P. B. Golokvoschyus

Существование и построение периодических решений одной двухмерной нелинейной периодической системы дифференциальных уравнений

In: Michal Greguš (ed.): Equadiff 5, Proceedings of the Fifth Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Bratislava, August 24-28, 1981. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 47. pp. 115--118.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702272

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ДВУХМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пятрас Б. Голокващюс

Вильнюс, СССР

Иследуется комплексная система

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) + \varepsilon f(x,t,\varepsilon)\ , \tag{1}$$

где

$$P(t) = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(t)+b_1\varphi_2(t) & \varphi_2(t) \\ b_2\varphi_2(t) & \varphi_1(t) \end{matrix} \right\| ,$$

$$f(t) = \mathrm{colon}\ (f_1(t), f_2(t))\ ,$$

$$f(x,t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\ (f_1(x,t,\varepsilon),\ f_2(x,t,\varepsilon)) = \sum_{\sigma,\nu=0}^{\infty} f_{\sigma\nu}(t)x^{\sigma}\varepsilon^{\nu} \tag{2}$$

$$f_{\sigma\nu}(t) = \mathrm{diag}\ (f_{\sigma\nu 1}(t),\ f_{\sigma\nu 2}(t)).$$

Матрица $P(t)$, вектор функции $f(t)$ и $f(x, t, \varepsilon)$ являются непрерывными и периодическими с периодом $\omega = 1$ по вещественной независимой переменной t ; b_1 и b_2 -постоянные, ε - параметр, $x = \mathrm{colon}\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ - искомый вектор, причём $x^{\sigma} = \mathrm{colon}(\tilde{x}_1^{\sigma}, \tilde{x}_2^{\sigma})$. Предполагается, что ряд (2) сходится ровномерно в области

$$D = \{ 0 \leq t \leq 1,\quad \|x\| \leq h,\quad |\varepsilon| \leq \delta \} \tag{3}$$

На основании матрицы монодрамии ([1] , с.183-188), метода вариации произвольных постоянных Лагранжа ([1] ,с. 76-78) и теоремы Пуанкаре-Ляпунова ([2] , с. 197-203) построено периодическое периода $\omega = 1$ решение уравнения (1) в виде степенного ряда

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\varepsilon^k \tag{4}$$

с периодическими коэффициентами

$$x_k(t+1) = x_k(t) \qquad (k=0,1,2,\ \ldots\ ) \tag{5}$$

с начальным условием

$$x(0, \mathcal{E}) = x_o(0) \tag{6}$$

и при $\mathcal{E} \to 0$ обладающее свойством

$$x(t, \mathcal{E}) \to x(t, 0) \equiv x_o(t), \tag{7}$$

где $x_o(t)$ - периодическое с периодом $\omega = 1$ решение предельной системы

$$\frac{dx_o}{dt} = P(t)x_o + f(t).$$

Ради краткости ограничимся резонансным случаем и приведём некоторые результаты исследования.

В указанном случае в подстановке $x = S_n y$ $(n = 1,2)$, где $y = \mathrm{colon}\ (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ - новый искомый вектор, матрица S_n имеет один из двух видов:

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(-b_1 + \sqrt{\Delta}) & \frac{1}{2}(-b_1 - \sqrt{\Delta}) \end{Vmatrix} \quad (\Delta = b_1^2 + 4b_2 \neq 0), \tag{8}$$

$$S_2 = \begin{Vmatrix} -4b_1^{-1} & 2 \\ 0 & b_1 \end{Vmatrix} \quad (b_1 \neq 0). \tag{9}$$

При этом коэффициенты ряда (4) $x_k = S_n y_k$ определяются с помощью системы двухмерных векторных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k}{dt} = Q(t)y_k + \tilde{g}_k(t) \qquad (k = 0,1,2, \ldots). \tag{10}$$

Здесь

$$Q(t) = S_n^{-1} P(t) S_n, \quad \tilde{g}_o(t) = S_n^{-1} f(t),$$

$$\tilde{g}_k(t) = S_n^{-1}\Big\{ f_{ok-1}(t)e + \sum_{\nu=0}^{k-1} f_{1\nu}(t)x_{k-1-\nu} + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{k-1} f_{\sigma\nu}(t)P_\sigma((x_o, \ldots, x_{k-1-\nu}) \Big\} \tag{11}$$

причем $e = \mathrm{colon}\ (1,1)$, а

$$P_2(x_0, \dots, x_j) = \sum_{\nu=0}^{j} x_\nu x_{j-\nu} ,$$

$$P_\sigma(x_0, \dots, x_j) = \sum_{\nu=0}^{j} x_\nu P_{\sigma-1}(x_0, \dots, x_{j-\nu}) \qquad (\sigma \geq 3)$$

– однородные полиномы относительно $x_0, \dots, x_j$ соответветственно степни $\sigma=2$ и $\sigma \geqq 3$, коэффициенты которых положительные целые числа.

