

26. ročník matematické olympiády

Jan Vyšín (editor); Jiří Mída (editor); Jozef Moravčík (editor); Lev Bukovský (editor): 26. ročník matematické olympiády. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404680>

Terms of use:

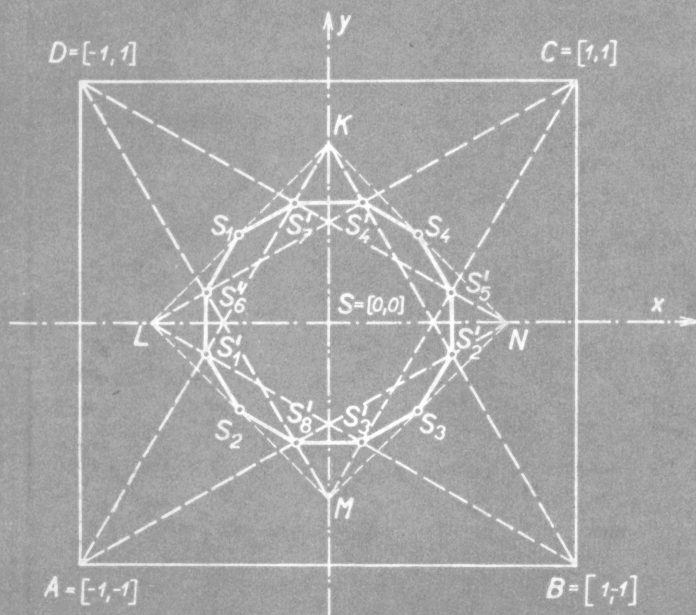
Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Ústřední výbor
 MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
 115 67 Praha 1, Žitná 25
 telefon 22 65 01 - 2

XXVI. ročník matematické olympiády



SPN

DVACÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

 Ústřední výbor
MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
115 67 Praha 1, Žitná 25
telefon 22 66 01 - 3

STÁTNÍ PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Za přispění spolupracovníků zpracovali doc. Jan Vyšín, CSc.,
dr. Jiří Mída, doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.,
a doc. dr. Lev Bukovský, CSc.

Recenzovali dr. Jitka Kučerová a dr. Miroslav Šisler, CSc.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1979

Předmluva

Milí řešitelé, spolupracovníci a příznivci matematické olympiády,

dvacátým šestým ročníkem vstupuje naše celostátní matematická olympiáda (MO) do druhého čtvrtstoletí svého trvání. Víte všichni, že naše olympiáda se liší od některých zahraničních soutěží tím, že je organizačně i obsahově těsně spjata s naší školskou soustavou. Řešitelé jsou rozděleni podle jednotlivých ročníků základních (ZŠ) a středních (SŠ) škol (gymnází i odborných škol) do tzv. kategorií, soutěžní úlohy v jednotlivých kategoriích jsou voleny s přihlédnutím k osnovám příslušného ročníku. Mimoto jsou v tzv. kolech (I., II. a III. u kategorie A a Z) vybírány aspoň některé soutěžní úlohy v návaznosti: tzn. že např. některé úlohy II. kola navazují na úlohy I. kola, a to tematikou, způsobem řešení, znalostmi i určitými poznatky — zkušenostmi. Tato návaznost má jednak řešitelům pomoci v rozřešení úloh klauzurních prací*), jednak je má vést k soustavnějšímu studiu určitých témat. Návaznost ovšem neznamená, že každá úloha klauzurního kola musí být připravena v předchozím kole.

*) Klauzurní práce je soutěž ve II. a III. kole; žáci ji řeší individuálně na rozdíl od I. kola, které má studijní ráz.

Těsná souvislost matematické olympiády se strukturou školy má ovšem za následek, že tuto soutěž citelně zasáhne každá reorganizace školské soustavy. Zažili jsme to při zavedení jedenáctileté střední školy, pak při obnovení čtyřtřídních gymnázií, teď prožíváme novou změnu — zkrácení základní školy z devíti na osm roků.

Řešitelé kategorie Z, kteří dříve pocházeli převážně z 9. ročníku ZŠ, jsou nyní hlavně z 8. ročníku. To znamená, že mají nejen menší fond matematických poznatků, ale jsou i o rok mladší, tj. jejich mentální vyspělost je nižší — jak říkají učeně pedagogové. Ovšem reorganizace zasáhla svým vlivem i kategorii C. Řešitelé kategorie C jsou — aspoň na začátku školního roku — v podstatě na úrovni absolventů 8. ročníku ZŠ, právě tak, jako účastníci kategorie Z jsou vlastně absolventi 7. ročníku ZŠ.

Uvědomíme-li si, že kategorie Z má plnit nejen poslání propagační, ale že má také sloužit při vyhledávání matematických talentů — a zkušenost nám ukázala, že se talenty dají někdy objevit už na základní škole — je tím pro kategorii Z dána jistá linie. Není možné ji naplňovat jen školními úlohami, které dokáže rozřešit každý velmi dobrý žák, ale musíme tam zařazovat i úlohy, na nichž může ukázat své schopnosti i žák s minimální zásobou matematických vědomostí, tj. jakési „matematické úlohy bez matematiky“. Mohou to být např. různé hry, práce s algoritmy, práce se čtvercovou mříží, úlohy o přirozených číslech a pozičních soustavách, jednoduché a vtipné úlohy z kombinatoriky, slovní úlohy apod. Zkrátka měli bychom řešitelům nejnižší kategorie poskytnout všechny příležitosti, aby „matematicky rostli“. Sem patří i nabídnutí vhodné a pří-

stupné studijní literatury; v tom směru jsme např. sbírce Škola mladých matematiků dosud hodně dlužni, vychází v ní málo svazečků vhodných pro nejmladší čtenáře (kategorie Z a C).

Trochu jiná je situace v kategorii C. Zde žáci poměrně rychle dohánějí vynechaný 9. ročník, ale přesto je třeba — zejména v I. kole — značně snížit požadavky. Lze říci, že v kategorii C by se mělo na jedné straně věnovat více pozornosti úlohám z algebraického kalkulu (úpravy výrazů, řešení rovnic a nerovnic s parametry) a snad i konstrukčním úlohám, na druhé straně „praktické logice“, tj. pojmům, metodám dokazování, pro které poskytují i tradiční témata dosti materiálu.

Často se ozývají hlasy, že v MO by se měly vyskytovat úlohy z aplikované matematiky. Musíme však uvážit, že školská matematika má jen velmi omezený okruh rozumných aplikací; jsou to hlavně aplikace finitní matematiky, tj. těch úseků, které pracují s konečnými množinami. Obecně bychom se však asi měli řídit známou zásadou prof. Freudenthala, že „spíše než aplikované matematice máme učit takové matematice, která se dá aplikovat“.

Dobrá předsevzetí ústředního výboru MO pro nejbližší budoucnost lze tedy shrnout asi do těchto hesel:

a) Věnovat více pozornosti odborným SŠ, hlavně školám průmyslovým, a to při výběru soutěžních úloh, při sestavování brožur ŠMM. Je otázka, zda by se do soutěže samé neměly v budoucnosti zařazovat volitelné úlohy „OSS“ určené pro řešitele z odborných středních škol.

b) Zlepšit tematicky vydávanou knižnici ŠMM, zejména rozmnožení počtu svazečků pro mladé čtenáře (kat. C a Z);

styl těchto svázečků se musí podstatně lišit např. od stylu výběrové řady. Publikovat v Rozhledech plánovitě články k podpoře MO. Vhodné články využít i jako materiály pro soutěž samu (úloha prostudovat publikovaný text).

c) Rozvíjet a zlepšovat korespondenční seminář jako studijní formu vhodnou zejména pro řešitele žijící mimo hlavní kulturní centra našeho státu.

d) Udržet návaznost některých úloh II. a III. kola na úlohy předcházejících kol. Ponechat však místo pro invenci řešitelovu i v klauzurních kolech, hlavně v kategorii A.

e) Ve vyšších kategoriích osvěžit tematiku matematické olympiády náměty z novějších partií matematiky, které pronikají na školy pod heslem „modernizace“.

