeme eukleidovsky její střed S (viz str. 47). Vrchol pravého úhlu C budeme hledat ve zvolené polorovině určené přímkou AB. V této polorovině leží polovina



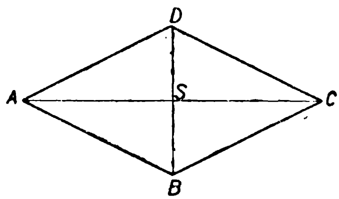
Obr. 147.



Obr. 148.



Obr. 149.



Obr. 150.

kružnice k se středem S, která prochází body A, B. Na k určíme pomocí kružítka bod C tak, že $\overline{BC} = a$. Potom $\triangle ABC$ je žádaný trojúhelník. Abychom se o tom přesvědčili, potřebujeme ukázati, že $\sphericalangle ABC$ je pravý. To plyne z předcházející poučky, neboť je-li D na naší kružnici protější bod k C, podle $\mathbf{P}^{19}_{6}$ je $ACBD$ obdélník.

Čtyrúhelník, jehož všecky strany si jsou rovny (obr. 149), se jmenuje **kosočtverec.**

$\mathbf{P}^{19}_{7}$. Každý kosočtverec je rovnoběžník.

To plyne z $\mathbf{P}^{13}_{8}$.

Kosočtverec $ABCD$ můžeme považovat (viz str. 82) za deltoid s osou AC i za deltoid s osou BD.

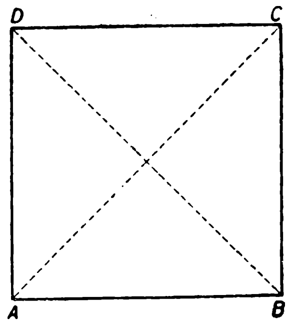
Proto z $\mathbf{P}^{17}_{7}$ plyne:

$\mathbf{P}^{19}_{8}$. Úhlopříčky kosočtverce stojí na sobě kolmo.

Tato poučka se dá obrátit takto:

$\mathbf{P}^{19}_{9}$. Jestliže úhlopříčky rovnoběžníka $ABCD$ stojí na sobě kolmo, je $ABCD$ kosočtverec.

Důkaz (obr. 150). O rovnoběžníku $ABCD$ víme, že všecky úhly při vrcholu S jsou pravé! Podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ jest $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$. Zbývá dokázati, že $\overline{AB} = \overline{AD}$. Avšak $\overline{BS} = \overline{DS}$ podle $\mathbf{P}^{18}_{4}$. Tedy pravoúhlé $\triangle ABS$, $\triangle ADS$ mají společnou odvěsnu AS a druhé odvěsny BS, DS jsou si rovny. Jsou tedy shodné podle $\mathbf{P}^{13}_{1}$, takže jejich přepony jsou si rovny, t. j. $\overline{AB} = \overline{AD}$.



Obr. 151.

Čtverec (obr. 151) je takový čtyrúhelník, který je zároveň obdélníkem i kosočtvercem, neboli čtverec je takový čtyrúhelník, jehož všecky úhly jsou pravé a jehož všecky strany jsou si rovny. Každý čtverec je rovnoběžník podle $\mathbf{P}^{19}_{1}$ nebo podle $\mathbf{P}^{19}_{7}$. Pro čtverec platí všecky poučky, které jsme odvodili pro rovnoběžník, pro obdélník nebo pro kosočtverec, zejména: Úhlopříčky čtverce se navzájem půlí, jsou si rovny a stojí na sobě kolmo. Obráceně plyne z $\mathbf{P}^{18}_{5}$, $\mathbf{P}^{19}_{4}$ a $\mathbf{P}^{19}_{9}$: Jestliže úhlopříčky čtyrúhelníka $ABCD$ se navzájem půlí, jsou si rovny a stojí na sobě kolmo, je $ABCD$ čtverec.

Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili: Obdélník — kosočtverec — čtverec.

Cvičení.

207. Kterému čtyrúhelníku říkáme a) obdélník, b) kosočtverec, c) čtverec?

208. Jestliže ve čtyrúhelníku $ABCD$ je $\alpha = \beta = \delta = R$, který je to čtyrúhelník?

209. Jestliže v rovnoběžníku $ABCD$ je $\delta = R$, který je to rovnoběžník?

210. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $\overline{AC} = \overline{BD} = 7{,}2$ cm, $\sphericalangle BSC = 67\frac{1}{2}°$, při čemž S je průsečík úhlopříček! Dokažte, že je to obdélník!

211. Zvolte si polopřímku AX a jednu z polorovin vyťatých přímkou AX! Ve zvolené polorovině narýsujte eukleidovsky pravoúhlý trojúhelník ABC (je $\sphericalangle ACB = R$) tak, aby bod B ležel na polopřímce AX! Přitom je dáno (užijte konstrukce se str. 92):

a) $a = 2{,}9$ cm, $c = 7{,}3$ cm.
b) $c = 79$ mm, $\beta = 52\frac{1}{2}°$.

212. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{BD} = 7$ cm, $\sphericalangle ABC = 45°$;
b) $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 7{,}3$ cm;
c) $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{BD} = 9$ cm;
d) $\sphericalangle BCD = 75°$, $\overline{AC} = 7{,}6$ cm. (Udejte různé způsoby řešení!)

213. Které přímky jsou osami kosočtverce $ABCD$?

214. a) Které přímky jsou osami obdélníka $ABCD$? Jaká je jejich vzájemná poloha a kterým důležitým bodem procházejí?
(Uvažujte na př. o ose strany AB a dokažte, že je též osou strany CD!)
b) Víte-li, že osy k, l obdélníka $ABCD$ procházejí jeho středem S a že $k \perp AB$, $l \perp BC$, sestrojte obdélník $ABCD$ o daných osách $k \perp l$, je-li dáno $\overline{AB} = 8{,}5$ cm, $\overline{BC} = 5{,}3$ cm!

215. Sestrojte eukleidovsky čtverec $ABCD$, je-li dáno:

a) $\overline{BC} = 7$ cm; b) $\overline{AC} = 9$ cm!

216. Vypočtěte, které úhly tvoří úhlopříčky AC, BD kosočtverce $ABCD$ s jednotlivými jeho stranami, je-li $\gamma = 67°$!

217. Které úhly tvoří úhlopříčky AC, BD čtverce $ABCD$ s jeho jednotlivými stranami?

7. Střední příčky trojúhelníka a lichoběžníka. (20)

P^{20}_{1}. V $\triangle ABC$ budiž B_1 střed strany AC, C_1 střed strany AB. Potom jest $B_1C_1 \parallel BC$, $\overline{BC} = 2\,.\,\overline{B_1C_1}$.

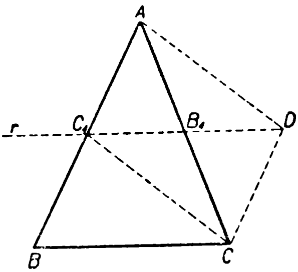
Důkaz (obr. 152). Na prodloužení úsečky B_1C_1 za bod B_1 určeme bod D tak, že $\overline{B_1D} = \overline{B_1C_1}$. Je tedy $\overline{C_1D} = 2\,.\,\overline{B_1C_1}$. Úsečky AC, C_1D se navzájem půlí, takže AC_1CD je rovnoběžník podle P^{18}_{5}. Je tedy $CD \parallel C_1A$ neboli $CD \parallel BC_1$. Mimo to podle P^{18}_{1} je $\overline{CD} = \overline{C_1A}$ neboli $\overline{CD} = \overline{BC_1}$. Ježto $CD \parallel BC_1$, $\overline{CD} = \overline{BC_1}$, je $BCDC_1$ rovnoběžník, takže $C_1D \parallel BC$ neboli $B_1C_1 \parallel BC$. Mimo to podle P^{18}_{1} je $\overline{BC} = \overline{C_1D}$; ježto $\overline{C_1D} = 2.\overline{B_1C_1}$, je $\overline{BC} = 2.\overline{B_1C_1}$.

P^{20}_{2}. V $\triangle ABC$ budiž B_1 střed strany AC. Budiž r rovnoběžka s přímkou BC vedena bodem B_1. Přímka r prochází středem strany AB.

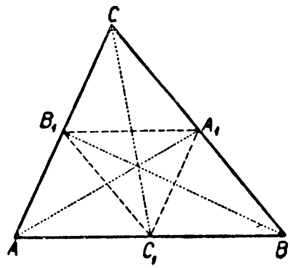
Důkaz (obr. 152). Je-li C_1 střed strany AB, podle P^{20}_{1} je $B_1C_1 \parallel BC$. Podle P^{14}_{3} přímka r splyne s přímkou B_1C_1, t. j. přímka r prochází bodem C_1.

Úsečka B_1C_1 v obr. 152 se jmenuje **střední příčka trojúhelníka** $\triangle ABC$ příslušná straně BC. Celkem má $\triangle ABC$ tři střední příčky (obr. 153). Jsou-li $A_1\, B_1,\, C_1$ středy stran $BC,\, CA,\, AB$, pak střední příčky $\triangle\, ABC$ jsou úsečky $B_1C_1,\, C_1A_1,\, A_1B_1$.

$\mathbf{P}^{20}_{3}$. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD budiž E střed ramene AD, F střed ramene BC. Potom jest $EF \parallel AB$, $EF \parallel CD$, $2 . \overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.



Obr. 152.

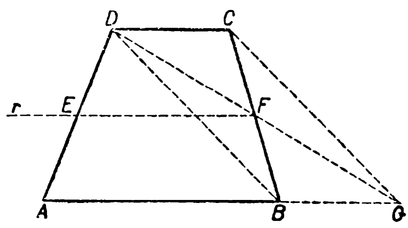


Obr. 153.

Důkaz (obr. 154). Na prodloužení úsečky AB za bod B určeme bod G tak, že $\overline{BG} = \overline{CD}$. Vznikne nám čtyrúhelník $CDBG$, ve kterém je $CD \parallel BG$, $\overline{CD} = \overline{BG}$. Podle $\mathbf{P}^{18}_{2}$ je $CDBG$ rovnoběžník, jehož úhlopříčky jsou BC, DG. Protože F je střed úsečky BC, podle $\mathbf{P}^{18}_{4}$ leží bod F na úsečce DG a je jejím středem. Z toho následuje, že EF je střední příčka $\triangle ADG$ příslušná straně AG. Podle $\mathbf{P}^{20}_{1}$ je tedy $EF \parallel AG$ neboli $EF \parallel AB$. Ježto $AB \parallel CD$, podle $\mathbf{P}^{14}_{4}$ je také $EF \parallel CD$. Mimo to plyne z $\mathbf{P}^{20}_{1}$ ještě, že $2.\overline{EF} = \overline{AG}$. Avšak $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG}$, $\overline{BG} = \overline{CD}$, takže $2.\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

$\mathbf{P}^{20}_{4}$. V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD budiž E střed ramene AD. Budiž r rovnoběžka se základnami vedená bodem E. Přímka r prochází středem F ramene BC.

Důkaz (obr. 154). Podle $\mathbf{P}^{20}_{3}$ je $EF \parallel AB$. Podle $\mathbf{P}^{14}_{3}$ přímka r splyne s přímkou EF, t. j. přímka r prochází bodem F.



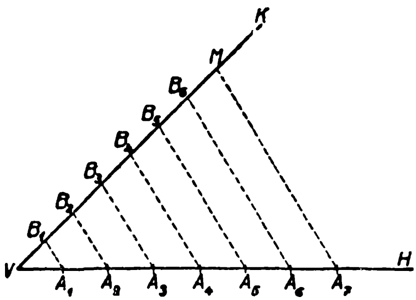
Obr. 154.

Úsečka EF v obr. 154 se jmenuje **střední příčka lichoběžníka** $ABCD$.

$\mathbf{P}^{20}_{5}$. Na jednom rameni VH úhlu $\sphericalangle HVK$ mějme body A_1, A_2,

$A_3, A_4, \ldots$ **tak, že všechny úsečky** $VA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ **jsou si rovny. Na druhém rameni** VK **mějme body** $B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots$ **tak, že všecky přímky** $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \ldots$ **jsou rovnoběžné. Potom také všecky úsečky** $VB_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \ldots$ **jsou si rovny.**

Důkaz (obr. 155). V $\triangle VA_2B_2$ je A_1 střed strany VA_2; dále je $A_1B_1 \| A_2B_2$. Podle $\mathbf{P}_2^{20}$ je tedy B_1 střed strany VB_2, t. j. $\overline{VB_1} = \overline{B_1B_2}$. Ježto $A_1B_1 \| A_3B_3$, je $A_1B_1B_3A_3$ lichoběžník se základnami A_1B_1, A_3B_3; přímka A_2B_2 je rovnoběžná se základnami a prochází středem A_2 ramene A_1A_3. Podle $\mathbf{P}_4^{20}$ je tedy B_2 střed druhého ramene B_1B_3, t. j. $\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3}$. Podobně soudíme z lichoběžníka $A_2B_2B_4A_4$, že $\overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4}$ atd.



Obr. 155.

Z poučky $\mathbf{P}_5^{20}$ plyne eukleidovská konstrukce rozdělení úsečky na libovolný počet stejných dílů. Máme-li na př. rozdělit úsečku VM na sedm stejných dílů (obr. 155), vedeme bodem V pomocnou polopřímku VH, zvolíme libovolnou délku r a určíme na polopřímce VH postupně sedm bodů $A_1, A_2, \ldots A_7$ tak, aby všecky úsečky $VA_1, A_1A_2, \ldots A_6A_7$ byly rovné r. Vedeme přímku MA_7 a s touto přímkou vedeme rovnoběžky body $A_1, A_2, \ldots A_6$, které protnou úsečku VM v bodech B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, jež rozdělí úsečku VM na sedm stejných dílů.

Na str. 48 jsme provedli eukleidovskou konstrukci rozpůlení úhlu. Postupným půlením můžeme daný úhel rozdělit na 2 díly, dále na 4, 8, 16 ... stejných dílů. Ale přesná eukleidovská konstrukce rozdělení daného úhlu na jiný počet stejných dílů je nemožná.

Jsou známy přibližné eukleidovské konstrukce rozdělení úhlu na stejné části, které však nebudeme probírat.

Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili: Střední příčky trojúhelníka — střední příčka lichoběžníka.

Cvičení.

218. Které úsečce v trojúhelníku ABC říkáme střední příčka příslušná ke straně AC? Které jsou její vlastnosti?

219. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 115$ mm, $b = 70$ mm, $c = 75$ mm! Vyšetřete jeho střední příčky tak, že eukleidovsky sestrojíte středy A_1, B_1, C_1 stran BC, CA, AB! Proveďte kontrolu tím, že změříte velikosti středních příček a výsledky měření porovnejte s velikostmi daných stran!

220. Opakujte předchozí cvičení 219 s tou změnou, že eukleidovsky určíte střed C_1 strany AB a bodem C_1 sestrojíte přímky $a' \parallel BC$, $b' \parallel AC$! Bod B_1 je průsečík přímek AC, a' a bod A_1 je průsečík přímek b', BC. Odůvodněte!

221. Dokažte, že čtyři trojúhelníky AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$ v obr. 153 jsou navzájem shodné!

