

16. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 16. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1966-1967. 9. Mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404558>

Terms of use:

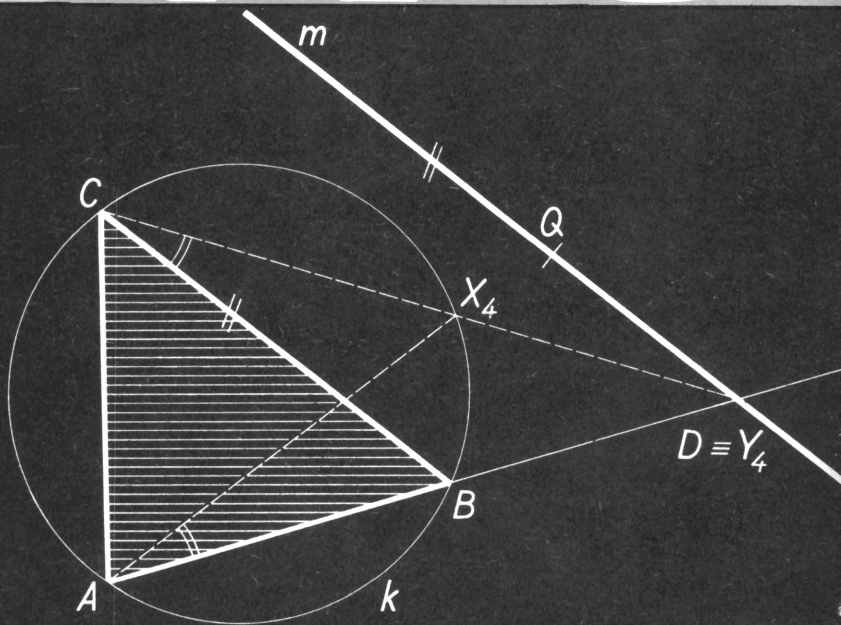
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MO

XVI. ročník matematické olympiády



SPN

ŠESTNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

*

*Zpráva o řešení úloh ze soutěže,
konané ve školním roce 1966—1967*

*

DEVÁTÁ MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ
OLYMPIÁDA

PRAHA 1968

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín a Vlastimil Macháček. Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Recenzovali Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1968

I. Šestnáctý ročník celostátní matematické olympiády

1. Při posuzování průběhu XVI. ročníku matematické olympiády bychom si měli připomenout slova, kterými je v statutu této soutěže vymezen její cíl a která jsou stále aktuální:

„Účelem soutěže je vést žáky k samostatné práci, vzbudit u nich zájem o úspěšné studium matematiky, zvýšit úroveň vyučování a vyučovací výsledky v tomto předmětu. Soutěž zároveň přispívá k vyhledávání a k podpoře žáků vynikajících v matematice, a tím pomáhá zajišťovat větší příliv matematicky školených pracovníků pro naši hospodářsko-technickou výstavbu.“

Soutěžení je tedy prostředkem, nikoli cílem. Matematická olympiáda má být oporou zejména těm, o něž se naše škola stará dost macešsky — tj. matematicky nadaným žákům. Má posilovat jejich zájem o studium matematiky, má jim pomáhat nejen vlastní soutěží, ale všemi svými akcemi — zkrátka má je vést k tomu, aby zvyšovali své matematické vzdělání. Její předností proti volným matematickým soutěžím, které probíhají např. v odborných časopisech, je pevná organizace, zároveň však v přehánění organizovanosti se skrývá nebezpečí, že celá akce ustrne, stane se těžkopádnou a neradostnou. Žáci by se měli účastnit soutěže zcela dobrovolně, z vlastního popudu, s úmyslem a vědomím, že se hlavně mají něčemu novému přiučit. Účast v olympiádě nesmí být spojována se školní klasifikací, nesmí se stát pro žáky obtížnou povinností — nepříjemným pokračováním školy.

Soutěžení na mezinárodním poli, kde by se měla ukázat skutečná úroveň matematických talentů různých zemí, nabývá však v posledních letech divného zaměření. Stává se zápolením takřka profesionálně připravovaných žáků s cílem zcela prestižním: aby ta která země dosáhla co nejlepšího umístění na mezinárodním žebříčku. I když se nám tato koncepce nelíbí — nechceme totiž vychovávat matematické primadony — musíme se jí jako účastníci mezinárodních olympiád aspoň částečně přizpůsobovat. Ale i to má své dobré důsledky: musíme vyhledávat matematické talenty, starat se o zvýšení úrovně vyučování aspoň v tzv. speciálních třídách a vyhledávat nové účinnější a zajímavější způsoby školení pro prázdninová soustředění nejlepších účastníků kategorie B. V tomto směru, započatém v XVI. ročníku, budeme pokračovat i v dalších letech, neboť jisté dobré výsledky se již projevily. Právě tak se budeme snažit i nadále zjednodušovat organizaci; již v XVI. ročníku byl částečně zjednodušen průběh prvního kola a jeho přípravy (přípravné úlohy), v němž mimo nezbytný výběr účastníků pro druhé kolo jde hlavně o cíle studijní.

Je pochopitelné, že řízení soutěže ústředním výborem musí se stát dostatečně pružné a že iniciativa krajských a okresních výborů MO, která se projevuje např. organizováním prázdninových soustředění žáků, pořádáním seminářů a besed, musí být vítána a ceněna.

Úspěch domácí i mezinárodní matematické olympiády závisí na práci učitelů matematiky — na drobné všední, nijak efektní práci: na konzultování s účastníky, na besedách, mimořádných seminářích, na opravování úloh, pomáhání při studiu literatury apod. Víme, že tato práce přes všechna krásná slova není dosud orgány státní správy i masových organizací dostatečně hodnocena a odměňována; proto asi se učitelům pro ni neposkytuje ani dosta-

tek času. Na druhé straně je však třeba si uvědomit, že poctivá, neformální práce v matematické olympiádě přináší každému učiteli odborný zisk a že k této práci, kterou nelze nikdy přesně zhodnotit a odměnit, je vždy třeba aspoň trochu nezištnosti a nadšení.

2. Nyní několik slov k průběhu I. a II. kola XVI. ročníku MO.

V I. kole můžeme s potěšením konstatovat růst počtu účastníků v kategoriích A, C a D. V kategorii B, která je tradičně poznamenána silným poklesem účastníků MO vzhledem k předcházející kategorii C, je tento pokles procentuálně nižší než např. vloni (984 kat. B z 1965 kat. C) a předloni (1332 z 2135). Růst počtu účastníků je jistě ovlivněn nižším počtem zadávaných úloh a možná i tím, že odevzdávání přípravných úloh nebylo povinné.

Avšak mnohem cennějším faktem, než je růst počtu účastníků, je udržení, dokonce zvýšení počtu úspěšných řešitelů I. kola, zvláště v kategoriích C a D. Podrobné údaje jsou v tabulkách 1 a 2.

Ve II. kole (viz tab. 3 a 4) jsou opět výsledky v kategoriích A, C a D lepší než vloni, i když v posledních dvou kategoriích poněkud pokleslo procento úspěšných řešitelů. Zvláštní pozornost zaslouží opět kategorie B, kde počet úspěšných řešitelů je nezvykle nižší. Jednou z příčin je snad výběr patrně obtížnějších úloh, avšak zarážející by byl asi rozbor příčin, proč která úloha nebyla nikým v celém kraji úspěšně vyřešena.

Soutěží II. kola v kategoriích B, C, D soutěž končí; proto uvedeme pořadí deseti nejlepších úspěšných řešitelů II. kola v kategoriích B a C podle jednotlivých krajů (v některých krajích však jejich počet ani čísla deset nedosáhl):

B. Zdeněk Arnold, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Miroslav Toušek, SVVŠ, Na dlouhém lánu, Praha 6; Ondřej Křivánek, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Vladimír Müller, SVVŠ, Na dlouhém lánu, Praha 6; Jan Peland, SVVŠ, Parlérova ul., Praha 1; Pavel Balek, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Jiří Čenovský, SVVŠ, Velvarská ul., Praha 6; Jan Mašek a Jiří Mukařovský, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Karel Winkelbauer, SVVŠ, Voděradská, Praha 10.

C. Petr Hadraba, Zdenka Stehlíková a Marek Malík, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Jan Chlouba, SVVŠ, Na dlouhém lánu, Praha 6; Vladimír Hora, SVVŠ, Nad štolou, Praha 7; Petr Suske, SVVŠ, Budějovická ul., Praha 4; Ilja Müller, SVVŠ, Na dlouhém lánu, Praha 6; Dušan Vít a Miroslav Vlček, SVVŠ W. Piecka, Praha 2; Jaromír Král, SVVŠ, Štěpánská, Praha 1.

Středočeský kraj

B. Pavel Čížek, SVVŠ Radotín; Jiří Čížek, SVVŠ Beroun; Josef Zicha, SVVŠ Příbram; Vladimír Doležal, SVVŠ Příbram a Zdeněk Urban, SVVŠ Rakovník.

C. Miloš Potměšil a Eva Dvořáková, SVVŠ Kolín; Petra Boušková a Jaroslava Dubová, SVVŠ Radotín; Vlastislav Poledna, SVVŠ Příbram; Jiří Chromý, SVVŠ Mladá Boleslav; Josef Kymla, SVVŠ Sedlčany; Bořivoj Shejbal, SVVŠ Hořovice; Anna Zvěřinová, SVVŠ Říčany; Jiří Zajíc, SVVŠ Benešov.

Jihočeský kraj

B. Vladimír Dvořák, SVVŠ Český Krumlov; Aleš Hanzal, SVVŠ Strakonice, Jiří Novák, SVVŠ Vimperk.

C. Josef Maroušek, SVVŠ Tábor; Pavel Hejda, SVVŠ Jindřichův Hradec; Vojtěch Růžička, Jan Syrovátka, Pavel Kesek, Milan Hrádek, Emanuel Kümmel, SVVŠ České Budějovice; Milan Tenkrát, SVVŠ Blatná, Lumír Srch, SVVŠ Český Krumlov; Petr Musil, SVVŠ Tábor.

Západočeský kraj

B. Václav Zahradník, SVVŠ J. Fučíka v Plzni; Karel Rusňák, SVVŠ Klatovy; František Straka a Václav Häsler, SVVŠ J. Fučíka v Plzni.

C. Jiří Reif, SVVŠ J. Fučíka v Plzni; Jitka Chvalová, SVVŠ Sušice; Petr Hrázský, SVVŠ Karlovy Vary; Ivana Koletová, Jiří Laciga, SVVŠ J. Fučíka v Plzni; Jiří Bečvář, 8. roč. ZDŠ Blovice; Jiří Dvořák, Jan Dušek, SVVŠ J. Fučíka v Plzni a Jindra Taterová, SVVŠ Sušice.

Severočeský kraj

B. Jan Janeček, SVVŠ Litvínov; Vladimír Vydra, SVVŠ Liberec; Pavel Cajthaml a Pavel Hofman, SVVŠ Teplice; Marcel Štěpánek, SPŠ stroj. Liberec a Ludmila Boubelíková, SVVŠ Ústí n. Labem, Jateční.

C. Miloš Zahradník, SVVŠ Tanvald; Jiří Hořejší, SVVŠ Roudnice n. Labem; Miloš Mazánek, SVVŠ Tanvald; Jaroslava Opočenská, SVVŠ Litoměřice; Jaroslava Novotná, SVVŠ Rumburk; Jan Polák, SVVŠ Jablonec n. Nisou; Marie Kratochvílová, SVVŠ Most; Miloš Derner, SVVŠ Litvínov; Zdeněk Cais, SVVŠ Litoměřice a Ivan Zvolánek, SPŠ stroj. Liberec.

Východočeský kraj

B. Jan Kerhart, SVVŠ Česká Třebová; Josef Jirásko, SVVŠ Semily; Karel Plavec, SVVŠ Chrudim; Michal

Allan, SVVŠ Spořilov-Pardubice; Zdeněk Kalhous, SVVŠ Spořilov-Pardubice; Petr Schill a František Jahelka, SVVŠ J. K. Tyla, Tylovo nábřeží, Hradec Králové.

C. Jiří Kopřiva, SVVŠ Broumov; Aleš Holubář, SVVŠ Chotěboř; Bohumil Hofman a Jiří Kouba, SVVŠ Vysoké Mýto; Václav Kadlec, SVVŠ Spořilov-Pardubice; Bohumil Špína, SVVŠ Turnov; Josef Bažant, SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové; Pavel Jirman, SVVŠ Vrchlabí; Alois Kopecký, SVVŠ Ledec nad Sázavou; Petr Taras, SVVŠ Havlíčkův Brod.

Jihomoravský kraj

B. Libor Polák, SVVŠ, Koněvova ul., Brno; Jaromír Duda, SVVŠ, Křenová ul., Brno; Pavel Švancara, Miroslav Šilhavý, Jan Schwarz, Lubomír Čermák, Jan Fertig, Milada Křížová a Pavel Legát, všichni SVVŠ, Koněvova ul., Brno; Bohumila Vlachová, SVVŠ, Křenová ul., Brno.

C. Petr Klíč, SVVŠ, Koněvova ul., Brno; Miroslav Macholán, SVVŠ, Zastávka u Brna; Jiří Dadok, SVVŠ, Královo Pole, Brno; Vladimír Smrž, SVVŠ, Koněvova ul., Brno; Vladimír Fianta, SVVŠ Veselí na Mor.; Jaromír Pavliš a Hana Cagašová, SVVŠ, Křenová ul., Brno; Bohumil Havel a Zdena Nešporová, SVVŠ, Koněvova ul., Brno; Stanislava Sýkorová, SVVŠ, Křenová ul., Brno.

Severomoravský kraj

B. Miroslav Kowalec, SVVŠ Havířov; Jiří Demel, SVVŠ Val. Meziříčí, Karel Zubík, SVVŠ Olomouc, tř. Jiřího z Poděbrad a Karel Vícha, SVVŠ Jilové.

C. Petr Jüngling, SVVŠ Olomouc-Hejčín; Bohumil

Rychtar, SVVŠ Bílovec; Jiří Šrajer, SVVŠ Opava; Antonín Rozsypal, SPŠE Olomouc; Dagmar Winklerová, SVVŠ Rožnov pod Radhoštěm; Radim Blaheta, Josef Řimánek, SVVŠ Ostrava 1; Petr Cetkovský, SVVŠ Rýmařov; Ladislav Kočí, SVVŠ Šternberk a Břetislav Kulháněk, SVVŠ Frenštát p. R.

Západoslovenský kraj

B. Anton Huťa, Ľubomír Pieružek a Rudolf Požgay, SVŠ, Novohradská, Bratislava; Jozef Baláž, SVŠ, Vazovova, Bratislava; Vladimír Čech, Karol Pastor a Ján Sálava, SVŠ, Novohradská, Bratislava; Jozef Hatala, SPŠ potr. Nitra; Alexander Aulitusz a František Ollé, SVŠ Komárno, maď.; Peter Kurdel, SVŠ, Metodova, Bratislava; Alexander Veselovský, SVŠ Komárno, maď.

C. Malin Mastihuba a Niepel Ľudovít, SVŠ, Novohradská, Bratislava; Attila Meszaros, SVŠ Galanta, maď.; Magdaléna Szálavay, SVŠ Komárno, maď.; Štefan Vidlár, SVŠ Holýš; Peter Zika a Ladislav Hudec, SVŠ, Novohradská, Bratislava; Ladislav Németh, SVŠ Komárno, maď.; Ján Vajda, SVŠ, Vazovova, Bratislava; Jozef Čačko a Juraj Dubay, SVŠ, Novohradská a Juraj Šafarik, ZDŠ, Košická, Bratislava.

Středoslovenský kraj

B. Otakar Ištvánfy, SVŠ Martin; Michal Kaukič, SVŠ Námestovo; Peter Nagy, SVŠ Banská Bystrica.

C. Emil Horváth, SVŠ Prievidza; Alexander Lang, SVŠ Zvolen; Mária Kušková, SVŠ Prievidza; Pavol Manger, SVŠ, Horný Val 5, Žilina; Dušan Mandák, SVŠ Turč. Teplice; Ján Elexa, SVŠ Turč. Teplice; Anton Fleško, SPŠ stroj. Brezno; Peter Krčák, SVŠ Lipt. Mikuláš; Anton Kulika, SVŠ Povážská Bystrica; Ján Štrba, SVŠ Nová Baňa; Mária Zámečnicková, SVŠ Povážská Bystrica.

B. Juraj Glosík, SVŠ, Šrobárova ul., Košice; Pavol Frantík, SVŠ, Kováčská ul., Košice.

C. Jan Sena, SVŠ Poprad; Miroslav Štepita, SVŠ Spišska Nová Ves; Peter Vojtas, SVŠ, Kováčská ul., Košice; Elena Vebrová, SVŠ, Kováčská ul., Košice; Peter Horák, SVŠ Tarasa Ševčenku, Prešov.

3. Třetí kolo. Závěrečné III. kolo MO kategorie A se konalo dne 13. května 1967 v Plzni. Komise ÚV MO měla tentokrát velmi obtížný úkol vybrat nejvýše 80 účastníků z celkem 174 úspěšných řešitelů II. kola, kteří byli navrženi z krajů (počet úspěšných řešitelů II. kola kat. A byl však ještě vyšší — celkem 244, jak je patrné z tabulky 1). Protože PÚV MO zaslalo s autorskými řešeními úloh též pokyny pro klasifikaci, nebylo tentokrát mnoho závažnějších výkyvů v klasifikaci. Úlohy II. kola však zřejmě nebyly přiměřeně obtížné, takže počet úspěšných řešitelů (tj. těch, kteří vyřešili dobře aspoň dvě úlohy) byl tak neobvykle velký. Proto norma pro povolání do III. kola byla velmi tvrdá; účastník musel úspěšně vyřešit v II. kole aspoň tři úlohy; výjimečně bylo povoláno též několik žáků z nižších ročníků, kteří vyřešili dvě úlohy úspěšně. Celkový počet účastníků pak byl 77 (včetně účastníka z Jihočeského a Východočeského kraje, kteří byli povoláni jako jediní reprezentanti svých krajů dodatečně).

Zastoupení jednotlivých krajů bylo opět nerovnoměrné — od jednoho žáka až po 27 žáků z Prahy. Avšak úlohy III. kola byly tentokrát pro účastníky obtížné, přestože byly poměrně jednoduché. Bylo vyhlášeno jen 11 vítězů (ač organizační statut připouští až 20) a 8 dalších úspěšných řešitelů. Uvedeme jejich jména.

Vítězové III. kola MO v XVI. ročníku, kategorie A
(Poznámka: Žáci na společných místech jsou uvedeni
v abecedním pořádku)

1. Pavel Vejvoda, 3. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
2. Martin Macháček, 3. roč. SVŠ, Novohradská, Bratislava
3. Bohuš Sivák, 1. roč. SVŠ Zvolen
4. Radovan Gregor, 3. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
5. Petr Kůrka, 3. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
6. { Jan Kastl, 3. roč. SVVŠ J. Fučíka, Plzeň
- až { 7. { Erich Wiszt, 3b. roč. SVŠ Banská Bystrica
8. { Pavel Polcar, 2. roč. SVVŠ Velké Meziříčí
- až { 9. { Zdeněk Slanina, 4. roč. SPŠ chem., Vranovská ul., Brno
10. { Josef Niederle, 3. roč. SVVŠ, Koněvova ul., Brno
- až { 11. { Alica Pirická, 3. roč. SVŠ, Kovačská ul., Košice

Úspěšní řešitelé III. kola MO v XVI. ročníku, kategorie A

12. { Roman Kotecký, 3. roč. SVVŠ, Šmeralova ul., Ostrava
- až { 13. { Mojmír Obdržálek, 3. roč. SVVŠ, Koněvova ul., Brno
15. { Věra Pohlová, 3. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
- Stanislav Slouka, 4. roč. SPŠP, Leninova 40, Brno
16. { Martin Bukovčan, 2. roč. SVŠ, Novohradská, Bratislava
- až { 17. { Jiří Fér, 1. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
19. { Tomáš Mašek, 1. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2
- Jiří Vinárek, 1. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha 2

Jména vítězů a úspěšných řešitelů byla oznámena všem KV MO, příslušným ředitelstvím škol a děkanátům vysokých škol. Vítězové a úspěšní řešitelé obdrželi od ministerstva školství ceny v celkové hodnotě 13 000 Kčs.

Na závěr III. kola byla uspořádána tradiční beseda a dále přednáška doc. J. Klátily „Souvislost matematiky se sportem“. V neděli dopoledne podnikli účastníci výlet do okolí Plzně.

4. *Soustředění.* Od 19. června do 8. července 1967 se konalo v Hranicích soustředění 90 úspěšných řešitelů MO a FO z kategorie B.

Dopoledne byly vždy 4 hodiny výuky a téměř každý večer dvouhodinová beseda s odborným námětem z matematiky nebo fyziky. Odpoledne bylo věnováno rekreaci. Žáci byli rozděleni do tří tříd; dvě z nich měly polovinu programu matematickou a polovinu fyzikální. Jedna třída měla program pouze matematický, podle návrhu projednaného na schůzi ÚV MO v Plzni.

Před IX. MMO se konalo v Praze týdenní soustředění 10 žáků, z nichž 8 vytvořilo naše reprezentační družstvo. Podrobnou zprávu o IX. ročníku MMO uvádíme v kapitole VI. Rovněž v krajích se konala četná soustředění řešitelů MO kategorií B a C.

5. *Schůze ústředního výboru.* V období XVI. ročníku se konaly tradičně dvě plenární schůze ÚV MO, a to první dne 5. prosince 1966 v Praze, druhá dne 13. května 1967 v Plzni u příležitosti III. kola kategorie A.

a) Pražská schůze ÚV MO projednala řadu závažných obsahových i organizačních otázek. Schůzi ÚV MO řídil jeho dosavadní předseda akademik Josef Novák, který oznámil definitivní složení nového ÚV MO. Jeho předsedou se stal doc. Jan Vyšín; složení výboru uvedeme na závěr zprávy.

Z organizačních otázek byly např. s přítomnými zástupci SPN prodiskutovány příčiny opětovného opožděného vydání letáků MO. SPN se zavázalo, že budou-li texty letáků dodány do konce dubna, zajistí jejich vydání do konce srpna téhož roku.

Doc. Jan Vyšín dále podal informaci o VIII. MMO a uvedl diskusi o způsobu přípravy vybraných studentů pro tuto soutěž. Vysvětlil, jak se bude příprava organizovat. Ministerstvo školství schválilo, aby byli školeni vybraní žáci ve všech krajích, kde jsou pro to podmínky. V Praze jde především o žáky ze speciálních tříd SVVŠ W. Piecka. Orientujeme se spíše na žáky z nižších tříd, což dělají také družstva zahraniční. Jde i o psychologickou přípravu, neboť naši žáci jsou nervově slabší a psychologická stránka je při mezinárodní soutěži velmi důležitá. Doc. Vyšín pak oznámil, kteří žáci byli letos vybráni. Obsahová stránka školení byla již dohodnuta (stereometrie, kombinatorická geometrie, algebra, rovnice a nerovnosti, číselná teorie). Na program jsou zejména úlohy MMO, a to i takové, které nebyly zadány. Pokud jde o venkovské žáky, předpokládá se, že se jich ujmou KV MO a že jejich školení dohodnou s pracovníky z vysokých škol apod.

Dalšími body jednání byly otázky edice „Škola mladých matematiků“, zpráva komise JČMF pro péči o nadané žáky, zhodnocení krajských soustředění MO a celostátního soustředění kat. B v Banské Bystrici.

b) Na plenární schůzi ÚV MO v Plzni byly projednány připomínky k organizaci XVI. ročníku a schváleny změny termínů jednotlivých kol XVII. ročníku MO tak, jak byly uveřejněny v 1. čísle letošního ročníku „Matematiky ve škole“. Protože se v diskusi ukázalo, že bude třeba provést další změny v organizaci MO, byla ustavena komise ve složení: dr. Fr. Běloun, dr. J. Moravčík, CSc.,

doc. J. Vyšín a Vl. Macháček, která podané návrhy zpracuje.

Další komise ÚV MO, jejímiž členy jsou prof. Pleskot, L. Berger, J. Andrys a insp. Jar. Novotný z Prahy připraví návrh na hodnocení učitelů za práci v MO.

Dále se pojednalo o některých otázkách spolupráce s JČMF, zejména o konkursu JČMF na úlohy pro matematickou a fyzikální olympiádu. Zpráva o výsledcích tohoto konkursu byla již také uveřejněna v časopisech Matematika ve škole a Rozhledy matematicko-fyzikální.

Zasedání ÚV se pak zabývalo způsobem výběru družstva pro IX. MMO a velmi podrobně se věnovalo přípravě celostátního prázdninového soustředění účastníků kategorie B v Hranicích na Moravě.

O jeho obsahu promluvil s. dr. J. Fuka, CSc. Uvedl, že jde o určitý experiment, který spočívá v tom, že v kursu se bude přednášet látka netradiční. Byla vybrána témata: Bukovský—Černý: *Použití Dirichletova principu v teorii čísel a v kybernetice*; Kovařík—Kovaříková: *Dotyk geometrických útvarů jako extrémní vlastnost*; Morávek—Vlach: *Oddělování konvexních množin*. Bude se sledovat, jak žáci tuto látku pochopili a jak ji dovedou uplatnit v úlohách netradičního charakteru. Podařilo se získat přednášející, kteří v těchto oborech pracují a mají dobré výsledky. Iniciátorem této myšlenky byl L. Bukovský.

6. Složení ústředního výboru Matematické olympiády

Předseda: Jan Vyšín, docent matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze

Místopředseda: prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

I. jednatel: Vlastimil Macháček, odb. asistent pedagogické fakulty UK v Praze

II. jednatel: Jiří Mída, odb. asistent pedagogické fakulty UK v Praze

Členové:

Josef Bartůněk, ústřední školní inspektor MŠ v Praze
Dr. František Běloun, vedoucí matem. kabinetu Krajského ped. ústavu v Praze

Dr. Juraj Bosák, CSc., vědecký pracovník Matematického ústavu SAV v Bratislavě

Dr. Jaroslav Fuka, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Hradecký, odborný asistent MFF UK v Praze

prof. dr. Karel Hruša, vedoucí katedry PedF UK v Praze

Dr. Milan Kolibiar, CSc., docent přírodovědecké fakulty Komenského university v Bratislavě

Ladislav Krkavec, ústřední školní inspektor MŠ v Praze

Dr. Jozef Moravčík, CSc., odb. asistent Vysoké školy dopravní v Žilině

Akademik Josef Novák, vedoucí vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Dr. Jiří Sedláček, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

František Veselý, profesor v. v., Praha-Petřiny, Janouškova ul.

Jana Veselá, zást. ÚV ČSM, pracovnice školských organizací ČSM

Dr. František Zítek, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Dr. Miloslav Zedek, docent přírodovědecké fakulty university Palackého v Olomouci

Náhradník: Dr. Miroslav Šisler, CSc., vědecký pracovník MÚ ČSAV v Praze

Dalšími členy ústředního výboru matematické olympiády jsou předsedové krajských výborů matematické olympiády.

Pracovní předsednictvo nového ÚV MO (PÚV MO) tvoří (uvedeno v abecedním pořadí) J. Bartůněk, prof.

dr. M. Fiedler, DrSc., dr. J. Fuka, CSc., Vl. Macháček,
J. Mída, akademik J. Novák, dr. J. Sedláček, CSc.,
doc. J. Vyšín a dr. Fr. Zítek, CSc.

7. Průběh XVI. ročníku MO ukazuje, že úkoly spojené se soutěží stále rostou a kladou zvýšené nároky na čas všech pracovníků; přáli bychom si, aby stejnou měrou rostly i výsledky.

Závěrem několik slov o fyzikální olympiádě. Tato soutěž by neměla být naší konkurentkou, ale sympatickou a vítanou mladší partnerkou. Charakter matematiky a fyziky na střední škole je však přece jen odlišný; to se projevuje i v inklinacích žáků k matematice a fyzice. V matematice jsou žáci na střední škole pochopitelně dále než ve fyzice, a proto např. zřízení matematické třídy při prázdninovém soustředění je asi rozumné a osvědčuje se. Ostatně časový předstih matematiky před fyzikou je věc zcela přirozená, je realizován i v učebních plánech vysokých škol. Nelze také nic namítat proti tomu, aby se žák účastnil zároveň matematické i fyzikální olympiády, pokud jej tato dvojí účast časově příliš nezatěžuje. Mělo by to však být spíše výjimkou a učitelé by neměli nutit žáky k účasti na obou olympiádách; to vše bylo už dříve konstatováno na schůzi ÚV. Jinak ovšem přejeme v zájmu rozvoje naší školy fyzikální olympiádě mnoho úspěchů a jsme ochotni k spolupráci prospěšné oběma stranám.