Ústřední výbor MO sám na tyto úkoly nestačí. Doufáme však, že za pomoci všech našich spolupracovníků i řešitelů dosáhneme toho, že naše dobrá předsevzetí nezůstanou na papíru.

Mnoho zdaru čs. matematické olympiádě přeje

ÚV MO

I. Průběh XXVI. ročníku matematické olympiády

1. ORGANIZACE SOUTĚŽE

Vyhlašovatel a pořadatel XXVI. ročníku matematické olympiády byla *ministerstva školství ČSR a SSR s Matematickým ústavem Československé akademie věd, s Jednotou československých matematiků a fyziků, s Jednotou slovenských matematiků a fyziků a se Socialistickým svazem mládeže*. Soutěž poprvé probíhala podle nového organizačního řádu, který byl uveřejněn ve Věstníku ministerstva školství a ministerstva kultury ČSR, roč. XXXII., sešit 8 z 20. srpna 1976.

Účastníci soutěžili celkem ve čtyřech kategoriích: kategorie A byla určena pro žáky 3. a 4. ročníků škol II. cyklu, kategorie B pro žáky 2. ročníků a kategorie C pro žáky 1. ročníků těchto škol. V kategorii Z soutěžili žáci nejvyšších dvou ročníků základních devítiletých škol. Bylo ovšem možné, aby žák soutěžil po schválení příslušným krajským výborem MO, resp. okresním výborem MO, i ve vyšší kategorii, než do které patřil.

2. SLOŽENÍ ÚSTŘEDNÍHO VÝBORU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Funkční období ústředního výboru MO mělo skončit 31. prosince 1976. Obě ministerstva školství však funkční období prodloužila do 31. srpna 1977, tj. do konce XXVI. ročníku MO. Ve XXVI. ročníku pracoval ÚV MO v tomto složení:

Předseda: *doc. Jan Vyšín, CSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. místopředseda: *doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., VŠD, Žilina*

2. místopředseda: *prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., MÚ ČSAV, Praha*

1. jednatel: *Petr Fabinger, pedagogická fakulta UK, Praha*

2. jednatel: *dr. Jiří Mída, pedagogická fakulta UK, Praha*

Zástupce MŠ ČSR: *Václav Šůla*

Zástupce MŠ SSR: *Michal Zöldy*

Zástupce ÚV SSM: *Jana Pomazalová, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno*

Ostatní členové:

dr. František Běloun, KPÚ, Praha

doc. dr. Lev Bukovský, CSc., přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

František Hradecký, Praha

dr. Ivan Korec, CSc., přírodovědecká fakulta KU, Bratislava

doc. dr. Alois Kufner, CSc., MÚ ČSAV, Praha

dr. Vlastimil Macháček, pedagogická fakulta UK, Praha

Olga Maříková, gymnázium, Nad štolou, Praha 7
akademik Josef Novák, MÚ ČSAV, Praha
Vítazoslav Repáš, gymnázium, Novohradská ul., Bratislava
Stanislav Rypáček, gymnázium, Litoměřická, Praha 9
dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV, Praha
Ing. Oldřich Skopal, gymnázium, tř. kpt. Jaroše, Brno
dr. Jiří Šídlo, gymnázium, Sladkovského nám., Praha 3
Miloslav Šmerda, ZDŠ, Bílovice nad Svitavou
František Veselý, Praha
dr. František Zítek, CSc., MÚ ČSAV, Praha

Dalšími členy ÚV MO byli předsedové krajských výborů matematické olympiády. Krajské národní výbory funkční období KV MO neprodlužovaly, takže od 1. 1. 1977 v některých krajích pracovali noví předsedové KV MO.

Praha: *prof. dr. Václav Pleskot*, ČVUT, Praha — do 31. 12. 1976

prof. dr. Karel Drbohlav, DrSc., matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha — od 1. 1. 1977

Středočeský kraj: *Ludmila Tréglová*, gymnázium, Říčany

Jihočeský kraj: *dr. ing. Lada Vaňatová*, Pedagogická fakulta, České Budějovice

Západočeský kraj: *Věra Rádlová*, gymnázium J. Fučíka, Plzeň

Severočeský kraj: *Vladimír Blažek*, Pedagogická fakulta, Ústí n. L. — do 31. 12. 1976

Jiří Slavík, gymnázium, Teplice — od 1. 1. 1977

Východočeský kraj: *dr. Josef Kubát*, gymnázium, Pardubice

Jihomoravský kraj: *dr. Petr Benda*, VUT, Brno — do 31. 12. 1976

dr. Jaroslav Bayer, CSc., VUT, Brno — od 1. 1. 1977

Severomoravský kraj: *prof. dr. Miloslav Zedek*, přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Bratislava: *Tomáš Hecht*, přírodovědecká fakulta KU, Bratislava

Západoslovenský kraj: *doc. dr. Ondrej Šedivý*, Pedagogická fakulta, Nitra

Středoslovenský kraj: *dr. Ladislav Berger*, VŠD, Žilina — do 31. 12. 1976

dr. Pavel Kršňák, CSc., Pedagogická fakulta, Banská Bystrica — od 1. 1. 1977

Východoslovenský kraj: *dr. Martin Gavalec*, přírodovědecká fakulta UPJŠ, Košice

Pracovní předsednictvo ÚV MO tvořili (v abecedním pořadí):

Petr Fabinger, *prof. dr. Miroslav Fiedler*, DrSc., *dr. Jiří Mída*, *doc. dr. Jozef Moravčík*, CSc., *dr. Jiří Sedláček*, CSc., *Václav Šůla*, *doc. Jan Vyšín*, CSc., *dr. František Zítek*, CSc., *Michal Zöldy*.

3. PLENÁRNÍ ZASEDÁNÍ ÚV MO

byla ve XXVI. ročníku MO dvě: podzimní ve dnech 6. a 7. prosince 1976 v Praze, jarní ve dnech 6. a 7. května 1977 v Plzni.

Podzimní zasedání zhodnotilo jubilejní XXV. ročník MO a československou účast na XVIII. mezinárodní matematické olympiádě, která se konala v Rakousku.

K 25. výročí vzniku obdržela MO dva nové putovní poháry. Na poháru, který věnovalo nakladatelství Mladá fronta, je nápis „Vítězi 3. kola kategorie A“. Na návrh

doc. Vyšina se zasedání ÚV MO usneslo, že druhý pohár, jehož dárcem je ÚV SSM, bude určen nejlepšímu československému reprezentantu na mezinárodní matematické olympiádě.

Rozsáhle se diskutovalo o hodnocení práce v MO u pracovníků vysokých škol. Pro tuto činnost není na vysokých školách většinou dostatečné pochopení. Diskuse byla uzavřena ustavením komise pro vypracování *memoranda*, v němž budou ministerstva školství na tuto situaci upozorněna. Memorandum by mělo shrnout všechny obtíže, které brzdí matematickou olympiádu. Jihomoravský KV MO byl pověřen vypracováním přehledu, které všechny činnosti a v jakých termínech se konají v MO.

Dále byla velká pozornost věnována přednáškám a seminářům pořádaným pro účastníky MO v jednotlivých krajích. Je třeba, aby se skutečně vztahovaly k MO; vodítkem pro volbu jejich témat by měly být komentáře k úlohám I. kola MO, které jsou rozesílány z pražského ústředí MO.

Plenární zasedání vyslovalo souhlas se *stanoviskem*, jež bylo jménem ÚV MO předneseno na *konferenci JČSMF o vyučování matematice v období vědeckotechnické revoluce* (Brno 28.—30. 9. 1976). Stanovisko vzniklo z elaborátu předsednictva ÚV MO po uplatnění písemných připomínek členů ÚV MO. Stanovisko je otištěno ve sborníku konference, a proto z něho uvádíme pouze závěrečná doporučení. Bylo jich celkem šest.

1. Založit a budovat archiv úloh pro matematickou olympiádu, zejména pak úloh a problémových situací s reálnou tematikou — a to s pomocí členů obou jednot z technických fakult.