222. Které úsečce v lichoběžníku říkáme střední příčka? Které jsou její vlastnosti?

223. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ (je $AB \parallel CD$), je-li dáno $\overline{AB} = 70$ mm, $\overline{CD} = 30$ mm, $\overline{AD} = 47$ mm, $\alpha = 52\frac{1}{2}^{\circ}$ (viz obr. 131 na str. 86; pomocný $\triangle AED$)! Narýsujte eukleidovsky jeho střední příčku tak, že vyšetříte středy ramen AD, BC!

224. Předchozí cvičení 223 řešte tak, že určíte jen střed E strany AD a užitím trojúhelníkových pravítek sestrojíte bodem E přímku $p \parallel AB$!

225. Narýsujte libovolný rovnoběžník $ABCD$ a označte S jeho střed! Bodem S veďte přímku $p \parallel AB$! Dokažte, že přímka p půlí obě rovnoběžné strany AD, BC. Jsou-li U, V středy těchto stran, je $\overline{UV} = \overline{AB}$. (Užijte dvakrát poučky $\mathbf{P}^{2}_{2}{}^{0}$). Úsečka UV se jmenuje střední příčka rovnoběžníka $ABCD$. Kolik středních příček má každý rovnoběžník?

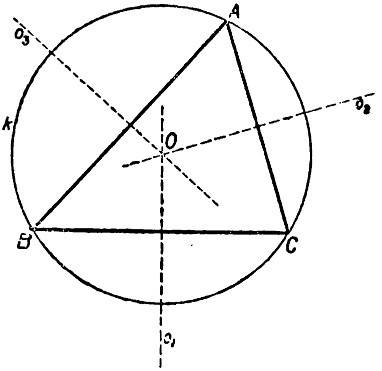
226. Narýsujte úsečku $\overline{MN} = 80$ mm a rozdělte ji eukleidovsky na 8 stejných dílů! Změřte ty díly!

227. Úsečku $\overline{UV} = 9$ cm rozdělte:
a) na dva díly, které jsou v poměru 1 : 2,
b) na dva díly, které jsou v poměru 2 : 3,
c) na tři díly, které jsou v poměru 4 : 2 : 3!
Díly změřte a proveďte výpočtem zkoušku přesnosti svého rýsování!

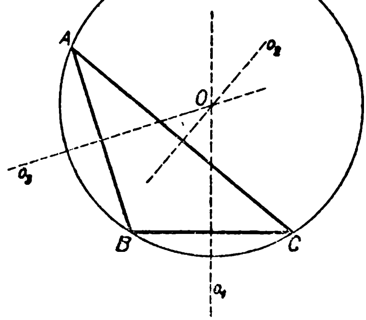
8. Další vlastnosti trojúhelníka. (21)

Zvolme libovolný $\triangle ABC$ (obr. 156) a sestrojme osu o_1 strany BC, osu o_2 strany AC, osu o_3 strany AB. Kdyby snad bylo $o_1 \parallel o_2$, potom kolmice $BC \perp o_1$ by podle $\mathbf{P}^{1}_{6}{}^{4}$ stála kolmo také na o_2. To je nemožné, neboť jedinou kolmicí na o_2 procházející bodem C je přímka AC různá od BC. Proto přímky o_1, o_2 mají společný bod O. Ježto O leží na ose o_1, podle $\mathbf{P}^{1}_{2}{}^{0}$ je $\overline{BO} = \overline{CO}$. Protože O leží také na o_2, je též $\overline{AO} = \overline{CO}$. Proto všecky tři úsečky AO, BO, CO jsou si rovny. Obráceně, jestliže pro nějaký bod M si jsou rovny všecky úsečky AM, BM, CM, leží M podle $\mathbf{P}^{1\,0}_{4}$ na obou osách o_1, o_2 a splyne tudíž s O. Je tedy O jediný bod roviny, který má od všech tří bodů A, B, C touž vzdálenost r. Kružnice (O; r), v obr. 156 označená k, prochází všemi vrcholy $\triangle ABC$ a jmenuje se **kružnice opsaná trojúhelníku** $\triangle ABC$. Protože $\overline{AO} = \overline{BO}$, podle $\mathbf{P}^{1\,0}_{4}$ leží O také na ose o_3. Tedy:

$\mathbf{P}^{2\,1}_{1}$. Osy stran $\triangle ABC$ se protínají všecky tři v jediném bodě O, který je středem opsané kružnice.



Obr. 156.



Obr. 157.

U ostroúhlého trojúhelníka (obr. 156) leží O vždy uvnitř trojúhelníka. U tupoúhlého trojúhelníka (obr. 157) leží O vždy vně trojúhelníka. Důkazy nebudeme probírati v této třídě a omezíme se na pravoúhlý trojúhelník:

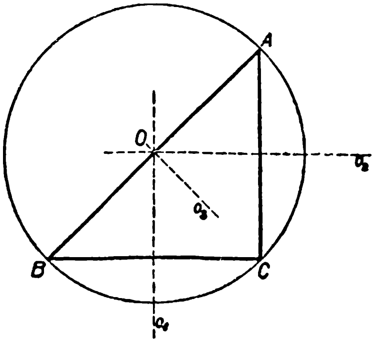
$\mathbf{P}^{2\,1}_{2}$. Střed přepony pravoúhlého trojúhelníka je středem kružnice opsané.

Důkaz (obr. 158). Budiž O střed přepony AB pravoúhlého $\triangle ABC$. Rovnoběžka o_1 k přímce AC vedená bodem O podle $\mathbf{P}^{2\,0}_{2}$ prochází středem strany BC. Mimo to je $AC \perp BC$, tedy $o_1 \perp BC$ podle $\mathbf{P}^{1\,4}_{6}$, takže o_1 je osa strany BC. Tedy bod O leží na ose strany BC. Podobně by se dalo odůvodnit, že O leží na ose o_2 strany AC. Je samozřejmé, že O leží také na ose o_3 strany AB. Tedy O je střed kružnice opsané.

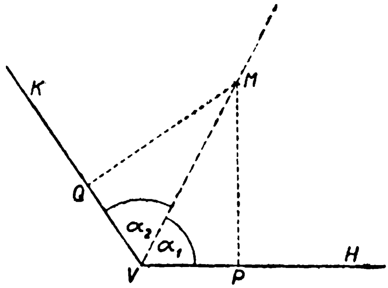
$\mathbf{P}^{2\,1}_{3}$. Leží-li bod M na ose úhlu $\sphericalangle HVK$, je stejně vzdálen od obou přímek VH, VK.

Důkaz (obr. 159). Každý z obou úhlů $\alpha_1 = \sphericalangle HVM$, $\alpha_2 = \sphericalangle KVM$ je polovinou $\sphericalangle HVK$, který je menší než $2R$. Proto $\alpha_1 < R$, $\alpha_2 < R$, takže podle $\mathbf{P}^7_7$ paty P, Q kolmic spuštěných z bodu M na přímky VH, VK padnou dovnitř polopřímek VH, VK. Vzniknou dva pravoúhlé $\triangle VMP$, $\triangle VMQ$ a podle $\mathbf{P}^{1,3}_4$ je $\triangle VMP \cong \triangle VMQ$, tedy $\overline{MP} = \overline{MQ}$.

$\mathbf{P}^{2,1}_4$. Leží-li bod M uvnitř úhlu $\sphericalangle HVK$, ale neleží-li na jeho ose, potom úhly $\alpha_1 = \sphericalangle HVM$, $\alpha_2 = \sphericalangle KVM$ si nejsou rovny. Je-li



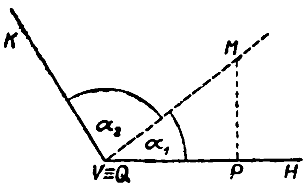
Obr. 158.



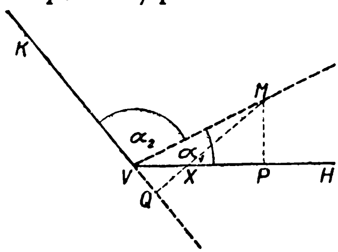
Obr. 159.

na př. $\alpha_1 < \alpha_2$, je vzdálenost bodu M od přímky VH menší než vzdálenost bodu M od přímky VK.

Důkaz (obr. 160abc). Ježto $\alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle HVK$, je $\alpha_1 + \alpha_2 < 2R$. Je-li tedy $\alpha_1 < \alpha_2$, musí býti $\alpha_1 < R$ a podle $\mathbf{P}^7_7$ pata P kolmice spuštěné



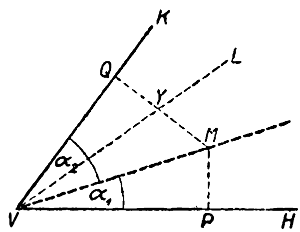
Obr. 160a.



Obr. 160b.

z bodu M na přímku VH padne dovnitř polopřímky VH. Naproti tomu pata Q kolmice spuštěné z bodu M na přímku VK může splynout s bodem V (obr. 160a) nebo může padnout na polopřímku opačnou k VK (obr. 160b) nebo může padnout dovnitř polopřímky VK (obr. 160c).

Vyšetříme postupně všecky tři případy.



Obr. 160c.

I. (obr. 160a). Z pravoúhlého $\triangle MPV$ plyne podle $\mathbf{P}^8_8$, že $\overline{MP} < \overline{MV}$ neboli $\overline{MP} < \overline{MQ}$.

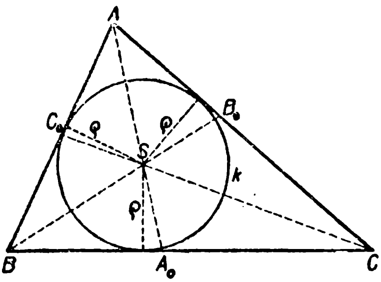
II. (obr. 160b). Body M, Q jsou od sebe odděleny přímkou VH, takže úsečka MQ protne přímku VH v bodě X. Jest $\overline{MQ} >$ $> \overline{MX}$; naproti tomu podle $\mathbf{P}^8_8$ je $\overline{MP} < \overline{MX}$ nebo nanejvýš (kdyby body X, P snad splynuly) $\overline{MP} = \overline{MX}$. Proto je jistě $\overline{MP} < \overline{MQ}$.

III. (obr. 160c). Sestrojme $\sphericalangle MVL$ rovný úhlu α_1 a k němu styčný. Ježto $\alpha_1 < \alpha_2$, padne polopřímka VL dovnitř úhlu α_2 a proto úsečka MQ protne polopřímku VL v bodě Y.

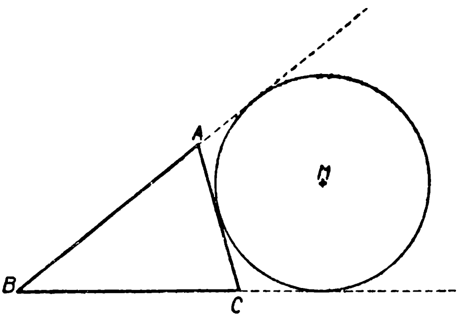
Zřejmě polopřímka VM je osa úhlu $\sphericalangle HVL$, takže podle $\mathbf{P}^{21}_3$ je $\overline{MP}$ rovné vzdálenosti bodu M od přímky VL. Proto je $\overline{MY} >$ $> \overline{MP}$ nebo nanejvýš $\overline{MY} = \overline{MP}$. Naproti tomu je zřejmě $\overline{MY} <$ $< \overline{MQ}$. Proto $\overline{MP} < \overline{MQ}$.

$\mathbf{P}^{21}_5$. **Leží-li bod M uvnitř $\sphericalangle HVK$ a jsou-li si rovny vzdálenosti bodu M od obou přímek VH, VK, leží bod M na ose $\sphericalangle HVK$.**

To plyne z $\mathbf{P}^{21}_4$.



Obr. 161.



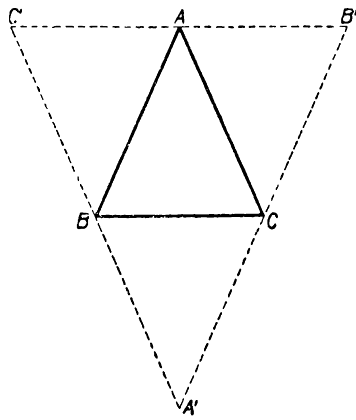
Obr. 162.

Zvolme nyní libovolný $\triangle ABC$ (obr. 161) a sestrojme osy AA_0, BB_0, CC_0 jeho úhlů, při čemž body A_0, B_0, C_0 leží na stranách trojúhelníka. Obě úsečky BB_0, CC_0 se protnou uvnitř $\triangle ABC$ v bodě S. Bod S leží na ose úhlu β. Proto jeho vzdálenosti od přímek AB, AC jsou si rovny podle $\mathbf{P}^{21}_3$. Avšak S leží též na ose úhlu γ, proto také jeho vzdálenosti od přímek AC, BC jsou si rovny. Z toho plyne, že jsou si rovny také vzdálenosti bodu S od přímek AB, AC. Ježto však S leží uvnitř $\triangle ABC$, leží uvnitř úhlu α, takže podle $\mathbf{P}^{21}_5$

bod S leží také na ose úhlu α. Tedy všecky tři vzdálenosti bodu S od přímek AB, AC, BC jsou rovny téže délce ϱ. Vedeme-li kolem bodu S kružnici k s poloměrem ϱ, jsou podle $\mathbf{P}^{9}_{3}$ všecky tři přímky AB, AC, BC tečnami kružnice k. Až na body dotyku leží kružnice k celá uvnitř $\triangle ABC$. Pravíme, že k je **kružnice vepsaná trojúhelníku** $\triangle ABC$. Tedy:

$\mathbf{P}^{21}_{6}$. Osy úhlů $\triangle ABC$ se protínají všecky tři v jediném bodě S, který je středem vepsané kružnice.

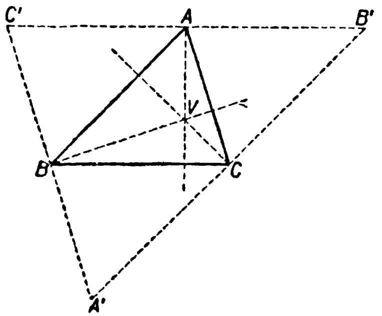
Obráceně, jestliže bod M leží uvnitř $\triangle ABC$ a jestliže si jsou rovny vzdálenosti bodu M od všech tří přímek AB, AC, BC, potom M leží uvnitř všech úhlů trojúhelníka a podle $\mathbf{P}^{21}_{5}$ leží na osách všech tří úhlů, takže M splyne s bodem S. Existují však také vně trojúhelníka body M stejně vzdálené od všech tří přímek. Takový bod M je rovněž středem kružnice, dotýkající se všech tří přímek AB, AC, BC, ale tato kružnice leží až na jeden bod dotyku vně trojúhelníka. Taková kružnice se jmenuje kružnice vně vepsaná trojúhelníku $\triangle ABC$; pro každý trojúhelník jsou tři takové kružnice. V obr. 162 je znázorněna jedna kružnice vně vepsaná $\triangle ABC$. Kružnice vně vepsané nebudeme probírati v této třídě.