Tabulka 1

Přehled počtu účastníků I. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú
Praha-město	133	19	113	94	13	74	146	25	128	373	57	315
Středočeský	53	18	30	69	11	38	127	45	43	249	74	111
Jihočeský	37	7	35	54	12	53	89	34	84	180	53	172
Západočeský	29	3	27	34	7	28	79	32	61	142	42	116
Severočeský	56	23	43	63	8	40	101	24	63	220	55	146
Východočeský	74	14	69	85	26	81	143	53	115	302	93	265
Jihomoravský	128	34	113	148	55	131	188	51	153	464	140	397
Severomoravský	59	17	39	62	10	32	184	45	143	305	72	214
Západoslovenský	44	11	42	90	17	56	175	66	85	309	94	183
Středoslovenský	49	17	44	71	22	62	140	54	120	260	93	226
Východoslovenský	34	12	15	56	3	17	98	21	58	188	36	90
Celkem	696	175	670	826	184	612	1 470	450	1 053	2 992	809	2 235

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

TABULKA 2

Přehled účastníků I. kola podle krajů v kategorii D)*

Kraj	Kategorie D			
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>Ů</i>	z toho dívek
Praha - město	1 084	460	710	291
Středočeský	1 096	513	782	405
Jihočeský	738	416	427	234
Západočeský	396	217	253	133
Severočeský	509	262	342	154
Východočeský	883	436	614	287
Jihomoravský	995	464	717	333
Severomoravský	1 001	479	603	289
Západoslovenský	1 182	572	777	405
Středoslovenský	894	426	650	302
Východoslovenský	659	315	335	161
Celkem	9 437	4 560	6 210	2 994

*) *P* = celkový počet účastníků; *Ů* = počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategoriích A, B, C*)

Kraj	Kategorie A			Kategorie B			Kategorie C			Celkem		
	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú	P	z toho dívek	Ú
Praha-město	109	16	77	64	10	14	106	16	43	279	42	134
Středočeský	26	6	12	34	4	5	42	13	10	103	23	27
Jihočeský	33	5	9	51	11	3	82	32	17	166	48	29
Západočeský	25	3	11	26	6	4	57	20	9	108	29	24
Severočeský	41	15	13	38	3	6	60	16	16	139	34	35
Východočeský	69	12	25	72	19	8	99	34	36	240	65	69
Jihomoravský	109	27	50	119	39	19	142	31	58	370	97	127
Severomoravský	35	7	16	32	4	5	136	27	44	203	38	65
Západoslavenský	42	10	19	52	7	12	85	27	23	179	44	54
Středoslavenský	41	13	7	59	17	3	110	38	11	210	68	21
Východoslavenský	15	2	5	17	3	2	52	15	3	84	20	10
Celkem	545	116	244	565	123	81	971	269	270	2 081	508	595

*) P = celkový počet účastníků; Ú = počet úspěšných řešitelů

TABULKA 4

*Přehled počtu účastníků II. kola podle krajů v kategorii D**

Kraj	Kategorie D			
	<i>P</i>	z toho dívek	<i>Ů</i>	z toho dívek
Praha - město	656	264	334	125
Středočeský	505	238	306	136
Jihočeský	393	213	146	70
Západočeský	242	127	83	40
Severočeský	310	141	179	79
Východočeský	509	248	364	151
Jihomoravský	619	285	174	81
Severomoravský	528	256	143	59
Západoslovenský	738	379	257	122
Středoslovenský	526	242	226	101
Východoslovenský	300	143	99	44
Celkem	5 326	2 536	2 311	1 008

*) *P* = celkový počet účastníků; *Ů* = počet úspěšných řešitelů

II. Přípravné úlohy I. kola

1. KATEGORIE A

1. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leq d_2 \leq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$\begin{aligned} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right) &\leq \\ &\leq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1 d_3}. \end{aligned}$$

Dokažte.

(Návod. Dokažte nejprve, že

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leq 1.)$$

Řešení. Dokažme nejprve, že platí

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leq 1. \quad (1)$$

Protože $(d_3 - d_2)(d_2 - d_1) \geq 0$, je také

$$d_2(d_1 + d_3) \geq d_2^2 + d_1 d_3.$$

Odtud

$$\frac{d_2^2}{d_2(d_1 + d_3)} + \frac{d_1 d_3}{d_2(d_1 + d_3)} \leq 1$$

neboli

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leq 1.$$

Protože také $d_1 \leq d_1 \leq d_3$ a $d_1 \leq d_3 \leq d_3$, platí i

$$\frac{d_1}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_1}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leq 1 \quad (2)$$

a

$$\frac{d_3}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_3}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leq 1. \quad (3)$$

Nechť nyní c_1, c_2, c_3 jsou nezáporná čísla. Násobením nerovnosti (1) číslem c_1 , nerovnosti (2) číslem c_2 a nerovnosti (3) číslem c_3 a sečtením dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1 + d_3} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) + \frac{1}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right) &\leq \\ &\leq c_1 + c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Protože aritmetický průměr nezáporných čísel

$$\frac{2}{d_1 + d_3} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3), \frac{2}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right)$$

je nejvýše roven $c_1 + c_2 + c_3$, je také jejich geometrický

průměr nejvýše roven $c_1 + c_2 + c_3$:

$$\sqrt{\frac{4}{(d_1 + d_3) \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3} \right)} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right)} \leq \\ \leq c_1 + c_2 + c_3.$$

Umocněním a úpravou dostaneme odtud dokázanou nerovnost.

Jiné řešení. Daná nerovnost platí právě tehdy, když platí

$$\frac{4d_1 d_3}{(d_1 + d_3)^2} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right) \leq \\ \leq (c_1 + c_2 + c_3)^2. \quad (1)$$

Výraz na levé straně nerovnosti (1) je součin dvou činitelů

$$x = \frac{2}{d_1 + d_3} (c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3),$$

$$y = \frac{2d_1 d_3}{d_1 + d_3} \left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3} \right).$$

Tento rozklad jsme provedli proto, že aritmetický průměr čísel x, y je velmi jednoduchý, jak snadno zjistíme výpočtem:

$$\frac{1}{2}(x + y) = \\ = \frac{1}{d_1 + d_3} \left[c_1 (d_1 + d_3) + c_3 (d_1 + d_3) + \frac{c_2}{d_2} (d_1 d_3 + d_2^2) \right],$$

tj.

$$\frac{1}{2} x + y) = c_1 + c_3 + c_2 \frac{d_1 d_3 + d_2^2}{(d_1 + d_3) d_2}. \quad (2)$$

Snadno dokážeme, že koeficient při c_2 v (2) je menší nebo roven jedné. Skutečně, kdyby bylo

$$\frac{d_1 d_3 + d_2^2}{(d_1 + d_3) d_2} > 1,$$

platilo by

$$d_1 d_3 + d_2^2 > d_1 d_2 + d_2 d_3,$$

neboli

$$d_1(d_3 - d_2) + d_2(d_2 - d_3) > 0,$$

neboli

$$(d_3 - d_2)(d_1 - d_2) > 0,$$

což je ve sporu s předpoklady $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Protože koeficient při c_2 ve vztahu (2) je menší nebo rovný jedné, je

$$\frac{1}{2}(x + y) \leq c_1 + c_2 + c_3. \quad (3)$$

Je známo, že geometrický průměr dvou nezáporných čísel je menší nebo roven jejich aritmetickému průměru; platí tedy

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y). \quad (4)$$

Z (3) a (4) dostaneme po umocnění

$$xy \leq (c_1 + c_2 + c_3)^2,$$

a to je nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

2. Rovnica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

s reálnými koeficienty a, b, c má jeden reálný koreň a dva rýdzo imaginárne korene práve vtedy, ak platí

$$c = ab, \quad b > 0. \quad (2)$$

Dokážte.

Riešenie. I. Nech rovnica (1) má reálny koreň α a dva rýdzo imaginárne korene. Rýdzo imaginárne korene sú potom navzájom opačné čísla $\pm i\beta$, kde $\beta \neq 0$ je reálne číslo. Z rovnice (1) vyplýva

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c &= -\alpha^3, \\ -a\beta^2 + bi\beta + c &= i\beta^3, \\ -a\beta^2 - bi\beta + c &= -i\beta^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Sčítaním druhej a tretej rovnice vo vzťahu (3) dostaneme

$$c = a\beta^2. \quad (4)$$

Odčítaním druhej a tretej rovnice vyjde

$$b = \beta^2. \quad (5)$$

Po dosadení z (5) do (4) dostaneme rovnosť zo vzťahov (2). Keďže $\beta \neq 0$ je reálne, je $b = \beta^2 > 0$, čo je nerovnosť zo vzťahov (2).

Poznámka. Vzťahy (2) možno odvodiť tiež zo známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami rovnice (1):

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha + i\beta - i\beta) = -\alpha, \\ b &= (i\beta)(-i\beta) + \alpha i\beta - \alpha i\beta = \beta^2 > 0, \\ c &= -\alpha \cdot i\beta \cdot (-i\beta) = -\alpha\beta^2 = ab. \end{aligned}$$

II. Nech platia vzťahy (2). Potom možno rovnicu (1) napísať v tvare

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0,$$

čiže

$$x(x^2 + b) + a(x^2 + b) = 0,$$

alebo

$$(x + a)(x^2 + b) = 0. \quad (6)$$

Pretože je $b > 0$, má rovnica $x^2 + b = 0$ dva rýdzo imaginárne korene $\pm i\sqrt{b}$. Okrem nich má rovnica (6) ešte reálny koreň $-a$.

3. V triede je 15 dvojsedadlových lavíc a 27 žiakov. Určití dvaja žiaci majú sedieť (z výchovných dôvodov) vedľa seba v tej istej lavici a žiadna lavica nemá zostať prázdna. Koľkými spôsobmi možno žiakov rozsaďiť?

Riešenie. Najskôr vyberieme miesta pre rozsadenie žiakov. Obaja vybraní žiaci budú sedieť v jednej z 15 lavíc. To je 15 možností. Zo zostávajúcich 14 lavíc budú tri obsadené len jedným žiakom. V každej z týchto troch lavíc bude buď pravé alebo ľavé miesto prázdne. Pre usadenie zostávajúcich (nevybraných) 25 žiakov je teda

$$\binom{14}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \binom{14}{3} \cdot 2^3 \quad (1)$$

možností. Celkom je teda podľa (1)

$$15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 2^3 = n \quad (2)$$

spôsobov, ako možno vybrať miesta pre rozsadenie.

Pri každej z týchto n situácií možno vybraných žiakov usadiť dvoma spôsobmi a okrem toho ostatných nevybraných 25 žiakov $25!$ spôsobmi. Pri každej z n situácií je teda

$$2 \cdot 25! \quad (3)$$

rozsadení. Podľa (2) a (3) je počet všetkých možných rozsadení

$$15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 25!,$$

t. j.

$$16 \cdot 15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 25!$$

4. Je dáno n bodů ($n \geq 3$), z nichž žádné tri neleží v prímcie, a množina U skládající se z n úseček, které spojují vždy dva z daných bodů.

Pak lze z daných n bodů vybrat k bodů $A_1, \dots, A_k$ ($k \geq 3$) tak, že všechny úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$ náležejí množině U .

Řešení. Pro $n = 3$ je věta zřejmá; pro libovolné n ji dokážeme matematickou indukcí. Budeme předpokládat, že věta platí pro všechna $k \leq n$ a dokážeme ji pro $n + 1$. Při indukčním kroku rozlišíme tyto dva případy:

a) Mezi danými $n + 1$ body lze nalézt skupinu k bodů ($k \leq n$), které jsou spojeny k úsečkami z množiny U ;

b) žádná taková skupina k bodů ($k \leq n$) neexistuje.

V případě a) platí věta pro daných $n + 1$ bodů podle indukčního předpokladu.

V případě b) vycházejí z každého z daných $n + 1$ bodů aspoň dvě úsečky množiny U , neboť každých n bodů je spojeno nejvýše $n - 1$ úsečkami z U ; proto ze zbývajících $(n + 1)$ -ho bodu vycházejí aspoň dvě úsečky množiny U .

Budiž A_1A_2 úsečka množiny U . Z bodu A_2 vychází mimo úsečku A_2A_1 ještě úsečka A_2A_3 množiny U .

Z bodu A_3 vychází mimo úsečku A_3A_2 ještě úsečka A_3A_4 množiny U , atd. Tak zkonstruuujeme posloupnost úseček množiny U

$$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, A_nA_{n+1}. \quad (1)$$

Žádný z bodů

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n+1}$$

nemůže splynout se žádným z předcházejících bodů, neboť pak by pro některé $k \leq n$ nastal případ a) a nikoli b). Posloupnost (1) obsahuje tedy n různých úseček množiny U a body $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ jsou navzájem různé. Druhá úsečka vycházející z bodu A_{n+1} musí být tedy $A_{n+1}A_1$, a tím je dokázáno, že věta platí i v případě b) pro $n + 1$.

2. KATEGORIE B

1. Funkce proměnné x

$$y = a|x| + b|x - k| \quad (1)$$

nabývá hodnoty 0 pro $x = -1$ a $x = 3$; největší hodnota, které nabývá, je $y = 2$. Určete konstanty a , b , k a nakreslete graf funkce (1).

Řešení. Pro $x = -1$ dostaneme z (1)

$$a + b|1 + k| = 0; \quad (2)$$

pro $x = 3$ dostaneme z (1)

$$3a + b|3 - k| = 0. \quad (3)$$

Z (2), (3) vyloučíme a ; vyjde

$$b(|3 - k| - 3|1 + k|) = 0. \quad (4)$$

Je $b \neq 0$; jinak by totiž vyšlo z (2) také $a = 0$ a funkce (1) by nenabývala hodnoty $y = 2$. Z (4) pak dostaneme $|3 - k| = 3|1 + k|$, neboli

$$3 - k = \pm 3(1 + k). \quad (5)$$

Řešením (5) vyjde buď $k = 0$, nebo $k = -3$. Je tedy třeba vyšetřovat dvě funkce

$$y = (a + b)|x| \quad (1')$$

a

$$y = a|x| + b|x + 3|. \quad (1'')$$

V případě $k = 0$ dostaneme z (2) $b = -a$, funkce (1') je pak $y = 0$, a nenabývá tedy hodnoty $y = 2$. V případě $k = -3$ dostaneme z (2) $a = -2b$; funkce (1'') má pak rovnici

$$y = -2b|x| + b|x + 3|. \quad (6)$$

Zkoumejme průběh funkce (6). Budeme vyšetřovat tři intervaly:

I. $x \leq -3$, II. $-3 \leq x \leq 0$, III. $x \geq 0$.

V intervalu I. můžeme rovnici (6) přepsat ve tvaru

$$y = bx - 3b \quad (6a)$$

a v intervalu II. ji můžeme přepsat ve tvaru

$$y = 3bx + 3b. \quad (6b)$$

Konečně v intervalu III. ji můžeme přepsat ve tvaru

$$y = -bx + 3b. \quad (6c)$$

Kdyby bylo $b < 0$, nabývala by funce (6c) pro dosti velká kladná x hodnot větších než 2; kdyby bylo $b = 0$, bylo by $y = 0$ pro všechna x . Je tedy $b > 0$. Funkce (6a) je rostoucí a v bodě $x = -3$ dosahuje nejvyšší hodnoty $y = -6b$. Rovnost $y = 2$ není splněna pro žádné $b > 0$. Funkce (6b) je rovněž rostoucí a v bodě $x = 0$ nabývá nejvyšší hodnoty $y = 3b$. Funkce (6c) je klesající a její nejvyšší hodnota $y = 3b$ je rovněž v bodě $x = 0$. Musí být tedy $3b = 2$, tj. $b = \frac{2}{3}$ a z (2) pro $k = -3$ dostaneme $a = -\frac{4}{3}$. Hledaná funkce tedy je

$$y = -\frac{4}{3}|x| + \frac{2}{3}|x + 3|. \quad (7)$$

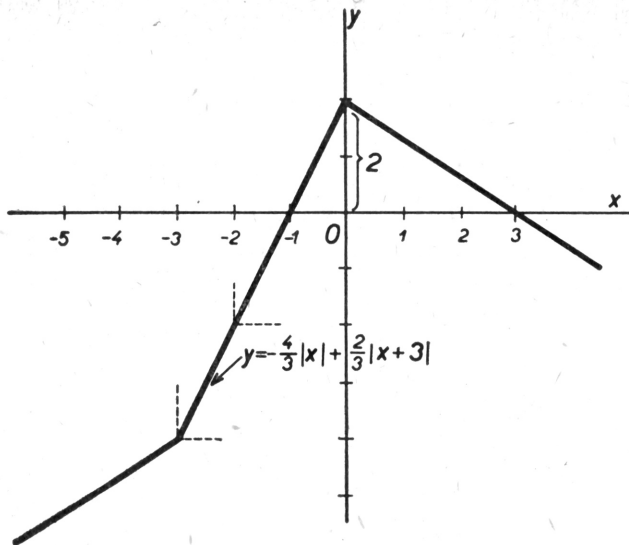
Graf funkce (7) je na obr. 1.

2. Určíte všechny prirodzené čísla x , které vyhovují rovnici

$$4^{x-1} + 7 \cdot 2^x + 48 = x(x-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (1)$$

Riešenie. Číslo $x = 1$ zrejme nevyhovuje. Ak je $x \geq 2$, je ľavá strana (1) násobkom štyroch a teda aj súčin $x(x-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ je násobkom štyroch. Preto musí byť $x \geq 4$.

Ak je $x \geq 4$, je ľavá strana (1) násobkom šestnástich a preto aj číslo $x(x-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ je násobkom šest-



Obr. 1.

nástich, čo však znamená, že

$$x \geq 6. \quad (2)$$

Upravme (1) pre $x \geq 6$. Dostaneme

$$16 \cdot 4^{x-3} + 7 \cdot 16 \cdot 2^{x-4} + 3 \cdot 16 = x \cdot (x-1) \dots \dots 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad (3)$$

Obe strany rovnice (3) vydelíme číslom 16:

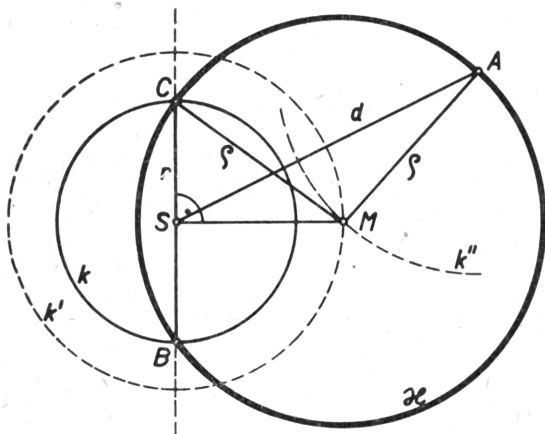
$$4^{x-3} + 7 \cdot 2^{x-4} + 3 = x(x-1) \dots 8 \cdot 7 \cdot 45. \quad (4)$$

Ak je $x > 7$, je pravá strana rovnice (4) násobkom ôsmich, teda párne číslo. Ľavá strana tejto rovnice je však naproti tomu číslo nepárne. Preto je

$$x \leq 7. \quad (5)$$

Spojením vzťahov (2) a (5) dostaneme, že len čísla $x = 6$ a $x = 7$ môžu byť riešením rovnice (1).

Skúškou zistíme, že $x = 7$ rovnici vyhovuje, ale $x = 6$ nevyhovuje.



Obr. 2.

3. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$, bod A , pre ktorý platí $AS = d > r$ a kladné číslo $\varrho > r$. Zostrojte kružnicu s polomerom ϱ , ktorá prechádza bodom A a delí kružnicu k na dve polkružnice. Určite podmienku riešiteľnosti.

Riešenie. Rozbor (obr. 2). Označme κ hľadanú kružnicu, M jej stred. Spoločná tetiva BC kružníc k, κ je priemerom kružnice k , preto vznikne pravouhlý trojuholník CSM , ktorého odvesna CS má dĺžku r , prepona $CM = \varrho$. Z tohto trojuholníka možno určiť dĺžku druhej odvesny

$$SM = \sqrt{\varrho^2 - r^2}. \quad (1)$$

Stred M hľadanej kružnice κ leží jednak na kružnici $k' \equiv (S; \sqrt{\varrho^2 - r^2})$, jednak na kružnici $k'' \equiv (A; \varrho)$.

Skúška. Obrátene, ak je M spoločný bod kružníc k' , k'' a κ kružnica $(M; MA)$, potom κ splňuje prvé dve podmienky úlohy. Z (1) ďalej vyplýva, že

$$\varrho - r < SM < \varrho + r, \quad (2)$$

čiže

$$(\sqrt{\varrho - r})^2 < \sqrt{\varrho - r} \cdot \sqrt{\varrho + r} < (\sqrt{\varrho + r})^2.$$

Kružnica κ pretne teda podľa (2) kružnicu k v dvoch rôznych bodoch B , C . Keďže z (1) vyplýva $\varrho^2 = r^2 + SM^2$, sú oba trojuholníky SMC , SMB pravouhlé, BC je priemer kružnice k , tj. κ delí k na dve polkružnice.

Diskusia. Úloha má aspoň jedno riešenie práve vtedy, keď kružnice k' , k'' majú aspoň jeden spoločný bod, tj. keď platí

$$|SM - \varrho| \leq d \leq SM + \varrho,$$

čiže podľa (1)

$$\varrho - \sqrt{\varrho^2 - r^2} \leq d \leq \varrho + \sqrt{\varrho^2 - r^2}. \quad (3)$$

Úpravou nerovností (3) dostaneme

$$\sqrt{\varrho^2 - r^2} \geq d - \varrho, \quad \sqrt{\varrho^2 - r^2} \geq \varrho - d,$$

t. j.

$$\sqrt{\varrho^2 - r^2} \geq |d - \varrho|. \quad (4)$$

Nerovnosť (4) je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením, tj. s nerovnosťou

$$\varrho^2 - r^2 \geq d^2 + \varrho^2 - 2d\varrho,$$

čiže

$$2d\varrho \geq d^2 + r^2. \quad (5)$$

Nerovnosť (5) je teda podmienkou riešiteľnosti úlohy.

4. Krychle o hraně délky 6 je rozdělena v $6^3 = 216$

jednotkových krychlí. Krychle je vepsána koule o průměru 6. Zjistěte, kolik jednotkových krychlí leží v kouli a kolik jich neobsahuje žádný vnitřní bod koule.

Řešení. Označíme S střed vepsané koule a A, B, C její dotykové body s třemi stěnami krychle, které mají společný vrchol. Poloměry SA, SB, SC jsou po dvou navzájem kolmé. Stačí řešit úlohu pro oktant $\mathcal{O} = S(ABC)$ a výsledky znásobit osmi; to vyplývá ze souměrnosti koule i krychle podle rovin SAB, SBC, SCA .

Označme po řadě x, y, z vzdálenosti toho vrcholu jednotkové krychle, který leží nejbližší bodu S , od rovin SBC, SCA, SAB . Další vrcholy této jednotkové krychle mají od rovin SBC, SCA, SAB vzdálenosti:

$$[x+1, y, z], [x, y+1, z], [x, y, z+1], [x+1, y+1, z], \quad (1)$$

$[x+1, y, z+1], [x, y+1, z+1], [x+1, y+1, z+1]$. Z toho plyne, že čísla x, y, z probíhají (navzájem nezávisle) čísla 0, 1, 2; tak dostaneme 27 jednotkových krychlí, které náležejí oktantu $\mathcal{O}$.

Jednotková krychle náleží vepsané kouli právě tehdy, náleží-li jí vrchol nejvzdálenější od bodu S ; to je podle (1) vrchol $[x+1, y+1, z+1]$. Jednotková krychle náleží tedy kouli, platí-li

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \leq 9. \quad (2)$$

Nerovnost (2) má tato řešení:

$x+1$	1	2	1	1	1	2	2
$y+1$	1	1	2	1	2	1	2
$z+1$	1	1	1	2	2	2	1

To je 7 jednotkových krychlí v oktantu $\mathcal{O}$; celkem 56 jednotkových krychlí, které leží v kouli.

Jednotková krychle nemá s koulí žádný společný vnitřní bod, jestliže nejbližší vrchol k bodu S leží buď na kouli, nebo vně koule, tj. když pro bod $[x, y, z]$ platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 9. \quad (3)$$

Nerovnost (3) má tato řešení

x	1	2	2	2
y	2	1	2	2
z	2	2	1	2

To jsou 4 jednotkové krychle v oktantu $\mathcal{O}$; celkem 32 jednotkových krychlí, které neobsahují žádný vnitřní bod koule.

Zbývajících $216 - (56 + 32) = 128$ jednotkových krychlí obsahuje jak vnitřní, tak vnější body koule.

3. KATEGÓRIA C

1. Určite všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x(x + y) + z(x - y) &= 6, \\ y(y + z) + x(y - z) &= -2, \\ z(z + x) + y(z - x) &= 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Riešenie. Pokúsime sa vylúčiť z . Pri roznásobení si všimnime, že z sa dá z 1. a 2. rovnice vylúčiť tým, že sa sčítajú.

Sčítaním prvej a druhej rovnice sústavy (1) dostaneme

$$x^2 + xy + xz - yz + y^2 + yz + xy - xz = 4$$

čiže

$$(x + y)^2 = 4. \quad (2)$$

Podobne dostaneme sčítaním druhej a tretej rovnice sústavy (1)

$$(y + z)^2 = 1 \quad (3)$$

a sčítaním tretej a prvej rovnice sústavy (1)

$$(z + x)^2 = 9. \quad (4)$$

Z (2), (3), (4) vyplýva

$$\begin{aligned} x + y &= \pm 2, \\ y + z &= \pm 1, \\ z + x &= \pm 3. \end{aligned} \quad (5)$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (5) od tretej rovnice tejto sústavy dostaneme pre $x - y$ štyri možné hodnoty: 2, -2, 4, -4. Ďalší výpočet prevedieme pomocou tabuľky

$x + y$	2	2	2	2	-2	-2	-2	-2
$x - y$	2	-2	4	-4	2	-2	4	-4
x	2	0	3	-1	0	-2	1	-3
y	0	2	-1	3	-2	0	-3	1
z	1	-3	0	-2	3	-1	2	0

Posledný riadok tabuľky bol určený tak, aby bola splnená druhá a tretia rovnica sústavy (5).

Sústava má teda 8 riešení, ako sa presvedčíme skúškou.

2. Nechť prvočísla p_1, p_2 jsou různá od čísel 3 a 5. Pak číslo $p_1^4 - p_2^4$ je násobkem patnácti. Dokažte.

Řešení. Celé číslo je násobkem patnácti právě tehdy, když je součinem dvou celých čísel, z nichž jedno je násobkem tří, druhé násobkem pěti nebo jedno je násobkem tří i pěti. V našem případě je

$$p_1^4 - p_2^4 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 - p_2^2).$$

Provedeme-li několik numerických výpočtů, zjistíme, že $p_1^2 - p_2^2$ je vždy násobkem tří, a aspoň jedno z čísel $p_1^2 + p_2^2$, $p_1^2 - p_2^2$ je násobek pěti. Pokusíme se zjistit, zda tomu je tak v každém případě. Čísla p_1 , p_2 dávají při dělení třemi zbytky buď 1, nebo 2. Proto každé z čísel p_1^2 , p_2^2 dává při dělení třemi zbytek jediné číslo 1. Proto je $p_1^2 - p_2^2$ vždy dělitelné třemi.

Čísla p_1 , p_2 dávají při dělení pěti zbytky buď 1, nebo 2, nebo 3, nebo 4. Proto každé z čísel p_1^2 , p_2^2 dává při dělení pěti zbytek buď 1, nebo 4. Je-li totiž např. $p_1 = 5\alpha + 2$, je $p_1^2 = 25\alpha^2 + 20\alpha + 4 = 5\beta + 4$. Jsou-li oba zbytky při dělení p_1^2 , p_2^2 pěti sobě rovny, je $p_1^2 - p_2^2$ násobkem pěti, jsou-li tyto zbytky různé (1 a 4), je $p_1^2 + p_2^2$ násobkem pěti.

Dokázali jsme: Číslo $p_1^2 - p_2^2$ je vždy dělitelné třemi; aspoň jedno z čísel $p_1^2 - p_2^2$, $p_1^2 + p_2^2$ je dělitelné pěti.