2. Upravit koncepci matematické olympiády a rozšířit její tematiku.

3. Zlepšit vydávání studijní literatury přístupné středoškolákům, využívat při tom časopis *Rozhledy*.

4. Do práce v matematické olympiádě zapojit učitele z fakult univerzitního i technického zaměření.

5. Pokusně posílit algoritmické vyučování na gymnáziích s rozšířeným vyučováním matematice. Zavést na nich kapesní elektronické kalkulátory.

6. Zlepšit péči o budoucí a perspektivní účastníky mezinárodní matematické olympiády s efektivnějším využitím zahraničních zkušeností.

Jarní zasedání se konalo, jak již je tradicí, při příležitosti celostátního III. kola kategorie A. Předseda ÚV MO doc. Jan Vyšín, CSc., vzpomněl, že v průběhu XXVI. ročníku MO dne 9. 1. 1977 zemřel dlouholetý člen ÚV MO s. *František Veselý*, který dal podnět ke vzniku edice „Škola mladých matematiků“. Povstáním a minutou ticha uctili přítomní jeho památku a pověřili předsednictvo ÚV MO zaslat jeho manželce dopis.

Na zasedání se podrobně hodnotil dosavadní průběh XXVI. ročníku MO. Jednotlivé KV MO se zavázaly vypracovat analýzu úloh II. kola XXVI. roč. (kat. A — KV MO Praha, kat. B — KV MO Jihočeského kraje, kat. C — KV MO Severomoravského kraje, kat. Z — KV MO Jihomoravského kraje). Dále bylo rozhodnuto, že ve XXVII. ročníku budou ve II. kole kategorií A, B, C zadávány pouze čtyři úlohy, přičemž dvě z nich budou tvořit dvojici, z níž si řešitel jednu úlohu zvolí. Systém tří dvojic, z nichž se volilo po jedné úloze, se ukázal nevhodný, neboť

mnozí žáci se nedokázali rozhodnout, přebíhali od úlohy k úloze a ztráceli čas.

Ústřední inspektor Václav Šůla poděkoval KV MO Ji-homoravského kraje za vypracování elaborátu o organizačním zajištění MO. Příslušný elaborát se stane podkladem pro jednání MŠ.

Na závěr jednání poděkoval předseda ÚV MO doc. Jan Vyšín, CSc., KV MO Západočeského kraje, jmenovitě pak s. *Věře Rádlové*, za vzorné organizační zajištění soutěže III. kola kategorie A XXVI. roč. MO v Plzni.

4. PRŮBĚH JEDNOTLIVÝCH KOL SOUTĚŽE

Organizace soutěže nebyla proti předešlým ročníkům MO změněna.

I. kolo, tzv. studijní, proběhlo opět ve dvou etapách. Čtyři přípravné úlohy odevzdávali soutěžící všech kategorií svým učitelům matematiky, popř. referentům MO, do 15. listopadu 1976. Úlohy byly opraveny, ale neklasifikovány. Žákům byly vysvětleny chyby, kterých se dopustili. Každý soutěžící se pak mohl zúčastnit soutěžní části I. kola. V této části soutěže, končící pro kategorii A dne 15. ledna 1977 a pro kategorii B a C dne 15. února 1977, museli žáci, aby mohli postoupit do II. kola, vyřešit úspěšně alespoň tři úlohy, přičemž mezi těmito úlohami musela být aspoň jedna z úloh s pořadovými čísly 1, 2, 3 a aspoň jedna úloha ze zbývajících trojice úloh s pořadovými čísly 4, 5, 6. V kategorii Z bylo podmínkou pro navržení do II. kola úspěšné vyřešení aspoň tří úloh ze zadaných čtyř do 15. ledna 1977.

II. kolo se konalo v těchto termínech:

kategorie A dne 5. března 1977,

kategorie B a C dne 2. dubna 1977,

kategorie Z dne 23. února 1977.

Celostátní *III. kolo kategorie A* proběhlo v *Plzni* od 5. do 7. května 1977. Zúčastnilo se ho 77 žáků, z toho tři dívky. Slavnostní zahájení se uskutečnilo 5. května večer v obřadní síni plzeňské radnice za přítomnosti představitelů města Plzně a Západočeského kraje. 6. a 7. května dopoledne řešili soutěžící vždy po čtyři hodiny tři soutěžní úlohy.

Všechny KV MO uspořádaly krajské *III. kolo* v kategorii Z. Na Slovensku se konalo toto kolo v jednotném termínu pro všechny kraje. Texty úloh zadaných v jednotlivých krajích uvádíme v části VI.

5. POMOCNÉ AKCE

Na pomoc řešitelům MO se pořádaly semináře, přípravné přednášky a soustředění různého druhu. Jejich pořadateli byly KV MO a v celostátním měřítku ÚV MO.

Na přípravu reprezentantů pro mezinárodní MO byl zaměřen tzv. korespondenční seminář a také seminář pro pražské řešitele kategorie A.

O korespondenčním semináři je podrobná informace v části VII. V pražském semináři přednášeli postupně dr. J. Sedláček, CSc., doc. Jan Vyšín, CSc., dr. J. Jarník, CSc., prof. dr. M. Fiedler, DrSc., a dr. A. Vrba, CSc., Věnovali se teorii čísel, geometrii, posloupnostem a řadám,

kombinatorické geometrii, kombinatorice a matematické indukci.

Úspěchy v matematické olympiádě a aktivní účast v těchto dvou seminářích byla hlediska při výběru členů širšího reprezentačního družstva. Jeho soustředění se konalo jako ve XXV. ročníku opět ve dvou etapách: týdenní v březnu a čtrnáctidenní v červnu. Přednášeli dr. J. Janík, CSc., dr. M. Kaukič, P. Liebl, doc. dr. J. Moravčík, CSc., dr. V. Müller, dr. A. Vrba, CSc., doc. J. Vyšín, CSc. a dr. F. Zítek, CSc. Místo bylo tradiční — zámek ve Štítně u Prahy.

Celostátní soustředění řešitelů kategorie A, do něhož jsou vybíráni žáci nejvýše třetích ročníků škol II. cyklu, se konalo od 13. do 25. června v Ponické Huti u Banské Bystrice. Mělo tři třídy: matematickou, matematicko-fyzikální a fyzikální. V průběhu soustředění se uskutečnila vnitřní matematická soutěž účastníků. Matematické přednášky zajišťovali pracovníci vysokých škol a vědeckých ústavů ČSR a SSR. V téže době probíhalo v Ponické Huti soustředění studentů z gymnázií s rozšířeným vyučováním matematice, což se však ukázalo jako nevhodné.

6. STUDIJNÍ LITERATURA

Texty úloh XXVI. ročníku MO byly publikovány v tradičních letácích MO a otiskly je též časopisy *Rozhledy matematicko-fyzikální* a *Matematika a fyzika ve škole*.

Nakladatelství Mladá fronta pokračovalo ve vydávání svazků edice *Škola mladých matematiků*. Během roku 1977 vyšly už ve třetích vydáních svazky:

- č. 1. *F. Hradecký, M. Koman, J. Vyšín*: Několik úloh
z geometrie jednoduchých těles,
č. 2. *J. Sedláček*: Co víme o přirozených číslech.
Počet svazků knihovnice rozšířily dvě nové knížky:
č. 40. *A. Vrba*: Princip matematické indukce,
č. 41. *B. Zelinka*: Rovinné grafy.

7. KONKURS JČSMF A JSMF NA NÁVRHY ÚLOH PRO MO

pokračoval i během XXVI. ročníku MO. Od jeho vyhlášení v roce 1966 do 31. 8. 1977 došlo celkem 1340 úloh od 115 autorů, přičemž bylo odměněno 775 úloh a vráceno 398 úloh. Ve XXVI. ročníku bylo v soutěži zadáno 54 úloh získaných konkursem.