Obr. 163.

Zvolme libovolný $\triangle ABC$. Nový $\triangle A'B'C'$ sestrojíme si tak, že středy stran nového trojúhelníka splynou s vrcholy původního trojúhelníka. Budeme postupovati takto (obr. 163): Bodem A vedeme rovnoběžku s přímkou BC a určíme na ní oba body, vzdálené od bodu A o délku $\overline{BC}$. Z těchto dvou bodů jeden, který označíme B', bude oddělen od bodu B přímkou AC. Druhý, který označíme C', bude oddělen od bodu C přímkou AB. Vzniknou dva čtyrúhelníky $ABCB'$, $ACBC'$. Protože $AC' \parallel BC$, $\overline{AC'} = \overline{BC}$, je $ACBC'$ rovnoběžník, takže $BC' \parallel AC$. Podobně také $ABCB'$ je rovnoběžník, takže $CB' \parallel AB$. Mimo to podle $\mathbf{P}^{18}_{1}$ je $\overline{BC'} = \overline{AC}$,

$\overline{CB'} = \overline{AB}$. Přímka BC' protne přímku AB v bodě B. Protože $CB' \parallel AB$, podle $\mathbf{P}^{1}_{5}{}^{4}$ protnou se přímky BC', CB' v bodě A a vznikne třetí rovnoběžník $ABA'C$. Podle $\mathbf{P}^{1}_{1}{}^{8}$ jest $\overline{BA'} = \overline{AC}$, $\overline{CA'} = \overline{AB}$. Celkem máme $\overline{C'A} = \overline{B'A}$, $\overline{C'B} = \overline{A'B}$, $\overline{A'C} = \overline{B'C}$, a proto body A, B, C jsou středy stran $\triangle A'B'C'$.

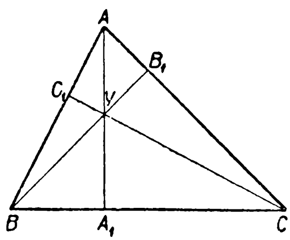


Obr. 164.

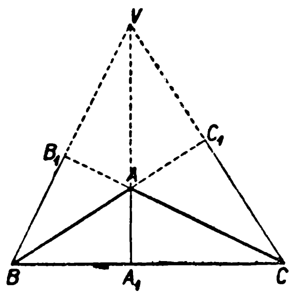
$\mathbf{P}^{2}_{7}{}^{1}$. Kolmice, vztyčené ve vrcholech $\triangle ABC$ k protějším stranám, se protnou všecky v jediném bodě V.

Důkaz (obr. 164). Sestrojme $\triangle A'B'C'$ tak, aby středy jeho stran byly vrcholy $\triangle ABC$. Potom kolmice, vztyčené v těchto vrcholech k protějším stranám $\triangle ABC$, jsou osy stran trojúhelníka $\triangle A'B'C'$, takže podle $\mathbf{P}^{2}_{1}{}^{1}$ se protnou všecky tři ve středu kružnice, opsané trojúhelníku $\triangle A'B'C'$.

Je-li A_1 pata kolmice, spuštěné z bodu A na přímku BC, nazveme úsečku AA_1 **výškou trojúhelníka** $\triangle ABC$, příslušnou vrcholu A nebo straně BC. Má tedy $\triangle ABC$ tři výšky.



Obr. 165.



Obr. 166.

Budiž dán nejprve ostroúhlý $\triangle ABC$ (obr. 165) a buďtež AA_1, BB_1, CC_1 jeho výšky. Podle $\mathbf{P}^{7}_{7}$ padne bod A_1 dovnitř úsečky BC, B_1 dovnitř úsečky AC, C_1 dovnitř úsečky AB. Jsou tedy na př. body BB_1 od sebe odděleny přímkou AA_1, a proto průsečík V přímek AA_1, BB_1 padne dovnitř úsečky AA_1. Podobně musí V padnout také dovnitř úseček BB_1, CC_1. Proto se bod V nazývá **průsečík výšek trojúhelníka** $\triangle ABC$. Tento název se dává bodu V

u každého trojúhelníka, ačkoli u tupoúhlého $\triangle ABC$ je ve skutečnosti V průsečík prodloužených výšek. Jestliže $\triangle ABC$ má tupý úhel, na př. při vrcholu A (obr. 166), pak podle **P**$_7^2$ padne sice bod A_1 dovnitř strany BC, ale bod B_1 padne na prodloužení strany AC za bod A a bod C_1 padne na prodloužení strany AB za bod A. Proto výška AA_1 leží uvnitř trojúhelníka, ale výšky BB_1, CC_1 leží vně trojúhelníka, a bod V je na prodloužení výšek.

U pravoúhlého trojúhelníka splyne bod V s vrcholem pravého úhlu. Vysvětlete!

U $\triangle ABC$ nejčastěji značíme, jak to zde bylo provedeno, t. j. písmenem O střed kružnice opsané, písmenem S střed kružnice vepsané, písmenem V průsečík výšek, písmenem r poloměr kružnice opsané, písmenem ϱ poloměr kružnice vepsané.

Geometrické názvy, s kterými jste se v tomto článku seznámili: Kružnice opsaná trojúhelníku — kružnice vepsaná trojúhelníku — výšky trojúhelníka — průsečík výšek.

Cvičení.

228. Co víte o osách stran trojúhelníka?

229. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů a opište mu kružnic! Změřte její poloměr!

a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm,
b) $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $\alpha = 120°$.
c) $a = 6$ cm, $\beta = 30°$, $\gamma = 90°$; jak si zjednodušíte tuto konstrukci?

230. Rozhodněte, zda je možná tato úloha: Do kruhové desky o poloměru $r = 46$ mm máme vyříznout otvor tvaru trojúhelníka ABC, jehož strany jsou $a = 41$ mm, $b = 52$ mm, $c = 59$ mm, tak, aby vrcholy A', B', C' hledaného trojúhelníka $A'B'C'$ měly od kraje desky vesměs stejné vzdálenosti. Určete tuto vzdálenost v! Až zjistíte polohu hledaného bodu A' uvnitř desky, jak určíte, který bod okraje desky je nejblíž k bodu A'? (Narýsujte $\triangle ABC$, opište mu kružnici k a označte r její poloměr! Kolem středu S' desky opište pomocnou kružnici k' o poloměru r. Na ní určete body A', B', C' tak, aby $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$

231. Narýsujte trojúhelník JKL! Uvnitř strany KL určete bod, který je stejně vzdálen od přímek JK, JL!

232. Narýsujte rovnoramenný trojúhelník ABC o základně BC a sestrojte jeho osu AD, kde D je bod na základně! Uvnitř úsečky AD zvolte bod X! Co soudíte o vzdálenostech bodu X od přímek AB, AC?

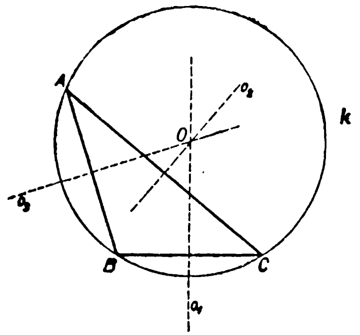
233. Narýsujte kružnici k (třeba pomocí okraje pohárku) a zvolte na ní tři různé body A, B, C! Jak sestrojíte střed S kružnice k (obr. 167)?

234. Co víte o osách úhlů trojúhelníka?

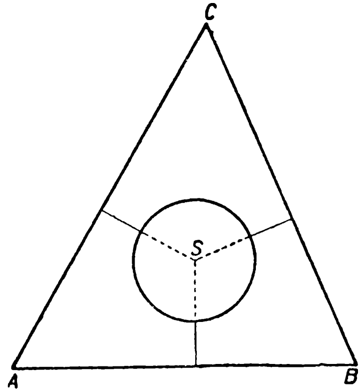
235. Sestrojte trojúhelník ABC podle daných údajů a vepište mu kružnici!

a) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm.
b) $a = 6$ cm, $b = 7{,}5$ cm, $c = 12$ cm.

236. Rýsujte na celou stránku sešitu (obr. 168). Do trojúhelníkové desky má být vyvrtán kruhový otvor tak, aby nejužší místa měla šířku 15 mm. Vyšetřete střed a poloměr otvoru, jestliže strany trojúhelníka jsou $\overline{AB} = 114$ mm, $\overline{BC} = 124$ mm, $\overline{CA} = 132$ mm.



Obr. 167.



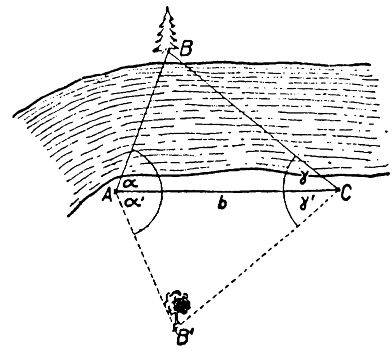
Obr. 168.

237. Narýsujte rovnoběžky $p \parallel q$ tak, aby jejich vzdálenost byla 43 mm a protněte je přímkou r tak, aby jeden ze čtyř úhlů přímek q a r byl 60°! Sestrojte kružnici, která se dotýká všech tří přímek p, q, r! (Takové kružnice jsou dvě!)

238. Které úsečce v trojúhelníku říkáme výška příslušná vrcholu B? Kterému bodu v rovině trojúhelníka říkáme průsečík výšek?

IV. GRAFICKÉ URČOVÁNÍ VZDÁLENOSTÍ A VÝŠEK.

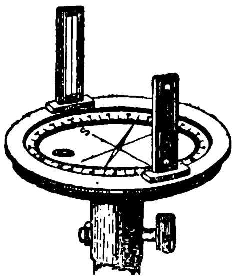
Často se stává, že potřebujeme určit v přírodě nějakou délku nebo řadu délek. Tyto délky bývají přímému měření nepřístupné nebo je jejich měření obtížné. Mnohem snáze změříme totiž velikost úhlu. Máme na př. změřit vzdálenost místa A, které leží u břehu řeky, od místa B, které leží u druhého břehu řeky (obr. 169). Přímému měření vadí řeka. Pomůžeme si takto: Zvolíme si vhodné třetí místo C na témž břehu jako je A a změříme vzdálenost $\overline{AC} = b$; dále změříme oba úhly $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Všecka tři měření se dají provést na té straně od řeky, na které je místo A. Třemi prvky b, α, γ je trojúhelník $\triangle ABC$ určen (věta určenosti usu). Hledaná vzdálenost $\overline{AB}$ se proto musí dát stanovit z našich údajů. To stanovení lze provést dvojím způsobem: 1. Buď sestrojíme na základě naměřených údajů pomocný trojúhelník shodný s trojúhelníkem $\triangle ABC$ (na př. $\triangle AB'C$ v obr. 169) a potom je $\overline{AB'} = \overline{AB}$, čímž je úloha rozřešena, 2. anebo (a to bývá výhodnější) sestrojíme trojúhelník $\triangle ABC$ ve zmenšeném měřítku. Zpravidla hned při měření si od ruky narýsujeme malý obrázek, který je skutečnému trojúhelníku $\triangle ABC$ zhruba podobný. Do tohoto náčrtu si zapíšeme změřené hodnoty. Potom narýsujeme dosti veliký přesný obrazec. V našem případě jsme třeba naměřili $b = 6$ m, $\alpha = 86^\circ$, $\gamma = 68^\circ$. Nyní rozhodneme, v jakém měřítku budeme rýsovat přesný obrazec. Měřítko musí být voleno tak, aby se nám zmenšený obrazec vešel do naší nákresny. Za druhé volíme měřítko tak, abychom dostali pokud možno veliký obrazec, protože z malého obrazce bychom hledanou vzdálenost dostali velmi nepřesně. Konečně volíme měřítko tak, aby souvislost mezi skutečnými a zmenšenými vzdálenostmi byla co nejjednodušší. Obyčejně volíme měřítko tak, aby 1 cm znamenal ve skutečnosti 1 m, 10 m, 100 m ... nebo 2 m, 20 m, 200 m ... nebo 0,5 m, 5 m, 50 m, atd. V našem případě zvolíme měřítko tak, že 1 cm znamená ve skutečnosti 2 m = 200 cm. Říkáme, že naše měřítko je 1 : 200, t. j. velikost úsečky na zmenšeném obrazci je $\frac{1}{200}$ velikosti úsečky ve skutečnosti. Zmenšili jsme tedy skutečný obrazec 200krát. Pak velmi přesně narýsujeme trojúhelník $\triangle A'B'C'$, v němž je $b' = \frac{1}{200} \cdot 6 \text{ m} =$ $= 3$ cm, a změříme stranu $A'B'$; najdeme $\overline{A'B'} = 6{,}3$ cm. Skutečná



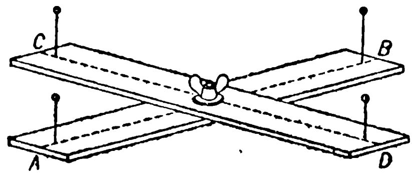
Obr. 169.

úsečka $\overline{AB} = 200$. $\overline{A'B'} = 6{,}3\text{ cm} \cdot 200 = 12{,}6\text{ m}$. Je tedy vzdálenost $\overline{AB}$ asi 12,6 m. Říkáme „asi" nebo přibližně 12,6 m, protože ani měření v přírodě, ani rýsování na papíře není dokonale přesné.

Trojúhelník $\triangle ABC$, který jsme vyšetřovali, ležel ve vodorovné neboli horizontální rovině. Proto i úhly α, γ, které jsme musili změřit, ležely ve vodorovné rovině. K tomuto měření úhlů užíváme **úhloměrného přístroje** (obr. 170), jehož úhloměrná stupnice je ve vodorovné poloze.

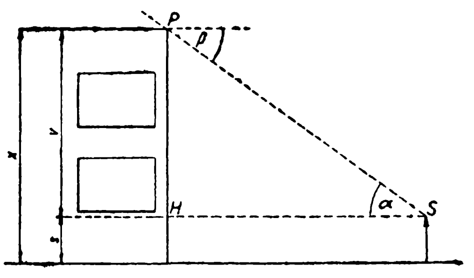


Obr. 170.

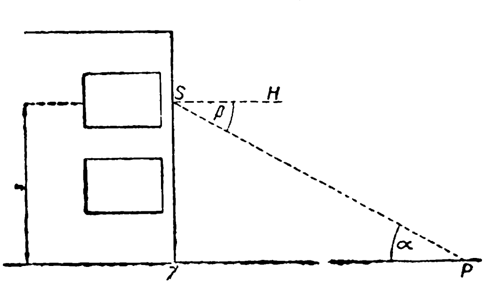


Obr. 171.

Pro vaše cvičná měření si můžete sestrojit jednoduchý úhloměrný „přístroj" podle obr. 171. Opatřte si dvě asi 3 cm široké tenké laťky o délce 20 až 30 cm. Určete jejich středy a narýsujte střední příčky AB, CD. Laťky uprostřed provrtejte, protáhněte jimi šroub a přitáhněte je k sobě matkou (nejlépe „křídlovou"). V bodech A, B, C, D zaražte ocelové špendlíky (se skleněnými hlavičkami) kolmo k rovinám latěk. Velikost úhlů, který jste v přírodě naměřili, určíte na tuhé papírové desce tak, že na ni úhloměrný přístroj položíte a tužkou



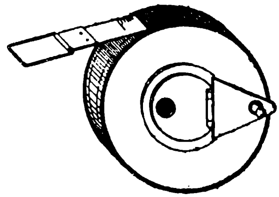
Obr. 172a.