Protože čísla 3, 5 jsou nesoudělná, je

$$p_1^4 - p_2^4 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 - p_2^2)$$

dělitelné patnácti.

3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB , je-li dán součet s výšek na základnu a na rameno a dutý úhel γ proti základně.

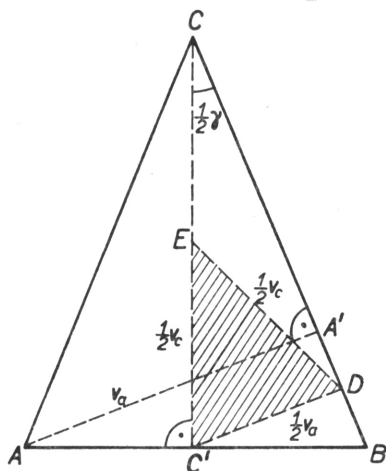
Řešení. Rozbor (obr. 3). Označme A' , C' paty výšek spuštěných z vrcholů A , C . Bod C' je středem základny AB ; patu kolmice spuštěné z bodu C' na přímku BC označme D . Potom úsečka $C'D$ je střední příčkou v trojúhelníku $AA'B$, a tedy platí

$$C'D = \frac{1}{2} AA' = \frac{1}{2} v_a. \quad (1)$$

Označme dále E střed výšky $CC' = v_c$. Bod E je středem

přepony pravoúhlého trojúhelníku $CC'D$, takže je

$$EC' = EC = ED = \frac{1}{2} v_c. \quad (2)$$



Obr. 3.

Spojením (1) a (2) dostaneme

$$ED + C'D = \frac{1}{2} v_c + \frac{1}{2} v_a = \frac{1}{2} s. \quad (3)$$

Protože trojúhelník DCE je rovnoramenný se základnou DC , platí pro jeho vnější úhel

$$\sphericalangle C'ED = \frac{1}{2} \gamma + \frac{1}{2} \gamma = \gamma. \quad (4)$$

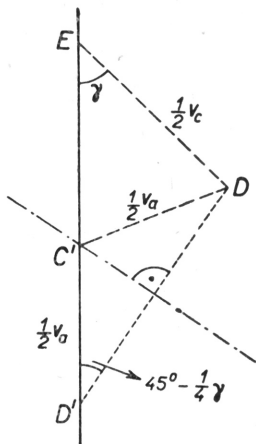
Rovnoramenný trojúhelník $C'DE$ je tedy dán součtem základny a jednoho ramena [viz (3)] a úhlem proti základně [viz (4)]. Konstrukci tohoto pomocného

trojúhelníku ukazuje obr. 4; je totiž

$$\sphericalangle EC'D = \sphericalangle EDC' = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma,$$

takže

$$\sphericalangle ED'D = \frac{1}{4}(180^\circ - \gamma) = 45^\circ - \frac{1}{4}\gamma.$$



Obr. 4.

Konstrukce. Nejprve sestojíme trojúhelník $ED'D$, v němž $\sphericalangle D'ED = \gamma$, $\sphericalangle ED'D = 45^\circ - \frac{1}{4}\gamma$, $ED' = \frac{1}{2}(v_a + v_c) = \frac{1}{2}s$.

Osa o strany DD' protne stranu ED' v bodě C' . Snadno doplníme bod C , přímku CD a body B , A tak, aby trojúhelník ABC byl rovnoramenný se základnou AB .

Zkouška. Sestrojený trojúhelník ABC má $\sphericalangle ACB = \gamma$, neboť podle konstrukce vzhledem ke (4) je $\sphericalangle ECD = \frac{1}{2} \gamma$. Podle konstrukce je též rovnoramenný, platí pro něj (3), a tedy $v_a + v_c = s$.

Diskuse. Trojúhelník $ED'D$ lze sestrojit, neboť $\gamma + 45^\circ - \frac{1}{4} \gamma = 45^\circ + \frac{3}{4} \gamma < 45^\circ + \frac{3}{4} \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

Osa o protne stranu ED' vždy ve vnitřním bodě C' , neboť platí

$$\gamma + 2 \left(45^\circ - \frac{1}{4} \gamma \right) = 90^\circ + \frac{1}{2} \gamma < 180^\circ .*)$$

Sestrojení bodů C, B, A je vždy proveditelné, a proto má úloha vždy řešení.

4. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$, bod A z vnútra kruhu ohraničeného kružnicou k a kladné číslo d . Bodom A je vedená tetiva kružnice tak, že tento bod ju rozdeľuje na dve úsečky, ktorých dĺžky majú rozdiel d .

a) Vyjadrite dĺžku t tejto tetivy a jej vzdialenosť od stredu S pomocou parametrov $r, d, v = SA$.

b) Zostrojte pomocou výsledku z úlohy a) všetky tetivy danej vlastnosti.

Riešenie. a) Označme $AP > AQ$ úsečky vytvorené na tetive podľa textu úlohy. Potom platí (pozri obr. 5)

$$AP + AQ = t,$$

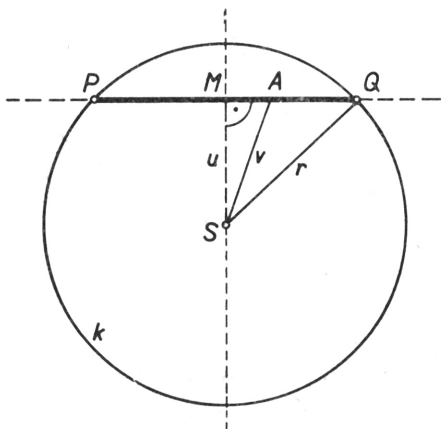
$$AP - AQ = d;$$

*) Používame vety:

Osa strany BC trojúhelníku ABC protne stranu AB ve vnitřním bodě právě tehdy, platí-li pro úhly trojúhelníku ABC

$$\alpha + 2\beta < 180^\circ .$$

z čoho vyplýva $2AP = t + d$ čiže $AP = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}d$.
Úsečka MA má preto veľkosť $\frac{1}{2}d$. Vzdialenosť tetivy



Obr. 5.

PQ od stredu S kružnice označme $u = SM$. Z pravouhlého trojuholníka ASM podľa Pythagorovej vety vyplýva

$$v^2 = u^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2. \quad (1)$$

Z pravouhlého trojuholníka QMS dostaneme

$$r^2 = u^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2. \quad (2)$$

Odčítaním rovnice (1) od rovnice (2) vyjde

$$r^2 - v^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{d^2}{4} \quad (3)$$

a po úprave

$$t = \sqrt{4r^2 + d^2 - 4v^2}. \quad (4)$$

Zo vzťahu (1) vypočítame

$$u = \sqrt{v^2 - \frac{1}{4}d^2}. \quad (5)$$

Vzorce (4) a (5) sú riešením úlohy a).

b) Množina stredov všetkých tetív kružnice k , ktoré majú dĺžku t danú vzorcom (4), je kružnica $\kappa \equiv (S; u)$, pričom u je dané vzorcom (5). Konštruktívne získame polomer u ako odvesnu pravouhlého trojuholníka s preponou v a druhou odvesnou $\frac{d}{2}$ (pozri $\triangle AMS$ na obr. 5).

Hľadané tetivy vytína kružnica k na dotýčniciach vedených z bodu A ku kružnici κ . Bod A leží vždy mimo kružnice κ .

Pretože podľa textu úlohy je $v < r$, je tiež $4r^2 - 4v^2 > 0$ a vzorec (4) dá vždy kladné t . Toto číslo t je menšie, alebo rovná sa $2r$ práve vtedy, ak je vzhľadom na vzorec (4)

$$4r^2 + d^2 - 4v^2 = t^2 \leq (2r)^2$$

čiže $d^2 - 4v^2 \leq 0$, skadiaľ

$$d \leq 2v. \quad (6)$$

Ak je splnená nerovnosť (6), dá vzorec (5) reálne $u < v < r$.

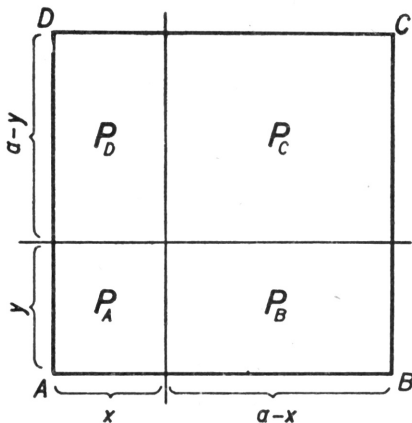
Nerovnosť (6) je teda podmienkou riešiteľnosti.

4. KATEGORIE D

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a . Čtverec $ABCD$ je rozdělen dvěma přímkami, z nichž jedna je

rovnoběžná s AB a druhá s BC , ve čtyři obdélníky P_A, P_B, P_C, P_D ; přitom $P_A(P_B, P_C, P_D)$ je obdélník, který obsahuje bod $A(B, C, D)$. Pro obsahy obdélníků platí $P_A : P_B : P_C = 2 : 3 : 4$.

Vyjádřete jejich rozměry pomocí a a vypočtete $P_D : P_B$.



Obr. 6.

Řešení. a) Označíme-li x, y rozměry obdélníku P_A , pak platí pro obsahy (viz obr. 6)

$$\begin{aligned} P_A &= xy, & P_B &= (a-x)y, & P_C &= (a-x)(a-y), \\ & & P_D &= x(a-y). \end{aligned} \quad (1)$$

Podle (1) a podle podmínky úlohy je

$$xy : (a-x)y = 2 : 3, \quad (a-x)y : (a-x)(a-y) = 3 : 4, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{a-x}{x} = \frac{3}{2}, \quad \frac{a-y}{y} = \frac{4}{3}. \quad (2)$$

Z (2) plyne

$$x = \frac{2}{5}a, y = \frac{3}{7}a, a - x = \frac{3}{5}a, a - y = \frac{4}{7}a. \quad (3)$$

Vzorce (3) jsou hledaná vyjádření rozměrů obdélníků pomocí čísla a .

b) Nyní vypočítáme poměr $P_D : P_B$; podle (1) je

$$P_D : P_B = x(a - y) : (a - x)y.$$

Po dosazení ze (3) dostaneme

$$P_D : P_B = \frac{2}{5}a \cdot \frac{4}{7}a : \frac{3}{5}a \cdot \frac{3}{7}a$$

a po další úpravě hledaný poměr

$$P_D : P_B = 8 : 9.$$

2. Autobus prechádzal trať skladajúcu sa z troch rovnako dlhých úsekov. Prvý úsek prechádzal rýchlosťou v km/h; v druhom úseku šiel rýchlosťou o 10 km/h menšou, v treťom úseku šiel rýchlosťou o 5 km/h menšou než v druhom.

a) Vyjadrite priemernú rýchlosť autobusu na trati pomocou v .

b) Môže byť pre niektoré v priemerná rýchlosť $\frac{v}{2}$?

Riešenie. a) Rýchlosť autobusu vyjadrená v km/h na jednotlivých úsekoch bola: v , $v - 10$, $v - 15$. Označme s dĺžku jedného úseku trate v km a t dobu, ktorú autobus potreboval na prejdenie celej trate, v hodinách. Priemerná rýchlosť x (km/h) je taká rýchlosť, ktorou by musel ísť autobus vo všetkých troch úsekoch, aby prešiel trať $3s$ za čas t . Doby, ktoré autobus potreboval

na prejdienie jednotlivých úsekov, sú po rade $\frac{s}{v}$, $\frac{s}{v-10}$, $\frac{s}{v-15}$. Pre celkovú dobu t platí teda

$$t = \frac{s}{v} + \frac{s}{v-10} + \frac{s}{v-15}. \quad (1)$$

Okrem toho však platí $3s = xt$, čiže

$$t = \frac{3s}{x}. \quad (2)$$

Spojením vzťahov (1) a (2) po úprave dostaneme rovnicu pre x :

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v-10} + \frac{1}{v-15}. \quad (3)$$

Stade

$$\frac{3}{x} = \frac{(v-10)(v-15) + v(v-15) + v(v-10)}{v(v-10)(v-15)}$$

a po úprave

$$x = \frac{3v(v^2 - 25v + 150)}{3v^2 - 50v + 150}. \quad (4)$$

Vzorec (4) dáva riešenie úlohy a).

b) Skúsime, či pre niektoré v môže byť $x = \frac{v}{2}$.

Dosadíme $\frac{v}{2}$ za x vo vzťahu (4). Po odstránení zlomkov dostaneme

$$v(3v^2 - 50v + 150) = 6v(v^2 - 25v + 150). \quad (5)$$

Ak vydelíme obe strany rovnice (5) kladným číslom v , prevedieme všetky členy rovnice na pravú stranu a obe strany rovnice vymeníme, dostaneme

$$3v^2 - 100v + 750 = 0$$

čiže

$$v^2 - \frac{100}{3}v + 250 = 0.$$

Dále platí

$$\left(v - \frac{50}{3}\right)^2 - \frac{2500}{9} + 250 = 0, \text{ čiže } \left(v - \frac{50}{3}\right)^2 = \frac{250}{9}.$$

Stade vyplývá

$$v - \frac{50}{3} = \pm \frac{16}{3},$$

t.j. buď $v = 22$, nebo $v = 11\frac{1}{3}$. Vzhledom na text úlohy vyhovuje len $v = 22$ (km/h).

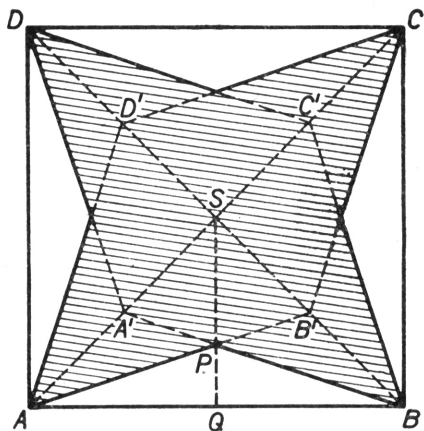
3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a ; S je průsečík jeho úhlopříček, A' , B' , C' , D' jsou po řadě středy úseček AS , BS , CS , DS .

Vypočtete obsah části čtverce $ABCD$, která je pokryta trojúhelníky $A'C'B$, $A'C'D$, $B'D'A$, $B'D'C$, i obsah osmiúhelníku, který je společnou částí čtyřúhelníků $AB'CD'$ a $BC'DA'$.

Řešení. Označíme P průsečík úseček AB' , $A'B$ (viz obr. 7); tyto úsečky jsou těžnicemi trojúhelníku ABS , proto je bod P jeho těžištěm. Označme Q střed úsečky AB . Úsečka SQ je potom třetí těžnice trojúhelníku ABS . Protože trojúhelník ABS je rovnoramenný, je úsečka SQ zároveň výškou trojúhelníku ABS a úsečka $PQ = \frac{1}{3}SQ$ je výškou trojúhelníku ABP . Obsah

trojúhelníku ABP je tedy

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} a \cdot PQ = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{6} a = \frac{1}{12} a^2.$$



Obr. 7.

Obdobně je obsah každého z nevyšrafovaných trojúhelníků roven $\frac{1}{12} a^2$.

Obsah hvězdice je tedy

$$P_1 = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{2}{3} a^2. \quad (1)$$

Označme P_2 obsah každého z trojúhelníků $A'C'B$, $A'C'D$, $B'D'A$, $B'D'C$, P_3 obsah osmiúhelníku. Pak platí

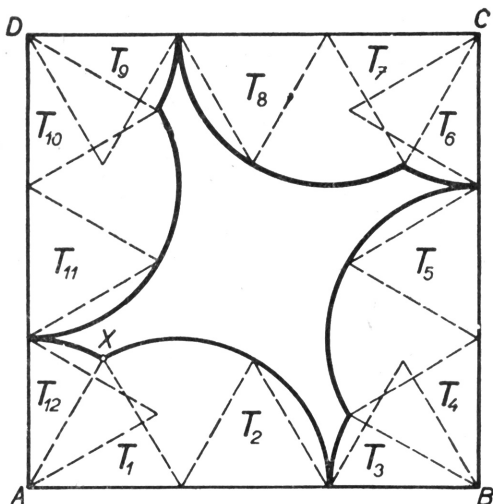
$$4P_2 - P_3 = P_1. \quad (2)$$

Protože je

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}, \quad (3)$$

je podle (2), (3), (1)

$$P_3 = 4P_2 - P_1 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} - \frac{2}{3}a^2 = \frac{1}{3}a^2.$$



Obr. 8.

4. Na obr. 8 je čtverec $ABCD$ o straně délky 9 cm a dále 12 shodných rovnostranných trojúhelníků $T_1, T_2, \dots, T_{12}$. Převedeme trojúhelník T_1 v T_2 , T_2 v T_3 , $\dots$, T_{12} v T_1 vždy otočením kolem společného vrcholu obou trojúhelníků, provedeným ve čtverci $ABCD$.

a) Sestrojte čáru, která je dráhou vrcholu X ve všech těchto otočeních.

b) Vypočtete její délku a porovnejte ji s délkou kružnice opsané i kružnice vepsané čtverci $ABCD$.

Řešení. a) Čára je vyznačena v obrázku tlustě. Skládá se ze čtyř oblouků kružnice o poloměru $AX = 3$ cm příslušných k středovému úhlu 120° a ze čtyř oblouků kružnice téhož poloměru příslušných k středovému úhlu 30° .

b) Délka čáry je (v cm)

$$d = 4 \cdot \frac{6\pi}{3} + 4 \cdot \frac{6\pi}{12} = 10\pi. \quad (1)$$

Délka kružnice opsané čtverci $ABCD$ je

$$d_1 = \pi \cdot 9 \cdot \sqrt{2} \doteq 12,7\pi, \quad (2)$$

délka kružnice vepsané čtverci $ABCD$ je

$$d_2 = 9\pi. \quad (3)$$

Je tedy podle (1), (2), (3)

$$d_2 < d < d_1.$$

III. Súťažné úlohy I. kola

1. KATEGÓRIA A

1. Čísla a , b sú prirodzené nepárne čísla, $a < b$. Súčet všetkých prirodzených čísel väčších než a a menších než b sa rovná 1000. Určite čísla a , b .

Riešenie. Prirodzené čísla väčšie než a a menšie než b tvoria aritmetickú postupnosť

$$a + 1, a + 2, \dots, b - 1, \quad (1)$$

ktorá obsahuje $b - 1 - a$ členov. Súčet členov postupnosti (1) je $\frac{1}{2}(b - a - 1)(a + b)$; je teda

$$(b - a - 1)(a + b) = 2\,000 = 2^4 \cdot 5^3. \quad (2)$$

Zrejme je $b - a - 1 < a + b$, tj.

$$(b - a - 1)^2 < (b - a - 1)(a + b) = 2^4 \cdot 5^3,$$

čiže

$$b - a - 1 < 20\sqrt{5} \doteq 44,7. \quad (3)$$

Pretože a , b sú nepárne čísla, je $b - a - 1$ tiež nepárne a podľa (2) je deliteľom čísla $2^4 \cdot 5^3$. Nepárnymi deliteľmi čísla $2^4 \cdot 5^3$ spĺňujúcimi podmienku (3) sú len čísla 5, 25, 1.

Je teda buď

$$b - a - 1 = 5, \quad a + b = 400 \quad (4)$$

alebo

$$b - a - 1 = 25, \quad a + b = 80 \quad (5)$$

alebo

$$b - a - 1 = 1, \quad a + b = 2\,000. \quad (6)$$

Z rovnic (4) vyplývá $b = 203$, $a = 197$. Z rovnic (5) dostáváme $a = 27$, $b = 53$ a z rovnic (6) $a = 999$, $b = 1\,001$. Hledané postupnosti sú potom

$$198, 199, 200, 201, 202, \quad (7)$$

$$28, 29, 30, \dots, 50, 51, 52, \quad (8)$$

$$1\,000. \quad (9)$$

Skúška. Z rovnic (4), (5), (6) dostáváme nepárne čísla $a < b$. Ak vypočítame súčet členov postupnosti (7) i (8), presvedčíme sa o splnení druhej podmienky úlohy. Každý zo súčtov sa totiž rovná číslu 1 000, ktorému je rovný tiež jediný člen postupnosti (9).

Záver. Daná úloha má tri riešenia: $a = 197$, $b = 203$; $a = 27$, $b = 53$; $a = 999$, $b = 1\,001$.

2. V priestore je dáno n rovin, z nichž žiadne dve nejsou rovnoběžné, žiadne tri nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou a žiadne čtyři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik oblastí dělí tyto roviny prostor.

(Návod. Předpokládejme znalost této věty: n přímek roviny, z nichž každé dvě jsou různoběžné a žiadne tři neprocházejí týmž bodem, dělí rovinu na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ oblastí.)

Rěšení. Označme c_n počet oblastí, na něž rozdělí prostor n rovin vyslovených vlastností. Další rovina ϱ protne původní roviny v n přímkách, které splňují předpoklady pomocné věty. Rovina ϱ je jimi rozdělena tedy v $b_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ oblastí. Tolik také z c_n oblastí bylo rozděleno rovinou ϱ ve dvě, tj. rovina ϱ dala vznik b_n novým oblastem. Platí tedy

$$c_{n+1} = c_n + b_n. \quad (1)$$

Z (1) odvodíme

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + b_{n-1}, \\ c_{n-1} &= c_{n-2} + b_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ c_2 &= c_1 + b_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Sečtením rovností (2) dostaneme

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k. \tag{3}$$

Je třeba vypočítat $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$. Platí

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + 2(n-1). \tag{4}$$

Podle známého vzorce je

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} n(n-1). \tag{5}$$

Dále vypočteme $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$. Indukcí se snadno dokáže vzorec

$$\sum_{k=1}^v k^2 = \frac{1}{6} v(v+1)(2v+1); \text{ je tedy}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1). \tag{6}$$

Dosadíme-li z (5) a (6) do (4), dostaneme

$$2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2} n(n-1) + 2(n-1),$$

po úpravě

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{6} (n-1)(n^2 + n + 6). \quad (7)$$

Dosadíme-li ze (7) do (3) — víme, že je $c_1 = 2$ — vyjde

$$c_n = \frac{1}{6} (n^3 + 5n + 6), \quad (8)$$

což je výsledný vzorec. Přesvědčme se o tom znovu indukci. Pro $n = 1$ dává (8) výsledek $c_1 = 2$; dále je podle (1)

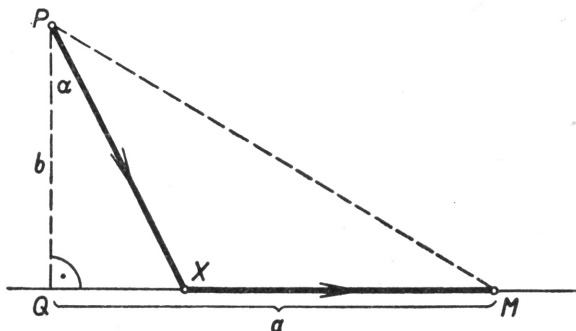
$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{6} (n^3 + 5n + 6) + \frac{1}{2} (n^2 + n + 2) = \\ &= \frac{1}{6} (n^3 + 3n^2 + 8n + 12) = \frac{1}{6} [(n+1)^3 + 5(n+1) + 6]. \end{aligned}$$

3. Časť priamej hrádze rybníka možno považovať za odvesnu QM pravouhlého trojuholníka PQM s preponou PM . Plavec sa má dostať z miesta P v rybníku čo najskôr do miesta M na hrádzi. Znáμου rýchlosťou v_1 bude plávať priamo do určitého miesta X ležiaceho na hrádzi medzi Q a M a potom taktiež známou rýchlosťou v_2 pobeží z miesta X do miesta M . Vypočítajte veľkosť uhla $\sphericalangle QPX$.

Riešenie (obr. 9). Označme $PQ = b$, $QM = a$, $\sphericalangle QPX = \alpha$. Doba t_1 potrebná na preplávanie dráhy

PX je $\frac{1}{v_1} PX$, čiže

$$t_1 = \frac{b}{v_1 \cos \alpha}. \quad (1)$$



Obr. 9.

Doba t_2 potrebná na prebehnutie dráhy XM je $\frac{1}{v_2} XM$, čiže

$$t_2 = \frac{a - b \operatorname{tg} \alpha}{v_2}. \quad (2)$$

Je teda celková doba

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{1}{v_1 \cos \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v_2} \right) b + \frac{a}{v_2}. \quad (3)$$

Pretože $\frac{a}{v_2}$ je konštanta, je ľavá strana vzťahu (3) minimálna práve vtedy, keď je minimálny prvý člen pravej strany, tj. keď je minimálny výraz $\left(\frac{1}{v_1 \cos \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v_2} \right)$.

Po vytknutí kladného čísla $\frac{1}{v_1}$ stačí vyšetrovať funkciu

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{v_1}{v_2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

Je zrejmé $v_1 < v_2$, tj. $\frac{v_1}{v_2} < 1$; a teda $1 - \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha > 0$.

Preto je pravá strana vzťahu (4) minimálna práve vtedy, ak je minimálna jej druhá mocnina, t. j. funkcia

$$z = \frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2} \sin \alpha\right)^2}{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (5)$$

Vieme totiž, že pre nezáporné čísla p, q platí: $p \leq q$ práve vtedy, keď je $p^2 \leq q^2$.

Ak položíme vo vzťahu (5) $\sin \alpha = x$, hľadáme minimum funkcie

$$z = \frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2} x\right)^2}{1 - x^2}$$

v intervale $0 < x < 1$. Toto minimum je $1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}$ a nastane pre $x = \sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}$. Ľahko totiž dokážeme, že pre všetky x z intervalu $-1 < x < 1$ platí nerovnosť

$$\frac{\left(1 - \frac{v_1}{v_2} x\right)^2}{1 - x^2} \leq 1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}. \quad (6)$$

Keďže $1 - x^2 > 0$, vyplýva z nerovnosti (6): $\left(1 - \frac{v_1}{v_2} x\right)^2 \geq \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) (1 - x^2)$ čiže $\left(\frac{v_1}{v_2} - x\right)^2 \geq 0$. Postup mož-

no obrátit. Rovnost vo vztahu (6) nastane práve vtedy, keď je $x = \frac{v_1}{v_2}$.

Veľkosť ostrého uhla $\sphericalangle QPX = \alpha$ určíme z rovnice $\sin \alpha = \frac{v_1}{v_2}$. Dobu $t = t_1 + t_2$ vypočítame potom zo vztahu (3).

4. Čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost, že

$$AB = BC = CD = DA = 1.$$

Dokažte, že jeho objem je najvýš $\frac{2}{27}\sqrt{3}$. Môže nastat rovnosť?

Řešení. Abychom se mohli stručněji vyjadřovat, budeme každý čtyřstěn, jehož čtyři hrany, z nichž žádné tři neleží v rovině, mají délku 1, nazývat jednotkový.

Ukažme nejprve, že má-li jednotkový čtyřstěn Z tu vlastnost, že odchylka stěn proti některé z obou zbývajících hran není rovna 90° , pak existuje jednotkový čtyřstěn Z_1 o větším objemu, než má čtyřstěn Z .

Nechť tedy ve čtyřstěnu $ABCD$ je $AB = BC = CD = DA = 1$ a nechť např. úhel proti hraně AC (tj. úhel rovin ABD , CBD) není pravý. Objem tohoto čtyřstěnu je roven $\frac{1}{3} Pv$, kde P je obsah trojúhelníku ABD a v

výška spuštěná z vrcholu C na stěnu ABD . Otočme rovinu CBD okolo přímky BD do polohy kolmé k ABD . Při tomto otočení přejde bod C v bod C' , jehož vzdálenost v' od roviny ABD je větší než v . Čtyřstěn $ABC'D$ je opět jednotkový a jeho objem je $\frac{1}{3} Pv' > \frac{1}{3} Pv$, jak jsme chtěli ukázat.