Tabulka 1

Kategorie A

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	92	82	78	20
Středočeský	150	141	90	6
Jihočeský	83	46	37	2
Západočeský	54	49	49	2
Severočeský	174	112	79	5
Východočeský	88	84	76	14
Jihomoravský	156	142	125	10
Severomoravský	100	88	78	10
Bratislava	86	56	55	5
Západoslovenský	162	139	133	3
Středoslovenský	125	111	96	10
Východoslovenský	103	84	64	2
ČSR	897	744	612	69
SSR	476	390	348	20
ČSSR	1373	1134	960	89

S - počet všech soutěžících

Ú - počet úspěšných řešitelů

Tabulka 2

Kategorie B

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	102	81	76	6
Středočeský	117	92	80	3
Jihočeský	61	58	51	7
Západočeský	65	42	40	0
Severočeský	163	104	82	0
Východočeský	74	70	65	5
Jihomoravský	138	128	114	2
Severomoravský	64	59	58	4
Bratislava	80	61	59	8
Západoslovenský	161	150	125	3
Středoslovenský	83	74	61	5
Východoslovenský	137	114	62	7
ČSR	784	634	566	27
SSR	461	399	307	23
ČSSR	1245	1033	873	50

S - počet všech soutěžících

Ú - počet úspěšných řešitelů

Tabulka 3

Kategorie C

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	130	120	117	47
Středočeský	161	131	109	23
Jihočeský	136	86	77	16
Západočeský	96	65	46	9
Severočeský	230	113	86	11
Východočeský	102	96	88	21
Jihomoravský	170	158	128	22
Severomoravský	155	133	127	38
Bratislava	122	87	86	38
Západoslovenský	205	177	170	41
Středoslovenský	134	108	95	18
Východoslovenský	229	178	120	16
ČSR	1180	902	778	187
SSR	690	550	471	113
ČSSR	1870	1452	1249	300

S - počet všech soutěživých

Ú - počet úspěšných řešitelů

Tabulka 4

Kategorie Z

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	920	676	483	206
Středočeský	930	432	320	101
Jihočeský	965	421	317	73
Západočeský	931	462	324	91
Severočeský	1 169	516	401	129
Východočeský	528	435	410	271
Jihomoravský	1 902	1056	756	264
Severomoravský	1 427	731	598	140
Bratislava	705	682	653	197
Západoslovenský	1 435	1242	1181	244
Středoslovenský	807	741	733	132
Východoslovenský	1 712	1052	1017	273
ČSR	8 772	4729	3609	1275
SSR	4 659	3717	3584	846
ČSSR	13 431	8446	7193	2121

S - počet všech soutěžících

Ú - počet úspěšných řešitelů

Tabulka 5

XXVI. ročník MO

KRAJ	I. kolo		II. kolo	
	S	Ú	S	Ú
Praha	1 244	959	754	279
Středočeský	1 358	796	599	133
Jihočeský	1 245	611	482	98
Západočeský	1 146	618	459	102
Severočeský	1 736	845	648	145
Východočeský	792	685	639	311
Jihomoravský	2 366	1 484	1 123	298
Severomoravský	1 746	1 011	861	192
Bratislava	993	886	853	248
Západoslovenský	1 963	1 708	1 609	291
Středoslovenský	1 149	1 034	985	165
Východoslovenský	2 181	1 428	1 263	298
ČSR	11 633	7 009	5 565	1558
SSR	6 286	5 056	4 710	1002
ČSSR	17 919	12 065	10 275	2560

S - celkový počet soutěžících ve všech kategoriích

Ú - celkový počet úspěšných řešitelů ve všech kategoriích

SEZNAM VÍTĚZŮ A ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ CELOSTÁTNÍHO III. KOLA KATEGORIE A VE XXVI. ROČNÍKU MO

Vítězové

1. *Jan Kratochvíl*, 3. a, G Pardubice
2. *Pavol Quittner*, 4. b, G Prievidza
- 3.— 4. *Jiří Navrátil*, 4. a, G Olomouc-Hejčín
- 3.— 4. *Josef Tkadlec*, 2. c, G Bílovec
5. *Ilja Turek*, 3. g, G Hradec Králové
- 6.— 7. *Vladimír Matěna*, 2. a, G Trutnov
- 6.— 7. *Jan Nekovář*, 8. b, ZDŠ Praha 6, Sušická
- 8.— 9. *Vladimír Pastrňák*, 4. b, G Ostrava 1
- 8.— 9. *Peter Takáč*, 4. c, G Šafárikovo
10. *Zdeněk Kalousek*, 3. b, G Jablonec nad Nisou
11. *Jan Bázler*, 4. b, G Mladá Boleslav
- 12.—15. *Martin Čadek*, 4. a, G Brno, kpt. Jaroše
- 12.—15. *Jiří Kolafa*, 4. d, G Praha 2, W. Piecka
- 12.—15. *Jaromír Matěna*, 3. a, G Hradec Králové
- 12.—15. *Josef Pavel*, 4. a, G Rychnov nad Kněžnou
16. *Peter Markoš*, 4., G Kremnica

Ostatní úspěšní řešitelé

17. *Zdeněk Vavřín*, 3. c, G Praha 1, Štěpánská
- 18.—21. *Michal Čverčko*, 4. d, G Košice, Šmeralova
- 18.—21. *Luděk Klimeš*, 4. a, G Blansko
- 18.—21. *Richard Liska*, 4. a, G Pardubice
- 18.—21. *Martin Petrák*, 4. a, G Ostrava-Hrabůvka
22. *Jiří Svoboda*, 4. a, G Brno, kpt. Jaroše
23. *Milan Veščíček*, 3. a, G Bratislava, Červenej armády
24. *Peter Filakovský*, 3. c, G Nové Zámky
25. *Ján Polák*, 4. a, G Bratislava, Červenej armády
26. *Petr Bahník*, 3. a, G Pardubice
27. *Josef Blažek*, 4. a, G Mnichovo Hradiště
28. *Dagmar Křivánková*, 4. b, G Praha 7, Nad štolou
29. *Rupert Leitner*, 4., G Semily
30. *Rostislav Urban*, 3. a, G Ostrava 1
- 31.—33. *Vladimír Hanák*, 3. c, G Bílovec
- 31.—33. *Petr Kučírek*, 3. b, G Brno, Koněvova
- 31.—33. *Peter Mäsiar*, 2. b, G Námestovo
34. *Petr Beránek*, 3. a, G Praha 9, Litoměřická
- 35.—37. *Juraj Kouřil*, 4. a, G Nové Mesto nad Váhom
- 35.—37. *Ján Potfaj*, 4. a, G Nové Mesto nad Váhom
- 35.—37. *Miroslav Tůma*, 3., G Nová Paka
38. *Lubomír Húska*, 4. b, G Prievidza

POŘADÍ ÚSPĚŠNÝCH ŘEŠITELŮ II. KOLA KATEGORIÍ A, B, C VE XXVI. ROČNÍKU MO

V seznamech uvádíme jen úspěšné řešitele, kteří se umístili na prvních deseti místech. Je-li jich uvedeno více než deset, pak poslední z nich získali stejný počet bodů. Skupinky řešitelů, kteří dosáhli stejného počtu bodů, jsou vyznačeny závorkami.

PRAHA

Kategorie A

Zdeněk Vavřín, 3. c G Praha 1, Štěpánská; *jiří Kolafa*, 4. d G Praha 2, W. Piecka; *Marek Vašín*, 3. c G Praha 8, U libeňského zámku; *Jan Nekovář*, 8. b ZDŠ Praha 6, Sušická; *Oto Ritter*, 2. d G Praha 2, W. Piecka; *Petr Beránek*, 3. a G Praha 9, Litoměřická; [*Pavel Jiroušek*, 3. d G Praha 3, Sladkovského; *Pavel Trska*, 3. b G Praha 7, Nad štolou]; *Irena Hegerová*, 4. c G Praha 2, W. Piecka; [*jiří Kejř* 4. d G Praha 3, Sladkovského; *Martin Souček*, 3. a G Praha 7, Nad štolou].

Kategorie B

[*Jan Hajič, Petr Savický*], *Zbyněk Novák, Jan Váca*, všichni 2. d G Praha 2, W. Piecka; *Jiří Pech*, 2. a G Praha 9, Litoměřická; *Oto Ritter*, 2. d G Praha 2, W. Piecka.