Obr. 172b.

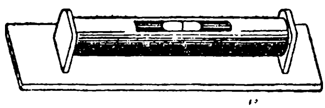
si vyznačíte body A, B, C, D. Potom změříte úhloměrem úhly přímek AB, CD.

Vedle úhlů vodorovných měříme ještě úhly svislé (ve svislé rovině); při tom jedno rameno SH takového úhlu $\sphericalangle HSP$ (viz obr. 172a) je vždycky vodorovné. Pozorujeme-li se stanoviska S předmět P položený výše než S, pak svislý úhel $\sphericalangle HSP$ s vodorovnou polopřímkou SH se nazývá výškový úhel předmětu P se stanoviska S. Leží-li předmět P níže nežli stanovisko S, mluvíme o úhlu hloubkovém $\sphericalangle HSP$ (viz obr. 172b) předmětu P (pohled s okna dolů). K měření svislých úhlů užíváme úhloměrného přístroje, jehož úhlová stupnice je ve svislé rovině. Jiné úhly než vodorovné a svislé při měření v přírodě neužíváme.



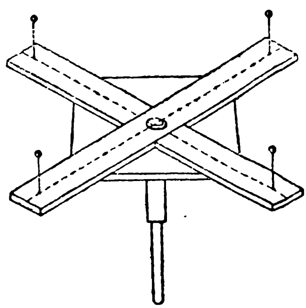
Obr. 173.

Vzdálenosti při měření v přírodě odměřujeme buď **latěmi,** jejichž délku známe, nebo **měřičským pásmem** (obr. 173). Svislý směr si určíme **olovnicí** (obr. 174). Olovnicí a pravým úhlem určíte i směr vodorovný. K určení vodorovného směru se v praxi užívá **libely** (obr. 175). K vytyčování pravých úhlů se užívá **záměrného kříže** (obr. 176), který si rovněž snadno zhotovíte.



Obr. 175.

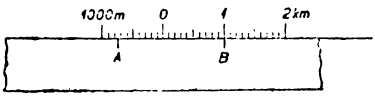
Obr. 174.



Obr. 176.

Obr. 177.

Jednotlivé body v přírodě vyznačujeme **výtyčkami** (obr. 177), které bývají červeně a bíle zbarveny, aby byly dobře patrné. Máme-li „prodloužit" úsečku *A*, *B*, která je vytyčena dvěma výtyčkami *A*, *B*, musíme určit takovou polohu třetí výtyčky *C*, aby všecky tři výtyčky *A*, *B*, *C* byly „v zákrytu". Proto můžeme jen částečně přirovnat náš způsob konstrukcí v sešitě s vyměřovacími pracemi v přírodě, které jsou mnohem obtížnější a složitější. Vyměřování pro praktické účely (stavby, plány pozemků, zhotovování map) provádějí zeměměřiči. Příslušná nauka, která poučuje, jak se měření provádí, se jmenuje zeměměřičství.



Obr. 178.

Při svých vycházkách se také seznamte se **speciální mapou** svého kraje. Tato mapa představuje zhruba zmenšení vodorovné krajiny, a to v měřítku 1 : 50 000 (staré mapy speciální mají měřítko 1 : 75 000). Je tedy 1 cm na mapě roven 50 000 cm ve skutečnosti, tedy 500 m. Na mapě bývá připojena stupnice, na které ihned zjistíte, jakou vzdálenost mají dvě určitá místa *A*, *B* na mapě zobrazená. Stačí úsečku *AB* proužkem papíru přenést na stupnici a můžeme ihned přečíst hledanou vzdálenost (obr. 178, kde je $\overline{AB}$ = 1 km 750 m).

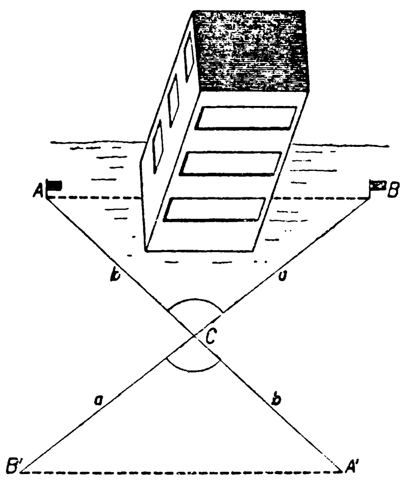
Cvičení.

239. Písmena *A*, *B*, *C* znamenají tři města. *A* leží 30 km severně od *B* a 50 km západně od *C*.

a) Určete vzdálenost od *B* k *C*!

b) V jakém směru od města *B* leží město *C*?

240. S místa *A* není do místa *B* vidět (obr. 179). Máme-li určit vzdálenost *AB*, zvolíme pomocný bod *C*, z něhož jsou místa *A*, *B* viditelná a určíme místa *B'*, *A'* tak, aby body *B*, *C*, *B'* ležely v jedné a místa *A*, *C*, *A'* v druhé přímce. Přitom



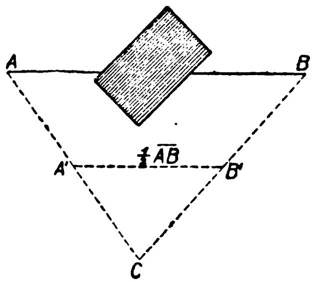
Obr. 179.

je $\overline{CB'} = \overline{CB}$, $\overline{CA'} = \overline{CA}$. Tu je $\overline{A'B'} = \overline{AB}$; dokažte! Proveďte takové měření na školním hřišti!

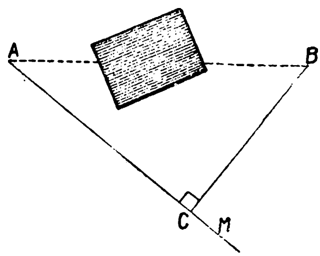
Cvičení 240 řešte také užitím střední příčky $A'B'$ podle obr. 180.

241. Předchozí cvičení řešte graficky tím, že sestrojíte zmenšený obrazec. Je dáno: $a = 37{,}1$ m, $b = 41{,}2$, $\gamma = 49\frac{1}{2}°$. Stanovte $\overline{AB}$!

242. Abychom změřili vzdálenost dvou bodů A, B (obr. 181), jestliže není s jednoho na druhý vidět, vedli jsme pomocnou polopřímku AM a spustili z bodu B kolmici $BC \perp AM$, jejíž pata je C. Bylo naměřeno $\overline{AC} = 50$ m, $\overline{BC} = 21$ m. Sestrojte zmenšený obrazec a určete AB! Proveďte takové měření na školním hřišti! Užijte záměrného kříže!



Obr. 180.



Obr. 181.

243. Určete výškový úhel slunce v době, kdy svislá tyč dlouhá 4 m vrhá stín délky 5 m!

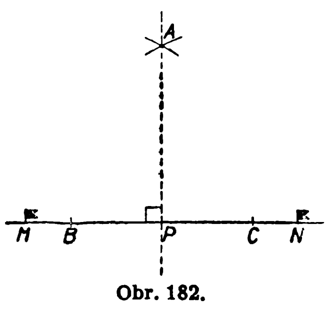
Jak vysoký je komín, který v téže chvíli vrhá stín 55 m?

244. K přímce MPN, vytyčené na hřišti užitím pásma nebo provazu,

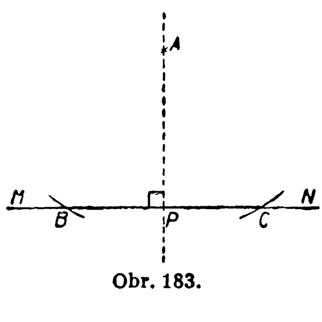
a) vztyčte v bodě P kolmici PA podle obr. 182, kde je $\overline{PB} = \overline{PC}$, $\overline{BA} = \overline{CA}$. Odůvodněte!

b) spusťte z bodu A kolmici AP podle obr. 183, kde je $\overline{AB} = \overline{CA}$, $\overline{BP} = \overline{CP}$. (Bod P určíte rozpůlením úsečky BC.)

245. Výškový úhel vrcholu věže se stanoviska vzdáleného 40 m od paty věže je 35°. Najděte výšku věže!



Obr. 182.



Obr. 183.

246. Dětský drak je na provaze dlouhém 230 m, který tvoří s vodorovným směrem úhel 65°. V jaké výši je drak?

247. Pod jakým hloubkovým úhlem je viděti s vrcholu věže vysoké 42 m předmět, ležící na zemi ve vzdálenosti 60 m od věže?

248. Žebřík dlouhý 5 m je opřen o svislou stěnu. Pata žebříku je 2,4 m od stěny.
a) O jaký úhel je žebřík odchýlen od vodorovné polohy?
b) Jak vysoko nad zemí je vrchol žebříku?

249. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad hladinou vodní, je viděti přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel prvé je 64°, hloubkový úhel druhé je 48°. Určete vzdálenost loděk!

250. Výškový úhel vrcholu věže s místa, vzdáleného 150 m od paty, je 28°. Jaký je výškový úhel s místa vzdáleného 100 m?

251. Pozorovatel z balonu ve výšce 1 km vidí továrnu pod hloubkovým úhlem 35°. Po dvaceti minutách stoupání ji vidí pod hloubkovým úhlem $55\frac{1}{2}°$. Určete rychlost stoupání v kilometrech za hodinu!

252. Muž na vrcholu kopce pozoruje rovnou silnici v údolí přímo od něho se vzdalující. Dva sousední kilometrové kameny vidí pod hloubkovými úhly 30° a 13°. Jak vysoko nad údolím je vrchol kopce?

253. Písmena U, V, X znamenají tři kostelní věže na speciální mapě (měřítko 1 : 50 000). U je na sever od V a X je na severovýchod od V. Na mapě jsme odměřili $\overline{UV} = 3$ cm, $\overline{VX} = 6$ cm.
a) Jak daleko je obec U od obce V a obec V od obce X?
b) Jak daleko je obec X od obce U?
c) V jakém směru od obce U je obec X?

254. Tři cesty tvoří trojúhelník LMN. $\overline{LM} = 600$ m, $\overline{MN} = 450$ m, $\overline{NL} = 350$ m. Jak daleko od cesty LM je křižovatka N?

255. Domek C leží nalevo od silnice mezi dvěma body A, B silnice; $\overline{AB} =$ $= 1$ km. Body A, B, C tvoří $\triangle ABC$, kde $\alpha = 32°$, $\beta = 52°$.
a) Určete vzdálenost $\overline{AC}$!
b) Určete nejkratší vzdálenost domku od silnice!

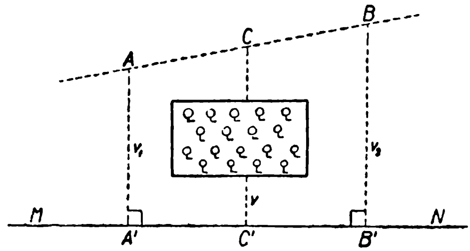
256. Nalevo od rovné cesty HKX jsou dva kopce A, B. $\overline{HK} = 1$ km, $\sphericalangle XHA = 30°$, $\sphericalangle XHB = 40°$, $\sphericalangle XKA = 63°$, $\sphericalangle XKB = 140°$ Určete,
a) jak daleko od sebe jsou ty kopce;
b) jak daleko od cesty je kopec A;
c) jak daleko od cesty je kopec B.

257. Železniční trať směřuje od západu k východu. A a B jsou dvě místa na trati vzdálená od sebe 300 m. Věž V leží od místa A ve směru 48° od severu k východu, od místa B ve směru 28° od severu k západu. Určete:
a) vzdálenost věže od místa A;
b) vzdálenost věže od místa B;
c) vzdálenost věže od trati!

258. S kopce, který je 120 m nad rovinou, pozoruji v rovině orající traktor, jedoucí přímo proti mně. Na počátku brázdy vidím traktor pod hloubkovým úhlem 18°, na konci brázdy pod hloubkovým úhlem 49°. Jaká je délka pole?

259. Loď pluje k severovýchodu rychlostí 10 uzlů. (To znamená, že urazí za hodinu 10 námořních mil; jedna námořní míle je asi 1 850 m.) Maják je v jedné chvíli přesně na sever od lodi a za čtvrt hodiny je ve směru 76° od jihu k západu. Určete nejkratší vzdálenost od lodi k majáku!

260. Trám AB dlouhý 3 m je upevněn dvěma provazy AC, BD. Oba body C, D jsou stejně vysoko nad zemí. Trám je nakloněn o 10° od vodorovné polohy, bod B je níže než A, oba provazy jsou nakloněny o 20° od svislé polohy; $\overline{AC} = 4{,}8$ dm. Určete $\overline{BD}$!



Obr. 184.

261. Stanovte vzdálenost $\overline{CC'} = v$ místa C od přímky MN, není-li s místa C vidět (obr. 184). [Bodem C vedeme pomocnou přímku ACB, kde $\overline{CA} = \overline{CB}$ tak, aby s bodů A, B bylo na přímku MN vidět. Spusťte kolmice $AA' \perp MN$, $BB' \perp MN$, kde A', B' jsou příslušné paty. Je-li $\overline{AA'} = v_1$, $\overline{BB'} = v_2$, je $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.]

V. POČETNÍ ÚLOHY O OBSAHU, POVRCHU A OBJEMU.

262. Strana čtverce je rovna
a) 27,15 m; b) 13,78 m; c) $3\frac{3}{4}$ m; d) $2\frac{5}{6}$ m; e) $\frac{7}{12}$ m.
Určete jeho obvod!

263. Strana čtverce je rovna
a) 7,85 m; b) 12,09 m; c) 0,025 m; d) $5\frac{1}{2}$ m; e) $1\frac{1}{4}$ m.
Určete jeho obsah!

264. Kolikrát se zvětší obsah čtverce, jestliže stranu
a) zdvojnásobíme, b) ztrojnásobíme?
Vysvětlete obrazcem od ruky! Proveďte číselný příklad!

265. Určete obsah obdélníkové zahrady, jestliže její šířka je 13,4 m a délka je
a) o 12,6 m větší než šířka;
b) třikrát větší než šířka;
c) $2\frac{1}{2}$ krát větší než šířka!

266. Kolik arů měří obdélníkový pozemek, jestliže
a) délka je 1,72 km, šířka 0,34 km;
b) délka je 516 m, šířka 270 m?

267. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže
a) ztrojnásobíme délku,
b) zdvojnásobíme šířku,
c) ztrojnásobíme délku a zdvojnásobíme šířku,
d) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na polovinu,
e) ztrojnásobíme délku i šířku,
f) ztrojnásobíme délku a šířku zmenšíme na třetinu,
g) délku i šířku zmenšíme na třetinu,
h) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme na polovinu,
i) délku zvětšíme o polovinu a šířku zmenšíme o třetinu?

K vysvětlení nakreslete si obrazec od ruky! Přesvědčujte se o správnosti odpovědi jednoduchými číselnými příklady!