В резонансном случае фундаментальная матрица имеет один из двух видов:

$$Y_1(t) = \operatorname{diag}\left[\exp \rho_1(t), \exp \rho_2(t)\right] \quad (Y_1(0) = E), \tag{12}$$

где E – единечная матрица,

$$\rho_\nu(t) = 2\pi n_\nu it + \psi_{\nu\nu}(t) \qquad (\nu = 1, 2;\ i = \sqrt{-1}),$$

n_ν $(\nu=1,2)$ – целые числа или нуль,

$$\psi_{11}(t) = \psi_1(t) + \tfrac{1}{2}(b_1 + \sqrt{\Delta})\psi_2(t), \quad \psi_{22}(t) = \psi_1(t) + \tfrac{1}{2}(b_1 - \sqrt{\Delta})\psi_2(t),$$

$$\psi_\nu(t) = \int_0^t \varphi_\nu(\tau)d\tau - t\int_0^1 \varphi_\nu(t)dt \qquad (\nu = 1, 2);$$

$$Y_2(t) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ \psi_2(t) & 1 \end{matrix}\right\| \exp \psi(t) \quad (Y_2(0) = E), \tag{13}$$

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \tfrac{1}{2} b_1 \psi_2(t), \quad \psi(1) = \psi(0) = 0 ,$$

обозначим

$$I_k(t) = \int_0^t Y_n^{-1}(\tau)\, \tilde{g}_k(\tau)d\tau \qquad (k=0,1, \dots;\ n = 1, 2) ,$$

$$M^* = \max_{0 \leqq t \leqq 1} \| f(t) \| , \quad \tilde{M} = \max_{0 \leqq t \leqq 1} (M^*, \|f_{\sigma\nu}(t)\|) \quad (\sigma, \nu = 0, 1, \dots)$$

$$K = \max_{n=1,2}\left[\|S_n\| h_n (\|C_0\| + \tilde{h}_n \|S_n^{-1}\| M^*)\right] < R ,$$

$$\tilde{K} = \tilde{M} \max_{n=1,2} (\|S_n\| \|S_n^{-1}\| h_n \tilde{h}_n) < R ,$$

где

$$h_n = \max_{0 \leqq t \leqq 1} \|Y_n(t)\| , \quad \tilde{h}_n = \max_{0 \leqq t \leqq 1} \|Y_n^{-1}(t)\| ,$$

а матрицы S_n и $Y_n(t)$ даны соответственно формулами (8), (9), (12) и (13).

Т е о р е м а 1 . Пусть

$$I_k(1) \equiv \int_0^1 Y_n^{-1}(t)\tilde{g}_k(t)dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2).$$

Кроме того предположим, что для периодических с периодом $\omega = 1$ решений соответствующих уравнений (10)

$$y_0(t) = Y_n(t)\left[c_0 + I_0(t)\right], \quad y_k(t) = Y_n(t)I_k(t) \quad (k=1,2,\ldots;n=1,2),$$

где c_0-прозвольный двухмерный постоянный вектор, еимет

$$\max_{0 \leqq t \leqq 1} \| S_n y_k(t) \| < R \qquad (k = 0, 1, \ldots; n = 1, 2) \quad ,$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \max_{0 \leqq t \leqq 1} \| S_n y_\nu(t) \| = \rho < R \qquad (n = 1, 2) \quad .$$

Тогда для вектора (11) при $0 < \rho + \alpha < R$ $(\alpha > 0)$ верна оценка

$$\|\tilde{g}_k(t)\| \leqq \|S_n^{-1}\| \, \tilde{M}\left(1 - \frac{\rho + \alpha}{R}\right)^{-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2) \quad .$$

Т е о р е м а 2 . При

$$|\varepsilon| \leqq L(L + \tilde{K})^{-1} \leqq \delta_2 = \min(\delta, \delta_1) \qquad (0 < \delta_1 < 1) \quad ,$$

где

$$L = (R - K)\left(1 - \frac{\rho + \alpha}{R}\right) \quad ,$$

периодическое с периодом $\omega = 1$ решение (4) системы (1), обладающие свойствами (5), (6) и (7), не выходит из области (3).

Л и т е р а т у р а

1. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости.- М., Наука, 1967, - 472 с.

2. Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск, Наука и техника, 1979, - 744 с.