Nechť nyní má jednotkový čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ vlastnost, že proti oběma zbylým hranám A_1C_1 a B_1D_1 leží pravé úhly. Potom, označíme-li S_1 střed hrany A_1C_1 a T_1 střed hrany B_1D_1 , platí $A_1S_1 = S_1T_1 = T_1B_1$, a přitom úsečky A_1C_1 , B_1D_1 a S_1T_1 jsou po dvou navzájem kolmé. Abychom to ukázali, všimněme si předně, že $A_1C_1T_1$ kolmo pólí úsečku B_1D_1 ; je totiž $A_1B_1 = A_1D_1$, takže $D_1B_1 \perp A_1T_1$; obdobně $C_1B_1 = C_1D_1$, takže $D_1B_1 \perp C_1T_1$. Proto je D_1B_1 kolmá k rovině $A_1C_1T_1$, která ji pólí. Je tedy $A_1C_1T_1$ kolmá k $A_1B_1D_1$ i $C_1B_1D_1$, takže trojúhelník $A_1T_1C_1$ je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu T_1 . Odtud je $A_1S_1 = S_1T_1$. Obdobně $B_1D_1S_1$ pólí kolmo úsečku A_1C_1 , odkud vyplývá $S_1T_1 = T_1B_1$. Protože podle Pythagorovy věty

$$1 = A_1B_1 = \sqrt{A_1S_1^2 + S_1T_1^2 + T_1B_1^2} = A_1S_1 \sqrt{3}, \text{ je } A_1S_1 = S_1T_1 = T_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ a rovněž } C_1S_1 = D_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Je ihned zřejmé, že jsou-li obráceně p, q kolmé mimoběžky, jejichž nejkratší (ke každé z nich kolmá)

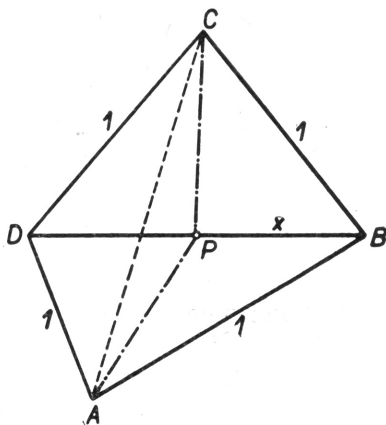
příčka S_2T_2 (kde S_2 je na p , T_2 na q) má délku $\frac{\sqrt{3}}{3}$, pak body A_2 a C_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu S_2 na p

a body B_2 a D_2 ležící ve vzdálenosti $\frac{\sqrt{3}}{3}$ od bodu T_2 na q

tvorí vrcholy jednotkového čtyřstěnu, proti jehož zbylým hranám jsou pravé úhly. Z uvedené analýzy vyplývá, že takový čtyřstěn existuje a je až na polohu v prostoru určen jednoznačně. Vypočteme jeho objem. Ve stejném označení jako nahoře je obsah stěny $A_1B_1D_1$ roven

$$B_1T_1 \cdot T_1A_1 = B_1T_1 \sqrt{T_1S_1^2 + S_1A_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

výška spuštěná z C_1 na $A_1B_1D_1$ má délku $C_1T_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2}$, takže objem je $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{2} = \frac{2}{27} \cdot \sqrt{3}$. Tím jsme podle první části dokázali, že každý jednotkový čtyřstěn má objem nejvýše $\frac{2}{27}\sqrt{3}$, a právě u jednotkového čtyřstěnu, jehož oba úhly proti zbylým hranám jsou pravé, nastane rovnost.



Obr. 10.

Jiné řešení (obr. 10). Označme P střed hrany BD ; pak je $AP \perp BD$, $CP \perp BD$. Označíme-li ještě $BP = DP = x$, je

$$AP = CP = \sqrt{1 - x^2}. \quad (1)$$

Pokládáme-li nejprve stěnu ABD za konstantní podstavu čtyřstěnu $ABCD$ (tj. x je konstantní), pak tento

čtyřstěn má maximální objem y právě tehdy, je-li rovina BCD kolmá k rovině ABD , neboť pak je výška čtyřstěnu příslušná ke stěně ABD maximální. Tato maximální výška má podle (1) velikost $\sqrt{1-x^2}$. Maximální objem y každého z uvažovaných čtyřstěnů (při konstantním x) vypočteme vzhledem k (1) podle vzorce

$$y = \frac{1}{3}x\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{3}(x - x^3). \quad (2)$$

Trojúhelníky ABD , BCD vzniknou právě tehdy, je-li $x < 1$. Máme tedy vlastně vyšetřit maximum funkce (2) v intervalu $0 < x < 1$.

K vyšetření tohoto maxima použijeme obratu, který se opírá o goniometrický vzorec

$$\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin \alpha - 4 \cdot \sin^3 \alpha. \quad (3)$$

Do (2) dosadíme $x = k \cdot \sin \varphi$ a kladnou konstantu k určíme tak, aby poměr koeficientů při $\sin \varphi$ a při $\sin^3 \varphi$ byl $-\frac{3}{4}$. Dostaneme $y = k \cdot \sin \varphi - k^3 \sin^3 \varphi$, takže

$$\begin{aligned} \frac{k}{-k^3} &= -\frac{1}{k^2} = -\frac{3}{4}, \text{ odkud } k = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \text{ je tedy} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Po dosazení do (2) vyjde

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sin \varphi - \frac{8}{3\sqrt[3]{3}} \sin^3 \varphi \right) = \\ &= \frac{2}{9\sqrt[3]{3}} (3 \cdot \sin \varphi - 4 \cdot \sin^3 \varphi) \end{aligned}$$

a podle (3)

$$y = \frac{2}{9\sqrt[3]{3}} \cdot \sin 3\varphi. \quad (5)$$

Probíhá-li x interval $0 < x < 1$, probíhá φ podle (4) interval $0^\circ < \varphi < 60^\circ$. Máme tedy určit maximum funkce (5) v intervalu $0^\circ < 3\varphi < 180^\circ$. Je patrné, že toto maximum nastane pro $3\varphi_m = 90^\circ$, kdy je $\sin 3\varphi_m = 1$. Odtud vypočteme $\varphi_m = 30^\circ$ a podle (4) $x_m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pro toto x_m nabývá objem y podle (5) maximální hodnoty

$$y_m = \frac{2}{9\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Existenci čtyřstěnu s uvedeným objemem zjistíme obdobně jako v prvním řešení.

2. KATEGORIE B

1. Vyšetřete průběh funkce

$$y = \sqrt{|1-x|+1} - 1 \quad (1)$$

a načrtněte její graf. Výpočtem rozhodněte, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a ve kterých klesající. Dále rozhodněte, pro která x nepřekračují funkční hodnoty číslo 2.

(Poznámka. Bližší vysvětlení týkající se vyšetřování průběhu funkcí najdete ve svazečku č. 4 z edice *Škola mladých matematiků* od Šislera a Jarníka: *O funkcích*.)

Řešení. Z rovnice (1) dostaneme

$$(y+1)^2 = |1-x|+1, \quad (2)$$

tj. pro $x \leq 1$ dostaneme z (2)

$$(y+1)^2 = 2-x,$$

neboli

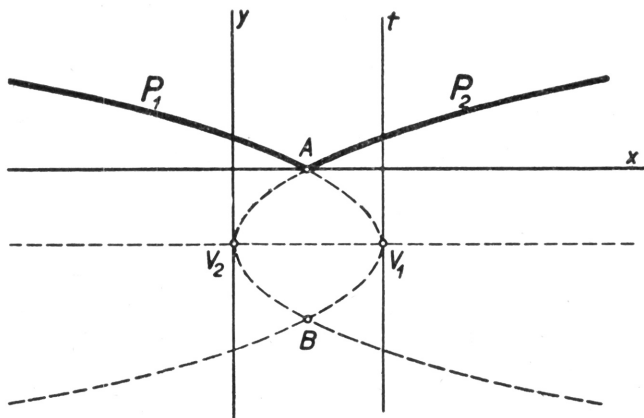
$$x-2 = -(y+1)^2. \quad (3)$$

Pro $x \geq 1$ dostaneme z (2)

$$(y + 1)^2 = x. \quad (4)$$

Z rovnice (1) je patrné, že pro všechna x je $y \geq 0$. Graf funkce (1) se tedy bude skládat z částí (oblouků) parabol o rovnicích (3) a (4), které leží nad osou x .

Parabola P_1 daná rovnicí (3) má vrchol $V_1 \equiv [2, -1]$ a prochází body $A \equiv [1, 0]$, $B \equiv [1, -2]$. Její vrcholová tečna t je přímka $x = 2$ a parabola P_1 leží v polorovině tA . Parabola P_2 daná rovnicí (4) má vrchol $V_2 \equiv [0, -1]$ a prochází také body A , B . Její vrcholová tečna je osa y a parabola P_2 leží v polorovině yA .



Obr. 11.

Graf dané funkce (1) tvoří ty oblouky obou parabol, které se stýkají v bodě A (obr. 11).

Funkce (1) je shora neomezená, je definovaná pro všechna x .

Z grafu na obr. 11 je vidět, že funkce (1) je pro $x \leq 1$ klesající a pro $x \geq 1$ rostoucí. To snadno dokážeme:

a) Pro libovolná čísla $x_1 < x_2 \leq 1$ vypočítáme rozdíl funkčních hodnot $y_2 - y_1$. Z rovnice (3) dostaneme

$$(y_2 + 1)^2 = 2 - x_2, \quad (5)$$

$$(y_1 + 1)^2 = 2 - x_1. \quad (6)$$

Od rovnice (5) odečteme rovnici (6); dostaneme

$$y_2^2 + 2y_2 + 1 - (y_1^2 + 2y_1 + 1) = x_1 - x_2 < 0$$

čili

$$(y_2^2 - y_1^2) + 2(y_2 - y_1) < 0.$$

Po úpravě je

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2) < 0. \quad (7)$$

Vzhledem k (1) je $y_2 > 0$, $y_1 > 0$, a tedy i činitel $y_2 + y_1 + 2$ je kladný; aby byla splněna nerovnost (7), musí být $y_2 - y_1 < 0$, což znamená, že funkce (1) je pro $x \leq 1$ klesající.

b) Obdobným postupem pro $1 \leq x_1 < x_2$ zjistíme, že pro rozdíl funkčních hodnot y_2 a y_1 platí

$$y_2 - y_1 > 0,$$

což znamená, že funkce (1) je pro $x \geq 1$ rostoucí.

c) Dodatková otázka vyžaduje řešení nerovnosti

$$\sqrt{|1 - x| + 1} - 1 \leq 2.$$

Odtud dostaneme

$$|1 - x| \leq 8$$

a po výpočtu jednak pro $x \leq 1$, jednak pro $x \geq 1$ zjistíme, že je $y \leq 2$ pro $-7 \leq x \leq 9$.

2. Určete nejmenší přirozené číslo N , které má právě 15 dělitelů. Určete všechna přirozená čísla menší než N , která mají více než 15 dělitelů.

Řešení. a) Je-li přirozené číslo x rozloženo v součin prvočinitelů

$$x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n} \quad (1)$$

($p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla), pak počet jeho dělitelů je

$$\nu = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1),$$

neboť při tvoření dělitelů volíme za exponenty u prvočinitele p_k postupně všechna čísla $0, 1, \dots, a_k$. Je-li $\nu = 15 = 5 \cdot 3$, je $n = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$. Má-li být číslo N co nejmenší, musí být prvočísla p_1, p_2 co nejmenší, tj. buď $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, nebo $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Protože $2^4 \cdot 3^2 < 3^4 \cdot 2^2$, je hledané číslo

$$N = 2^4 \cdot 3^2 = 144.$$

b) Budiž $x < N$ přirozené číslo, jehož počet dělitelů je $\nu > 15$; budiž (1) jeho rozklad v prvočinitele. Protože $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 144$, je $n < 4$; je totiž při vzestupném uspořádání prvočinitelů $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 3$, $p_3 \geq 5, \dots$

Je-li $n = 3$, je buď $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 8$, nebo $a_1 = 2, a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 12$, nebo $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$, $\nu = 16$, nebo $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $\nu = 18$. Další případy není třeba zkoumat, neboť např. pro $a_1 = 4$ je $x > 144$; je totiž $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 240 > 144$. Z téhož důvodu nevyhovuje případ $a_1 = a_2 = 2, a_3 = 1$, neboť je $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180 > 144$. Vyhovuje $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$, $x = 120$.

Je-li $n = 2$, je buď $a_1 = a_2 = 1$, $\nu = 4$, nebo $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\nu = 6$, atd. až $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $\nu = 12$; případy $a_1 \geq 6$, $a_2 = 1$ opět není třeba zkoumat, neboť $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \geq 2^6 \cdot 3 = 192 > 144$. Obdobně probíráme případy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $\dots$, $a_1 = 4$, $a_2 = 2$ (zde je $\nu = 5 \cdot 3 = 15$). Případy $a_1 \geq 5$, $a_2 = 2$ opět nepřicházejí v úvahu, neboť $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \geq 2^5 \cdot 3^2 = 288 > 144$.

Obdobne se zkoumají případy $a_1 = 1, a_2 = 3, a_1 = 2, a_2 = 3$. Tím je případ $n = 2$ vyčerpán. Také $n = 1$ nedává řešení, neboť počet dělitelů je $a_1 + 1$ a přitom $a_1 \leq 7$, neboť $p_1^8 \geq 2^8 = 256$. Hledané x je tedy jediné číslo $x = 120$ s 16 děliteli.

3. Je daná soustava rovnic s třemi neznámými x, y, z a s parametry a, b :

$$\begin{aligned} x + ay &= b, \\ y - a^2z &= 1, \\ az + x &= b + 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Určíte všechny také hodnoty parametrů a, b , pro které má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

Riešenie. Odčítaním tretej rovnice sústavy (1) od prvej rovnice dostaneme

$$ay - az = -1. \quad (2)$$

Rovnicu (2) združíme s druhou rovnicou sústavy (1). Po vylúčení neznámej y a po úprave dostaneme

$$a(1 - a^2)z = 1 + a. \quad (3)$$

Koeficient $a(1 - a^2) = a(1 - a)(1 + a)$ je rovný nule práve vtedy, keď je buď $a = 0$ alebo $a = 1$ alebo $a = -1$.

Ak je $a \neq 0, 1, -1$, dostaneme z rovnice (3)

$$z = \frac{1}{a(1 - a)}.$$

Po dosadení za z do druhej a tretej rovnice sústavy (1) dostaneme x a y , tj. sústava (1) má v tomto prípade najviac jedno riešenie.

Pre $a = 0$ má sústava (1) tvar

$$x = b, y = 1, x = b + 1, \quad (1')$$

čo však je sústava neriešiteľná, pretože $b \neq b + 1$.

Pre $a = 1$ má sústava (1) tvar

$$x + y = b, y - z = 1, z + x = b + 1. \quad (1'')$$

Sčítaním druhej a tretej rovnice sústavy (1'') dostaneme $x + y = b + 2$. Pretože $b \neq b + 2$, je tiež v tomto prípade sústava (1) neriešiteľná.

Pre $a = -1$ má sústava (1) tvar

$$x - y = b, y - z = 1, -z + x = b + 1. \quad (1''')$$

Odčítaním druhej rovnice sústavy (1''') od tretej dostaneme $x - y = b$, čo je prvá rovnica sústavy (1'''). Sústava (1''') má nekonečne mnoho riešení $x = b + y$, $y, z = y - 1$, kde y je ľubovoľné reálne číslo. Parameter b môže byť pritom volený ľubovoľne.

Záver. Sústava (1) má nekonečne mnoho riešení len v prípade, keď $a = -1$; b môže byť volené ľubovoľne.

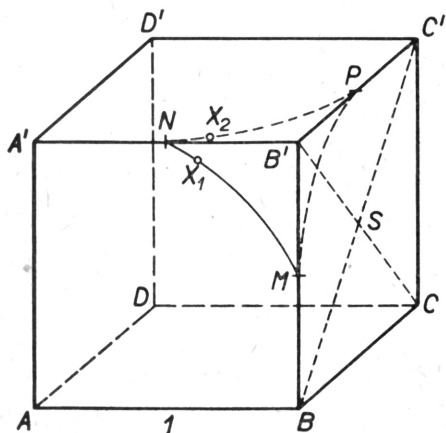
4. Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky 1. Sestrojte ve volném rovnoběžném promítání na jejím povrchu všechny body X , pro něž platí $DX = \frac{3}{2}$ a jejichž nejkratší vzdálenost od středu S stěny $BCC' B'$ měřená po povrchu krychle je rovna jedné.

Řešení. Hledané body X náležejí předně kulové ploše Γ , která má střed D a poloměr $\frac{3}{2}$. Plocha Γ nemá žádný společný bod se stěnou $ABCD$, neboť nejvzdálenější bod této stěny od bodu D je vrchol B a platí $DB = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Obdobná tvrzení platí o stěnách $ADD' A'$ a $DCC' D'$. Plocha Γ protne stěnu $ABB' A'$ v části kružnice, která má střed A a poloměr

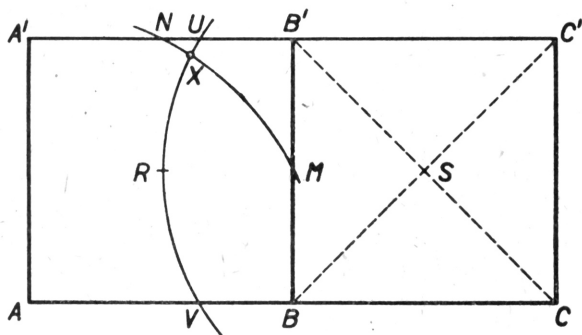
$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Tato kružnice protne hranu BB' v bodě M , pro který platí $AM = r$, tj.

$$BM = \sqrt{r^2 - 1} = \sqrt{\frac{5}{4} - 1} = \frac{1}{2}.$$



Obr. 12a.



Obr. 12b.

Bod M je tedy středem hrany BB' . Obdobně protne kulová plocha Γ hrany $A'B'$ a $B'C'$ po řadě v jejich stře-
dech N , P . Stěny, které neobsahují vrchol D , protne Γ
ve třech obloucích kružnic (viz obr. 12a).

Žádný z hledaných bodů X neleží ve stěně $BCC'B'$,
neboť každý bod stěny má od bodu S vzdálenost nejvýše
 $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$.

Body stěny $ABB'A'$, které mají od bodu S nejkratší
vzdálenost 1 měřenou po povrchu krychle, dostaneme
z části sítě tělesa (viz obr. 12b). Bod náleží jednak oblouku
 MN , jednak oblouku URV kružnice $(S; 1)$; přitom R
značí střed stěny $ABCD$.

Úloha má dvě řešení X_1 , X_2 naznačená na obr. 12a.

3. KATEGÓRIA C

1. Osobný vlak idúci rýchlosťou v_1 (m/s) predchádzal
po vedľajšej koľaji rýchlik idúci rýchlosťou v_2 (m/s).
Cestujúci osobného vlaku nameral dobu t_1 sekúnd,
ktorú trvalo predchádzanie rýchlika. Pozorovateľ na trati
nameral t_2 sekúnd, než ho minul osobný vlak a t_3 sekúnd
od okamžiku, keď dostihla lokomotíva rýchlika posledný
vozeň osobného vlaku až do okamžiku, keď minul posled-
ný vozeň rýchlika lokomotívu osobného vlaku.

Vyjadrite pomer rýchlostí $v_1 : v_2$ pomocou t_1 , t_2 , t_3 .

Riešenie. Označme d_1 (v metroch) dĺžku osobného
vlaku, d_2 (v metroch) dĺžku rýchlika. Rýchlik ide vzhľa-
dom na osobný vlak (ktorý ako by stál) rýchlosťou $v_2 - v_1$.
Z prvej podmienky úlohy vyplýva

$$\frac{d_2}{v_2 - v_1} = t_1. \quad (1)$$

Osobný vlak minie pozorovateľa za $t_2 = \frac{d_1}{v_1}$ sekúnd.

Z tretej podmienky dostaneme: K tomu, aby úplne predošiel osobný vlak, musí rýchlik uraziť $d_1 + d_2$ metrov, a to rýchlosťou $v_2 - v_1$. Je teda

$$t_3 = \frac{d_1 + d_2}{v_2 - v_1}. \quad (2)$$

Dosadíme $t_2 = \frac{d_1}{v_1}$ a vzťahy (1), (2), upravíme:

$$d_1 = v_1 t_2, \quad d_2 = (v_2 - v_1) t_1, \quad d_1 + d_2 = (v_2 - v_1) t_3.$$

Ak sčítame prvé dve rovnice (3) a spojíme s tretou rovnicou, dostaneme

$$v_1 t_2 + (v_2 - v_1) t_1 = (v_2 - v_1) t_3$$

čiže

$$v_1(t_2 - t_1 + t_3) = v_2(t_3 - t_1).$$

Stadiaľ vyplýva

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1 + t_3},$$

čo je výsledná formula.

2. Zvolte si libovolné trojciferné číslo (napr. 638). V zápise tohoto čísla obráťte poradí číslic a z týchto čísel vypočítajte nezáporný rozdiel (napr. $836 - 638 = 198$). V zápise rozdielu opäť obráťte poradí číslic a tieto dve čísla sečtete (napr. $198 + 891 = 1089$). Vyšetrite, aká čísla vychádzajú. Svou domnienku presne vyslovte a dokažte.

Řešení. Zvolené číslo napíšeme ve tvaru

$$a = 100x + 10y + z;$$

číslo, které vznikne obrácením poradí číslic, má v desítkové soustavě tvar

$$b = 100z + 10y + x.$$

Můžeme předpokládat, že $x \geq z$. (Jinak změníme označení.) Potom

$$a - b = 100(x - z) + (z - x). \quad (1)$$

1. Je-li $x = z$, je $a - b = 0$.

2. Je-li $x > z$, pak $z - x < 0$. Abychom zjistili zápis čísla (1) v desítkové soustavě, uijeme úpravy

$$\begin{aligned} a - b &= 100(x - z - 1) + 100 + z - x = \\ &= 100(x - z - 1) + 9 \cdot 10 + u, \end{aligned} \quad (2)$$

kde $100 + z - x = 90 + u$, neboli

$$u + x - z = 10. \quad (3)$$

Protože je $z - x < 0$, je $x - z - 1 \geq 0$. Musíme tedy rozlišit dva případy: a) $x - z - 1 > 0$, b) $x - z - 1 = 0$.

a) V tomto případě je $a - b$ trojčíferné číslo. Jestliže pak v zápise čísla (2) obrátíme pořadí číslic, dostaneme

$$c = 100u + 9 \cdot 10 + (x - z - 1).$$

Proto platí vzhledem k (3)

$$\begin{aligned} (a - b) + c &= 100(x - z - 1 + u) + 180 + \\ &+ (u + x - z - 1) = 900 + 180 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

b) Je-li $x - z - 1 = 0$, je $a - b$ dvojčíferné číslo. Podle (3) je $u = 9$ a dále

$$c = 10u + 9 = 99.$$

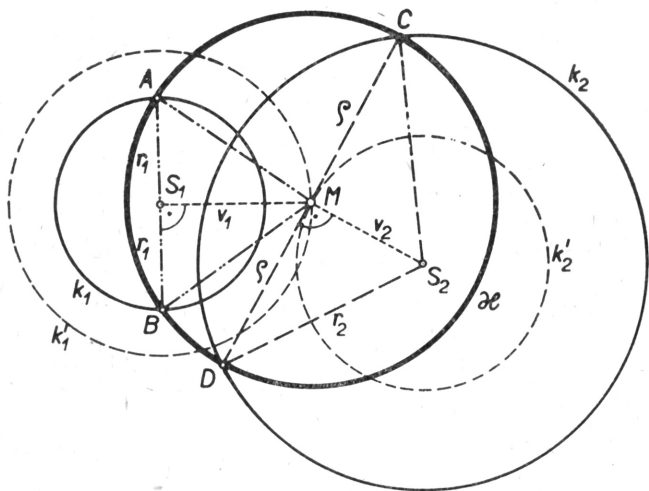
Proto platí

$$(a - b) + c = 99 + 99 = 198.$$

Výsledek. Má-li dekadický zápis zvoleného čísla na prvním a třetím místě tutéž číslici, vyjde nula. Jsou-li tyto číslice různé, vyjde buď 1089, nebo 198.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S_1; r_1)$, $k_2 \equiv (S_2; r_2)$ a kladné číslo ϱ . Sestrojte kružnici κ

o poloměru ϱ , která dělí kružnici k_1 ve dvě polokružnice a je dělena kružnicí k_2 ve dvě polokružnice.



Obr. 13.

Řešení. Nechť kružnice κ má střed M (obr. 13). Označme A, B společné body kružnic k_1 a κ ; pak je $AB = 2r_1$. Je $AM = BM$; tj. ABM je rovnoramenný trojúhelník*) se základnou AB a rameny délky ϱ . Je proto nutně

$$r_1 < \varrho. \quad (1)$$

Výška MS_1 trojúhelníku ABM má tedy délku

$$v_1 = \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}, \quad (2)$$

*) Bod M nemůže náležet přímce AB , neboť v tomto případě by kružnice k_1, κ splynuly a κ by nedělila k_1 ve dvě polokružnice.

kteľou mŕžeme zjistiť konštrukciľ. Proto bod M leŕí na kruŕnici $k'_1 \equiv (S_1; v_1)$.

Označme ďale C, D spoločné body kruŕnic k_2 a κ , takže $CD = 2\varrho$. Platí $CS_2 = DS_2$; trojŕhelník CDS_2 je tedy rovnoramenný se základnou $CD = 2\varrho$ a ramený dľlky r_2 . Proto je nutne

$$\varrho < r_2. \quad (3)$$

Pro výšku $MS_2 = v_2$ trojŕhelníku CDS_2 platí

$$v_2 = \sqrt{r_2^2 - \varrho^2}; \quad (4)$$

bod M pak leŕí na kruŕnici $k'_2 \equiv (S_2; v_2)$.

Je bezprostředne patrno, ŕe kruŕnice $\kappa \equiv (M; \varrho)$ splŕuje poŕadavky ŕlohy (M je společný bod kruŕnic k'_1 a k'_2).

Existence řešení a jejich počet závisí na společných bodech kruŕnic k'_1, k'_2 . Tyto kruŕnice mají aspoŕ společný bod, tj. ŕloha má aspoŕ jedno řešení právě tehdy, platí-li pro vzdálenost $d = S_1S_2$ nerovnosti

$$|v_2 - v_1| \leq d \leq v_2 + v_1$$

neboli vzhledem k (2) a (4)

$$|\sqrt{r_2^2 - \varrho^2} - \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}| \leq d \leq \sqrt{r_2^2 - \varrho^2} + \sqrt{\varrho^2 - r_1^2}. \quad (5)$$

Kruŕnice k'_1, k'_2 existují právě tehdy, platí-li (1) a (3), čili je-li

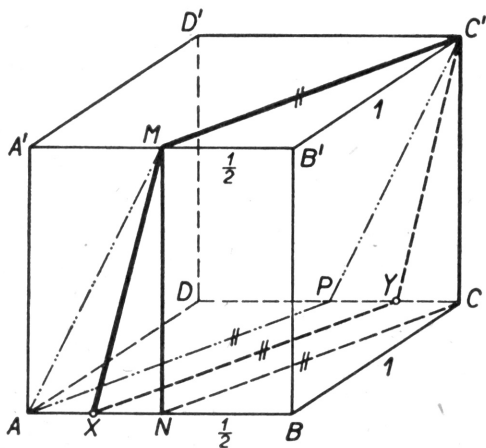
$$r_1 < \varrho < r_2. \quad (6)$$

Nerovnosti (5), (6) vyjadřují podmínku řešitelnosti ŕlohy.

4. Je daná kocka $ABCD A'B'C'D'$ s hranou dľlky 1. M je stred hrany $A'B'$. Priamkou $C'M$ je vedená rovina ϱ , ktorá rozdeľuje kocku na dve telesá. Teleso obsahujúce vrchol B má objem $\frac{1}{3}$. Určite, v akej vzdialenosti od vrcholu B pretína rovina ϱ hranu AB .

Riešenie (obr. 14). Označme N stred hrany AB , P stred strany CD .

Rovina $MNCC'$ oddelí od kocky trojboký hranol $\tau \equiv \equiv NBCMB'C'$, ktorého objem je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$.



Obr. 14.

Rovina $AMC'P$ oddelí od kocky teleso zložené z hranola τ a z trojbokého šikmého hranola $ANMPCC'$, ktorého objem je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$. Objem oddeleného telesa

je teda v tomto prípade $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Zvoľme bod X medzi bodmi A a N a označme $BX = x$. Je teda

$$\frac{1}{2} < x < 1. \quad (1)$$

Objem telesa oddeleného rovinou $\varrho \equiv MXC'$ vypočítame ako v predchádzajúcom prípade. Rovina pretne hranu CD v bode Y a platí zrejme $CY = NX = x - \frac{1}{2}$.

Ďalej je $\triangle XNM \cong \triangle YCC'$. Oddelené teleso sa skladá z hranola τ a zo šikmého hranola $XNMYCC'$, ktorého objem je $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}(2x - 1)$. Objem oddeleného telesa je teda

$$V = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(2x - 1). \quad (2)$$

Podľa podmienky úlohy je $V = \frac{1}{3}$. Ak dosadíme do (2), dostaneme rovnicu pre x , ktorej koreň je $x = \frac{2}{3}$. Tento koreň vyhovuje aj nerovnostiam (1) a dáva teda riešenie danej úlohy.