268. Jak široké je pole obsahu 4 ha, je-li jeho délka 625 m?

269. Kolik osob je možno umístiti do sálu o rozměrech 59 m a 26 m, počítá me-li, že na 1 m^2 mohou pohodlně státi 4 osoby?

270. Zahrada tvaru obdélníka o rozměrech 169 m a 95 m byla obezděna zdí 30 cm silnou; oč se zmenšila plocha zahrady?

271. Co je větší, čtverec o straně 7,29 m nebo obdélník o stranách 8,83 m, 6,02 m? Oč je větší?

272. Obdélník délky $1\frac{2}{7}$ m má stejný obsah jako čtverec o straně $1\frac{1}{7}$ m. Určete šířku obdélníka!

273. Na dvoře $25\frac{3}{4}$ m dlouhém a $16\frac{1}{4}$ m širokém vykopal hospodář čtvercovou jámu o straně $6\frac{3}{4}$ m. Kolik čtverečních metrů volné plochy mu zůstalo?

274. O kolik procent se zvětší obsah obdélníka, zvětšíme-li oba rozměry, každý o 10%? Přesvědčte se o správnosti odpovědi na obdélníku délky 60 m a šířky 50 m!

275. O kolik procent se zmenší obsah obdélníka, zmenšíme-li oba rozměry, každý o 20%? Zase se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry 60 m a 50 m!

276. Jak se změní obsah obdélníka, jestliže jeden rozměr zvětšíme o 10% a druhý zmenšíme o 10%? O kolik procent? Opět se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry 60 m a 50 m!

277. Délku obdélníka zvětšíme o 20%. O kolik procent musíme zmenšit šířku, aby obsah zůstal nezměněn? Znovu se přesvědčte o správnosti na obdélníku s rozměry 60 m a 50 m!

278. O kolik procent se zmenšila plocha zahrady v úloze 270? (Na setiny procenta.)

279. Hrana krychle je rovna
a) 17,3 m; b) 0,85 m; c) $\frac{2}{3}$ m; d) $1\frac{1}{6}$ m; e) $2\frac{5}{12}$ m.
Určete její povrch!

280. Hrana krychle je rovna
a) 3,7 m; b) 0,7 m; c) $1\frac{1}{2}$ m; d) $3\frac{1}{2}$ m; e) $2\frac{3}{4}$ m.
Určete objem!

281. Kolikrát se zvětší
a) povrch,
b) objem krychle, jestliže hranu zdvojnásobíme?
Přesvědčte se o správnosti na krychli s hranou 1,5 m!

282. Co je větší, 3 krychle s hranou po 5 cm nebo 5 krychlí s hranou po 3 cm?

283. Vypočtěte povrch a objem kvádru rozměrů
a) 14 cm, 16 cm, 50 cm; b) 112 cm, 176 cm, 362 cm;
c) $\frac{3}{4}$ m, $1\frac{1}{2}$ m, $\frac{5}{6}$ m.

284. Kolik hektolitrů vody naplní nádrž 24 m dlouhou, 15 m širokou a 2 m hlubokou? Kolik hektolitrů je třeba vypustiti, aby hloubka činila pouze $1\frac{1}{2}$ m?

285. Kolik kusů mýdla o rozměrech 12,5 cm, 5,5 cm a 4 cm se dá umístiti do bedny s rozměry 56 cm, 50 cm, 22 cm?

286. Kolika cihel je třeba na stavbu zdi 15 m dlouhé, 44 cm silné, $4\frac{1}{2}$ m vysoké? Rozměry cihly: 29 cm, 14 cm a $6\frac{1}{2}$ cm; na spáru mezi cihlami se počítá 1 cm.

287. Kolik plátna je třeba na zabalení bedničky s rozměry 40 cm, 30 cm a 25 cm, je-li na švy třeba 1,8% povrchu bedničky?

288. Na vodovodní roury je třeba provést výkop v délce 35,6 m, šířce $\frac{3}{4}$ m, hloubce 0,6 m. Kolik země je třeba vykopat?

289. Kolik sena se vejde do kůlny délky 3 m 20 cm a šířky o 70 cm menší, může-li seno dosahovat do výše $2\frac{1}{4}$ m? 1 m^3 čerstvě sklizeného sena váží 82 kg.

290. Z železného plátu rozměrů 14 dm a 8 dm byly v rozích odříznuty čtverce o straně 2 dm a ze zbytku byla zhotovena otevřená krabice. Určete objem krabice!

291. Měděný čtvercový plát o straně $\frac{1}{4}$ m váží 2,848 kg. Určete tloušťku plátu, jestliže 1 cm^3 mědi váží 8,9 g!

292. Do bedny s obdélníkovým dnem rozměrů $4\frac{1}{2}$ m a $3\frac{1}{2}$ m se nasype žita do výšky 0,8 m. Kolik bude vážit žito za 6 měsíců, jestliže 1 *l* v době nasypání váží 685 g a jestliže za 6 měsíců se váha zmenší o 0,3%?

293. Dřevěná čtvercová deska o straně 2 dm má tloušťku 3 cm. Od desky se odřízne čtverec o straně 5 cm
a) v rohu, b) podél jedné strany, c) uprostřed.
Určete povrch tělesa, které zbude po odříznutí!

294. Kvádr délky 12 cm a šířky 8 cm má týž objem jako krychle o hraně 1 dm.
a) Určete výšku a povrch kvádru!

b) O kolik procent (povrchu krychle) má kvádr větší povrch než krychle?

c) O kolik procent (povrchu kvádru) má krychle menší povrch než kvádr?

(Počítejte b) a c) na desetiny procenta!)

295. Kvádr má délku 6 cm a šířku 5 cm.

a) Čemu se rovná povrch kvádru, je-li jeho výška 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm?

b) Čemu se rovná výška kvádru, je-li jeho povrch 214 cm^2?

296. Rozměry kvádru jsou 2 dm, 2 dm, 1 dm.

a) Oč se zmenší objem kvádru, zmenšíme-li každou hranu o 1 cm, o 2 cm, o 3 cm?

b) Oč se zvětší objem kvádru, zvětšíme-li každou hranu o 1 cm, o 2 cm, o 3 cm?

297. Kvádr má délku 3 dm, šířku 2 dm, výšku 1 dm. Vypočtěte, oč se zvětší povrch kvádru, zvětšíme-li

a) délku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

b) šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

c) výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

d) délku i šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

e) délku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

f) šířku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

g) každý rozměr o 1 cm, 2 cm, 3 cm!

298. Kvádr má délku 3 dm, šířku 2 dm, výšku 1 dm. Vypočtěte, oč se zmenší povrch kvádru, zmenšíme-li

a) délku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

b) šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

c) výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

d) délku i šířku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

e) délku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

f) šířku i výšku o 1 cm, 2 cm, 3 cm;

g) každý rozměr o 1 cm, 2 cm, 3 cm!

299. Kvádr má délku 11 cm, šířku 6 cm, výšku 2 cm. Vypočtěte, kolikrát se zvětší povrch kvádru, zdvojnásobíme-li

a) délku, b) šířku, c) výšku, d) délku i šířku,
e) délku i výšku, f) šířku i výšku, g) každý rozměr!

VI. OPAKOVÁNÍ UČIVA.

300. Sestrojte eukleidovsky úhly $\alpha = 165^\circ$, $\beta = 52\frac{1}{2}^\circ$. Graficky určete úhly $\omega = \alpha + \beta$, $\varepsilon = \alpha - \beta$!

301. Zvolte si dvě úsečky a, b tak, že $a > b$. Sestrojte úsečky m, n tak, aby jejich součet byl roven a a jejich rozdíl byl roven b.

302. Co víte o úhlech a) vedlejších, b) vrcholových?

303. Zvolte pět bodů A, B, C, D, E tak, aby žádné tři neležely v jedné přímce! Dále stranou narýsujte polopřímku $A'U$ a zvolte jednu z obou polorovin vyťatých přímkou $A'U$. Na polopřímce $A'U$ určete bod B' tak, aby $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. K danému útvaru, který je určen body A, B, C, D, E, určete útvar s ním shodný, který bude určen body A', B', C', D', E' tak, aby body C', D', E' ležely ve zvolené polorovině. (Musí být $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ (sss), $\triangle A'B'D' \cong \triangle ABD$, $\triangle A'B'E' \cong \triangle ABE$; co potom již platí?)

304. Zvolte přímku p za osu souměrnosti!

a) Může bod splynout s bodem souměrně sdruženým? Kde leží takové body a jak je nazýváme?
b) Jakou polohu musí mít úsečka, aby úsečka souměrně sdružená byla na jejím prodloužení?
c) Jaká úsečka splyne s úsečkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)
d) Jaká přímka splyne s přímkou souměrně sdruženou? (Dvoje řešení.)
e) Jaká přímka je rovnoběžná s přímkou souměrně sdruženou?
f) Může přímka státi kolmo na přímce souměrně sdružené? Kolik takových přímek prochází daným bodem?
g) Jestliže se dvě souměrně sdružené přímky protínají, kde leží jejich průsečík?

305. Narýsujte kružnici souměrně sdruženou s kružnicí $k \equiv (S;\ 2{,}6\ \text{cm})$, jestliže osa souměrnosti p

a) prochází bodem S,
b) má od středu S vzdálenost 1,9 cm,
c) má od středu S vzdálenost 2,6 cm,
d) má od středu S vzdálenost 3,2 cm!

306. Zvolte přímku p za osu souměrnosti! Popište a proveďte eukleidovskou konstrukci

a) bodu A' souměrně sdruženého s daným bodem A, který na ose p neleží,
b) přímky r' souměrně sdružené s danou přímkou r (3 možnosti).

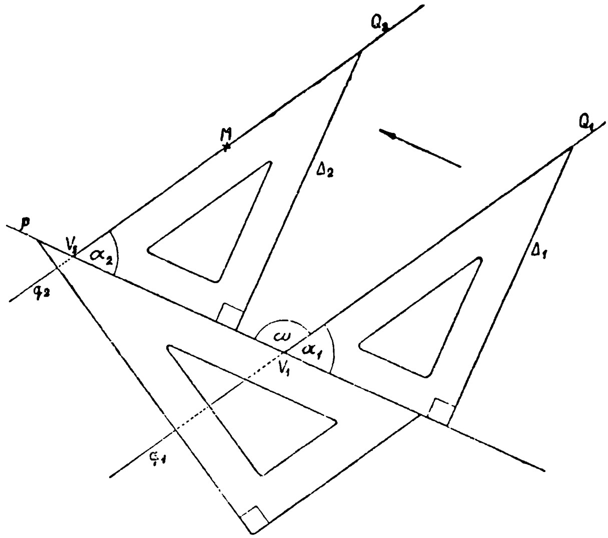
307. Narýsujte kružnici $k \equiv (S;\ 4\ \text{cm})$ a vepište do ní libovolný $\triangle ABC$! Zvolte bod D na obvodě kružnice k a narýsujte body k němu souměrně sdružené vzhledem k osám AB, AC, BD! Přesvědčte se, že ty tři body leží na jedné přímce!

308. Vyslovte pět základních pouček shodnosti trojúhelníků! a) Odvoďte odtud, kterými prvky je trojúhelník jednoznačně určen! b) Které podmínky přitom musí dané prvky splňovat?

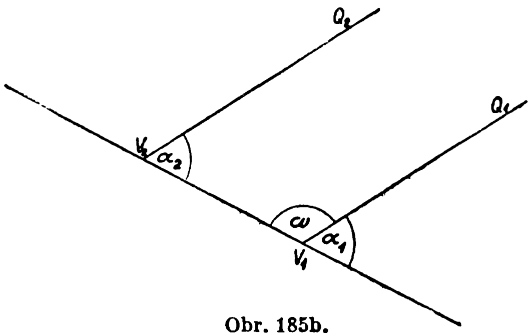
309. Vyslovte pět základních pouček shodnosti pravoúhlých trojúhelníků!

a) Kterými prvky je tedy pravoúhlý trojúhelník jednoznačně určen?
b) Které podmínky musí dané prvky v jednotlivých případech splňovat?

310. Na ramenech AB, AC u rovnoramenného trojúhelníka $\triangle ABC$ zvolte body D, E tak, že $\overline{AD} = \overline{AE}$. Dokažte, že trojúhelníky $\triangle BCD$ a $\triangle BCE$ jsou shodné; zapište tuto shodnost! Potom dokažte, že trojúhelníky $\triangle ABE$ a $\triangle ADC$ jsou shodné; zase zapište správně shodnost!



Obr. 185a.



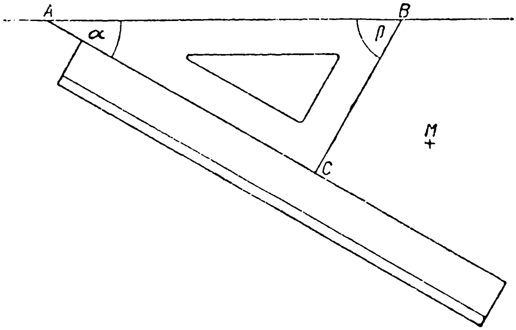
Obr. 185b.

311. Který a) trojúhelník, b) rovnoběžník, c) lichoběžník, d) různoběžník má osu? Který z nich má více os? Narýsujte od ruky obrazce, vyznačte osy a vyložte postup jejich konstrukce!

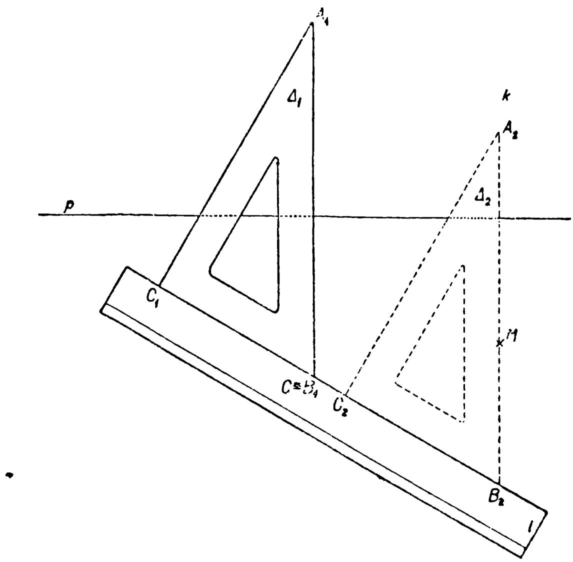
312. Odůvodněte správnost rýsování rovnoběžek užitím trojúhelníkových pravítek! V obr. 185 máme vést přímky $q_2 \parallel q_1$.

(Co víte o úhlech α_2, ω a o bodech Q_2, Q_1 vzhledem k přímce V_2V_1? Viz $\mathbf{P}^{15}_{3}$.)