Kategorie C

Jan Nekovář, 8. b ZDŠ Praha 6, Sušická; *Jan Krajíček, Petr Srp, Darja Krafferová*, všichni 1. d G Praha 2, W. Piecka; *Jiří Vrána*, 1. b G Praha 8, U libeňského zámku; *Jan Rataj*, 1. b G Praha 6, Arabská; *Stanislav Vaněček, Peter Freimann*, oba 1. d G Praha 2, W. Piecka; *Petr Bydžovský*, 1. a G Praha 8, U libeňského zámku; [*Josef Kurka*, 1. d G Praha 3, Sladkovského; *Jana Strnadová*, 1. a G Praha 4, Na vítězné pláni; *Pavel Valach*, 1. a G Praha 10, Voděradská].

STŘEDOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Josef Blažek, 4. roč. G Mnichovo Hradiště; *Jan Bázler*, 4. roč. G Mladá Boleslav; *Karel Jencík*, 4. roč. SPŠ Kutná Hora; [*Eduard Feireisl*, 4. roč. G Nové Strašecí; *Josef Holda*, 4. roč. G Mladá Boleslav; *Daniel Zicha*, 3. roč. G Vlašim].

Kategorie B

Martin Poštulka, 2. a G Kralupy nad Vltavou; [*Pavel Töpfer*, 2. a G Mladá Boleslav; *Jan Voves*, 2. a G Kralupy nad Vltavou].

Kategorie C

Jiří Novotný, 1. b G Poděbrady; *Zdeněk Gášek*, 1. a G Beroun; [*Jana Lokšanová*, 1. b G Říčany; *Jaroslav Vávra*, 1. a G Dobříš]; *Jiří Hrdina*, 1. a G Kladno; [*Vladimír Kovář*, *Martin Topol*, oba 1. a G Říčany; *Jiří Vohradský*, 1. a G Slaný; *Jaromír Žilka*, 1. b G Říčany]; [*Stanislav Hlubocký*, 1. roč. SPŠ Kutná Hora; *Jiří Hynek*, 1. c G Kolín; *Ivo Mrázek*, 1. b G Nymburk].

JIHOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Jaroslav Holý, G K. Šatala, České Budějovice; *Zdeněk Tůma*, G Tábor.

Kategorie B

Milan Pávek, 2. c G Tábor; *Marie Volfová*, 2. a G Prahatice; *Jaroslav Čech*, 2. roč. G Dačice; [*Ilja Bozadžiev*, 2. d G Tábor; *Václav Hucek*, 2. a SPŠ Strakonice]; *Josef Němec*, 2. b G Tábor; *H. Vadlejchová*, 2. c G Strakonice.

Kategorie C

Miroslav Masojídek, 1. a G Písek; *Lubomír Přech*, *Miroslav Novák*, oba 1. a G K. Šátala, České Budějovice; *Růžena Lossová*, 1. roč. G Týn nad Vltavou; *Pavel Boček*, 1. a G Písek; *Petr Šíl*, 1. roč. G Trhové Sviny; [*Iva Frčková*, 1. a G Milevsko; *Alena Havlíková*, 1. a G Strakonice; *Alena Šimonová*, 1. a G Český Krumlov]; *Jaroslav Vodňanský*, 1. c G Pelhřimov.

ZÁPADOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Vladimír Šverák, 3. a G Karlovy Vary; *Ivan Novák*, 4. a G J. Fučíka, Plzeň, nám. Odborářů.

Kategorie C

Helena Zachariášová, 1. a G Plzeň, ul. Pionýrů; [*Jiří Bláha*, 1. a G J. Fučíka, Plzeň, nám. Odborářů; *Jan Brousek*, 1. b G Klatovy]; *Zora Žáčková*, 1. b G Karlovy Vary; *Jan Pillmann*, 1. d G J. Fučíka, Plzeň, nám. Odborářů; *Jana Králová*, 1. b G Cheb; [*Lenka Ježková*, 1. b G Karlovy Vary; *Zdeněk Šuma*, 1. a G Plasy]; *Pavel Banzet*, 1. c G Ostrov nad Ohří.

SEVEROČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Zdeněk Kalousek, 3. b G Jablonec nad Nisou; *Jan Chaloupek*, 4. c G Liberec; *Luděk Šefc*, 2. a G Ústí nad Labem; [*Pavel Janeček*, 3. c G Liberec; *Vladimír Havlena*, 4. a G Rumburk].

Kategorie C

Tomáš Vlk, VI., SPŠ Chomutov; *Jiří Kubát*, 1. d G Teplice; *Josef Hladík*, *Aleš Nekvinda*, oba 1. b G Liberec; [*Miroslav Dostál*, 1. roč. SPŠ Kamenický Šenov; *Zdeněk Machala*, 1. c G Děčín; *Blanka Srádová*, 1. a G Roudnice]; *Miroslav Huml*, 1. b G Litvínov; [*Zdeněk Dřevěný*, 1. d G Teplice; *Emil Jeníček*, 1. b G Litvínov].

VÝCHODOČESKÝ KRAJ

Kategorie A

Ilja Turek, 3. g G Hradec Králové; *Jan Kratochvíl*, 3. a G Pardubice; *Miroslav Tůma*, 3. roč. G Nová Paka; *Vladimír Puš*, 4. roč. G Dvůr Králové; *Rupert Leitner*, 4. roč. G Semily; *Josef Dobeš*, *Josef Pavel*, oba 4. a G Rychnov nad Kněžnou; *Petr Bahník*, 3. a G Pardubice; *Jaromír Matěna*, 3. g G Hradec Králové; *Vladimír Matěna*, 2. a G Trutnov.

Kategorie B

Vladislav Pištora, 2. g G Hradec Králové; *Vladimír Matěna*, 2. a G Trutnov; *Ivan Brychta*, 2. a G Hlinsko v Čechách; *Milan Jelínek*, 2. c SPŠE1. Pardubice; *Zdeněk Kopecký*, 2. d G Havlíčkův Brod.

Kategorie C

Petr Sajdl, 1. b G Turnov; *Jan Tomsa*, 1. a G Jaroměř; *Jiří Jurišica*, 1. d SPŠE1. Pardubice; *Bohuslav Vorel*, 1. b G Přelouč; *Miroslav Karafiát*, 1. b G Polička; *Marcela Zoubková*, 1. b G Pardubice; *Dana Šmídová*, 1. c G Pardubice; *Pavel Fiala*, 1. d SPŠE1. Pardubice; *Jan Zindulka*, 1. a G Polička.

JIHOMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Jiří Svoboda, *Martin Čadek*, oba 4. a G Brno, kpt. Jaroše; *Jiří Martišek*, 4. a G Kroměříž; *Petr Kučírek*, 3. b G Brno, Koněvova; *Luděk Klimeš*, 4. a G Blansko; *Miroslav Hrubý*, *Jiří Chmela*, oba 4. a G Kroměříž; *Jaroslav Šustr*, 4. b G Blansko; [*Ladislav Mareček*, 3. b G Brno, Koněvova; *Vít Sláma*, 4. b G Brno, Slovanské nám.].

Kategorie B

Radovan Kučera, 2. a G Brno, Koněvova; *Libor Veselý*, 2. b G Jihlava.

Kategorie C

Zenon Starčuk, 1. d G Brno, Koněvova; *Otto Hason*, 1. a G Velké Meziříčí; *Milan Líbezný*, 1. a G Ivančice; [*Ľaromír Říha*, 1. e SPŠ stavební, Brno, Kudelova; *Ondřej Zindulka*, 1. b OU EJF, Brno, Opuštěná]; *Vladimír Bodeček*, 1. a G Brno, Koněvova; *Vladimír Bílý*, 1. a G Kyjov; [*Ľaroslav Dolák*, 1. a G Brno, Koněvova; *Miroslav Gavalec*, 1. a SPŠ strojní, Gottwaldov]; *František Kazda*, 1. a G Velké Meziříčí.

SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

Kategorie A

Ľirí Navrátil, 4. a G Olomouc-Hejčín; *Ľosef Tkadlec*, 2. c G Bílovec; [*Vladimír Hanák*, 3. c G Bílovec; *Martin Petrák*, 4. a G Ostrava-Hrabůvka]; [*Ľaroslav Hájek*, 3. c G Bílovec; *Vladimír Pastrňák*, 4. b G Ostrava, Šmeralova]; *Rostislav Urban*, 3. a G Ostrava, Šmeralova; *Radomír Lukáš*, 4. a G Havířov 2; *Ľaroslav Hančl*, 2. c G Bílovec; *Stanislav Zwyrtek*, 3. b G Český Těšín.