4. KATEGORIE D

1. Když jsem vkročil na náměstí, odbíjely právě hodiny na radnici 8 hodin, kostelní hodiny však už ukazovaly 8⁰². Když jsem přešel náměstí a dorazil k zámku, bylo na zámeckých hodinách teprve 8⁰¹, ale na kostelních hodinách už 8⁰⁶. Mám však už s hodinami v našem městě své zkušenosti: zámecké nikdy nejdou napřed, radniční zato vždycky jdou napřed a čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty. Určete (na minuty), jaký byl správný čas, kdy jsem vkročil na náměstí.

Řešení. Z údajů kostelních hodin je vidět, že od vstupu na náměstí do příchodu k zámku uplynuly 4 minuty.

Tudíž v okamžiku vstupu na náměstí bylo na zámeckých hodinách 7^{57} h.

Zámecké hodiny nikdy nejdou napřed, takže ukazují-li 7^{57} , jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{57}, 7^{58}, 7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, \dots \quad (1)$$

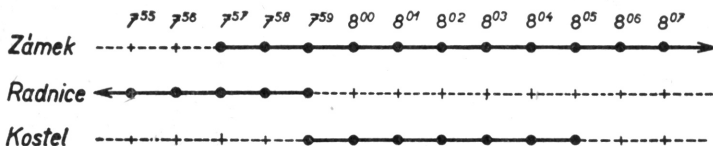
Radniční hodiny jdou vždy napřed, a proto když odbíjejí 8 hodin, ještě 8 hodin není a jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje:

$$7^{59}, 7^{58}, 7^{57}, 7^{56}, \dots \quad (2)$$

Čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty, tudíž když tyto hodiny ukazují 8^{02} , jsou možné (uvažujeme-li jen celé minuty) následující časové údaje

$$7^{59}, 8^{00}, 8^{01}, 8^{02}, 8^{03}, 8^{04}, 8^{05}. \quad (3)$$

Porovnáme-li možné časové údaje všech tří hodin, tj. množiny (1), (2) a (3), vidíme, že správný čas (na minuty) byl 7^{59} hod. Tento výsledek lze také dostat pomocí grafického znázornění (obr. 15).



Obr. 15.

2. Oldo si kontroloval po hodine úlohu z písomky:
„Mali sme upraviť výraz

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1}.$$

V čitateli mi vyšiel nejaký mnohočlen $ax^3 + bx^2 + cx + d$; koeficienty si už nepamätám. V menovateli bolo $2x^2 + x - 1$. Vyšla mi dobre skúška pre $x = 0, 1$ a 2 , ale pre $x = 3$ už nie. To vyšlo na ľavej strane 3,7 a na pravej 4.“

Dokážete z týchto údajov zistiť koeficienty a, b, c, d a rozhodnúť, či Oldovo riešenie bolo správne?

Riešenie. Rozriešime znovu Oldov príklad:

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1} = \frac{(x^2 - 3)(2x - 1) + (x + 1)(6x - 7)}{(x + 1)(2x - 1)}.$$

V čitateli vyjde po vynásobení a sčítaní

$$2x^3 + 5x^2 - 7x - 4,$$

v menovateli vyjde skutočne $2x^2 + x - 1$, ako tvrdil Oldo. Pre $x = 0$ malo vyjsť na ľavej i pravej strane číslo 4. Oldovi vyšlo $-d$. Pretože mu skúška súhlasila, bolo $d = -4$. Pre $x = 1$ malo vyjsť -2 . Oldo dostal

$$\frac{a + b + c - 4}{2}.$$

Pretože mu skúška súhlasila, bolo

$$\frac{a + b + c - 4}{2} = -2, \text{ tj.}$$

$$a + b + c = 0. \quad (1)$$

Pre $x = 2$ malo vyjsť 2. Oldo dostal $\frac{8a + 4b + 2c - 4}{9}$.

Z toho, že mu skúška súhlasila, po úprave dostávame

$$4a + 2b + c = 11. \quad (2)$$

Konečne pre $x = 3$ malo vyjsť 3,7. Oldo dostal

$$\frac{27a + 9b + 3c - 4}{20} = 4,$$

t. j. po úprave

$$9a + 3b + c = 28. \quad (3)$$

Ak dosadíme z (1) $c = -a - b$ do (2) a (3), dostaneme sústavu

$$\begin{aligned} 3a + b &= 11, \\ 4a + b &= 14. \end{aligned} \quad (4)$$

Odčítaním prvej rovnice sústavy (4) od druhej vyjde $a = 3$, potom z prvej rovnice sústavy (4) máme $b = 2$ a zo vzťahu (1) je $c = -5$.

Oldov nesprávny výsledok bol teda

$$\frac{3x^3 + 2x^2 - 5x - 4}{2x^2 + x - 1}.$$

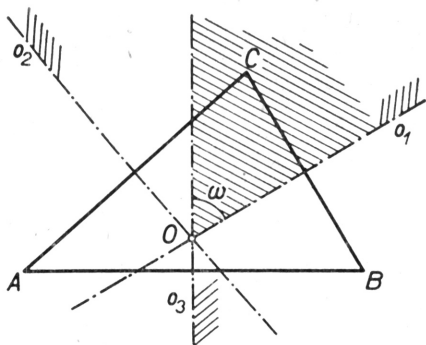
3. Je daný trojuholník ABC . Vyšetrite geometrické miesta bodov X tohto trojuholníka, pre ktoré platí

$$AX \geq BX \geq CX. \quad (1)$$

Pomocou veľkostí strán a uhlov trojuholníka ABC vyjadrite podmienky pre to, aby

- a) geometrickým miestom bodov X bol päťuholník;
- b) geometrickým miestom bodov X bol šesťuholník;
- c) geometrické miesto bodov X obsahovalo práve jeden bod;
- d) geometrické miesto bodov X neobsahovalo žiadny bod.

Riešenie (obr. 16). Geometrickým miestom bodov X , pre ktoré platí napr. $AX \geq BX$, je polrovina o_3B , kde o_3 je os úsečky AB . Pretože sa osi strán trojuholníka ABC pretínajú v jedinom bode O , tvorí geometrické miesto bodov X , ktoré splňujú podmienku (1), dutý uhol ω , ktorý je spoločnou časťou polrovín o_3B a o_1C . Hľadané geometrické miesto je teda spoločnou časťou trojuholníka ABC a uhla ω .



Obr. 16.

Vieme, že poloha vrcholu O , t. j. stredu opísanej kružnice vzhľadom na priamku BC závisí na tom, či uhol $\sphericalangle BAC$ je tupý, pravý alebo ostrý. Rozlišujeme preto tieto prípady:

1. Uhol $\sphericalangle BAC$ je tupý. Potom O leží v tej polrovine σ vyťatej priamkou BC , ktorá neobsahuje bod A . Pretože aj obe ramená uhla ω ležia v polrovine σ , leží celý uhol ω v polrovine σ , takže hľadané geometrické miesto bodov neobsahuje žiadny bod.

2. Uhol $\sphericalangle BAC$ je pravý. Bod O leží potom na strane BC , obe ramená uhla ω sú opäť v polrovine σ . Bod O je preto jediným bodom hľadaného geometrického miesta (obr. 17).

3. Uhol $\sphericalangle BAC = \alpha$ je ostrý. Potom bod O leží v tej polrovine vyťatej priamkou BC , ktorá obsahuje vrchol A . Hľadané geometrické miesto bodov potom obsahuje stred S strany BC a ďalšie body blízke k bodu S , teda aspoň dva rôzne body. Z toho už vyplýva, že prípad d) v úlohe nastane práve vtedy, keď $\alpha > 90^\circ$ a prípad c) nastane práve vtedy, keď $\alpha = 90^\circ$. Aby sme našli riešenie v prí-

77

Vráťme sa k prípadu ostrého uhla $\sphericalangle BAC$. Pretože ω je spoločná časť polrovín o_1C a o_3B a pretože B nie je v o_1C , A nie je v o_3B , nastane prípad b) práve vtedy, keď C je v o_3B čiže $a < b$ (C je vždy v o_1C) a strana AB pretne obe ramená uhla ω (obr. 18). Strana AB pretne rameno obsažené v o_3B práve vtedy, keď O leží v tej polrovine vyčatej priamkou AB , ktorá neobsahuje bod C . Potom však už AB pretne aj druhé rameno. Prípad a) nastane teda práve vtedy, keď uhol γ je tupý a uhol α je menší než uhol β alebo $a < b$ (uhol α je potom skutočne ostrý).

Záver. Podmienky, kedy nastanú jednotlivé prípady, sú:

- a) $\gamma > 90^\circ$, $\alpha < \beta$;
- b) nikdy;
- c) $\alpha > 90^\circ$;
- d) $\alpha = 90^\circ$.

4. Je dán čvrtkruh SBC s polomërom $SB = SC = r$; A je takový bod oblouku BC , pro který platí $\sphericalangle ASB = 60^\circ$; X je libovolný bod úsečky SC (obr. 19).

a) Vyjádřete obsah P plochy omezené úsečkami BX , AX a obloukem AB pomocí délky $x = SX$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah P roven polovině obsahu čvrtkruhu SBC , a porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC .

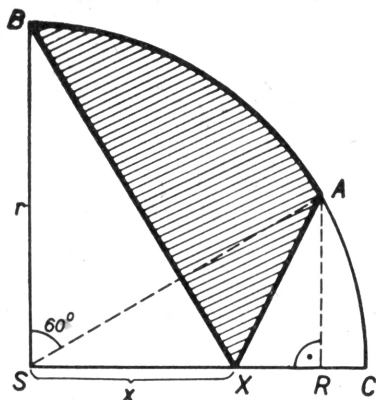
Řešení (obr. 19).

a) Pro obsahy obrazců platí (podle obrázku)

$$P = (ABX) = (SAB) + (SAX) - (SBX). \quad (1)$$

Podle známého vzorce

$$(SAB) = \frac{1}{6} \pi r^2. \quad (2)$$



Obr. 19.

Trojúhelník ASX má stranu $SX = x$ a k ní kolmou výšku $AR = \frac{1}{2} r$; proto

$$(SAX) = \frac{1}{4} rx. \quad (3)$$

Pro obsah trojúhelníku SBX platí

$$(SBX) = \frac{1}{2} rx. \quad (4)$$

Spojíme-li (1), (2), (3), (4), dostaneme

$$P = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} rx. \quad (5)$$

b) Z podmínky úlohy plyne

$$\frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{1}{4} rx = \frac{1}{8} \pi r^2,$$

neboli

$$\frac{1}{4}rx = \frac{1}{24}\pi r^2$$

a odtud

$$x = \frac{1}{6}\pi r.$$

Délka x je tedy třetina délky oblouku BC , tj. délka oblouku AC .

IV. Úlohy II. kola

1. KATEGORIE A

1. Dokažte, že o objemu V čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V \leq \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot CD.$$

Řešení. Objem V daného čtyřstěnu je roven $V = \frac{1}{3} P v$, kde P je obsah trojúhelníku ABC a v je velikost výšky čtyřstěnu spuštěné z vrcholu D na stěnu ABC . Je však dále

$$P = \frac{1}{2} AB \cdot v',$$

kde v' je velikost výšky trojúhelníku ABC , spuštěné z bodu C .

Protože v' je vzdálenost bodu C od přímky AB , je

$$v' \leq BC,$$

tj.

$$P \leq \frac{1}{2} AB \cdot BC.$$

Dále je v vzdálenost bodu D od roviny ABC , takže

$$v \leq CD.$$

Odtud

$$V = \frac{1}{3} P v \leq \frac{1}{6} AB \cdot BC \cdot CD,$$

jak jsme měli dokázat.

2. Je dána soustava rovnic

$$|1 - x| = a, |x - y| = b, |y - 1| = c, \quad (1)$$

kde a, b, c jsou daná přirozená čísla.

Dokažte, že soustava (1) má buď dvě řešení, nebo je neřešitelná. Určete podmínku řešitelnosti.

Řešení. Pokládejme čísla $1, x, y$ za souřadnice tří bodů přímky p ; tyto body označme

$$A = [y], B = [1], C = [x]. \quad (2)$$

Pak je podle (1)

$$BC = a, CA = b, AB = c. \quad (3)$$

Protože a, b, c jsou přirozená čísla, jsou A, B, C tři různé body přímky p .

Ze tří různých bodů přímky právě jeden odděluje oba zbývající. Je-li tedy soustava (1) řešitelná, platí právě jeden ze vztahů

C odd. AB , A odd. BC , B odd. CA ,

neboli právě jedna z rovností

$$AC + CB = AB, BA + AC = BC, CB + BA = CA,$$

tj. vzhledem k (3) právě jedna z rovností

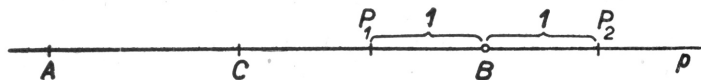
$$a + b = c, b + c = a, c + a = b. \quad (4)$$

Platnost právě jedné z rovností (4) je tedy nutná podmínka pro řešitelnost soustavy (1). Dokážeme, že tato podmínka je také postačující.

Nechť platí např.

$$a + b = c. \quad (5)$$

Na libovolné přímce p sestrojíme tři body A, B, C tak, aby pro ně platily vztahy (3) a (5); viz obr. 20. Dále sestrojíme



Obr. 20.

oba body přímky p , pro které platí $BP_1 = BP_2 = 1$. Jsou-li y_1, x_1 po řadě souřadnice bodů A, C v soustavě s počátkem P_1 a jednotkovým bodem B , pak platí

$$c = AB = |y_1 - 1|, a = BC = |1 - x_1|$$

a vzhledem k (3)

$$|x_1 - y_1| = AC = b.$$

Čísla x_1, y_1 jsou tedy řešením soustavy (1). Druhé řešení dá bod P_2 .

Závěr. Soustava (1) je řešitelná právě tehdy, platí-li jedna z rovností (4). Je-li řešitelná, má dvě řešení.

3. Vypočítajte súčet

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots +$$

$$+ \frac{\sin 1}{\cos (n-1) \cos n},$$

kde n je dané prirodzené číslo.

Riešenie. Upravíme člen súčtu

$$\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cdot \cos k} \quad (1)$$

pomocou rovnosti

$$\sin 1 = \sin [k - (k-1)] = \sin k \cdot \cos (k-1) - \cos k \cdot \sin (k-1). \quad (2)$$

Ak dosadíme z (2) do (1), dostaneme

$$\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg} (k-1). \quad (3)$$

Členy (3) máme sčítat pre $k = 1, 2, \dots, n$. Hľadaný súčet

je teda $s = (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \dots + (\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} (n-1))$,
t. j.

$$s = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} n.$$

Poznámka. Dá sa dokázať, že $\cos k \neq 0$ pre každé prirodzené číslo k . Ak by totiž pre niektoré prirodzené číslo k platilo $\cos k = 0$, bolo by

$$k = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi \quad (\lambda \text{ celé}).$$

Stade by sme dostali $\pi = \frac{2k}{1+2\lambda}$, čo však nie je možné, pretože π je číslo iracionálne.

4. Je daná priamka p a rovina π kolmá k p . Na priamke p sú dané dva rôzne body A, B , ktoré ležia v tom istom polpriestore s hranicou π . V rovine π je daná priamka q mimobežná s p .

Vyšetrite geometrické miesto priesečníkov výšok trojuholníkov ABX , keď bod X prebieha priamku q .

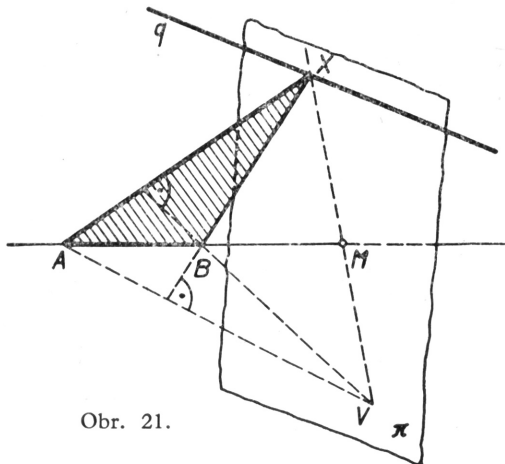
Riešenie. Výška každého z trojuholníkov ABX spustená z vrcholu X má tú istú päťu M . Bod M je priesečníkom priamky p s rovinou π .

Rozoznávajme dva prípady:

a) bod M splynie s niektorým z bodov A, B , napr. $M \equiv B$;

b) $M \not\equiv A, B$ a pri vhodnom označení oddeľuje napr. bod B body A a M .

V prípade a) sú všetky trojuholníky ABX pravouhlé s pravým uhlom $\sphericalangle ABX$. Priesečník výšok V v každom z nich je $V \equiv B$. Hľadané geometrické miesto bodov pozostáva teda z jediného bodu B .

$$\Delta AMX \sim \Delta VMB. \quad (1)$$


Obr. 21.

$$MX \cdot MV = MA \cdot MB = k, \quad (2)$$

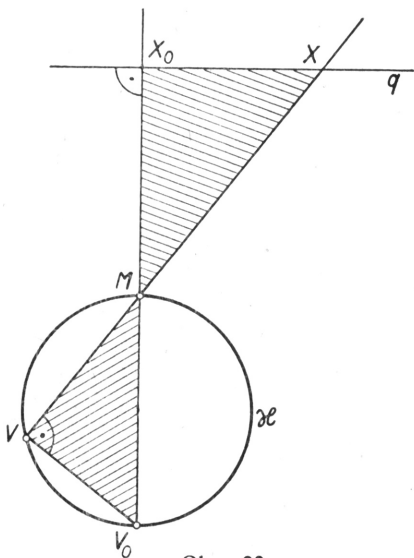
kde k je kladná konštanta.

$$MX:MX_0 = MV_0:MV. \quad (3)$$

Zo vzťahu (3) vyplýva podľa vety *s u s* o podobnosti

trojuholníkov, že je $\triangle MXX_0 \sim \triangle MV_0V$. Preto je uhol $\angle MVV_0$ pravý a bod V leží podľa obrátenej Thaletovej vety na kružnici κ zostrojenej nad priemerom MV_0 .

Pretože každá priamka zväzku (M) s výnimkou dotýčnice kružnice κ v bode M obsahuje po jednom bode X i V , vyplnia body V kružnicu κ bez bodu M .



Obr. 22.

Zhrnutie. V prípade a) je hľadaným geometrickým miestom množina obsahujúca jediný bod M , v prípade b) je to kružnica κ bez bodu M .

2. KATEGORIE B

1. Platí-li o reálných číslach a, b, c , že $|a| \leq 1, |b| \leq 1$,

$|c| \leq 1$, potom je

$$ab + ac + bc \geq -1.$$

Dokažte a najdte nutnou a postačujúcu podmínku pro to, aby nastala rovnosť.

Řešení. Platí

$(1+a)(1+b)(1+c) + (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$,
neboť oba sčítanci jsou nezáporná čísla. Vynásobením,
úpravou a dělením dvěma dostáváme

$$ab + ac + bc + 1 \geq 0$$

neboli

$$ab + ac + bc \geq -1,$$

jak jsme měli dokázat.

Rovnost nastane v tom a jen v tom případě, je-li zároveň

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 0$$

a

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 0.$$

To bude splněno, bude-li aspoň jedno z čísel a, b, c rovno -1 a zároveň aspoň jedno rovno 1 .

2. Je daná funkcia

$$y = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}}.$$

Zistite jej obor definície a zostrojte jej graf.

Riešenie. Najprv zistíme obor definície danej funkcie. Z definície druhej odmocniny vyplýva nutnosť splnenia vzťahov

$$\frac{1+x^2}{2x} \pm 1 \geq 0,$$

ktoré sú splnené len pre $x > 0$. Keďže pre kladné x je nezáporným číslom aj výraz pod „veľkou odmocninou“, pričom menovateľ je rôzny od nuly, je daná funkcia definovaná pre

$$x > 0. \quad (1)$$

Upravme teraz zlomok

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}} - \sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2}{2x}} + \sqrt{\frac{(1-x)^2}{2x}}}. \end{aligned}$$

Použitím známej vety, že $\sqrt{x^2} = |x|$, dostaneme z daného zlomku tvar

$$\frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}.$$

Z definície absolútnej hodnoty vyplýva pre $x \geq 1$:

$$|1+x| = 1+x, \quad |1-x| = x-1, \text{ teda}$$

$$\frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|} = \frac{1+x - (x-1)}{1+x + (x-1)} = \frac{1}{x}; \quad (2a)$$

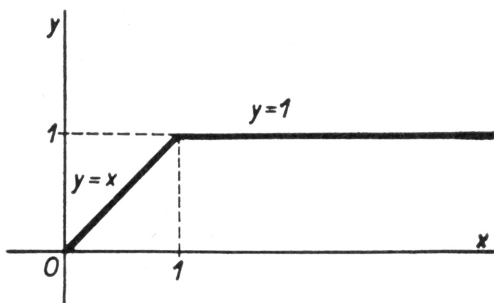
pre $0 < x < 1$ je $|1+x| = 1+x$, $|1-x| = 1-x$
a teda

$$\frac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|} = \frac{1+x - (1-x)}{1+x + (1-x)} = x. \quad (2b)$$

Ak použijeme vzťahy (1) a (2), dostaneme:

pre $x \geq 1$ je $y = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$, pre $0 < x < 1$ je $y = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Grafom danej funkcie je teda lomená čiara znázornená na obr. 23.



Obr. 23.

3. Do polgule s polomerom 1 treba vpísať tri zhodné plochy guľové tak, aby sa každé dve zvonku dotýkali a každá z nich aby sa dotýkala jednak podstavy polgule a jednak jej hraničnej plochy guľovej. Vypočítajte polomer vpísaných guľových plôch a dokážte, že úloha je riešiteľná.

Riešenie. Predpokladajme, že riešenie existuje. Označme O stred polgule, S_1, S_2, S_3 stredy vpísaných guľových plôch, r ich polomer. Body S_1, S_2, S_3 tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka so stranami dĺžky $2r$. Ak je S stred tohto trojuholníka, potom platí $d = SS_1 =$

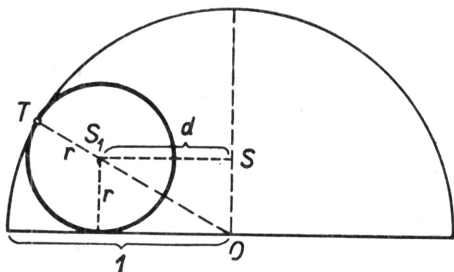
$= SS_2 = SS_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2r}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$. Rovina S_1OS pretne polguľu v polkružnici (obr. 24), prvú guľovú plochu v kružnici s polomerom r a stredom S_1 . Táto kružnica sa dotýka polkružnice v bode T . Pretože body T, S_1, O ležia na priamke, platí

$$1 = r + \sqrt{r^2 + d^2} = r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3}} \right) = r \left(1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \right).$$

Stade

$$r = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{21}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{3} - 1}{\frac{7}{3} - 1} = \frac{1}{4} (\sqrt{21} - 3).$$

Ak zvolíme r takto a $d = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$, potom existuje kružnica s polomerom r ako na obr. 24. Potom možno zostrojiť tri guľové plochy požadovaných vlastností.

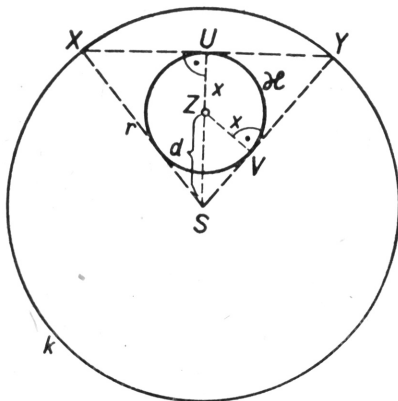


Obr. 24.

4. Je dána kružnice k se středem S . Dokažte, že každý bod $Z \neq S$ jejího vnitřku je středem kružnice vepsané

trojúhelníku SXY , jehož vrcholy X, Y leží na kružnici k . Vyjádřete poloměr této vepsané kružnice pomocí r, SZ .

Řešení. Je-li bod Z středem kružnice vepsané trojúhelníku SXY , jehož vrcholy X, Y leží na kružnici k a který je proto rovnoramenný, zavedeme označení podle obr. 25: U je střed úsečky XY a zároveň bod dotyku



Obr. 25.

kružnice vepsané trojúhelníku SXY , V je pata kolmice z bodu Z na přímkou SY , a tedy také bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku SXY . Platí tedy

$$SZ = d, \quad SY = r, \quad ZU = ZV = x,$$

kde x značí poloměr vepsané kružnice.

Z podobnosti trojúhelníků

$$\triangle SYU \sim \triangle SZV$$

dostaneme: $SY:SU = SZ:SV$, neboli

$$r:(d+x) = d:\sqrt{d^2-x^2},$$

neboli

$$r\sqrt{d^2-x^2} = d(d+x). \quad (1)$$

Odtud dostaneme umocněním

$$r^2(d+x)(d-x) = d^2(d+x)^2. \quad (2)$$

Protože je $d+x \neq 0$, můžeme jím dělit rovnici (2) a vyjde

$$r^2(d-x) = d^2(d+x)$$

a odtud po jednoduché úpravě

$$x = d \frac{r^2 - d^2}{r^2 + d^2}. \quad (3)$$

Zvolme nyní libovolný bod Z vnitřku kružnice k , pro který platí $SZ = d < r$. Kolem bodu Z opišme kružnici κ poloměrem x , který je dán vztahem (3). Ze vztahu (3) vyplývá, že je $x < d$. Proto leží bod S vně kružnice κ . Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník $SX'Y'$ se základnou $X'Y'$ tak, aby κ byla kružnice jemu vepsaná. Pak opišme kolem středu S kružnici k' poloměrem $SX' = SY' = r'$. Podle vztahu (3) pak platí

$$x = d \frac{r'^2 - d^2}{r'^2 + d^2}. \quad (4)$$

Porovnáním (3) a (4) dostaneme

$$(r^2 - d^2)(r'^2 + d^2) = (r'^2 - d^2)(r^2 + d^2)$$

a odtud $r'^2 = r^2$, tj. $r' = r$. Kružnice k, k' tedy splynou, zvolený bod Z je středem kružnice vepsané jednomu z trojúhelníků SXY a tvrzení je dokázáno.

3. KATEGORIE C

1. Trojúhelník o obsahu 50 cm^2 má jedinou stranu delší než 10 cm . Určete délku této strany.

Řešení. Necht' a, b, c jsou délky stran daného trojúhelníku a necht' c je větší než 10 cm . Je pak $a \leq 10 \text{ cm}$, $b \leq 10 \text{ cm}$. Obsah P trojúhelníku je

$$P = \frac{1}{2}av,$$

kde v je velikost výšky kolmé k straně a , vycházející z vrcholu A . Protože v je zároveň vzdálenost bodu A od strany BC , platí $v \leq b = AC$.

Je proto

$$P = \frac{1}{2}av \leq \frac{1}{2}ab \leq 50 \text{ cm}^2.$$

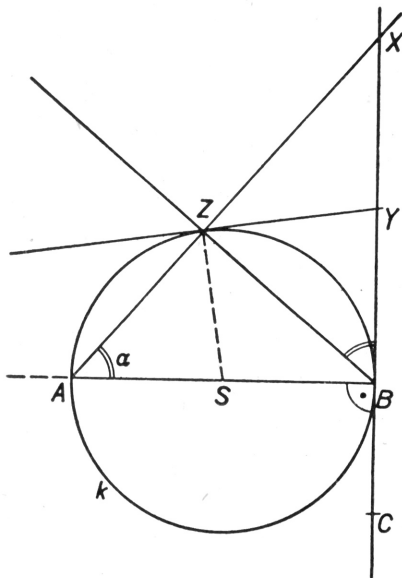
Avšak víme, že $P = 50 \text{ cm}^2$. Je proto $v = b$, tj. strana b je kolmá k a , dále $a = 10 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$. Odtud plyne, že $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm} \doteq 14,14 \text{ cm}$, což je hledaný výsledek.

2. Je daný pravý uhol $\sphericalangle ABC$. Vrchol X pravouhlého trojuholníka ABX sa pohybuje po priamke BC . Y je stred jeho odvesny BX , Z päta výšky na preponu AX . Vyšetrite geometrické miesto bodov Z , pre ktoré platí $\sphericalangle ZBY \geq \sphericalangle XZY$.