313. V obr. 186 máme z bodu M spustit kolmici k na přímku p. Provedení: K přímce p přiložíme trojúhelníkové pravítko $\triangle ABC$ přeponou AB



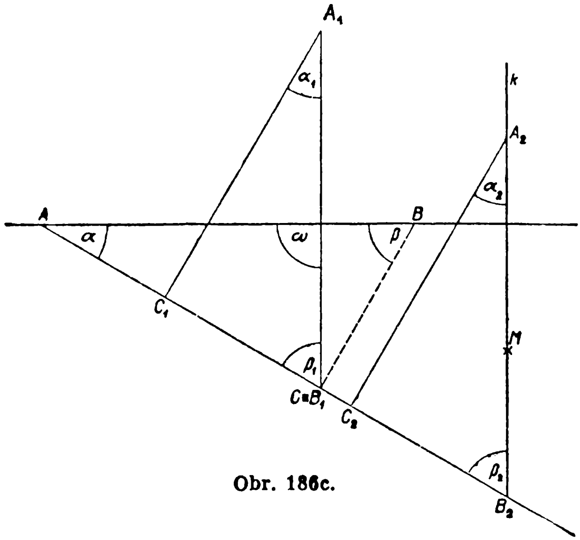
Obr. 186a.



Obr. 186b.

(obr. 186a); k jeho odvěsně AC přisuneme pomocné pravítko l. Pak $\triangle ABC$ uvedeme na př. do polohy $\triangle A_1B_1C_1$, takže jeho odvěsna B_1C_1 je přiložena k pravítku l (obr. 186b). Je-li právě $B_1 \equiv C$, dokážete snadno, že $A_1B_1 \perp AB$ (obr. 186c). (Užijte úhlů α, β, dále α_1, β_1 a ω

v pravoúhlých trojúhelnících!) Nyní posuňte pravítko $\triangle A_1B_1C_1$ podél pomocného pravítka l do polohy $\triangle A_2B_2C_2$ tak, aby jeho přepona A_2B_2 procházela bodem M; pak je $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ (viz předcházející cvičení 312) a přímka $k \equiv A_2B_2$ je hledaná kolmice.



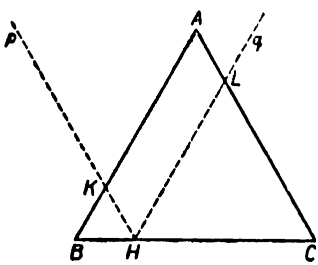
Obr. 186c.

314. Jestliže v trojúhelníku $\triangle ABC$ je $a > b > c$, $\beta = 70°$, co můžete říci o velikostech úhlů α, γ? Který úhel trojúhelníka nemusí být ostrý?

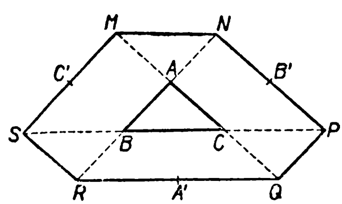
315. V trojúhelníku $\triangle ABC$ měří vnější úhel při vrcholu A 126°, při vrcholu B 118°. Osa úhlu β a osa úhlu γ se protnou v bodě S. Co je větší, $\overline{BS}$ nebo $\overline{CS}$?

316. V trojúhelníku $\triangle ABC$ je $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$. Na straně BC leží bod D tak, že $\overline{CD} = \overline{CA}$. Určete velikost úhlů trojúhelníků $\triangle ABD$, $\triangle ACD$!

317. V trojúhelníku $\triangle ABC$ je $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\beta = 36°$. Dokažte, že osa úhlu α dělí $\triangle ABC$ na dva rovnoramenné trojúhelníky!



Obr. 187.



Obr. 188.

318. Vedeme-li libovolným bodem H (obr. 187) základny BC rovnoramenného trojúhelníka ABC rovnoběžky $p \parallel AC$, $q \parallel AB$, protnou se přímky p, AB v bodě K a přímky q, AC v bodě L. Dokažte, že velikosti lomených čar BAC a $BKHLC$ jsou si rovny!

319. Dvě silnice jsou na mapě zobrazeny dvěma polopřímkami OM, ON; uvnitř dutého úhlu MON leží bod H, který je obrazem určité obce. Obcí H má být vedena přímá cesta p tak, aby se silnicemi OM, ON protínala v bodech A, B, o nichž platí $\overline{OA} = \overline{OB}$. Vyšetřete graficky polohu přímky p! (Úlohu nejprve řešte pro případ, že bod H leží uvnitř osy OU úhlu $\sphericalangle MON$!)

320. Osy úhlů α a β rovnoběžníka $ABCD$ se protnou na straně CD. Dokažte, že $\overline{AB} = 2 \,.\, \overline{AD}$!

321. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jehož obvod je 13,5 cm a jehož strany jsou v poměru 2 : 3 : 4. Řešte graficky; zkoušku proveďte výpočtem!

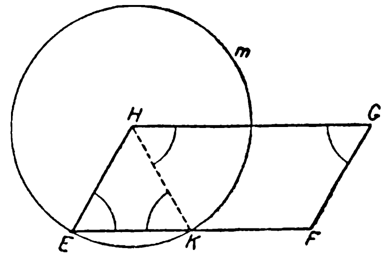
322. V obr. 188 je dán trojúhelník ABC. Dále je $\overline{AM} = \overline{CQ} = \overline{AC}$, $\overline{AN} = \overline{BR} = \overline{AB}$, $\overline{BS} = \overline{CP} = \overline{BC}$. (Narýsujte vlastní obrazec!)

a) Dokažte, že je na př. $PQ \parallel AB$ a $\overline{PQ} = \overline{AB}$! Napište dva další podobné vztahy!

b) Dokažte, že je na př. $MS \parallel AB$ a $\overline{MS} = 2 \,.\, \overline{AB}$. Napište podobné vztahy i o úsečkách NP, QR!

c) Který vztah platí mezi velikostmi úseček PQ a MS? Vyhledejte ještě dvě takové dvojice úseček.

323. Osa pravého úhlu pravoúhlého trojúhelníka protne přeponu v bodě, jímž vedeme rovnoběžky s oběma odvěsnami. Dokažte, že vznikne čtverec!



Obr. 189.

324. V obr. 189 je $EFGH$ rovnoběžník. H je střed kružnice m. Dokažte, že $\sphericalangle GHK = \sphericalangle FGH$! Nazvete čtyrúhelník $HGFK$; název odůvodněte! (Všimněte si zatržených úhlů v obrazci; užijte $\mathbf{P}^{18}_{8}$!)

VII. VÝSLEDKY.

I. OPAKOVÁNÍ A DOPLNĚNÍ LÁTKY Z I. TŘÍDY.

2. a) Mají společný jediný bod (průsečík); pak leží v rovině.

b) Leží v téže rovině a nemají žádný společný bod nebo splývají (všecky body společné).

c) Neleží v téže rovině a nemají společný bod.

Splývající přímky považujeme za rovnoběžky.

5. Zvolíme různé body M, N a na přímce MN zvolíme bod P. **6.** Zvolíme různé body A, B a mimo přímku AB zvolíme bod C; bod D zvolíme mimo přímky AB, BC, CA. **7.** Zvolíme body L, H_1, K_1 tak, aby ležely v jedné přímce (viz cvič. 5); na přímce LH_1 zvolíme bod H_2 jiný než body L, H_1, na přímce LK_1 zvolíme bod K_2 jiný než body L, K_1. **8.** Tři (přímky neprocházejí jedním bodem); přímky procházejí týmž bodem. **9.** Žádné z tří přímek neprocházejí týmž bodem (6 průsečíků); tři z přímek procházejí jedním bodem a čtvrtá je protíná (4 průsečíky); všecky čtyři přímky procházejí jedním bodem. **10.** HK, HL; HM.

11. Obě mají stejné smysly. **12.** Nemohou. **13.** Nemusí, ale mohou. **14.** a) Úsečku AB. b) Bod A. c) Nic. d) Úsečku BN. e) Úsečku AB. f) Úsečku AB. g) Úsečku AB. **15.** $EDCF$. **16.** a) H leží na prodloužení úsečky UV za bod U, K leží uvnitř úsečky UV, L leží na prodloužení úsečky UV za bod V. b) H a U leží na prodloužení úsečky KL za bod K; V leží uvnitř úsečky KL. c) H, U, K leží na prodloužení úsečky LV za bod V. **17.** $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}$ dm. **18.** $\overline{O_1O_3} = 15$ cm. **19.** $\overline{AD} = 2$ m, $\overline{BD} = 1{,}5$ m. **20.** $\overline{CE} = 2{,}5$ m, $\overline{CF} = 3$ m.

21. Při pořádku $AHSB$ je $\overline{AB} = 4$ cm; při pořádku $ASHB$ je $\overline{AB} = 8$ cm. **22.** Při pořádku PTO je $\overline{PQ} = 52$ cm; při pořádku POT je $\overline{PQ} = 12$ cm. **24.** a) Buď sestrojíme opačnou polopřímku k polopřímce KH nebo k polopřímce KL. b) Sestrojíme polopřímky opačné k polopřímkám KH, KL. **25.** $\sphericalangle BVA'$, $\sphericalangle AVB'$; $\sphericalangle A'VB'$. **26.** Osmi: $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVA$ atd. **28.** a) pravý nebo tupý. b) ostrý nebo tupý. **29.** 54°; 150°; 247½°; 300°. a) 54°; b) 150°; c) 247½°; 300°; d) 54°; 150°. **30.** a) Doplňkové úhly mají součet 90°, výplňkové úhly mají součet 180°; b) $\frac{1}{5}R$; $\frac{4}{9}R$; 27°; 63°23′. c) $\frac{7}{6}R$; $\frac{1}{3}R$; 103°11′; 41°33′; d) $\alpha = \beta = 45°$; $\alpha = 67\frac{1}{2}°$, $\beta = 22\frac{1}{2}°$; $\alpha = 36°$, $\beta = 54°$. e) $\omega = \varepsilon = 90°$; $\omega = 72°$, $\varepsilon = 108°$; $\omega = 80°$, $\varepsilon = 100°$.

31. β. **32.** $\omega < 37\frac{1}{2}°$. **33.** Polovina úhlu menšího než 180° je menší než 90°. **34.** Je-li $\frac{1}{2}\gamma$ menší než 90°, je γ menší než 180°.

35. Přímý. a) Dutý; b) vypuklý nebo plný. **38.** Přímka p neprotne žádnou stranu, když všechny tři body H, K, L leží uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Jestliže přímka p odděluje na př. bod H od obou bodů K, L, potom protíná úsečky HK, HL. **39.** Přímka AY protíná úsečku BC v bodě Y a podle cvič. 38 protne ještě jednu stranu trojúhelníka $\triangle BCX$; protože přímku BX protne v bodě A až na prodloužení za bod X, musí protnout stranu XC. Z téhož důvodu protne přímka XC stranu AY trojúhelníka ABY. Leží tedy průsečík přímek AY, CX uvnitř úseček AY, CX. **40.** a) Vnitřek dutého úhlu $\sphericalangle HVK = \alpha$ je společná část vnitřků polorovin HVK, KVH; body P, Q leží uvnitř těchto polorovin a tím i celá úsečka PQ. b) Jsou-li MAM', NAN' přímky, v nichž leží ramena AM, AN vypuklého úhlu, zvolte bod P libovolně uvnitř úhlu $\sphericalangle MAN'$; sestrojte přímku PAP' a bod Q zvolte uvnitř úhlu $\sphericalangle NAP'$.

II. SHODNOST A SOUMĚRNOST.

44. Obraz L' bodu L leží uvnitř úsečky HK. **45.** Vyšetříme patu P' kolmice spuštěné z bodu X' na přímku $Y'Z'$.

48. Jedna je obrácením druhé. **49.** Má-li a) dvě strany sobě rovné, b) všechny tři strany sobě rovné, c) všechny tři strany navzájem různé. **50.** Jsou si rovny.

51. Ostrý, pravý, tupý. Ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý. **52.** Je-li v trojúhelníku ABC $\overline{AB} = \overline{AC} = d$, je $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC} = 2d$; základna BC je menší než dvojnásobek ramene a rameno je větší než polovina základny. **53.** a) Podle P_2^8. b) V souměrnosti vzhledem k ose $k \perp BC$ v obr. 33 je bod A samodružný. Obrazem úhlu $\sphericalangle ADB$ je $\sphericalangle ADC$, což jsou úhly vedlejší; je tedy $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = R$ (podle P_3^4). c) $\triangle ACD$. d) Úhel α_2 je obrazem úhlu α_1. e) AC (podle P_4^8). **54.** a) Je $\overline{AC} = \overline{AB}$ a $\overline{AF} = \overline{AE}$; proto je také $\overline{AC} - \overline{AF} = \overline{AB} - \overline{AE}$, t. j. $\overline{FC} = \overline{EB}$. b) Bod E je obrazem bodu F vzhledem k ose souměrnosti AP; úhel $\sphericalangle FEB$ je obrazem úhlu $\sphericalangle EFC$. c) α_2 je obrazem úhlu α_1. d) Bod E je obrazem bodu F (podle P_4^7). **55.** V trojúhelníku ABX je $\sphericalangle ABX = \beta > \sphericalangle BXA$ (podle P_9^7); protože β je tupý nebo pravý, je $\sphericalangle BXA$ ostrý a tedy $\sphericalangle BXA < \beta$. Proto je $\overline{AB} < \overline{AX}$. Dále je $\sphericalangle AXC$ tupý, kdežto $\sphericalangle ACX = \gamma$ ostrý; proto je $\overline{AX} < \overline{AC}$. Odtud $\overline{AB} < \overline{AX} < \overline{AC}$. **56.** Je $(2.25) > 10$; rameno může být 25 cm, základna 10 cm; ale 2.10 není větší než 25 a rameno nemůže být 10 cm. **57.** a), b) může existovat, c), d) nemůže. **58.** a) Je možné. b) Není. **59.** a) Cesty $ABCDA$, $ACBDA$ mají stejné části v úsečkách CB, DA, v ostatních částech se liší. Přitom je $\overline{AE} + \overline{BE} > \overline{AB}$, $\overline{EC} + \overline{ED} > \overline{CD}$ (podle P_7^3). b) Cesty se liší v částech určených úsečkami EC, ED a CD; je $\overline{EC} + \overline{ED} > \overline{CD}$ (podle P_7^8). **60.** Strana a je největší; $b = c$.

61. Je $\beta = \gamma$; v trojúhelníku $\triangle BB'C$ je $\sphericalangle B'BC < \sphericalangle BCB'$ a tedy $\overline{B'C} < \overline{BB'}$ (podle P_8^8). **62.** Jsou možné (podle P_6^8, P_7^8). a) $\alpha < \gamma < \beta$ (podle P_8^8); b) $\beta < \alpha = \gamma$. **63.** a) Možné, b), c) nemožné (podle P_{10}^8). **64.** $\beta' = 134^\circ$. Je $\alpha < \beta'$ (podle P_{11}^8).