Kategorie B

Josef Tkadlec, Ondřej Jakl, Jaroslav Hančl, Radomír Vrajič, všichni 2. c G Bílovec.

Kategorie C

Jiří Lukaščík, Lenka Utíkalová, Jiří Mejzlík, Jiří Ryška, všichni 1. c G Bílovec; Tomáš Morcinek, 1. c G Karviná 8; Karol Ćwierka, 1. d G polské, Český Těšín; Jiří Číhal, 1. c G Bílovec; Jiří Buršík, 1. a G Ostrava 1, Šmeralova; [Vladimír Chlebek, 1. c G Bílovec; Miroslav Kubiš, S1 SPŠE Olomouc; Ivo Raab, 1. b G Hranice na Moravě].

BRATISLAVA

Kategorie A

Milan Veščičík, G, ul. Červenej armády; Štefan Varga, G, Novohradská ul.; Róbert Handlovič, G, Novohradská ul.; Ján Polák, Ivan Priel, oba G, ul. Červenej armády.

Kategorie B

Jaroslav Guričan, G, ul. Červenej armády; Mária Koncová, Ladislav Gažo, oba G, Novohradská ul.; Roman Severín, Vladimír Burjan, [Zdena Butková, Zdeno Liška, Ľubomír Svitek], všichni G, ul. Červenej armády.

Kategorie C

Juraj Beniak, G, ul. Červenej armády; *Jana Osvaldová*, *Katarína Koncová*, obě G, Novohradská ul.; *Martin Kuchol*, G, ul. Červenej armády; *Danica Kolibiarová*, G, Novohradská ul.; [*Lubica Šedová*, *Tatiana Škereňová*, obě G, ul. Červenej armády]; *Marián Bujalka*, G, ul. Červenej armády; [*Helena Forrová*, *Laco Kvasz*, oba G, ul. Červenej armády; *Martin Oravec*, *Dana Slovíková*, oba G, Novohradská ul.].

ZÁPADOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

Peter Filakovský, G Nové Zámky; *Ján Potfaj*, *Juraj Kouřil*, oba G Nové Mesto nad Váhom.

Kategorie B

Ľudovít Bebjak, G E. Gudernu, Nitra; *Marián Marek*, G Šaľa; *Zuzana Rakúšová*, G Trnava.

Kategorie C

Dezider Bedecs, G maď. Galanta; *Helena Nemethová*, G maď. Čalovo; *Michal Fečkan*, G Nové Zámky; *Miroslav Gocman*, G E. Gudernu, Nitra; *Benedikt Fronc*, *Ondrej Fronc*, oba G Párovce, Nitra; *Lilla Filakovská*, G Štúrovo; *Juraj Filín*, G Trenčín; *Pavol Kuchásek*, G Myjava; *Mariana Peteková*, G Šaľa.

STŘEDOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

[*Lubomír Húska*, 4. roč. G Prievidza; *Peter Takáč*, 4. roč. G Šafárikovo; *Pavol Quittner*, 4. roč. G Prievidza]; *Igor Böhm*, 4. roč. SPŠS Zvolen; [*Ján Buša*, 4. roč. G Banská Štiavnica; *Tibor Žáčik*, 4. roč. G Dubnica nad Váhom]; *Ján Bízik*, 4. roč. G Žilina-Hliny; [*Peter Markoš*, 4. roč. G Kremnica; *Peter Mäsiar*, 2. roč. G Námestovo; *Peter Močiarik*, 4. roč. G Prievidza].

Kategorie B

Pavol Ďuriník, 2. roč. G Žilina-Hliny; *Ladislav Mečtř*, 2. roč. G Prievidza; *Alfred Zimmermann*, 2. roč. G Banská Bystrica, Tajovského; *Roman Neděla*, 2. roč. G Banská Bystrica, Dukelských hrdinův; *Milan Simek*, 2. roč. SPŠS Dubnica nad Váhom.

Kategorie C

Marian Moravčík, 1. roč. G Žilina-Hliny; *Marta Poliaková*, 1. roč. G Ružomberok; *Oliver Groma*, 1. roč. G Liptovský Mikuláš; [*Robert Gruy*, 1. roč. G Banská Bystrica, Dukelských hrdinův; *Tomáš Chabada*, 1. roč. G Banská Bystrica, Tajovského; *Lubomír Jančošek*, 1. roč. G Prievidza; *František Komora*, 1. roč. G Banská Bystrica, Dukelských hrdinův]; *Igor Brziak*, 1. roč. G Liptovský Mikuláš; *Anna Straková*, 1. roč. G Ružomberok; [*Vladi-*

mír Lukáč, 1. roč. G Martin; *Juraj Oravkin*, 1. roč. G Banská Bystrica, Dukelských hrdinov; *Miroslav Straka*, 1. roč. G Prievídza].

VÝCHODOSLOVENSKÝ KRAJ

Kategorie A

Ján Nižňanský, 3. a G Košice, Šmeralova; *Michal Čverčko*, 4. d G Košice, Šrobárova.

Kategorie B

Jozef Jirásek, 2. a G Košice, Šmeralova; *Peter Vasiľ*, 2. c G Michalovce; *Ivan Žežula*, 2. a G Košice, Šmeralova; [*Katarína Dudičová*, 2. c G T. Ševčenka, Prešov; *Vladimír Hura*, 2. c G Košice, Šmeralova]; [*Jana Borošová*, *František Matúš*, oba 2. d G Prešov, Konštantínova].

Kategorie C

Ctirad Klimčík, *Peter Wojtovič*, oba G Prešov, Konštantínova; *Ondrej Gecelovský*, G Košice, Šmeralova; *Ladislav Kubini*, G Bardejov; *Ivan Brovko*, G Spišská Nová Ves; [*Jana Jucovičová*, G Košice, Šmeralova; *Katarína Kopasová*, G Košice, Šrobárova; *Hana Korytárová*, *Martin Koval*, oba G Košice, Šmeralova; *Dušan Minárik*, G Poprad; *Bibiána Slivková*, G Prešov, Konštantínova].

II. Přípravné úlohy I. kola

KATEGORIE A

A — P — 1

Určete všechny trojice nezáporných celých čísel x, y, z , pro které platí

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (1)$$

Riešenie. Predpokladajme, že trojica nezáporných celých čísel x, y, z je riešením rovnice (1).

Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísel x, y, z . Označíme $a = x : d, b = y : d, c = z : d$. Čísla a, b, c sú nesúdeliteľné a sú riešením rovnice (1). Rozlíšime dva prípady.

(i) Číslo a je párne. Keďže a, b, c sú nesúdeliteľné, tak čísla b, c nemôžu byť obidve párne. Keby bolo b párne, tak musí byť aj c párne a naopak, ak c je párne, musí byť aj b párne. Teda nevyhnutne čísla b, c sú nepárne. Upravíme rovnicu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

na tvar

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2}. \quad (2)$$

Čísla $\frac{a}{2}, \frac{c+b}{2}, \frac{c-b}{2}$ sú celé. Označíme

$$u = \frac{c+b}{2}, \quad v = \frac{c-b}{2}.$$

Teda u, v sú celé čísla.

Nech q je spoločný deliteľ čísiel u, v . Potom q delí čísla $u+v=c, u-v=b$ a q^2 delí číslo $4uv=a^2$. Keďže a, b, c boli nesúdeliteľné, tak musí byť $q=1$ alebo $q=-1$. Teda aj čísla u, v sú nesúdeliteľné.

Po dosadení do rovnice (2) máme

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = u \cdot v,$$

pričom celé čísla u, v sú nesúdeliteľné. Teda existujú nezáporné celé čísla k, l také, že $u = k^2, v = l^2$. Keďže b je nezáporné, tak $u \geq v$ a tiež $k \geq l$. Úhrnom teda máme

$$\begin{aligned} x &= d \cdot a = 2 d k l, \\ y &= d \cdot (u - v) = d \cdot (k^2 - l^2), \\ z &= d \cdot (u + v) = d \cdot (k^2 + l^2), \end{aligned} \tag{3}$$

kde d, k, l sú nezáporné celé čísla, $k \geq l$. Výpočtom ľahko zistíme, že všetky tieto trojice sú riešením rovnice (1).