Riešenie. Nad priemerom AB zostrojíme kružnicu k so stredom S . Podľa obrátenej Thaletovej vety patrí bod Z kružnici k . Ak označíme α veľkosť uhla $\sphericalangle XAB$, je $\sphericalangle AXB = 90^\circ - \alpha$ (z pravouhlého $\triangle ABX$), $\sphericalangle ZBY = \alpha$ (z pravouhlého $\triangle BXZ$ — pozri obr. 26). Ďalej

máme podľa obrátenej Thaletovej vety z pravouhlého $\triangle BXZ$ vzťahy $XY = YB = YZ$, t.j. z rovnoramenného $\triangle XYZ$ dostaneme

$$\sphericalangle XZY = \sphericalangle AXB = 90^\circ - \alpha.$$



Obr. 26.

Podmienka $\sphericalangle ZBY \geq \sphericalangle XZY$ je teda ekvivalentná s nerovnosťou

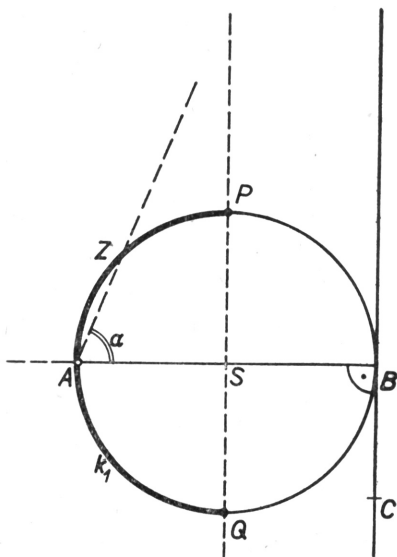
$$\alpha \geq 90^\circ - \alpha,$$

čiže

$$\alpha \geq 45^\circ.$$

Stredom S kružnice k vedieme priemer $PQ \parallel BC$.

Pretože predchádzajúci postup možno obrátiť, je hľadaným geometrickým miestom bodov Z polkružnica k_1 , ktorá obsahuje bod A . Bod A však do hľadaného geometrického miesta nepatrí (obr. 27).



Obr. 27.

3. Prirozená čísla $1, 2, 3, \dots, 12$ jsou rozdělěna do čtyř skupin po třech číslech. Součet čísel každé této skupiny je nejvýše 20. Dokažte, že v žádném takovém rozkladu se nevyskytuje skupina $\{5, 6, 7\}$.

Řešení. Předpokládejme, že v některém rozkladu je skupina $\{5, 6, 7\}$. Skupina $\{5, 6, 7\}$ dává součet 18. Proto každá ze tří zbývajících skupin dává součet 20.

Tyto tři skupiny dávají totiž dohromady součet $78 - 18 = 60$.

Vyšetřme, v které skupině se vyskytuje číslo 12. Toto číslo se může vyskytovat jen ve skupinách

$$\{1, 7, 12\}, \{2, 6, 12\}, \{3, 5, 12\}.$$

Každá z těchto tří skupin však má společný prvek se skupinou $\{5, 6, 7\}$, což není možné.

4. Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ |x| + y &= a, \end{aligned} \tag{1}$$

kde a je parametr. Diskutujte řešení vzhledem k parametru a .

Řešení. Rozlišíme dva případy: a) $x \geq 0$, b) $x \leq 0$.

a) V případě a) má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + y &= a. \end{aligned} \tag{2}$$

Odečtením obou rovnic (2) dostaneme

$$(a - 1)x = 1 - a. \tag{3}$$

Je-li $a \neq 1$, plyne z rovnice (3) $x = -1$; to však nevede v případě a), kdy je $x \geq 0$, k žádnému řešení soustavy (1). Je-li $a = 1$, obsahuje soustava (2) dvě totožné rovnice $x + y = 1$. Jejich řešení jsou všechny dvojice $x, 1 - x$, kde $x \geq 0$.

b) V případě b) má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ -x + y &= a. \end{aligned} \tag{4}$$

Odečtením obou rovnic (4) dostaneme

$$(a + 1)x = 1 - a. \tag{5}$$

Je-li $a \neq -1$, plyne z (5) $x = \frac{1-a}{1+a}$, a dále z druhé rovnice (4) $y = \frac{1+a^2}{1+a}$.

Dvojice čísel

$$x = \frac{1-a}{1+a}, \quad y = \frac{1+a^2}{1+a} \quad (6)$$

je řešením soustavy (1) právě tehdy, když je $x \leq 0$, tj. buď $1-a \geq 0$, $1+a < 0$, nebo $1-a \leq 0$, $1+a > 0$. První případ nastane pro $a < -1$, druhý pro $a \geq 1$. Pro $a = 1$ dávají vzorce (6) řešení 0; 1, které jsme už dostali mezi řešeními odstavce a).

Pro $a = -1$ se skládá soustava (4) z rovnic $-x + y = 1$, $-x + y = -1$, které si odporují; pro $a = -1$ je tedy soustava (1) neřešitelná.

Shrnutí je dáno tabulkou:

a	$a < -1$	$-1 \leq a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Řešení	jediné, dané vzorcí (6)	žádné	nekonečně mnoho řešení $x, 1-x; x \geq 0$	jediné, dané vzorcí (6)

4. KATEGORIE D

1. Je dán čtverec $ABCD$ o středu S . Tento čtverec otočíme kolem středu S o ostrý úhel velikosti φ do polohy $A'B'C'D'$ tak, že strany $B'C'$ a $C'D'$ protnou stranu BC v bodech X a Y .

Vyjádřete velikost úhlu $\sphericalangle XSY$.

Řešení (obr. 28). Z textu úlohy plyne

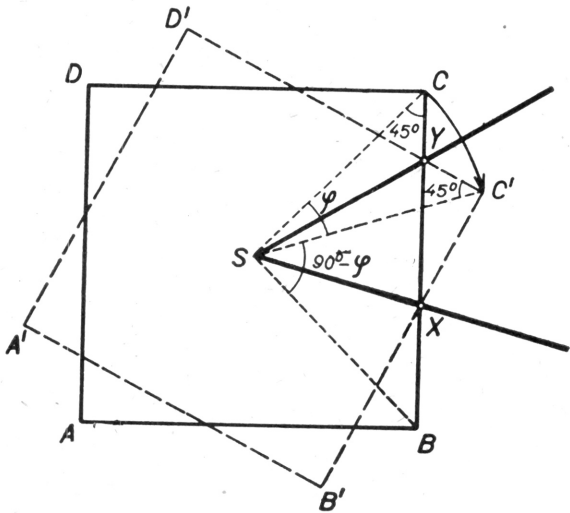
$$\nabla C' S C = \varphi. \quad (1)$$

Dále platí

$$\sphericalangle C'SB = \sphericalangle CSB - \sphericalangle C'SC = 90^\circ - \varphi. \quad (2)$$

Trojúhelník SCC' je rovnoramenný, neboť $SC = SC'$. Ze souměrnosti tohoto trojúhelníka podle osy úsečky CC' a ze vztahu

$$\angle SC'Y = \angle SCY = 45^\circ$$



Obr. 28.

plyne, že bod Y leží na ose souměrnosti $\triangle SCC'$. Je tedy podle (1)

$$\star YSC = \frac{\varphi}{2}. \quad (3)$$

Ze souměrnosti plyne dále

$$\sphericalangle YSC' = \frac{1}{2} \varphi.$$

Polopřímka SY je tedy osou úhlu CSC' . Obdobně dokážeme, že polopřímka SX je osou úhlu $C'SB$.

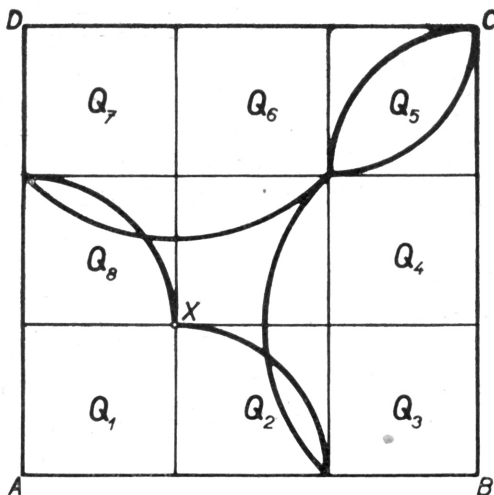
Velikost úhlu $C'SB$ je podle (2) $90^\circ - \varphi$, takže

$$\sphericalangle XSC' = \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi).$$

Pro velikost hledaného úhlu tedy platí

$$\sphericalangle XSY = \sphericalangle XSC' + \sphericalangle C'SY = 45^\circ - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \varphi = 45^\circ.$$

2. Na obrázku (obr. 29) je štvorec $ABCD$ so stranou



Obr. 29.

dĺžky 9 cm a 8 zhodných štvorcov $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$. Štvorec Q_1 prevedieme na štvorec Q_2 , Q_2 na Q_3 , atď. až Q_8 na Q_1 a to vždy otočením okolo toho spoločného vrcholu oboch štvorcov, ktorý leží na obvode štvorca $ABCD$. Spôsob otáčania je naznačený vo štvorci $ABCD$ na obr. 29.

a) Zostrojte čiaru, ktorú pri všetkých týchto otočeniach prebehne vrchol X .

b) Vypočítajte jej dĺžku a porovnajte ju s dĺžkou kružnice opísanej a s dĺžkou kružnice vpísanej štvorcu $ABCD$.

Riešenie. a) Čiara je na obr. 29 vyznačená hrubo. Skladá sa zo štyroch štvrtkružníc s polomerom 3 a z dvoch štvrtkružníc s polomerom $3\sqrt{2}$.

$$\text{b) Dĺžka čiary je (v cm) } d = 4 \cdot \frac{6\pi}{4} + 2 \cdot \frac{6\pi\sqrt{2}}{4},$$

čiže

$$d = 6\pi + 3\pi\sqrt{2} = 3\pi(2 + \sqrt{2}) \doteq 10,24\pi. \quad (1)$$

Dĺžka d_1 kružnice opísanej štvorcu $ABCD$ je

$$d_1 = \pi \cdot 9\sqrt{2} \doteq 12,7\pi, \quad (2)$$

dĺžka d_2 kružnice vpísanej štvorcu $ABCD$ je

$$d_2 = 9\pi. \quad (3)$$

Podľa vzťahov (1), (2), (3) je teda

$$d_2 < d < d_1.$$

3. Je daná tabuľka prirodzených čísel, ktorá pripomína tabuľku na tikete Športky:

1	<u>2</u>	3	4	5	6	7
8	9	10	<u>11</u>	12	13	14
<u>15</u>	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	<u>27</u>	28
29	30	31	32	33	34	<u>35</u>
36	37	38	39	<u>40</u>	41	42
43	44	<u>45</u>	46	47	48	49

Ak vyberieme z tabuľky sedem čísel tak, aby sme z každého riadku i z každého stĺpca vybrali jediné číslo, potom je súčet vybraných čísel vždy ten istý. Dokážte. (Jeden možný výber je vyznačený na tabuľke.)

Riešenie. Postup vyberania čísel si môžeme predstaviť takto: Na každé pole prvého riadku položíme jednu mincu. Potom jednu mincu necháme v prvom riadku a ostatné posunieme v smere stĺpcov tak, aby v každom riadku ležala práve jedna z nich. Čísla, ktoré sú zakryté mincami, spĺňajú potom požiadavky výberu.

Keď mince ležali v prvom riadku, bol súčet čísel, ktoré zakrývali

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Tým, že sme jednu z mincí posunuli do druhého riadku, sa súčet čísel zakrytých mincami zväčší o 7. Podobne posunutím mince do 3. riadku sa súčet zväčší o 2 · 7; ...; posunutím do 7. riadku o 6 · 7. Súčet čísel zakrytých mincami sa teda zväčšil celkom o

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 7 = 21 \cdot 7 = 147.$$

Súčet čísel vybraných tak, ako žiada úloha, je teda vždy

$$28 + 147 = 175.$$

4. Součin dvou kvadratických trojčlenů $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ je dvojčlen $x^4 + 4$. Určete koeficienty trojčlenů.

Řešení. Platí

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd. \quad (1)$$

Porovnáním (1) s dvojčlenem $x^4 + 4$ dostaneme

$$\begin{aligned} a + c &= 0, \\ b + d + ac &= 0, \\ ad + bc &= 0, \\ bd &= 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Z první rovnice (2) vyjde

$$c = -a; \quad (3)$$

po dosazení do třetí rovnice (2) dostaneme

$$a(d - b) = 0. \quad (4)$$

Připustíme, že je $a = 0$; pak z (3) plyne $c = 0$ a z druhé rovnice (2) $d = -b$. Ze čtvrté rovnice (2) pak dostaneme $-b^2 = 4$, což je nemožné. Je tedy $a \neq 0$ a z (4) plyne

$$d = b. \quad (5)$$

Dosadíme-li z (3) a (5) do druhé rovnice (2), vyjde

$$2b - a^2 = 0. \quad (6)$$

Vztahy (3), (5), (6) nám dovolují vyjádřit všechny koeficienty pomocí a ; je

$$b = \frac{1}{2}a^2, \quad c = -a, \quad d = \frac{1}{2}a^2. \quad (7)$$

Z čtvrté rovnice (2) dostaneme vzhledem k (7)

$$\frac{1}{4}a^4 = 4,$$

tj. $a^4 = 16$, $a^2 = 4$ (nikoli -4), $a = \pm 2$. Máme tedy dvě řešení:

a	b	c	d
2	2	-2	2
-2	2	2	2

Zkouška.

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4.$$

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = x^4 + 4.$$

Nepřihlížíme-li k pořadí trojčlenů, je řešení jediné.

V. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určete všechny takové trojice komplexních čísel a, b, c , aby rovnice

$$x^4 - ax^3 - bx + c = 0 \quad (1)$$

měla kořeny a, b, c .

Řešení. Rozložme čtyřčlen na levé straně (1) v součin kořenových činitelů:

$$x^4 - ax^3 - bx + c = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d), \quad (2)$$

kde d je čtvrtý kořen rovnice (1). Po vynásobení na pravé straně (2) a po porovnání koeficientů při mocninách x dostaneme soustavu rovnic pro a, b, c, d :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= a, \\ a(b + c + d) + bc + bd + cd &= 0, \\ a(bc + bd + cd) + bcd &= b, \\ abcd &= c. \end{aligned}$$

Po jednoduché úpravě vyjde

$$\begin{aligned} b + c + d &= 0, \\ bc + bd + cd &= 0, \\ b(cd - 1) &= 0, \\ c(abd - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Rozlišíme případy $b = 0$ a $b \neq 0$.

I. Je-li $b = 0$, dostaneme z čtvrté rovnice (3) $c = 0$ a z první rovnice $d = 0$. Číslo a může být libovolné. Máme jedno řešení:

$$a \text{ libovolné, } b = c = d = 0. \quad (4)$$

II. Je-li $b \neq 0$, plyne z třetí rovnice (3) $cd = 1$, tj. $c \neq 0$, $d \neq 0$. Z čtvrté rovnice (3) dostaneme $abd = 1$. Máme tedy soustavu

$$\begin{aligned} abd &= 1, \\ d &= -(b + c), \\ cd &= 1, \\ bc + (b + c)d &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Vyloučením d z druhé až čtvrté rovnice (5) vyjde po úpravě

$$\begin{aligned} c^2 + bc + 1 &= 0, \\ b^2 + bc + c^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Vyloučením c z obou rovnic (6) dostaneme

$$b^2 = 1,$$

tj. $b = \pm 1$. Pro c pak dostaneme z první rovnice (6)

$$c^2 \pm c + 1 = 0. \quad (7)$$

Označíme-li $\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$,

má první rovnice (7), tj. rovnice $c^2 + c + 1 = 0$, kořeny

$\varepsilon_1, \frac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_2$, druhá rovnice (7), tj. rovnice $c^2 - c + 1 = 0$, kořeny $\varepsilon_2, \frac{1}{\varepsilon_2} = -\varepsilon_1$. Hodnoty d vypočteme z třetí

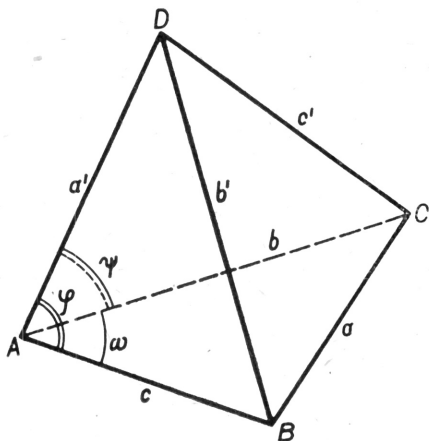
rovnice (5), a z první rovnice (5). Celkem vyjde pět řešení, která jsou zachycena v tabulce:

a	b	c	d
libovolné	0	0	0
ε_1	1	ε_1	$-\varepsilon_2$
$-\varepsilon_2$	1	$-\varepsilon_2$	ε_1
$-\varepsilon_2$	-1	ε_2	$-\varepsilon_1$
ε_1	-1	$-\varepsilon_1$	ε_2

2. Ak platia pre dĺžky hrán štvorstena $ABCD$ vzťahy $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, (1) potom je aspoň jedna jeho stena ostrouhlý trojuholník. Dokážte.

Riešenie (obr. 30). Označme $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$. Potom vzťahy (1) možno zapísať v tvare

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2. \quad (1')$$



Obr. 30.

Vyšetríme veľkosti uhlov $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle CAD$ a $\sphericalangle BAC$ pri vrchole A . Označme ich podľa obrázku: $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle BAC = \omega$. Podľa kosínusovej vety je

$$2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2, \quad (2a)$$

$$2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2, \quad (2b)$$

$$2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2. \quad (2c)$$

Z (1') však vyplýva

$$a'^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2, \quad (3a)$$

$$a'^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2. \quad (3b)$$

Ak spojíme vzťahy (2abc) a (3ab), zistíme, že čísla $\cos \varphi$, $\cos \psi$ a $\cos \omega$ sú súčasne všetky tri buď kladné alebo záporné alebo rovné nule. Je teda buď

$$\varphi = \psi = \omega = 90^\circ$$

alebo

$$\varphi < 90^\circ, \quad \psi < 90^\circ, \quad \omega < 90^\circ$$

alebo

$$\varphi > 90^\circ, \quad \psi > 90^\circ, \quad \omega > 90^\circ.$$

Rovnaký výsledok platí aj pre uhly pri vrchoch B , C , D štvorstena $ABCD$.

Ak je teraz $\triangle ABC$ ostrouhlý, nemáme čo dokazovať. Ak je $\triangle ABC$ pravouhlý alebo tupouhlý, a to tak, že $\omega \geq 90^\circ$, potom je aj $\varphi \geq 90^\circ$, $\psi \geq 90^\circ$. Potom však pri každom z vrcholov B , C , D je aspoň jeden uhol ostrý. Podľa predchádzajúceho sú potom všetky uhly pri vrchoch B , C , D ostré, tj. trojuholník BCD je ostrouhlý.

3. V tabulke cyklických permutácií

$$1, 2, \dots, n-1, n$$

$$2, 3, \dots, n, 1$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$n, 1, \dots, n-2, n-1$$

($n \geq 2$) znásobíme každé číslo prvého riadku tým číslom k -tého riadku, ktoré je ve stejném sloupci. Všechny tyto součiny sečteme a výsledek označíme s_k (např. $s_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n + n \cdot 1$).

a) Odvoďte vztah mezi s_{k-1} , s_k a z něho vzorec pro s_k .

b) Zjistěte, pro které k je při daném n součet s_k nejmenší, a vypočítejte tento součet.

(1) pro $n = 8$; dostaneme

$$\begin{array}{l} 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4 \\ 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5. \end{array} \quad (2)$$

Každé číslo druhého řádku (2) je o 1 *větší* než nad ním stojící číslo prvního řádku (2) s výjimkou čísla 1, které je o 7 *menší* než nad ním stojící číslo 8. *Zvětšíme-li* součet s_5 o $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \dots + 8 \cdot 1$ a *zmenšíme-li* jej o $4 \cdot 8$ (číslo 8 stojí totiž ve čtvrtém sloupci), dostaneme s_6 ; je tedy

$$s_6 = s_5 + (1 + 2 + \dots + n) - 4.8. \quad (3)$$

Rekurentní formule (3) se dá snadno zobecnit. Přejdeme-li v schématu (1) od řádku $k - 1$ k řádku k , zvětší se každé číslo o 1 kromě čísla n , které přejde v číslo 1. Lze tedy říci, že se číslo n zvětší také o 1, ale současně se zmenší o n .

Čísla n vyplňují v schématu (1) vedlejší diagonálu; v řádku $k - 1$ stojí na místě v a zřejmě platí $k - 1 + v = n + 1$, neboli

$$v = n - k + 2. \quad (4)$$

Odtud vyplývá: Ze součtu s_{k-1} dostaneme součet s_k , přičteme-li $1 + 2 + \dots + n = \sigma$ a zároveň odečteme (podle (4)) číslo $n \cdot (n - k + 2)$; je tedy

$$s_k = s_{k-1} + \sigma - n(n - k + 2). \quad (5)$$

Rozepíšeme vzorec (5) pro $k = 2, 3, \dots, k$; dostaneme

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + \sigma - n^2 + 2n - 2n, \\ s_3 &= s_2 + \sigma - n^2 + 3n - 2n, \end{aligned} \quad (6)$$

.....

$$s_k = s_{k-1} + \sigma - n^2 + k \cdot n - 2n.$$

Sečteme $k - 1$ rovností (6) a dostaneme

$$s_k = s_1 + (k - 1)\sigma - (k - 1)n^2 + n \left[\frac{k(k + 1)}{2} - 1 \right] - 2(k - 1) \cdot n.$$

Dosadíme-li sem $\sigma = \frac{1}{2} n(n + 1)$ a vytkneme-li ze všech členů na pravé straně (vyjma s_1) číslo $\frac{1}{2} n$, vyjde po jednoduché úpravě

$$s_k = s_1 + \frac{n}{2} [k^2 - (n + 2)k + n + 1], \quad (7)$$

což je výsledný vzorec. Přitom s_1 stále značí součet

$$s_1 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Vzorec (7) se pak dokáže indukci pomocí rekurentní formule (5).

b) Součet s_k je při pevném n kvadratickou funkcí proměnné k . Minimum funkce s_k dostaneme, vyšetříme-li minimum funkce

$$f(k) = k^2 - (n + 2)k + n + 1.$$

Protože platí

$$f(k) = \left(k - \frac{n + 2}{2} \right)^2 - \frac{n^2}{4}, \quad (8)$$

má s_k minimum pro $\frac{n + 2}{2} = k$.

Je třeba rozlišit dva případy:

I. Je-li n sudé, je $\nu = \frac{n + 2}{2}$ celé, a proto hledané minimum je podle (7) a (8)

$$s_\nu = s_1 - \frac{n^3}{8}.$$

II. Je-li n liché, není $\frac{n+2}{2}$ celé číslo. Minimum s_k nastane pro nejbližší celočíselné hodnoty k ; je to $k = \frac{n+1}{2}$ nebo $h = \frac{n+3}{2}$, což jsou skutečně celá čísla.

Minimum pak je

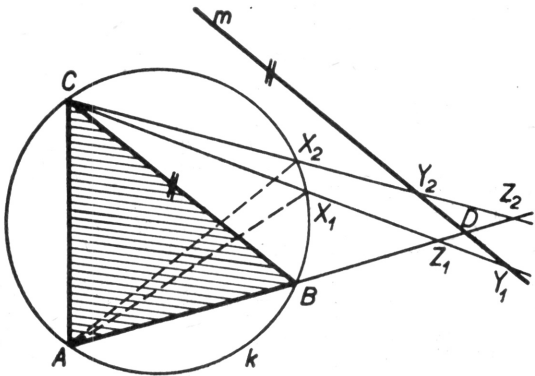
$$s_k = s_1 - \frac{n^3 - n}{8}.$$

4. Do kružnice k je vepsán ostroúhlý trojúhelník ABC . Přímka m je vnější přímkou kružnice k , je rovnoběžná s BC a protíná polopřímku AB v bodě D .

a) Je-li X bod kružnice k ležící uvnitř toho oblouku BC , který neobsahuje bod A , a je-li Y průsečík přímek CX , m , pak body A , D , X , Y leží na jisté kružnici ω . Dokažte.

b) Vyšetřete vzájemnou polohu kružnice κ a přímky m v případě, že body C, D, X leží v přímce.

Řešení (obr. 31).



Obr. 31.

a) Dokážeme větu předně pro situaci, že body X, Y jsou odděleny přímkou AB (na obr. 31 body X_1, Y_1). Pak trojúhelníky Z_1BC, Z_1DY_1 jsou homotetické podle středu Z_1 (tj. průsečíku CX, AB). Proto platí

$$\sphericalangle DY_1Z_1 = \sphericalangle DY_1X_1 = \sphericalangle BCX_1. \quad (1)$$

Protože body A, C náležejí témuž oblouku $\widehat{BX_1}$, je (podle věty o obvodových úhlech)

$$\sphericalangle BCX_1 = \sphericalangle BAX_1 = \sphericalangle DAX_1. \quad (2)$$

Spojením (1), (2) plyne, že

$$\sphericalangle DY_1X_1 = \sphericalangle DAX_1,$$

tj. body A, X_1, D, Y_1 leží na kružnici, kterou nazveme κ .

Jestliže přímka AB neodděluje body X, Y (na obr. 31 body X_2, Y_2), ale existuje průsečík Z_2 přímek CX_2, AB , pak postupujeme jako v předchozím případě. Homotetické podle středu Z_2 jsou trojúhelníky Z_2DY_2, Z_2BC ; odtud odvodíme

$$\sphericalangle X_2AB = \sphericalangle X_2AD = \sphericalangle Z_2Y_2D,$$

tj.

$$\sphericalangle X_2AD + \sphericalangle X_2Y_2D = 180^\circ. \quad (3)$$

Protože čtyřúhelník ADY_2X_2 je konvexní, je tětíkový, tj. body A, D, Y_2, X_2 leží na kružnici κ .

Je-li $CX \parallel AB$ (X_3 na obr. 32), nevznikne bod Z . V tomto případě však je opět $\sphericalangle X_3CB = \sphericalangle X_3AB = = \sphericalangle X_3AD$ (obvodové úhly) a mimoto $\sphericalangle X_3CB = = \sphericalangle Y_3CB = \sphericalangle Y_3DB = \sphericalangle Y_3DA$ (protější úhly rovnoběžníku BDY_3C); proto platí

$$\sphericalangle X_3AD = \sphericalangle Y_3DA,$$

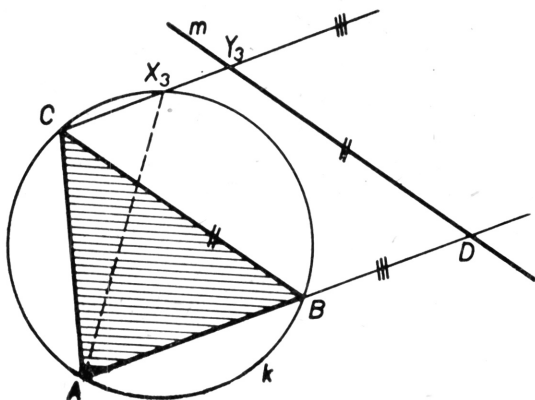
lichoběžník ADY_3X_3 je rovnoramenný, a tedy tětíkový.

b) Zbývá vyšetřit situaci, kdy body C, X, D leží v přímce (X_4 na obr. 33). Zvolíme bod Q přímky m tak, aby ležel v polorovině ABC ; pak platí

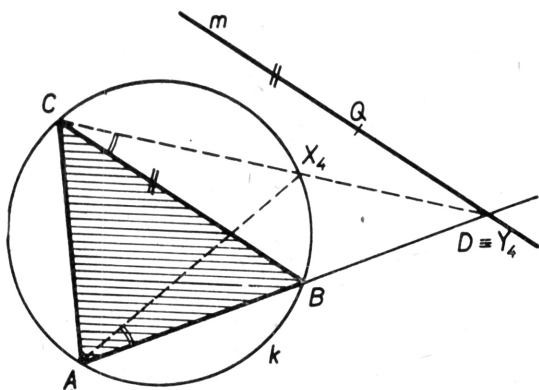
$$\sphericalangle QDX_4 = \sphericalangle QDC = \sphericalangle DCB = \sphericalangle X_4CB; \quad (4)$$

podle věty o obvodových úhlech je však

$$\sphericalangle X_4CB = \sphericalangle X_4AB = \sphericalangle X_4AD. \quad (5)$$



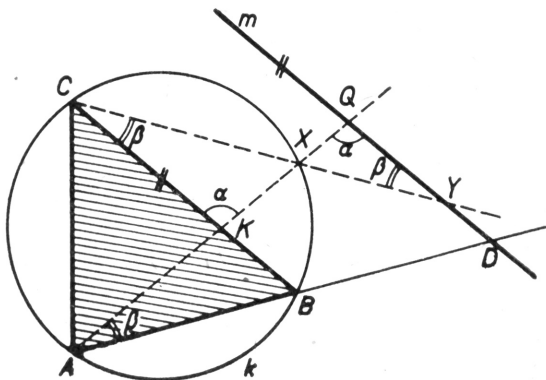
Obr. 32.