65. a) Jsou dva takové body X, X'; b) jediný bod X; c) není možné. V případě a) je $\overline{PX} = \overline{PX'}$, v případě b) je $P \equiv X$ (viz P_1^9, P_2^9, P_3^9). **66.** a) Bod X je uvnitř průměru. Je $\overline{AX} = 24$ mm, $\overline{BX} = 66$ mm nebo $\overline{AX} = 66$ mm, $\overline{BX} = 24$ mm. b) Bod X je vně průměru AB. Je $\overline{AX} = 11$ mm, $\overline{BX} = 101$ mm nebo $\overline{AX} = 101$ mm, $\overline{BX} = 11$ mm. **67.** a) Na součet a rozdíl stran XA, XS, XB v trojúhelnících AXS, BXS užijte P_7^8, P_6^8. b) Na průměru AB. **68.** 1) Je $\overline{SY} = \overline{SX} - \overline{XY} = 31$ mm nebo $\overline{SY} = \overline{SX} + \overline{XY} = 93$ mm; bod Y je vně kružnice. 2) V trojúhelníku $\triangle SXY$ je $\overline{SY} > \overline{SX} - \overline{XY} = 31$ mm a bod Y je vně kružnice. **69.** a) Nesečna, b) tečna (dotykový bod P je pata kolmice spuštěná z bodu S na přímku p), c) sečna (1. konstruktivní axiom).

72. a) $\overline{AX} + \overline{AB} = \overline{BX}$ neboli $\overline{BX} - \overline{AX} = \overline{AB}$; b) $\overline{AX} - \overline{BX} = \overline{AB}$. **73.** a) Je $\overline{AC} = \overline{BC}$; $\alpha = \beta$. b) Je $\overline{BC} > \overline{AC}$; $\alpha > \beta$; c) $\overline{BC} < \overline{AC}$,

$\alpha < \beta$. **82.** Je $\alpha + \beta = 180°$ a $\sphericalangle A'OB' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90°$. Osy vedlejších úhlů stojí na sobě kolmo. **84.** MN, NP, PM; $\sphericalangle PMN$, $\sphericalangle MNP$, $\sphericalangle NPM$. **85.** a) $a = f$, $b = d$. $c = e$; $\alpha = \varphi$, $\beta = \delta$, $\gamma = \varepsilon$. **86.** $\triangle NPM \cong \triangle UVT$; $\triangle PMN \cong \triangle VTU$; $\triangle PNM \cong \triangle VUT$; $\triangle NMP \cong \triangle UTV$; $\triangle MPN \cong \cong \triangle TVU$. **87.** c) správný, a), b), d) nemusí být správné. **88.** P^{11}_{2}. **89.** P^{11}_{3}, P^{11}_{4}. **90.** P^{11}_{4}, P^{11}_{3}.

91. P^{11}_{2}. **92.** P^{11}_{3}. **93.** P^{11}_{3}. **94.** P^{11}_{2}. **95.** P^{11}_{5}, P^{11}_{4}, P^{11}_{2}, P^{11}_{3}. **96.** $\sphericalangle HKL$ je úhel ostrý; $\sphericalangle MKH$ je výplněk, tedy tupý; $\sphericalangle KMH$ ostrý. Z P^{8}_{4} plyne $\overline{HM} > \overline{HK} = \overline{HL}$; $\sphericalangle HML$ je proti menším stranám. **97.** P^{11}_{2}. **98.** P^{11}_{3}. **99.** Nemusí. **100.** Nemusí. **101.** P^{11}_{2}. **102.** P^{11}_{4}. **103.** P^{11}_{5}. **104.** Nemusí. **105.** P^{11}_{6}. **106.** a) Je $\triangle SLM \cong \triangle SRT$ (sss), neboť je $\overline{SL} = \overline{SM} = \overline{SR} = \overline{ST}$ a $\overline{LM} = \overline{RT}$. b) $\triangle SLM \cong \triangle SRT$ (sus). **107.** Je $\sphericalangle USX = \sphericalangle VSY$ (vrcholové úhly) $\overline{SU} = \overline{SV}$, $\overline{SX} = \overline{SY}$ a tedy $\triangle SUX \cong \cong \triangle SVY$ (sus). **108.** Je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE$ a $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC - - \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAE$, t. j. $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAE$, takže $\triangle ACD \cong \triangle AEB$ (sus). **109.** Je $\triangle AOB \cong \triangle AOC$ (suu) a proto je $\overline{AB} = \overline{AC}$. **110.** Je $\triangle PMA \cong \triangle PNB$ (suu), neboť $\overline{AM} = \overline{BN}$, $\alpha = \beta$, $\sphericalangle MPA = = \sphericalangle NPB$. Je $\triangle PMA \cong \triangle PNB$ (suu). Je-li $u \perp v$, je $A \equiv P \equiv B$, $\overline{PA} = = \overline{PB}$ a úsečka MA splyne s úsečkou MP, úsečka NA s úsečkou NP. **111.** $\triangle PMA \cong \triangle PNB$ (suu). **118.** Protnou se, když je $\sphericalangle HAB + \sphericalangle ABK < < 180°$. **119.** a) Musí se protnout. b) Nemusí. c) Protnou se polopřímky AH', BK', kdežto polopřímky AH, BK se neprotnou (jinak by bylo $AH \equiv BK$). **120.** Podmínky, které musí splňovat základní prvky: a) daný úhel je dutý; b) součet dvou daných úhlů je menší než 180°; d) viz P^{8}_{6}, P^{8}_{7}; e) daný úhel musí ležet proti větší dané straně.

121. a) $a = 38{,}6$ mm; $\beta = 81{,}6°$; $\gamma = 56{,}4°$; b) $b = 116$ mm; $\alpha = 42{,}6°$; $\gamma = 24{,}4°$; c) $c = 98{,}2$ mm; $\alpha = 11{,}5°$; $\beta = 21{,}5°$; d) $c = 38{,}7$ mm; $\alpha = = 28{,}1°$; $\beta = 126{,}9°$. **122.** a) $a = 50{,}2$ mm; $b = 63{,}1$ mm; $\gamma = 78°$; b) $b = = 82{,}8$ mm; $c = 57{,}2$ mm; $\alpha = 20°$; c) $a = 54{,}5$ mm; $c = 89{,}2$ mm; $\beta = = 21°$; d) $b = 83{,}6$ mm; $c = 56{,}4$ mm; $\alpha = 55°$. **123.** a) $c = 28{,}1$ mm; $\beta = 18{,}2°$; $\gamma = 8{,}8°$; b) $a = 92{,}3$ mm; $\alpha = 119{,}7°$; $\gamma = 23{,}3°$; c) $b = = 126{,}5$ mm; $\alpha = 30{,}1°$; $\beta = 114{,}9°$. **124.** a) $\alpha = 41{,}4°$; $\beta = 55{,}8°$; $\gamma = = 82{,}8°$; b) $\alpha = 89°$; $\beta = 48{,}6°$; $\gamma = 42{,}4°$; c) $\alpha = 119{,}4°$; $\beta = 34{,}2°$; $\gamma = = 26{,}4°$; d) $\alpha = 31{,}5°$; $\beta = 98{,}8°$; $\gamma = 49{,}7°$. **127.** a) V každé z obou polorovin vyťatých přímkou AB je jeden takový trojúhelník (viz P^{8}_{6}, P^{8}_{7}). b) Je $\overline{CA} = \overline{C'A}$, $\overline{CB} = \overline{C'B}$ a body A, B leží na ose úsečky CC' (podle P^{10}_{4}). **128.** $b = n$ (sus); $\beta = \omega$ (usu); $\alpha = \varepsilon$ (suu); $c = p$ (Ssu). **129.** $a = m$ (Ssu); $b = n$ (Ssu); $\alpha = \varepsilon$ (suu); $\beta = \omega$ (suu); $a = n$ (Ssu); $b = m$ (Ssu); $\alpha = \omega$ (suu); $\beta = \varepsilon$ (suu). **130.** $a = n$ (usu); $b = m$ (suu); $c = p$ (suu).

131. V trojúhelníku může být jen jediný úhel R; proto je $p = c$. Ale p je přepona a vždy platí $p > n$ (podle P^{8}_{4}). **132.** Je $\triangle BCB' \cong \triangle CBC'$ (suu). **133.** a) (sus); b) (usu); c) (suu); d) (Ssu); e) (usu); f) (Ssu) nebo a) P^{13}_{6}; b) P^{13}_{7}; c) P^{13}_{9}; d) P^{13}_{10}; e) P^{13}_{7}; f) P^{13}_{10}. **134.** Při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou ostré úhly; AB musí být základnou atd.

III. ROVNOBĚŽKY A ROVNOBĚŽNÍKY.

135. Podle P^{14}_{1}, P^{7}_{8} nebo P^{12}_{6}. **136.** Protnou se v polorovině opačné k polorovině ABK (podle P^{12}_{6}). **137.** Jedinou (viz P^{14}_{3}). Je-li bod B na přímce k, je přímka k sama jediná rovnoběžka s přímkou k vedená bodem B. **138.** Podle P^{14}_{1}. **139.** $a \parallel b \parallel c$ podle P^{14}_{1}. **140.** Podle P^{14}_{4}. **141.** b, c jsou různoběžné (podle P^{14}_{5}). **142.** b) též podle P^{14}_{6}. **143.** a) $B_2\ B_3$; b) $B_2\ B_1$. **144.** $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\beta' = 120^\circ$ (podle P^{15}_{2}). **145.** a) $MA \parallel NC$ (podle P^{15}_{3}); b) $MA \parallel NF$; $MB \parallel NE$ (podle P^{15}_{3}). **146.** Je $BA \parallel CP$, t. j. $\varepsilon = 40^\circ$ (viz P^{15}_{6}) a $\omega = 60^\circ$; pak je $\omega + \sphericalangle CDE = 2R$ a tedy $CP \parallel DE$ (viz P^{15}_{3}) tím $BA \parallel CP \parallel DE$ a tedy $BA \parallel DE$ (viz P^{14}_{4}). **147.** $\beta = 116^\circ$, $\alpha = 64^\circ = \gamma$; a) nesouhlasné; b) souhlasné. **148.** a) $\alpha = 80^\circ$ a tedy $\sphericalangle MQR = \alpha$; je proto $QR \parallel MN$ (viz P^{15}_{2}); pak $\delta + \alpha = 2R$ viz P^{15}_{6}. b) $\beta = 100^\circ$ a protože je $QM \parallel QN$, je $\gamma = 2R - \beta = 80^\circ$. **149.** Je $\beta + (\varepsilon + \gamma) = 2R$, t. j. $107^\circ + \varepsilon + 35\frac{1}{2}^\circ = 180^\circ$; $\varepsilon = 37\frac{1}{2}^\circ$. **150.** $\varepsilon = 3\,\alpha$, $\omega = 2\,\alpha$; $\varepsilon + \omega = 180^\circ$, t. j. $5\,\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$.

151. Je $OM \parallel p \parallel q$; $\varepsilon = 180^\circ - \gamma = 68^\circ$, $\omega = \delta = 58^\circ$; $\sphericalangle COD = \varepsilon + \omega = 126^\circ$. **154.** a) 27°; b) 64°; c) $\frac{1}{3}R$; d) $x = 30^\circ$; e) $x = 108^\circ$. **155.** a) 64°; b) 44°; c) 167°; d) nemožné. **156.** a) (30°; 60°; 90°) b) 45°; 60°; 75°; **157.** 40°; 60°; 80°. **158.** a) 68°; b) 53°; c) 104°. **159.** $\varphi = 65^\circ$; $\omega = 71^\circ$. **160.** $\psi = 73^\circ$.

161. $\delta = 58^\circ$; $\varepsilon = 82^\circ$. **162.** $\delta = 120^\circ$. **163.** $\beta = 77^\circ$. **164.** $\omega = 55^\circ$; $\varepsilon = 35^\circ$. **165.** $\sphericalangle PAB = 55^\circ$. **166.** a) $\overline{AB} > \overline{AC} > \overline{AX}$; b) $\overline{BX} > \overline{AX} > \overline{CX}$. **167.** $\alpha = 56^\circ$, je tedy $\alpha < \beta$ a tím $a < b$. **168.** a) 130°; b) 52°. **169.** a) Je-li $\beta = \gamma = 74^\circ$, je $\alpha = 32^\circ$; b) Je-li $\alpha = 74^\circ$, je $\beta = \gamma = 53^\circ$. **170.** $\sphericalangle KHL = 33^\circ$; $\sphericalangle HKL = 126^\circ$; $\sphericalangle HLK = 21^\circ$.

176. d) $\alpha = \beta = 45^\circ$. **177.** a) A, B; B, C; C, B; D, A; b) A, C; B, D; c) α, β; β, γ; γ, δ; δ, α; d) α, γ; β, δ; e) a, b; b, c; c, d; d, a; f) a, c; b, d. **180.** a) 76°; b) 121°; c) 62°.

181. $82\frac{1}{3}^\circ$. **182.** a) $\gamma = \alpha$; $\beta = \delta = 82^\circ$; b) $\delta = \beta$; $\alpha = \gamma = 97\frac{1}{2}^\circ$; c) $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta = 41\frac{1}{3}^\circ$; d) $\gamma = \alpha = 108^\circ$; $\delta = \beta = 72^\circ$. **183.** a) $\gamma = 137^\circ$; $\delta = 108^\circ$; b) $\beta = 66^\circ$; $\delta = 111^\circ$; c) $\alpha = 45^\circ$; $\delta = 135^\circ$; $\beta = 72^\circ$; $\gamma = 108^\circ$; d) $\alpha = 67\frac{1}{2}^\circ$; $\delta = 112\frac{1}{2}^\circ$; $\beta = 80^\circ$; $\gamma = 100^\circ$. **184.** $\delta = 80^\circ$; $\beta = 160^\circ$. **185.** $\beta = \delta = 120^\circ$ (rovnoběžník); b) $\gamma = \delta = 100^\circ$ (rovnoramenný lichoběžník). **186.** a) Je $\beta = 117^\circ$. Protože je $\alpha + \beta = 2R$, je $AD \parallel BC$; protože je $\alpha + \delta = 2R$, je $AB \parallel DC$ (viz P^{15}_{3}); b) $\delta = 125^\circ$; $\gamma = 144^\circ$; $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 2R$ (viz P^{15}_{3}). **187.** $\delta = 100^\circ = \beta$; $\gamma = 80^\circ = \alpha$; $\sphericalangle EAB = \alpha - 23^\circ$. **188.** Tomu, který je souměrný podle osy určené dvěma protějšími vrcholy. **189.** Deltoid; osa je BD. **190.** a) $\delta = 103^\circ$; $\gamma = 79^\circ$; b) $\beta = 49\frac{1}{2}^\circ$; $\alpha = 164\frac{1}{4}^\circ$.

191. Třemi prvky. **192.** Pěti prvky. **194.** Rovnoběžník (viz P^{18}_{2}). **195.** Jedna i druhá dvojice protějších stran jsou dvě rovnoběžné úsečky. Protější strany má pak sobě rovné. Rovnoběžník (viz P^{18}_{3}). **196.** a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ a $\beta + \gamma = 2R$ (P^{15}_{3} a P^{18}_{2}); b) je $\overline{AD} = \overline{BC}$ a $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$ (viz P^{15}_{2} a P^{18}_{2}); c) je $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$ (viz P^{18}_{3}); d) z P^{18}_{5}. **197.** Je $\overline{XY} = \overline{PQ}$, $\overline{PQ} = \overline{UV}$ a $XY \parallel PQ$, $PQ \parallel UV$, t. j. ve čtyrúhelníku $XYVU$

je $\overline{XY} = \overline{UV}$, $XY \parallel UV$ (viz P^{18}_{2}). **198.** a) Jedna dvojice protějších stran je rovnoběžná, prodloužené strany druhé dvojice jsou různoběžky. Základny jsou různé. b) Ramena jsou si rovna. **199.** a) Nemůže; to by byl rovnoběžník (viz P^{18}_{2}); b) rovnoramenný (viz P^{18}_{8}); c) je $\sphericalangle MNP = \sphericalangle NPQ = 90°$; pravoúhlý. **200.** e) Je určen prvky $\overline{AB} > \overline{AS}$, $\sphericalangle ASB$ (tupý), tedy podle (Ssu). Rovnoběžník je určen třemi prvky.