(ii) a je nepárne. Ukážeme, že potom b je párne. Keby bolo aj b nepárne, tak c je párne, a teda existujú celé čísla e, f, g také, že

$$\begin{aligned} a &= 2e + 1, \\ b &= 2f + 1, \\ c &= 2g. \end{aligned}$$

Potom $a^2 + b^2 = 4e^2 + 4e + 4f^2 + 4f + 2$ nie je deliteľné číslom 4, zatiaľ čo $c^2 = 4g^2$ je deliteľné číslom 4.

Úvahou rovnakou ako v časti (i) zistíme, že

$$\begin{aligned}x &= d \cdot (k^2 - l^2), \\y &= 2 d k l, \\z &= d \cdot (k^2 + l^2),\end{aligned}\tag{4}$$

kde d, k, l sú nezáporné celé čísla, $k \geq l$.

Teda (3) a (4) sú všetky trojice nezáporných celých čísiel, ktoré vyhovujú rovnici (1).

A — P — 2

Je-li z komplexní číslo, označujeme $\operatorname{Re} z$ reálnou část čísla z (tj. $\operatorname{Re} z = a$ pro $z = a + ib$).

Dokažte:

a) Je-li z komplexní číslo takové, že $\operatorname{Re} z > 0$, je
i $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0$.

b) Jsou-li z_1 a z_2 komplexní čísla taková, že $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$, pak číslo $z_1 z_2$ není reálné záporné.

Riešenie. a) Nech $z = a + ib$, kde a, b sú reálne čísla. Platí teda $a > 0$. Potom

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Takže

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0.$$

b) Nech $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, kde a_1, b_1, a_2, b_2 sú reálne čísla. Podľa predpokladu úlohy je $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Predpokládajme, že tvrdenie b) neplatí, tj. $z_1 \cdot z_2 = -c$, kde c je kladné reálne číslo.

Keďže

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

tak máme

$$a_1a_2 - b_1b_2 = -c, \quad (1)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0. \quad (2)$$

Čísla a_1, a_2 sú kladné. Podľa (2) potom platí: ak $b_1 \geq 0$, tak $b_2 \leq 0$ a naopak, ak $b_2 \geq 0$, tak $b_1 \leq 0$. V oboch prípadoch je $b_1b_2 \leq 0$. Teda

$$a_1a_2 - b_1b_2 \geq a_1a_2 > 0$$

a to je hľadaný spor s rovnosťou (1).

A — P — 3

Z úseček, jejichž délky jsou $a > 0, b > 0, c > 0$, lze sestrojit trojúhelník právě tehdy, platí-li pro všechny dvojice x, y , pro něž je $x + y = 1$,

$$a^2x + b^2y > c^2xy. \quad (1)$$

Riešenie. Do nerovnosti (1) dosadíme $y = 1 - x$:

$$a^2x + b^2(1 - x) > c^2x(1 - x).$$

Po úprave dostaneme

$$x^2c^2 + x(a^2 - b^2 - c^2) + b^2 > 0. \quad (2)$$

Nerovnosť (2) platí pre každé reálne číslo x vtedy a len vtedy, keď kvadratická rovnica

$$x^2c^2 + x(a^2 - b^2 - c^2) + b^2 = 0$$

nemá reálny koreň. To je ekvivalentné tomu, že diskriminant je záporný, tj.

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 < 0. \quad (3)$$

Výraz na ľavej strane nerovnosti upravíme

$$\begin{aligned} & (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = \\ &= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc) \cdot (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \\ &= [a^2 - (b + c)^2] \cdot [a^2 - (b - c)^2] = \\ &= (a - b - c) \cdot (a + b + c) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c). \end{aligned}$$

Čísla a, b, c sú kladné. Nerovnosť (3) je teda ekvivalentná nerovnosti

$$(b + c - a) \cdot (a - b + c) \cdot (a + b - c) > 0. \quad (4)$$

Dva súčinitele na ľavej strane nerovnosti (4) nemôžu byť záporné, lebo súčet každých dvoch je kladný:

$$(b + c - a) + (a - b + c) = 2c > 0,$$

$$(b + c - a) + (a + b - c) = 2b > 0,$$

$$(a - b + c) + (a + b - c) = 2a > 0.$$

Teda nerovnosť (4) platí vtedy a len vtedy, keď všetky súčinitele na ľavej strane sú kladné, tj. keď

$$b + c > a,$$

$$a + c > b,$$

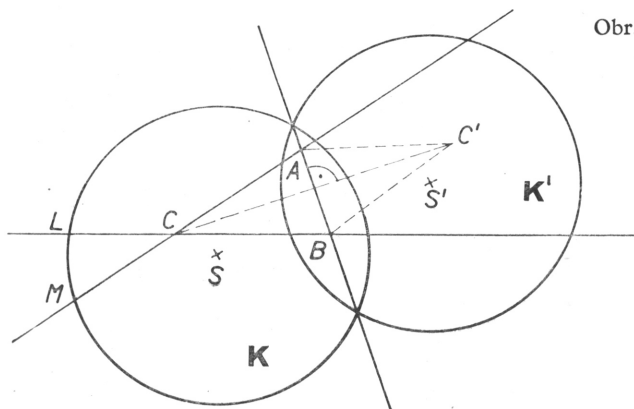
$$a + b > c.$$

Nerovnosti (5) platia vtedy a len vtedy, keď možno zostrojiť trojuholník, ktorého strany majú postupne dĺžky a, b, c .

A — P — 4

Je dán kruh K ; dokažte, že nelze zvolit tri body A, B, C uvnitř K tak, aby priamky AB, AC, BC rozdelili K na sedm častí stejného obsahu.

Riešenie. Predpokladajme, že tvrdenie neplatí, tj. existujú tri body A, B, C v kruhu K o strede S a polomere r



Obr. 1

také, že priamky AB , BC , AC delia kruh K na sedem častí s rovnakým obsahom (obr. 1).

Body A , B , C neležia na jednej priamke. Aspoň dva z vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú ostré. Nech sú to uhly pri vrcholoch A a B . Označíme M , L priesečníky polpriamok AC , BC s kružnicou o strede S a polomere r .

Nech C' je bod súmerne združený s bodom C podľa osi súmernosti AB . Keďže uhly $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ sú ostré, bod C' leží vnútri uhla $\sphericalangle ACB$.

Bod C' nemôže ležať vnútri kruhu K , lebo obsah $\triangle ABC'$ je rovnaký ako obsah $\triangle ABC$ a ten je rovnaký ako obsah časti kruhu K ležiacej v polrovine ABC' a v uhle $\sphericalangle ACB$.

Teda bod C' leží mimo kruhu K . Nech K' je kruh súmerne združený s kruhom K podľa osi súmernosti AB . Potom bod C neleží v kruhu K' . Kruh K je rozdelený na tri časti: odsek určený priamkou AB , k nemu symetricky združený odsek kruhu K' a na množinu $K - K'$.

Obsah prvých dvoch častí je rovnaký a to $\frac{3}{7}$ obsahu kruhu

K . Teda časť $K - K'$ má obsah rovný $\frac{1}{7}$ obsahu kruhu K .

To je však spor, lebo táto časť obsahuje časť trojuholníka ABC a časť spoločnú kruhu K a uhlu $\sphericalangle MCL$. Posledná časť má obsah rovný $\frac{1}{7}$ obsahu kruhu.

B — P — 1

Je daná množina funkcií

$$f(x) = x^2 + b|x| + c,$$

kde b, c sú reálne parametre. Nájdite všetky funkcie z tejto množiny, ktoré majú v intervale $\left\langle -\frac{1}{2}, 1 \right\rangle$ najväčšiu hodnotu 2 a najmenšiu hodnotu 1.