Obr. 33.

Spojíme-li (4), (5), dostaneme vzťah $\sphericalangle X_4AD = \sphericalangle QDX_4$. Odtud vyplýva, že kružnice κ prochádzajúcej body A, D, X_4 sa dotýká v bode D priamky m .

Iné riešenie. a) Východzia situácia je naznačená na obr. 34, kde okrem toho K znamená priesečník priamky AX so stranou BC a Q priesečník priamky AX s priamkou m . Keďže $BC \parallel m$, vyplýva stade, že $\sphericalangle CKX =$



Obr. 34.

$= \sphericalangle XQY$ a $\sphericalangle XCK = \sphericalangle QYX$, pretože sú to uhly striedavé. Uhly $\sphericalangle XCB$ a $\sphericalangle XAB$ sú obvodové uhly prislúchajúce tomu istému oblúku kružnice k , preto sú zhodné. Z toho vyplýva, že $\triangle XYQ \sim \triangle DAQ$ (podľa vety *uu*). Z podobnosti oboch trojuholníkov vyplýva:

$$QX : QY = QD : QA \text{ alebo } QX \cdot QA = QD \cdot QY. (1)$$

Zo vzťahu (1) vyplýva na základe vzťahu pre mocnosť bodu ku kružnici, že body A, X, D, Y ležia na kružnici κ .

b) Ak body C, X, D, Y ležia na priamke, tou istou úvahou dostaneme, že $\triangle XDQ \sim \triangle DAQ$, odkiaľ $QX : QD = QD : QA$ čiže $QA \cdot QX = QD^2$, čo znamená, že priamka m sa dotýka kružnice κ v bode D .

Riešil Erich Wiszt,
III.b SVŠ Banská Bystrica.

VI. Devátá mezinárodní matematická olympiáda

1. NĚKOLIK VŠEOBECNÝCH POZNÁMEK, ZEJMÉNA ORGANIZAČNÍCH

Devátá olympiáda, která se konala ve dnech 3. až 12. července 1967 v Jugoslávii, v černohorském městě Cetinji a na pobřeží Jaderského moře, byla pozoruhodná v několika směrech. Kromě tradičních účastníků — devíti zemí socialistického tábora (*Bulharska, Československa, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, Německé demokratické republiky, Polska, Rumunská a Sovětského svazu*) se jí zúčastnily letos poprvé i čtyři západní státy (*Anglie, Francie, Itálie a Švédsko*)*). Při oficiálním jednání i při soukromých rozhovorech se ukázalo, že zástupci západních zemí mají dosti odlišné názory na koncepci matematických soutěží a na matematickou náplň olympiád. Zdá se, že rostoucí počet účastnických zemí a různost názorů povede k opatření, o kterém se mluvilo již na moskevském kongresu r. 1966: že totiž pořádání soutěže se bude musit ujmout některá mezinárodní organizace, pravděpodobně Mezinárodní matematická unie.

Při IX. MMO učinila pořadatelská země pokus zorganizovat *malé symposium o vyučování matematice*, jak navrhl r. 1966 v Sofii bulharský ministr školství Gončev. I když symposium nemohlo být pro krátkost času dobře připraveno a musilo se ve značné míře improvizovat, byl to počín dobrý; došlo k výměně řady informací, zejména o matematických soutěžích v jednotlivých zemích; velmi otevřeně se tu vyslovily i názory na pojetí těchto soutěží. Bylo slíbeno, že sdělení účastníků symposia budou jugo-

*) Jména vedoucích delegátů i jejich zástupců jsou v **tabulce 1**.

slávským přípravným výborem rozmnožena a rozeslána všem účastnickým zemím.

Jugoslávský svazový sekretariát pro vzdělání a kulturu svěřil pořádání olympiády matematické společnosti (Savez društava matematicara, fizičara i astronoma Jugoslavije); jejím předsedou je *akademik Danilo Blanuša* ze Zagreba, generálním sekretářem dr. *Vojin Dajović*, profesor bělehradské university. Předsedou Jury (mezinárodní komise) byla dr. *Milica Ilić-Dajović*, také profesorka bělehradské university. Koordinování klasifikace žákovských prací prováděla osmičlenná skupina jugoslávských koordinátorů, vesměs vysokoškolských učitelů, v jejímž čele stál *Milorad Bertolino*, docent bělehradské university.

Přípravný výbor umístil soutěž vhodně do klidného města *Cetinje*, obklopeného svéráznou černohorskou krajinou, která byla většině účastníků zcela neznáma; část prací jury se však konala v *Budvě*, na nejjižnějším cípu jugoslávské riviéry, na okouzlujícím pobřeží Jadranu, které však v plné sezóně neposkytovalo právě nejlepší pracovní podmínky.

Devátá mezinárodní matematická olympiáda se konala pod protektorátem *presidenta J. B. Tita* a za aktivního zájmu *ministra školství Černohorské republiky*; o tom bude ještě zmínka při popisu průběhu soutěže.

Hned na tomto místě je vhodné zmínit se o budoucí olympiádě. Při zasedání Jury a při jednání symposia byla přednesena *dvě pozvání na desátou olympiádu*: doc. *Morozova* pozvala účastníky jménem vlády své země do Moskvy; obdobné pozvání přednesl i rumunský delegát *prof. Ionescu*. Oba delegáti se později dohodli, že X. MMO bude uspořádána v Moskvě. Jury tuto dohodu přijala a doporučila, aby na X. MMO byly přizvány další západní státy, zejména Norsko, Dánsko, Belgie, Holand-

sko, popříp. i USA. Dále doporučila Jury, aby se XI. MMO konala v Bukurešti.

Letošní olympiáda probíhala v podstatě ještě podle statutu, navrženého v r. 1962 Československem; zdá se však, že Sovětský svaz navrhne v příštím roce některé organizační změny (možná i snížení počtu účastníků z jednotlivých zemí) a že předem prokoresponduje připravované změny s pozvanými zeměmi.

2. O MATEMATICKÉ NÁPLNI SOUTĚŽE

Jugoslávci rozeslali pozvání na IX. MMO poměrně pozdě; tím se asi stalo, že některé země poslaly návrhy soutěžních úloh opožděně, nebo je nezaslaly vůbec. Přípravný výbor pak nemohl podle slov předsedkyně jury v krátké době připravit několik promyšlených variant šestic soutěžních úloh, a zejména nemohl zpracovat autorská řešení v světových jazycích (za oficiální jazyky byly prohlášeny angličtina, francouzština, italština, němčina, ruština). Za této situace měli členové jury při volbě úloh práci velmi svízelnou; tak se stalo, že úlohy nebyly vybrány nejvhodněji a také jejich texty a ohodnocení maximálním počtem bodů nebyly bez nedostatků.

Uvádíme *české znění textů úloh*, které bylo pořízeno překladem z francouzštiny a němčiny; některé neobratnosti v textu vznikly tím, že byl text schválený mezinárodní komisí přeložen pokud možno doslovně. V závorkách je uvedena země, která úlohu navrhla, a nejvyšší počet bodů, kterým mohla být úloha oceněna.

1. den (5. července 1967)

1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB , AD mají po řadě délky a , 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α .

Trojúhelník ABD nechť je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A, B, C, D pokrývají*) rovnoběžník $ABCD$ právě tehdy, když platí

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$

Dokažte.

(Polsko, 6 b.)

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

(Československo, 7 b.)

3. Buďte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$. Dokažte.

(Anglie, 8 b.)

2. den (6. července 1967)

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0 B_0 C_0$ a $A_1 B_1 C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC , podobných trojúhelníku $A_1 B_1 C_1$ (tak, že vrcholům A_1, B_1, C_1 odpovídají po řadě vrcholy A, B, C) a opsaných trojúhelníku $A_0 B_0 C_0$ tak, že strany AB, BC, CA procházejí po řadě body C_0, A_0, B_0 . Ze všech takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

(Itálie, 6 b.)

*) To znamená, že každý bod rovnoběžníku náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

5. Budiž dána posloupnost

$$c_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_8,$$

$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2,$$

.....

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n,$$

.....

kde $a_1, a_2, \dots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Necht' dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n , pro která je $c_n = 0$.

(Sovětský svaz, 7 b.)

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno posledních n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

(Maďarsko, 8 b.)

Několik poznámek k úlohám. Úloha 1 byla pěkná a vhodná; k textu však bylo třeba připojit vysvětlení slova „*pokrývání*“. Úloha připouštěla řadu různých způsobů řešení (metoda souřadnic nebyla právě nejvhodnější); zdá se, že byla obodována příliš nízkou, což se ostatně ukázalo i při jejím korigování. Úloha 2 byla pro stručnost textu i pro jasnost logické struktury řešení uznávána většinou delegátů za velmi vhodnou. Úloha 3 spojuje prvky kombinatoriky a nauky o dělitelnosti; její řešení se opírá o zcela jednoduchý výpočet a o jedinou pomocnou větu, že totiž součin v po sobě následujících přirozených čísel je dělitelný číslem v !

Zcela nevhodná byla úloha 4, hlavně v té formulaci, v které byla dána. Sváděla žáky k tomu, aby ji řešili primitivně, aby si nevšíмали geometrických míst vrcholů A , B , C , a zejména aby zanedbávali otázku existence v první i druhé části úlohy. Bez existenčních důkazů je řešení velmi jednoduché, ale neúplné. Úplné řešení je dosti složité.

Úloha 5 byla beze sporu nejobtížnější; už proto, že k jejímu řešení je třeba úsudků obvyklých v matematické analýze, na něž nejsou žáci středních škol zvyklí. I formulace úlohy mohla být jiná (dokažte, že pro všechna lichá n platí $c_n = 0$). Toto znění by bylo lépe odpovídalo i hodnocení úlohy sedmi body.

Text úlohy 6 vznikl přeformulováním textu úlohy o rozdělení dědictví mezi n synů. Reálná situace uvedená v textu je poněkud násilná a neživotná. Výsledek je neúměrně jednoduchý a nezajímavý vzhledem k složitosti řešení. Řešení $n = 6$, $m = 36$ lze uhodnout; úkolem pak je jedinečně dokázat, že úloha nemá jiné řešení.

Celek soutěžních úloh obsahuje tři úlohy geometrické (1, 2, 4), což delegáti západních států nepřijali právě sympaticky. Dále je tu opravdový nedostatek „řádné algebry“ i trigonometrie, lépe řečeno goniometrie; v úloze 1 se vyskytuje trigonometrie jen okrajově.

Úlohy byly vybrány v duchu dosavadní koncepce z různých úseků středoškolské matematiky. Francouzský delegát *prof. Adler* (který se neúčastnil vybírání úloh, neboť francouzská delegace přijela později) kritizoval soutěžní úlohy asi takto: tematicky jsou zastaralé, netvoří logicky a tematicky souvislý celek, ale jakousi tříšť a neumožňují účastníkovi soutěže zvolit si úlohy z těch úseků středoškolské matematiky, na které se při svém individuálním studiu zaměřil. Z těchto námitek je asi

zhruba patrný odchylný názor některých západních zemí na koncepci olympiády; jsou to hlavně země románské sféry, ovlivňované silně bourbakismem.

3. ŘEŠENÍ SOUTĚŽNÍCH ÚLOH

1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB , AD mají po řadě délky a , 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α . Trojúhelník ABD necht' je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A , B , C , D pokrývají rovnoběžník*) $ABCD$ právě tehdy, když platí

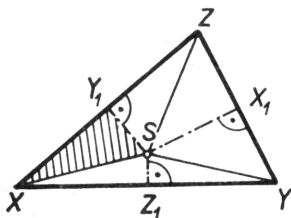
$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$

Dokažte.

Řešení. a) Nejprve dokážeme pomocnou větu **P**:

Budiž XYZ ostroúhlý trojúhelník, r poloměr kružnice jemu opsané. Pak tři kruhy se středy X , Y , Z o poloměru ϱ pokrývají trojúhelník XYZ právě tehdy, když platí $\varrho \geq r$.

Důkaz. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku XYZ (obr. 35); protože je trojúhelník XYZ ostro-



Obr. 35.

*) To znamená, že každý bod rovnoběžníku náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

úhlý, náleží bod S jeho vnitřku. Označme dále X_1, Y_1, Z_1 paty kolmic spuštěných z bodu S po řadě na přímky YZ, ZX, XY . Protože je trojúhelník XYZ ostroúhlý, padnou body X_1, Y_1, Z_1 do vnitřku příslušných stran. Je-li $\varrho < r$, pak bod S nenáleží žádnému z kruhů $K_X = (X; \varrho), K_Y = (Y; \varrho), K_Z = (Z; \varrho)$. Je-li $\varrho \geq r$, pak bod S náleží každému z kruhů K_X, K_Y, K_Z . Protože je $XY_1 < XS$, náleží také bod Y_1 kruhu K_X , a tedy všechny body (vyšrafovaného) trojúhelníku XY_1S náleží kruhu K_X . Obdobně se dokáže, že každý z ostatních trojúhelníků $XZ_1S, YZ_1S, YX_1S, ZX_1S, ZY_1S$ náleží některému z kruhů K_X, K_Y, K_Z .

Tím je pomocná věta **P** dokázána.

b) Necht' jednotkové kruhy K_A, K_B, K_C, K_D se středy A, B, C, D pokrývají rovnoběžník $ABCD$. Pak kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD . Kdyby tomu totiž tak nebylo, platila by podle pomocné věty **P** nerovnost $1 < r$, kde r značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABD . Pro střed S této kružnice by tedy platilo

$$r = AS > 1, \quad CS \leq 1, \quad (1)$$

neboť bod S by podle předpokladu náležel kruhu K_C . Z obr. 36, v němž je BDC' trojúhelník souměrně sdružený s trojúhelníkem BDC podle přímky BD , plyne

$$AS = C'S < CS, \quad (2)$$

neboť bod S leží uvnitř poloroviny BDA opačné k BDC . Z (1) dostaneme $CS < AS$, což je ve sporu s (2).

c) Protože kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD , platí podle pomocné věty **P** nerovnost $r \leq 1$. Vypočteme r ; podle kosinové věty a podle známého vzorce je

$$BD^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha, \quad (3)$$

$$BD = 2r \sin \alpha.$$

Vyloučíme-li z rovnic (3) BD a použijeme-li vztahu $r \leq 1$, vyjde

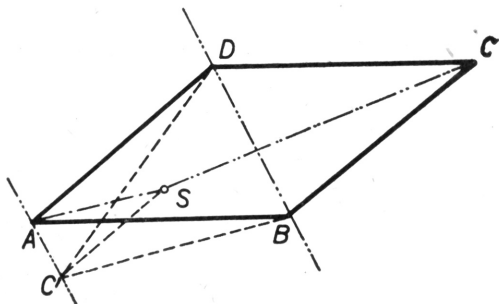
$$a^2 + 1 - 2a \cos \alpha \leq 4 \sin^2 \alpha,$$

neboli

$$a^2 - 2a \cos \alpha + 1 - 4 \sin^2 \alpha \leq 0,$$

neboli

$$(a - \cos \alpha)^2 \leq 3 \sin^2 \alpha. \quad (4)$$



Obr. 36.

Protože trojúhelník ABD je ostroúhlý, padne pata jeho výšky spuštěné z vrcholu D mezi body A, B ; proto je $a > \cos \alpha$ a z nerovnosti (4) dostaneme

$$a - \cos \alpha \leq \sqrt{3} \sin \alpha,$$

neboli

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha. \quad (5)$$

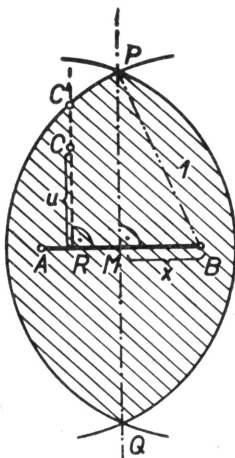
d) Obráceně, platí-li (5), platí i (4); odtud dostaneme obrácením postupu $4r^2 \sin^2 \alpha = BD^2 \leq 4 \sin^2 \alpha$, tj. $r \leq 1$. Z toho vyplývá podle pomocné věty **P**, že kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD . Užijeme-li souměrnosti podle průsečíku úhlopříček AC, BD ,

zjistíme, že kruhy K_A, K_B, K_C, K_D pokrývají rovnoběžník $ABCD$.

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte.

Řešení. Budiž $ABCD$ tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = 2x \leq 1$, $AC \leq 1$, $AD \leq 1$, $BC \leq 1$, $BD \leq 1$, $CD > 1$. Označme u, v délky výšek trojúhelníků ABC , ABD , spuštěných na stranu AB .

Budiž ϱ rovina stěny ABC . Pak vrchol C náleží vyšrafované části roviny ϱ , která je průnikem jednotkových kruhů se středy A, B (obr. 37).



Obr. 37.

Označíme-li body P, Q, M, C', R podle obr. 37, je zřejmé

$$u = CR \leq C'R \leq PM = \sqrt{1 - x^2}$$

neboli

$$u \leq \sqrt[3]{1 - x^2}. \quad (6)$$

Obdobně dostaneme z trojúhelníku ABD

$$v \leq \sqrt[3]{1 - x^2}. \quad (7)$$

Protože výška čtyřstěnu $ABCD$ spuštěná z vrcholu D má nejvýše velikost v (jsou-li stěny ABC , ABD navzájem kolmé), platí pro objem y čtyřstěnu $ABCD$ tento odhad

$$y = \frac{1}{3} xuv,$$

neboli podle (6), (7)

$$y \leq \frac{1}{3} (x - x^3). \quad (8)$$

Naším úkolem je najít maximum funkce $\frac{1}{3} (x - x^3)$ v intervalu $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Dokážeme, že tato funkce je v uvedeném intervalu rostoucí. Skutečně, je-li $x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$, platí

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (x_2 - x_2^3) - \frac{1}{3} (x_1 - x_1^3) = \\ &= \frac{1}{3} (x_2 - x_1) (1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2) \geq \\ &\geq \frac{1}{3} (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{12} (x_2 - x_1) > 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{1}{3} (x_2 - x_2^3) > \frac{1}{3} (x_1 - x_1^3).$$

Ze vztahu (8) pak dostaneme pro $x = \frac{1}{2}$

$$y \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}.$$

Tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = AC = AD = BC = BD = 1$ a jehož stěny ABC , ABD jsou navzájem kolmé, má objem $\frac{1}{8}$ a jeho hrana CD má délku $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$.

Tím je dokázána věta z úlohy 2 a zároveň je ověřeno, že existuje tetraedr maximálního objemu $\frac{1}{8}$.

3. Buďte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$. Dokažte.

Řešení. a) Nejprve zjistíme rozepsáním součinu $c_1 c_2 \dots c_n$, že platí

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n = n! (n + 1)! \quad (9)$$

Dále vypočteme

$$c_{m+\lambda} - c_k = m + \lambda - k + (m + \lambda)^2 - k^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} c_{m+\lambda} - c_k &= m + \lambda - k + (m + \lambda - k)(m + \lambda + k) = \\ &= (m + \lambda - k)(m + \lambda + k + 1); \end{aligned} \quad (10)$$

přítom λ je libovolné přirozené číslo. Pomocí rovnosti (10) upravíme daný součin takto:

$$P = (c_{m+1} - c_k) \cdot (c_{m+2} - c_k) \cdot \dots \cdot (c_{m+n} - c_k) = P_1 P_2,$$

kde

$$\begin{aligned}P_1 &= (m + 1 - k) \cdot (m + 2 - k) \cdot \dots \cdot (m + n - k), \\P_2 &= (m + k + 2) \cdot (m + k + 3) \cdot \dots \cdot (m + k + n + 1).\end{aligned}\quad (11)$$

Součin P_1 obsahuje n za sebou jdoucích celých čísel. Je-li některé z těchto čísel nula, je $\frac{P_1}{n!} = 0$, tj. číslo celé.

Není-li žádný z činitelů P_1 roven nule, je P_1 až na znamení rovno součinu n po sobě jdoucích přirozených čísel a pak je také $\frac{P_1}{n!}$ číslo celé. Platí totiž pro libovolná přirozená čísla α, β , že

$$\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdot \dots \cdot (\alpha + \beta)}{\beta!} = \binom{\alpha + \beta}{\beta}$$

je číslo celé.

Tím je dokázáno, že součin P_1 je vždy dělitelný číslem $n!$

b) Nyní budeme vyšetřovat součin $(m + k + 1)P_2$. Je to součin $n + 1$ po sobě jdoucích přirozených čísel, proto je podle předchozího dělitelný číslem $(n + 1)!$ Platí tedy

$$(m + k + 1)P_2 = q \cdot n! (n + 1), \quad (12)$$

kde q je přirozené číslo. Pravá strana (12) je dělitelná prvočíslem $m + k + 1$. Protože je $m + k + 1$ větší než každé z čísel $1, 2, \dots, n + 1$, je $m + k + 1$ dělitel čísla q , tj.

$$q = r(m + k + 1), \quad (13)$$

kde r je přirozené číslo. Dosadíme-li z (13) do (12) a krátíme-li číslem $m + k + 1$, vyjde

$$P_2 = r \cdot (n + 1)!,$$

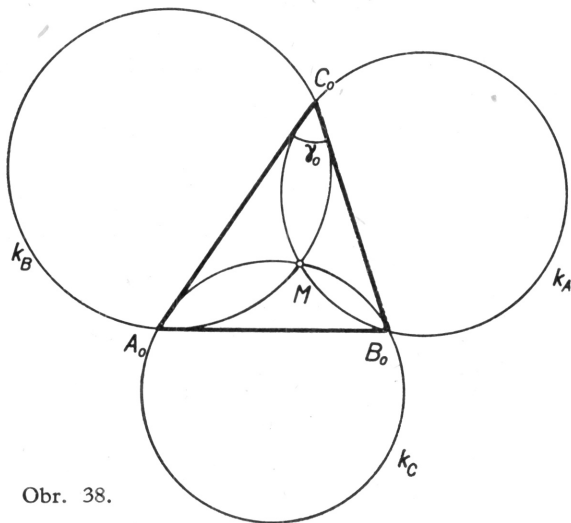
tj. součin P_2 je dělitelný číslem $(n + 1)!$.

Podle (11) je tedy součin $P = P_1 P_2$ dělitelný číslem $n!(n+1)!$, tj. podle (9) je součin P dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$, jak jsme měli dokázat.

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0 B_0 C_0$ a $A_1 B_1 C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC , podobných trojúhelníku $A_1 B_1 C_1$ (tak, že vrcholům A_1, B_1, C_1 odpovídají po řadě vrcholy A, B, C) a opsaných trojúhelníku $A_0 B_0 C_0$ tak, že strany AB, BC, CA procházejí po řadě body C_0, A_0, B_0 . Ze všech takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

Řešení. a) Dokážeme nejprve pomocnou větu **P**:

Je-li $A_0 B_0 C_0$ ostroúhlý trojúhelník a jsou-li $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ tři ostré úhly, pro něž platí $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, pak



Obr. 38.

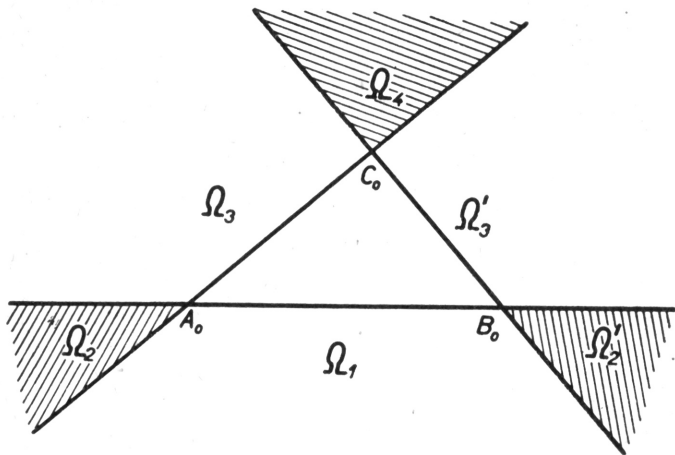
existuje uvnitř trojúhelníku $A_0B_0C_0$ jediný bod M , z něhož je vidět úsečky A_0B_0 , B_0C_0 , C_0A_0 po řadě pod úhly $\pi - \gamma_1$, $\pi - \alpha_1$, $\pi - \beta_1$.

Sestrojme kružnice k_A , k_B , k_C takto: k_A prochází body B_0 , C_0 a z každého jejího bodu ležícího v polorovině $B_0C_0A_0$ je vidět úsečku B_0C_0 pod úhlem $\pi - \alpha_1$. Cyklickou záměnou dostaneme kružnice k_B , k_C (obr. 38).

Kružnice k_A , k_B se nedotýkají v bodě C_0 . Jinak by totiž platilo podle vlastností úsekových úhlů $\pi - \alpha_1 + \gamma_0 + \pi - \beta_1 = 2\pi$ neboli $\gamma_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1$, což je nemožné, neboť

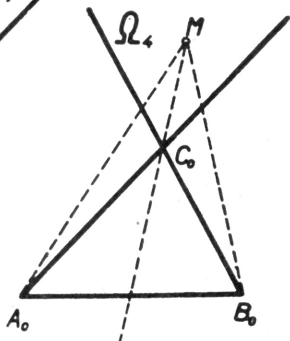
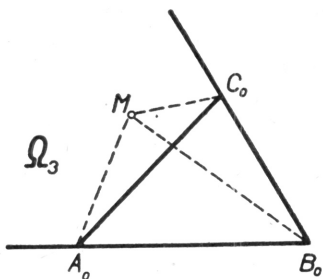
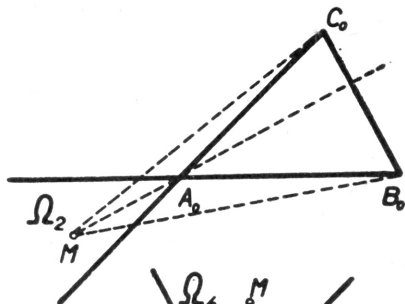
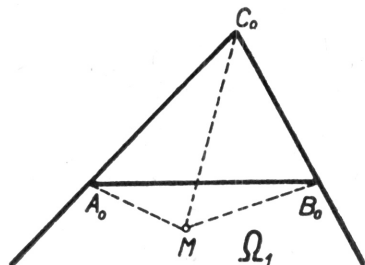
$\gamma_0 = \angle A_0C_0B_0$ je ostrý, $\pi - \gamma_1$ tupý.

Kružnice k_A , k_B se tedy protnou mimo bod C_0 ještě v dalším bodě M . Dokážeme, že bod M leží uvnitř trojúhelníku $A_0B_0C_0$; vyvrátíme totiž, že by bod M náležel některé z šesti (uzavřených) oblastí označených na obr. 39 písmeny Ω_1 , Ω_2 , Ω_2' , Ω_3 , Ω_3' a Ω_4 .



Obr. 39.

Nechť bod M náleží oblasti Ω_1 (obr. 40a); pak je $\sphericalangle A_0MB_0 = \sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \pi - \beta_1 + \pi - \alpha_1 = \pi + \gamma_1$; avšak $\sphericalangle A_0MB_0 \leq \pi$, což je spor.



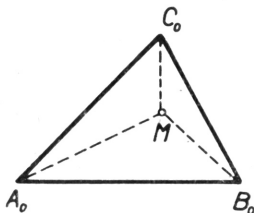
Obr. 40 abcd.

Nechť bod M náleží oblasti Ω_2 ; pak je (obr. 40b) $\sphericalangle C_0MB_0 < \sphericalangle C_0A_0B_0 = \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$; avšak $\sphericalangle C_0MB_0 = \pi - \alpha_1 > \frac{\pi}{2}$, což je opět spor. Obdobně se vyloučí oblast Ω_2' .