201. Čtyřmi prvky. **202.** Tři údaje. **203.** Sestrojujeme vlastně rovnoběžník, jsou-li známé jeho tři vrcholy. **204.** Je $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$ a proto je $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (viz P^{18}_{3}). Pevná příčka AC určuje se stranami AB, BC trojúhelník ABC; ten je určen třemi stranami (sss). Podobně trojúhelník CDA. **205.** Vznikají tu rovnoběžníky o pevné svislé straně AB; je miska stále vodorovná, neboť s DC tvoří stále pravý úhel. **206.** Když se bod N pohybuje (svisle vzhůru nebo dolů), je úsečka BN stále svislá a její osa k je vodorovná; na ní leží body, v níž se příčky kříží. Celé žebroví je souměrné vzhledem k ose k souměrnosti. **207.** a) Obdélník je takový čtyrúhelník, který má všecky úhly pravé, b) kosočtverec je takový čtyrúhelník, který má všecky strany sobě rovné, c) čtverec je takový čtyrúhelník, který je zároveň obdélníkem i kosočtvercem. **208.** Je $\gamma = R$ a tedy obdélník. **209.** Obdélník (viz P^{19}_{2}). **210.** Podle P^{19}_{5}.

213. Úhlopříčky. **214.** a) Kolmice k, l spuštěné ze středu S na AB a BC. $\triangle ABS$, $\triangle CDS$ jsou rovnoramenné a mají splývající osu k, která je osou obdélníka $ABCD$. Z téhož důvodu $\triangle ADS$, $\triangle CDS$ mají společnou osu l. Je $k \perp AB$, $k \perp AD$; tím $k \parallel AD$, $l \parallel AB$. **216.** $43\frac{1}{2}°$; $56\frac{1}{2}°$. **217.** $45°$. **218.** Úsečce C_1A_1, která spojuje středy C_1, A_1 stran BA, BC. Je $C_1A_1 \parallel CA$, $\overline{C_1A_1} = \frac{1}{2}\,\overline{CA}$. **220.** Viz P^{20}_{2}.

221. Podle (sss) a P^{20}_{1}. **222.** Je-li EF střední příčka lichoběžníka $ABCD$, musí být $\overline{EA} = \overline{ED}$, $\overline{FB} = \overline{FC}$. Pak je $EF \parallel AB$, $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$. **225.** Dvě. **228.** Protínají se v jediném bodě (střed kružnice opsané). **229.** c) střed S opsané kružnice půlí přeponu AB. **230.** Na polopřímkách $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ určíte vzdálenost $v \doteq 16$ mm.

231. Určete průsečík osy úhlu $\sphericalangle KJL$ se stranou KL. **232.** Jsou si rovny (viz P^{12}_{3}). **233.** Sestrojte osy tětiv AB, BC, CA. **234.** Protínají se v jediném bodě (střed kružnice vepsané). **236.** Trojúhelníku ABC vepište kružnici k; její střed označte S. Zjistíte, že její poloměr $\varrho \doteq 35{,}2$ mm. Pak opište kružnici k' o středu S a poloměru $r = \varrho - 15$ mm. „Nejužší místa" leží na kolmicích spuštěných z bodu S na přímky AB, BC, CA. **238.** Je to úsečka určená bodem B a patou B_1, kolmice spuštěné z bodu B na přímku AC. Průsečík výšek je bod, v němž se protínají prodloužení výšky trojúhelníka.

IV. GRAFICKÉ URČOVÁNÍ VZDÁLENOSTÍ A VÝŠEK.

239. a) 58,3 km; b) S 59° V.

241. $AB \doteq 33$ m. **242.** Asi 54,2 m. **243.** 38,7°. **245.** 28 m. **246.** 208,5 m. **247.** 35°. **248.** a) 61,3°; b) 4,39 m. **249.** 31 m. **250.** 38,6°.

251. $5\frac{1}{4}$ km za hod. **252.** 385 m. **253.** a) $\overline{UX} = 4{,}42$ km; b) směr UX je S 73,7° V. **254.** 261 m. **255.** a) 913 m; b) 484 m. **256.** a) 834 m; b) 612 m; c) 420 m. **257.** a) 273 m; b) 207 m, c) 183 m. **258.** 265 m. **259.** 1 736 m. **260.** 1,035 m.

V. POČETNÍ ÚLOHY.

262. a) 108,6 m; b) 55,12 m; c) 15 m; d) $11\frac{1}{3}$ m; e) $2\frac{1}{3}$ m.

263. a) 66,1225 m^2; b) 146,1681 m^2; c) 0,000625 m^2; d) $30\frac{1}{4}$ m^2; e) $1\frac{9}{16}$ m^2. **264.** a) 4krát; b) 9krát. **265.** a) 348,4 m^2; b) 538,68 m^2; c) 448,9 m^2. **266.** a) 5 848 a; b) 1 393,2 a. **267.** Zvětší se; a) 3krát; b) 2krát; c) 6krát; d) $1\frac{1}{2}$krát; e) 9krát. f) Nezmění se. Zmenší se: g) na $\frac{1}{9}$; h) na $\frac{3}{4}$. i) Nezmění se. **268.** 64 m. **269.** Asi 6 136 osob. **270.** 158,04 m^2.

271. Obdélník je větší o 1,25 dm^2. **272.** $1\frac{1}{63}$ m. **273.** $372\frac{7}{8}$ m^2. **274.** 21%. **275.** 36%. **276.** Zmenší se o 1%. **277.** $16\frac{2}{3}$%. **278.** O 0,98%. **279.** a) 1 795,74 m^2. b) 4,335 m^2. c) $2\frac{2}{3}$ m^2; d) $8\frac{1}{6}$ m^2; e) $35\frac{1}{24}$ m^2. **280.** a) 50,653 m^3; b) 0,343 m^3; c) $3\frac{3}{8}$ m^3; d) $42\frac{7}{8}$ m^3; e) $20\frac{51}{64}$ m^3.

281. a) 4krát; b) 8krát. **282.** 3 krychle s hranou po 5 cm jsou větší. **283.** a) 34,48 dm^2; 11,2 dm^3; b) 24,7936 m^2; 7,135744 m^3; c) 6 m^2; $\frac{15}{16}$ m^3. **284.** 7 200 hl; 1800 hl. **285.** 244 kusů. **286.** 1 600 (kdybyste chtěli přesně počítat, museli byste i rozměry zdi zvětšit o 1 cm; vysvětlete). **287.** Asi 60 dm^2. **288.** 16,02 m^3. **289.** 1 476 kg. **290.** 80 dm^3.

291. 0,512 cm. **292.** Asi 8 605 kg. **293.** a) 990 cm^2, b) 1 020 cm^2, c) 1 050 cm^2. **294.** a) $10\frac{5}{12}$ cm; $608\frac{2}{3}$ cm^2; b) $1\frac{4}{9}$%; c) 1,4%. **295.** a) 82; 104; 126; 148; b) 7 cm. **296.** a) 751; 1408; 1977; b) 851; 1808; 2877.

297.	a)	60 cm^2,	120 cm^2,	180 cm^2.
	b)	80 cm^2,	160 cm^2,	240 cm^2.
	c)	100 cm^2,	200 cm^2,	300 cm^2.
	d)	142 cm^2,	288 cm^2,	438 cm^2.
	e)	162 cm^2,	328 cm^2,	498 cm^2.
	f)	182 cm^2,	368 cm^2,	558 cm^2.
	g)	246 cm^2,	504 cm^2,	774 cm^2.
298.	a)	60 cm^2,	120 cm^2,	180 cm^2.
	b)	80 cm^2,	160 cm^2,	240 cm^2.
	c)	100 cm^2,	200 cm^2,	300 cm^2.
	d)	138 cm^2,	272 cm^2,	402 cm^2.
	e)	158 cm^2,	312 cm^2,	462 cm^2.
	f)	178 cm^2,	352 cm^2,	522 cm^2.
	g)	234 cm^2,	456 cm^2,	666 cm^2.

299. a) 1,88krát, b) 1,78krát, c) 1,34krát, d) 3,32krát, e) 2,44krát, f) 2,24krát, g) čtyřikrát.

VI. OPAKOVÁNÍ UČIVA.

301. Součet $a + b = 2m$, rozdíl $a - b = 2n$. **302.** a) Viz P_2^4, P_3^4. b) Viz P_4^4. **304.** a) Ano, leží-li na ose souměrnosti p. b) Kolmá k ose p. c) Buď leží v ose p, nebo má osu souměrnosti p za osu. d) Jednak osa p sama, jednak přímka kolmá k ose p. e) Když je rovnoběžná s osou p. f) Když tvoří s osou p úhly $45°$ a $135°$. Pokud bod neleží na ose, procházejí jím dvě takové přímky, které jsou k sobě kolmé. Leží-li bod na ose, procházejí jím rovněž dvě takové přímky, při čemž je jedna obrazem druhé. g) Na ose p. **308.** Viz P_2^{11} až P_6^{11}. a) Viz P_1^{12} až P_5^{12}. b) Viz odpověď na cvičení 120. **309.** Viz P_1^{13} až P_5^{13}. a) Viz P_6^{13} až P_{10}^{13}. b) Daný úhel musí být ostrý a daná přepona musí být větší než daná odvěsna. **310.** Je $\beta = \gamma$, $\overline{DB} = \overline{EC}$, strana BC je společná; odtud $\triangle BCD \cong \triangle CBE$ (sus). Pak je $\overline{BE} = \overline{DC}$ a $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ (sss). Proveďte důkaz ještě jinak (osovou souměrností).

311. a) Rovnoramenný (tím rovnostranný má tři osy). b) Kosočtverec (dvě úhlopříčky), obdélník (dvě střední příčky), čtverec (dvě úhlopříčky, dvě střední příčky). c) Rovnoramenný (společná osa obou základen). d) Deltoid (úhlopříčka). **312.** V obraze je $\alpha_1 = \alpha_2$, $\omega + \alpha_1 = 2R$, tedy $\omega + \alpha_2 = 2R$; proto je $q_2 \parallel q_1$ (viz P_3^{15}). **313.** (Viz obr. 186c.) V $\triangle ABC$ je $\alpha + \beta = R$; $\beta_1 = \beta$. V $\triangle AB_1O$ je $\omega = R$. Proto je $A_1B_1 \perp AB$. Podle cvič. 312 je $A_2B_2 \parallel A_1B_1$.

314. Je $\alpha > 70°$, $\gamma < 70°$. Úhel α nemusí být ostrý. **315.** $\overline{BS} > \overline{CS}$. **316.** $\sphericalangle DAB = 7\frac{1}{2}°$; $\sphericalangle ADB = 112\frac{1}{2}°$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ADC = 67\frac{1}{2}°$, $\gamma = 45°$. **317.** Je-li A' průsečík osy úhlu s ramenem BC, potom platí: (1) $\sphericalangle AA'C = \gamma = 72°$ a tedy $\overline{AA'} = \overline{AC}$; (2) $\sphericalangle A'AB = \beta = 36°$ a tedy $\overline{A'A} = \overline{A'B}$. **318.** Obě čáry se liší v úsečkách $\overline{KA} = \overline{HL}$, $\overline{LA} = \overline{HK}$, neboť $HKAL$ je rovnoběžník. **319.** Z bodu H spusťte kolmici AHB na osu úhlu $\sphericalangle MON$. **320.** Bod E, v němž se protnou osy úhlů α, β leží podle předpokladu na straně CD. Je $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; $\sphericalangle AED = \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle DAE$ a tedy $\overline{DE} = \overline{DA}$; $\sphericalangle CEB = \frac{1}{2}\beta = \sphericalangle CBE$ a tedy $\overline{CE} = \overline{CB}$. Tím $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{DE} + \overline{CE} = \overline{DA} + \overline{BC} = 2 \,.\, \overline{AD}$. Je $AE \perp BE$, neboť $\alpha + \delta = 2R$ a tedy $\sphericalangle AED + \sphericalangle BEC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = R$.

322. a) Podle konstrukce je $\triangle CAB \cong \triangle CQP$ (sus); odtud $\overline{QP} = \overline{AB}$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CQP$ a proto je $QP \parallel AB$ (viz P_2^{15}). b) Podle konstrukce je AB střední příčka trojúhelníku $\triangle CMS$ a tedy $AB \parallel MS$, $2 \,.\, \overline{AB} = \overline{MS}$. c) Je $2 \,.\, \overline{PQ} = 2 \,.\, \overline{AB} = \overline{MS}$, $PQ \parallel MS$. Další dvojice MN, RQ a RS, NP. **323.** Čtyrúhelník, který vznikne, je rovnoběžník s pravými úhly, tedy obdélník (viz P_2^{14}, P_{13}^{19}). Osa úhlu dělí tento obdélník ve dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, takže je to zároveň kosočtverec. **324.** Je $\sphericalangle HGF = \sphericalangle HEK$ (rovnoběžník $EFGH$); je $\sphericalangle HEK = \sphericalangle EKH$ (rovnoramenný $\triangle HEK$), tedy $\sphericalangle HGF = \sphericalangle EKH$. Ale $KE \parallel HG$ a proto je $\sphericalangle EKH = \sphericalangle KHG$ (viz P_5^{15}). A tedy $\sphericalangle HGF = \sphericalangle KHG$ a čtyrúhelník $HGFK$ je rovnoramenný lichoběžník (je $KF \parallel HG$; viz P_8^{18}).

REJSTŘÍK.

OBSAH

GEOMETRIE

pro druhou třídu středních škol

Autoři: Dr Eduard Čech, Alfons Fišer, Vítězslav Jozífek, Ing. Karel Komínek, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka

Odpovědný redaktor: prof. Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Obálka: Marie Tůmová

Korektor: Josef Udržal

Plánovací skupina 301 20-521 - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 21. března 1951, č. 16 783/51-I/1, v druhém vydání jako učebnice pro školy střední - Povoleno MIO č. j. 45 250/51-2-III/1 ze dne 12. března 1951 - Čkm. S 238-II - Sazba: 25. 3. 1951 - Tisk: 10. 5. 1951 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic v druhém vydání - Náklad 35 000 výt. (117 001. - 152 000. výt.) - Plánovacích archů 8,25 - Autorských archů 8,95 - Vydavatelských archů 9,09 - Papír: 2215 - Formát A 5 - Písmo garmond Antikva - Druh tisku: knihtisk - Všeobecná daň 1 % - Vytisklo Naše vojsko, vydavatelství čs. branné moci, Praha II, Svobodova ul. 1

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 11,—

Čkm S 238 - II
Cena Kčs 11,—
301 20 - 521