Leží-li bod M v oblasti Ω_3 (obr. 40c), je $\sphericalangle A_0MC_0 > \sphericalangle B_0MC_0$, tj. $\beta_1 > \pi - \alpha_1$, což je nemožné, neboť

$\beta_1 < \frac{\pi}{2}$, $\pi - \alpha_1 > \frac{\pi}{2}$. Obdobně se vyloučí oblast Ω_3' .

Leží-li konečně bod M v oblasti Ω_4 (obr. 40d), je $\sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \sphericalangle A_0MB_0 < \sphericalangle A_0C_0B_0$, tj. $\beta_1 + \alpha_1 < \gamma_0$, což je opět spor, neboť $\alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1 > \frac{\pi}{2}$, $\gamma_0 < \frac{\pi}{2}$.



Obr. 41.

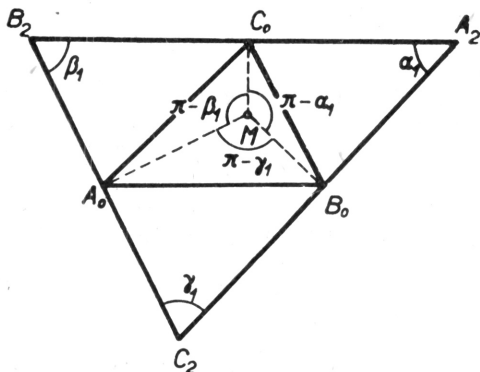
Protože bod M leží uvnitř $\triangle A_0B_0C_0$ (obr. 41), platí $\sphericalangle A_0MC_0 = \pi - \beta_1$, $\sphericalangle B_0MC_0 = \pi - \alpha_1$, $\sphericalangle A_0MB_0 = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1$, tj. bod M je společným bodem kružnic k_A, k_B, k_C .

b) Sestrojme v bodech A_0, B_0, C_0 po řadě kolmice k přímkám MA_0, MB_0, MC_0 . Tyto přímky se protnou po dvou v bodech A_2, B_2, C_2 (obr. 42). Vznikne tak trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vnitřní úhly jsou $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Body A_2, B_2, C_2 leží po řadě na kružnicích k_A, k_B, k_C . Snadno dokážeme, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah ze všech možných trojúhelníků ABC . Trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah, má-li maximální jednu stranu, např. A_2B_2 . Na obr. 43 jsou kružnice k_A, k_B , jejich průsečíky C_0, M , úsečka A_2B_2 a strana AB libovolného trojúhelníku ABC , procházející bodem C_0 . Na témž obrázku je sestrojena úsečka $A'B'$ souměrně sdružená s AB

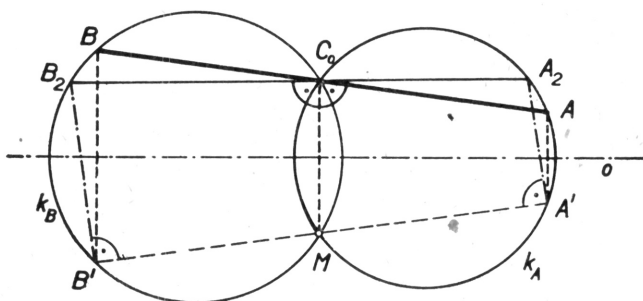
podle středné kružnic k_A , k_B . Z tětíových čtyřúhelníků MC_0A_2A' , MC_0B_2B' plyne, že je $A_2A' \perp A'B'$, $B_2B' \perp A'B'$; proto je $A_2B_2 \geq A'B' = AB$.

Tím je důkaz proveden.

Maximální trojúhelník $A_2B_2C_2$ zajišťuje existenci aspoň jednoho trojúhelníku žádaných vlastností. Intuitivně lze

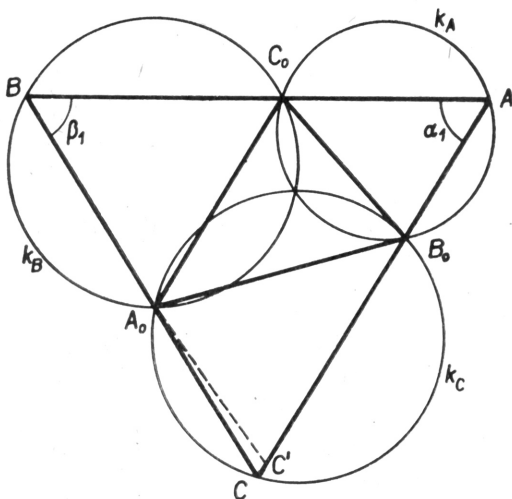


Obr. 42.



Obr. 43.

ovšem sestrojiti další. Zvolíme libovolný bod A na kružnici k_A vně trojúhelníku $A_0B_0C_0$; sestrojíme přímky AB_0 , AC_0 . Protnou-li tyto přímky kružnice k_C , k_B po řadě v bodech C , B ležících vně $\triangle A_0B_0C_0$, pak trojúhelník ABC je trojúhelník žádaných vlastností.



Obr. 44.

Body B , A_0 , C leží totiž v přímce; pak plyne z následujícího důkazu (obr. 44): přímka BA_0 protne polopřímku AB_0 v bodě C' (tento průsečík vznikne, neboť $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$). Z trojúhelníku ABC' dostaneme, že $\sphericalangle BC'A = \pi - \alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1$. Protože bod C' leží podle své konstrukce v polorovině opačné k $A_0B_0C_0$, je $\sphericalangle A_0C'B_0 = \sphericalangle BC'A = \gamma_1$, tj. bod C' náleží kružnici k_C i přímce AB_0 , a splyne tedy s bodem C .

5. Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2, \\ &\vdots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Necht' dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n , pro která je $c_n = 0$.

Řešení. a) Nejprve odvodíme tuto pomocnou větu **P**:
 Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \beta$ ($\nu \geq 1$) taková kladná čísla, že
 $\alpha_1 < \beta, \alpha_2 < \beta, \dots, \alpha_\nu < \beta$. Pak pro všechna přirozená
 čísla n od určitého počínaje platí

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_v^n < \beta^n. \quad (14)$$

Skutečně, podle předpokladu jsou všechna čísla $\frac{\alpha_1}{\beta}, \frac{\alpha_2}{\beta}, \dots, \frac{\alpha_\nu}{\beta}$ kladná a menší než 1. Podle známé vlastnosti exponenciální funkce existují tedy přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_\nu$, takže platí pro všechna $n \geq n_1$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu}, \quad (15a)$$

pro všechna $n \geq n_0$

$$\left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu} \quad (15b)$$

atd.; pro všechna $n \geq n_p$ platí tedy

$$\left(\frac{\alpha_v}{\beta}\right)^n < \frac{1}{r} \quad (15c)$$

Sečtením nerovností (15) dostaneme nerovnost

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n + \dots + \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right)^n < \frac{\nu}{\nu} = 1,$$

neboli po znásobení číslem β^n nerovnost (14). Ta platí pro všechna $n \geq n_0$, kde n_0 je největší z čísel $n_1, n_2, \dots, n_\nu$.

b) Z předpokladu úlohy 5 ($a_1, a_2, \dots, a_8$ nejsou vesměs rovna nule) vyplývá, že $c_n > 0$ pro všechna *sudá* n . Dokážeme, že $c_n = 0$ pro všechna *lichá* n .

Nejprve vynecháme z čísel $a_1, a_2, \dots, a_8$ ta, která jsou rovna nule. Zbývající rozdělíme do dvou skupin: kladná označíme $p_1, p_2, \dots, p_r$, záporná $-q_1, -q_2, \dots, -q_s$. Podle podmínky úlohy platí

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n - q_1^n - q_2^n - \dots - q_s^n = 0,$$

neboli

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n = q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n \quad (16)$$

pro nekonečně mnoho lichých exponentů n .

Čísla $p_1, p_2, \dots, p_r$ i $q_1, q_2, \dots, q_s$ jsou kladná a můžeme předpokládat, že jsou uspořádána sestupně, tj. že platí

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r; \quad q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_s. \quad (17)$$

Kdyby bylo $p_1 > q_1$, bylo by podle (17) $p_1 > q_2, \dots, p_1 > q_s$; podle pomocné věty **P** by pak platilo od určitého exponentu n

$$p_1^n > q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n,$$

a tím spíše

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n > q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n.$$

To znamená, že rovnost (16) by nemohla být splněna pro nekonečně mnoho lichých exponentů n .

Stejně jako jsme vyvrátili nerovnost $p_1 > q_1$, vyvrátíme i nerovnost $q_1 > p_1$; je tedy $p_1 = q_1$. Obdobně dokážeme dále, že je $p_2 = q_2, \dots, p_r = q_s$ ($r = s$). Rovnost (16)

pak platí pro všechny liché exponenty n , tj. $c_n = 0$ pro všechna lichá n .

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

Řešení. Označme z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) počet medailí, které zbyly k -tého dne po udělení k medailí. Pak je

$$z_{k+1} = z_k - \frac{1}{7} z_k - k - 1,$$

neboli po úpravě

$$\frac{6}{7} z_k = z_{k+1} + k + 1. \quad (18)$$

Označme a_k počet medailí vydaných k -tého dne; pak je

$$a_k = k + \frac{1}{7} z_k. \quad (19)$$

Ze vzorců (18), (19) dostaneme snadno rekurentní vzorec pro a_k ; stačí napsat (19) pro $k + 1$

$$a_{k+1} = k + 1 + \frac{1}{7} z_{k+1} \quad (20)$$

a ze vzorců (19), (20), (18) vyloučit z_k, z_{k+1} ; po snadné úpravě vyjde

$$a_k = \frac{7}{6} a_{k+1} - 1. \quad (21)$$

Rozepíšeme-li rovnost (21) pro $k = 1, 2, \dots, n - 1$,

dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{6} a_2 - 1, \\ a_2 &= \frac{7}{6} a_3 - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= \frac{7}{6} a_n - 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Znásobíme-li rovnosti (22) po řadě čísla $1, \frac{7}{6}, \left(\frac{7}{6}\right)^2, \dots$
 $\dots, \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}$ a sečteme, dostaneme vzorec

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} a_n - \left[1 + \frac{7}{6} + \dots + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}\right],$$

který po úpravě a po dosazení $a_n = n$ dostane tvar

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} (n - 6) + 6. \tag{23}$$

Vzorec (23) lze dokázat matematickou indukcí z rekurentní formule (21).

Protože je $n > 1$, plyne z (23), že číslo n je násobek šesti. Jedno řešení je $n = 6$, $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 6$, $m = 36$ (vypočteme z (22)).

Je-li $n > 6$, položíme $n = 6k$, kde k je přirozené číslo větší než 1. Pak koeficient $n - 6 = 6(k - 1)$ v (23) je dělitelný mocninou $6^{n-1} = 6^{6k-1}$. Protože pro každé $k > 1$ platí

$$6k - 1 > k - 1,$$

není koeficient $6(k - 1)$ dělitelný mocninou 6^{6k-1} .

Úloha má tedy jediné řešení $n = 6$, $m = 36$.

4. VÝSLEDKY SOUTĚŽE

Přehled bodů, které získali jednotliví žáci, ukazuje **tabulka 2**. Z tabulky je patrné, že francouzské družstvo mělo jen pět žáků, italské jen šest. Přitom Italové se zúčastnili obou soutěžních prací, Francouzi jen druhého dne; mimoto přijeli v noci před 6. červencem, žáci tedy byli unavení a nevyspalí. Proto jsou výsledky Francouzů iregulární. Naproti tomu u Italů lze dosažený výsledek přepočíst znásobením koeficientem $\frac{8}{6}$; tak dostaneme pravděpodobný počet bodů 147.

I když se stále zdůrazňuje, že mezinárodní olympiáda je soutěží jednotlivců, vyskytuje se vždy při hodnocení poslední sloupec tabulky 2, který udává celkové počty bodů jednotlivých účastnických zemí a který dovoluje sestavit neoficiální „pořadí“. Je otázkou prestiže (snad nezdравé) každého státu, aby byl v tomto pořadí na předním místě.

Tabulka 2 ukazuje, že k tradičním favoritům mezinárodních olympiád přibyl letos další: Anglie. Vznikla tak „silná pětka“ (SSSR, NDR, Maďarsko, Anglie a Rumunsko) celkem vyrovnaných družstev. Od ní se dosti výrazně odlišuje (viz počty bodů) skupina slabších, kterou vede ČSSR s Bulharskem; velmi špatné umístění má letos Polsko, které získalo jen jednu třetí cenu. Do slabší kategorie patří i noví účastníci Itálie a Švédsko, o jejichž perspektivách je však těžko něco prorokovat; stačí uvědomit si neobyčejný vzestup NDR v posledních čtyřech letech.

Nyní ještě něco o cenách: nejvyšší dosažitelný počet bodů pro jednoho žáka byl 42 (žáci, kteří ho dosáhli, jsou v tabulce 2 v rámečcích). Meze pro udělení cen byly v závěrečném zasedání jury stanoveny takto:

- I. cena: 38 až 42 bodů;
- II. cena: 30 až 37 bodů;
- III. cena: 22 až 29 bodů.

Podle tohoto klíče získali účastníci z jednotlivých zemí ceny uvedené přehledně v **tabulce 3**.

Mimo tyto ceny byly uděleny několika žákům zvláštní odměny za originální a elegantní řešení nebo za zobecnění úloh.

Jury chtěla udělit také zvláštní ceny některým francouzským žákům. Prof. Adler však takovéto ceny „pro útěchu“ odmítl s tím, že Francouzi se nepovažují za daných okolností za řádné účastníky soutěže, ale jen za pozorovatele.

5. PRŮBĚH SOUTĚŽE

Ačkoli pozvání na IX. MMO došlo z Jugoslávie počátkem dubna, bylo oznámeno místo konání soutěže se stručným časovým programem teprve kolem 10. června. Tu byla už velmi krátká lhůta pro zajištění dopravy delegací, zejména když Cetinje nemá ani letecké, ani vlakové spojení a doprava autobusem z nejbližších stanic nebo letišť (Dubrovník, Titograd) je odkázána na úzké silnice v hornatém terénu — a to vždy na vzdálenost 40 i více kilometrů.

Delegáti se sjížděli v *Cetinji* 30. června a 1. července. Již dne 1. 7. se konala v moderním hotelu Park, kde byli ubytováni všichni vedoucí delegací, první schůze neúplné jury, na níž byl vyhlášen podrobnější program. Po prohlídce města Cetinje (zejména sídla Nikolova) odjeli odpoledne delegáti na mořské pobřeží do ozdravovny v lázeňském místě *Budva*. Zde začla zasedat jury ráno

dne 2. července v improvizované místnosti; teprve během zasedání se dostavili reprezentanti Itálie, Švédska a Anglie. S anglickou delegací přijel také pracovník ústavu pro řízení vědy *Maurice Goldsmith*, který se zúčastnil jako pozorovatel některých schůzí jury i symposia. Oba dny 2. a 3. července byly věnovány vybírání úloh, jejich ohodnocení body a precizování textů ve světových jazycích. Dne 3. července večer přijeli i zástupci vedoucích (pedagogičtí průvodci), neboť mezitím se sjela v Cetinji žakovská družstva. Také pedagogičtí průvodci zůstali pak ubytováni v Budvě, a tak byli žáci dokonale izolováni v Cetinji, kde bydlili ve dvou hotelích.

Přes noc na 4. července se pořídily překlady textů do národních jazyků, během dopoledne je pedagogičtí průvodci rozmnožili. Od 10 h do 13 h se konala v Budvě první část symposia, večer byla v restauraci na pláži recepcce delegátů, kterou pořádal ministr školství černo-horské republiky *Mišičić*.

Dne 5. července odjeli časně ráno všichni delegáti i jejich zástupci autobusy do Cetinje; zde v budově místního národního výboru zahájila prof. Dajović soutěž. Promluvil ministr *Mišičić* a akademik *Blanuša*. Žáci začali pracovat asi v 9,30 a měli na první tři úlohy 4 hodiny čistého času.

Delegáti a jejich zástupci pak podnikli výlet dopoledne na horu *Lovčen*; odpoledne se vrátili do Budvy, kde vzhledem k pracovním podmínkám nebylo možné začít s korigováním žakovských úloh. Dne 6. 7. ráno odjeli delegáti se svými zástupci do Cetinje k zahájení druhé části soutěže. Sem už zatím dorazila také francouzská delegace vedená prof. Adlerem; francouzští žáci se pak zúčastnili druhé části soutěže. Tato část obsahovala opět tři úlohy, na které měli žáci čtyři hodiny čistého času. Dny 6. až 8. července byly věnovány opravování a koordinování

úloh. Úlohy jugoslávského družstva koordinovali delegáti těch zemí, které navrhly příslušnou úlohu.

Dne 8. července večer v 18.00 hod. začalo závěrečné zasedání jury; proběhlo velmi rychle a hladce. Zde bylo rozhodnuto o udělení cen; sporné případy nebyly. Na této schůzi přednesli doc. Morozova a prof. Ionescu pozvání na příští olympiádu. Ve dnech 7. a 8. července jezdili žáci autobusy do Budvy, kde strávili u moře příjemné dny rekreace.

Neděle 9. července byla věnována celodenní exkurzi všech účastníků do monastýru *Morača* a k *Biogradskému jezeru* (asi 260 km cesty autobusy). Dne 10. července v 10 h pokračovalo symposium, večer byla schůzka s representanty národního výboru města Cetinje. Pondělí 11. července bylo věnováno výletu do *Dubrovníka*, 12. dopoledne bylo volno, pak následoval slavnostní oběd. Odpoledne se konalo za přítomnosti ministra slavnostní rozdělení cen a diplomů, večer byl ples mládeže. Dne 13. července se delegace rozjížděly do svých domovů

Snad i z tohoto stručného vyličení průběhu IX. MMO je patrné, že vyžadovala velké vypětí sil jak od delegátů a jejich zástupců, tak i od jugoslávských organizátorů. Pracovalo se často intenzívně za parných dní od rána do večera, absolvovalo se (i s exkurzemi) na 700 km cest autobusy po obtížných horských serpentínách, které vyžadovaly pevné nervy nejen u řidičů, ale i u cestujících.

Snad na tomto místě je třeba se zmínit o práci aspoň dvou jugoslávských pracovníků: prvním z nich je předsedkyně jury, *prof. Milica Illić-Dajović*, která díky svým jazykovým znalostem řídila všechna jednání obratně, taktně a pohotově; za její výkon jí právem náleží obdiv a uznání. Vskutku obětavým a neúnavným organizačním pracovníkem byl také *prof. cetinjského gymnasia Michal Begović*, jehož rychlé a operativní zásahy rozřešily

mnohou svízelnou situaci. Celkem je třeba konstatovat, že pohostinnost jugoslávských soudruhů byla opravdu slovenská.

6. ČESKOSLOVENSKÁ DELEGACE

Naše delegace se skládala z vedoucího, jeho zástupce a osmi žáků; jejich jména i výsledky, kterých dosáhli, jsou uvedeny v **tabulce 4**.

S výsledky nemůžeme být ani letos spokojeni. Nejméně lze žákům vyčítat malý úspěch v úloze 5 (celkem 18 bodů), neboť s úlohami tohoto druhu se nesetkali ani v školské praxi, ani ve speciální přípravě. Více zaráží slabý výsledek v úloze 3, nejvíce pak nevalný výsledek v úloze 4, kde často nepodali ani intuitivní řešení. Také obě nuly v sloupci 2 jsou velmi zarmucující a skutečnost, že nikdo z našich žáků nerozřešil zcela správně úlohu 1, nás udivuje. Prohlédněme tabulku 4 ještě jednou po řádcích: náš nejlepší žák Bohuš Sivák rozřešil jen jedinou úlohu bez chyby, žádný žák nemá víc než dvě bezvadně rozřešené úlohy. A to je skutečně málo, uvážíme-li, že jsme v loňském školním roce věnovali speciální přípravě olympioniků zvláštní pozornost. Přestože slabý výsledek 3. kola domácí olympiády nám nedával příliš růžové perspektivy, přece jen jsme pokládali naše družstvo za silnější. Dva z účastníků, kteří byli na předních místech 3. kola domácí olympiády, selhali úplně a ani ostatní nepodali očekávaný výkon. Podle skutečné kvality našeho družstva jsme jistě mohli získat 5 až 6 cen, z toho možná i jednu první.

Nezbývá nám než opět pátrat po příčinách našeho poměrně malého úspěchu. A tu musíme zase konstatovat, že naše střední škola, a to i speciální matematické třídy,

neposkytují našim žákům tak dokonalou přípravu jako obdobné školy v zahraničí. Máme v učebním plánu poměrně málo hodin matematického praktika a tedy méně zkušeností a rutiny. Naše osnovy, učebnice, a zejména příkladový materiál je pro nadané žáky málo náročný. Často to platí i o učitelích. Zdá se, že speciální matematické třídy by se měly zřizovat tak jako v zahraničí jen v místech, kde jsou pro to podmínky, a že by v nich měli učit převážně vysokoškolští profesori. Žádná speciální příprava mimoškolní (např. dvě hodiny semináře týdně) nemůže nahradit systematické, náročné a dobře vedené vyučování. Zkusíme sice v školním roce 1967—68 jiný způsob přípravy vybraných talentů, ale zázraky nelze očekávat. Nechceme zde propagovat výchovu matematických žakovských primadon, ale na druhé straně výjimečné nadání mladých lidí pro matematiku je hodnota, jejíž ztrátu si naše společnost nemůže dovolit. Čím dříve se talentovaný žák podchytí (ovšem nikoli předčasnou specializací), tím lépe pro jeho budoucí rozvoj. V tomto směru však mají mnoho dluhů naše devítiletky, které se stále starají více o to, jak doučovat děti zaostávající, než jak podporovat žáky nadané, kteří jsou nadějí národa.

Jako druhá příčina našeho poměrně malého úspěchu se nám jeví opět nedobrá nervový stav našich žáků, jejich malá jistota, sebedůvěra, houževnatost a vytrvalost v překonávání překážek. Tyto záporné vlastnosti jsou způsobovány nebo aspoň posilovány nedostatky ve výchově.

Snad bychom se měli na konci ještě zmínit o některých dosti dramatických okolnostech, které doprovázely naši účast na letošní olympiádě. Přestože informace o místě konání soutěže došly až v polovině června, snažilo se MŠ zajistit čs. delegaci co nejlepší podmínky pro cestu do Cetinje a zpět. Zajistilo obě cesty letadlem, ovšem vzhle-

dem k nedostatku volných míst byla cesta do Jugoslávie stanovena na 29. června, cesta zpět na 12. července. To znamenalo předčasný příjezd a předčasný odjezd. Ačkoli čs. delegace byla odhodlána absolvovat dvoudenní zpáteční cestu vlakem z Titogradu přes Sarajevo, Bělehrad a Budapešť, aby se mohla zúčastnit závěrečných slavností dne 12. července, nepodařilo se tento úmysl provést. Letenky na 12. července nebyly členkou organizačního výboru v Jugoslávii včas vráceny, a tak se musela naše delegace rozloučit dne 11. července v Dubrovniku s ostatními účastníky IX. MMO; nevrátila se už do Cetinje, ale po přenocování odcestovala přes Split do Prahy. Naši žáci byli tak připraveni o dojmy ze slavnostního zakončení i o dárky; jakousi náhradou za to snad jim byla pěkná plavba parníkem z Dubrovniku přes Korčulu a Hvar do Splitu a pohodlný návrat letadlem do Prahy.

Tabulka 1

Vedoucí delegací a jejich zástupci

Země	Vedoucí	Zástupce
Anglie	Robert Lyness, inspektor	dr. Norman Routledge
Bulharsko	prof. Spas Monolov	Stojan D. Budurov, inspektor
ČSSR	doc. Jan Vyšín	dr. František Zítek, CSc.
Francie	prof. André Adler	—
Itálie	prof. Tullio Viola	prof. Angelo Pescarini
Jugoslávie	doc. Dušan Adnadević	Vladimír Mičić, magister
Maďarsko	Endre Hódi, věd. pracov.	prof. István Reiman
Mongolsko	doc. Uržin Sanžmjatav	Aivan Duger, bagš
NDR	prof. Hans-Joachim Weinert	dr. Helmut Bausch
Polsko	prof. Mieczysław Czyzykowski	Andrzej Makowski, magister
Rumunsko	prof. Constantin Ionescu	prof. Zlate Bogdanov
Sovětský svaz	doc. Elena Morozova	Ivan Petrakov, metodik
Švédsko	doc. Lars Inge Hedberg	Lars Brandell, kand. fil.

Tabulka 2

Počty získaných bodů

Země	Počet bodů žáka č.								Celkový počet bodů země
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Anglie	24	28	18	36	34	28	41	22	231
Bulharsko	7	14	24	20	20	11	21	<u>42</u>	159
Československo	16	27	30	24	9	13	11	29	159
Francie	4	10	9	6	12	—	—	—	41
Itálie	20	35	19	7	26	3	—	—	110
Jugoslávie	13	18	11	18	26	22	6	22	136
Maďarsko	34	31	38	33	23	26	38	28	251
Mongolsko	10	11	26	5	6	9	7	13	87
Něm. dem. rep.	<u>42</u>	30	23	<u>42</u>	39	35	13	33	257
Polsko	22	8	12	7	18	5	9	20	101
Rumunsko	34	<u>42</u>	22	17	29	19	28	23	214
Sovětský svaz	37	35	32	<u>42</u>	27	38	39	25	275
Švédsko	16	10	15	28	9	20	14	23	135

Tabulka 3
Přehled udělených cen

Země	Cena			Celkem
	I.	II.	III.	
Anglie	1	2	4	7
Bulharsko	1	—	1	2
Československo	—	1	3	4
Itálie	—	1	1	2
Jugoslávie	—	—	3	3
Maďarsko	2	3	3	8
Mongolsko	—	—	1	1
Německá demokratická republika	3	3	1	7
Polsko	—	—	1	1
Rumunsko	1	1	4	6
Sovětský svaz	3	3	2	8
Švédsko	—	—	2	2
Celkem	11	14	26	51

Tabulka 4

Přehled výsledků československého družstva

Poř. čís.	Jméno žáka	Škola a třída	Počet bodů v úloze č.						Celkový počet bodů	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1.	Petr Kůrka	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	3	0	0	5	0	8	16	—
2.	Pavel Polcar	SVVŠ Velké Meziříčí, 2. r.	5	0	8	3	7	4	27	III
3.	Bohuš Sivák	SVVŠ Zvolen, 1. r.	5	5	8	4	5	3	30	II
4.	Tomáš Mašek	SVVŠ Praha, W. Piecka, 1. r.	5	7	0	3	1	8	24	III
5.	Erich Wiszt	SVVŠ Banská Bystrica, 3. r.	1	2	0	5	1	0	9	—
6.	Martin Macháček	SVŠ Bratislava, Novohradská, 3. r.	1	4	0	5	1	2	13	—
7.	Jan Kastl	SVVŠ Plzeň, 3. r.	1	7	0	0	1	2	11	—
8.	Radovan Gregor	SVVŠ Praha, W. Piecka, 3. r.	3	7	8	3	2	6	29	III
Celkem			24	32	24	28	18	33	159	

OBSAH

<i>I. Šestnáctý ročník celostátní matematické olympiády</i>	3
<i>II. Přípravné úlohy I. kola</i>	21
1. Kategorie A	21
2. Kategorie B	28
3. Kategorie C	34
4. Kategorie D	41
<i>III. Soutěžní úlohy I. kola</i>	49
1. Kategorie A	49
2. Kategorie B	59
3. Kategorie C	66
4. Kategorie D	72
<i>IV. Úlohy II. kola</i>	81
1. Kategorie A	81
2. Kategorie B	86
3. Kategorie C	93
4. Kategorie D	97
<i>V. Úlohy III. kola kategorie A</i>	104
<i>VI. Devátá mezinárodní matematická olympiáda</i>	115



Edice Pomocné knihy pro žáky
Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín a Vlastimil Macháček

ŠESTNÁCTÝ
ROČNÍK
MATEMATICKÉ
OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1968 — Počet stran 149
Odpovědná redaktorka: Květoslava Brázdová
Výtvarný redaktor: Ctirad Bezděk
Technický redaktor: Pavel Leden

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Svoboda, grafické závody, n. p.,
závod 4, Ostrovní 30, Praha 1 — 5,32 AA (text 4,57 AA, grafika
0,75 AA) 5,66 VA — Náklad 4 500 výtisků — Tematická skupina
a podskupina 03/2 — Cena brožovaného výtisku Kčs 6,00
505/21, 852

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze jako svou
publikaci č. 85—0—06

15—131—68 Kčs 6,00

SPN

85-0-06

15-131-68
03/2 Kčs 6,00