Riešenie. Pre $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$ možno danú funkciu vyjadriť v tvare

$$f(x) = x^2 - bx + c = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4},$$

z čoho pre $-x = y, y \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ dostaneme

$$f(y) = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

Pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ máme

$$f(x) = x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}. \quad (1)$$

Z toho vyplýva, že pre dané b, c nadobúda daná funkcia v intervaloch $\langle -\frac{1}{2}, 0 \rangle$ a $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ rovnaké hodnoty.

Stačí preto, ak sa obmedzíme na skúmanie hodnôt funkcií z danej množiny v intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

Z vlastností kvadratickej funkcie vyplýva, že môžu nastať len tieto tri prípady:

- a) $f(x)$ nadobúda minimum v bode 0, maximum v bode 1,
- b) $f(x)$ nadobúda minimum v bode 1, maximum v bode 0,
- c) $f(x)$ nadobúda minimum v niektorom vnútornom bode intervalu $(0, 1)$, maximum v niektorom krajnom bode tohto intervalu.

Všimnime si, že $f(0) = c, f(1) = 1 + b + c$.

Z toho vyplýva, že v prípade a) musí byť $c = 1, b = 0$, a teda $f(x) = x^2 + 1$, čo vyhovuje podmienkam úlohy, ako sa ľahko presvedčíme. V prípade b) analogicky dostaneme $c = 2, b = -2$ a $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$, čo opäť je funkcia s požadovanými vlastnosťami.

V prípade c) z (1) máme, že $f(x)$ nadobúda minimum len pre $x = -\frac{b}{2}$, a ak má tento bod ležať vo vnútri intervalu $(0,1)$, musí byť $b \in (-2,0)$, pričom súčasne platí (vzhľadom na podmienky úlohy) $c - \frac{b^2}{4} = 1$ čiže

$$b^2 = 4c - 4 \quad (2)$$

a zároveň buď $c = 2$, z čoho vzhľadom na (2) máme $b^2 = 4$, alebo $1 + b + c = 2$ čiže $c = 1 - b$, z čoho po dosadení do (2) pre b dostaneme kvadratickú rovnicu

$b^2 + 4b = 0$ s koreňmi 0 a -4 , z ktorých žiaden neleží v intervale $(-2, 0)$.

Úloha má teda práve 2 riešenia: $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

B — P — 2

Určte všetky reálne korene rovnice

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}. \quad (1)$$

Riešenie. Z (1) po umocnení na tretiu a jednoduchú úpravu dostaneme

$$3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}[\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}] = 2x^3 - 2x. \quad (2)$$

Do (2) dosadíme z (1) za súčet tretích odmocnín $x\sqrt[3]{2}$ a po úprave dostaneme

$$3\sqrt{x^2-1}\sqrt[3]{2x} = 2x(x^2-1). \quad (3)$$

Rovnici (3) vyhovujú zrejme čísla

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1 \quad (4)$$

a pre $x \neq -1, 0, 1$ z (3) dostaneme

$$x^2 - 1 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3},$$

z čoho

$$x_4 = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}}, \quad x_5 = -\sqrt{1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}}. \quad (5)$$

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že x_1, x_2, x_3 vyhovujú tiež rovnici (1). K tomu, aby sme vykonali skúšku pre x_4, x_5 , si upravme rovnicu (1) na tvar

$$(x + 1) + (x - 1) + 3\sqrt[3]{x^2 - 1}\sqrt[3]{2}x = 2x^3. \quad (1')$$

Je zrejmé, že s číslom x vyhovuje (1') aj číslo $-x$. Stačí preto urobiť skúšku len pre x_4 .

Označme

$$a = \sqrt[3]{x_4 - 1}, \quad b = \sqrt[3]{x_4 + 1}, \quad c = \sqrt[3]{2}x_4. \quad (6)$$

Zrejme platí $a > 0, b > 0, c > 0$ a po dosadení do (1') dostaneme

$$b^3 + a^3 + 3abc = c^3,$$

z čoho po jednoduchých úpravách máme

$$c^3 - 3abc - (a^3 + b^3) = 0$$

$$[c - (a + b)][c^2 + (a + b)c + (a^2 - ab + b^2)] = 0.$$

Keďže faktor v druhej hranatej zátvorke je zrejmé pre každú reálnu hodnotu c kladný, musí platiť $c = a + b$, čo vzhľadom na (6) znamená, že x_4 (a teda aj x_5) vyhovuje rovnici (1).

Záver: Rovnica (1) má 5 rôznych reálnych koreňov určených vzťahmi (4), (5).

B — P — 3

Na kulovém vrchlíku o poloměru 1 a výšce 1 jsou dány čtyři body, z nichž žádný neleží na hraniční kružnici.

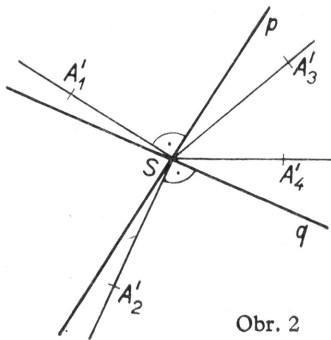
Potom alespoň dva z těchto bodů mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Dokažte.

Řešení. Označme S střed kulové plochy a V bod vrchlíku, jehož vzdálenost od roviny hraniční kružnice je 1. Každý bod vrchlíku, který neleží na hraniční kružnici, má od V vzdálenost menší než $\sqrt{2}$. Splývá-li tedy některý z daných bodů A_1, A_2, A_3, A_4 s bodem V , pak tvrzení platí.

Nechť žádný z daných bodů nesplývá s bodem V . Označme A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 pravoúhlé průměty daných bodů do roviny hraniční kružnice. Mezi těmito průměty pak existují takové dva body A'_i, A'_j , kde $i \neq j$, že platí

$$\angle A'_i S A'_j \leq 90^\circ. \quad (1)$$

Toto tvrzení dokážeme nepřímou. Nechť takové dva body neexistují. V rovině hraniční kružnice (obr. 2) vedme bodem S přímky p, q , které jsou po řadě kolmé k SA'_1 a SA'_2 . Pak polopřímky SA'_2, SA'_3, SA'_4 leží v polorovině



Obr. 2

opačné k polorovine pA'_1 a polopřímky SA'_1, SA'_3, SA'_4 leží v polorovine opačné k polorovine qA'_2 . Tedy v průniku uvažovaných polorovin, což je úhel o velikosti 180° — — $\angle A'_1SA'_2 < 90^\circ$, leží úhel $\angle A'_3SA'_4 > 90^\circ$, což je spor.

Dále dokážeme, že z nerovnosti (1) plyne

$$\angle A_iSA_j < 90^\circ. \quad (2)$$

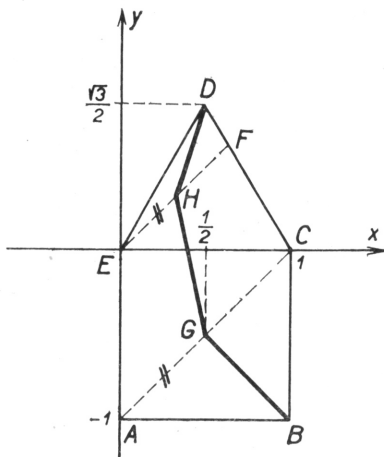
Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby bylo $S = [0, 0, 0]$, $V = [0, 0, 1]$ a aby body A'_i a A'_j měly první dvě souřadnice nezáporné, což vzhledem k (1) zřejmě lze. Pak ovšem body A_i a A_j mají také první dvě souřadnice nezáporné a třetí souřadnice kladné. Odtud již plyne, že skalární součin vektorů $A_i - S$ a $A_j - S$ je kladný, tj. kosinus úhlu $\angle A_iSA_j$ je kladný, takže platí (2).

Z nerovnosti (2) již vyplývá, že vzdálenost bodů A_i a A_j je menší než $\sqrt{2}$.

B — P — 4

Konvexný päťuholník $ABCDE$ sa skladá zo štvorca $ABCE$ so stranou dĺžky 1 a rovnostranného trojuholníka CDE . Vyšetrite množinu $\mathbf{M}$ stredov všetkých úsečiek rovnobežných s priamkou AC , ktorých oba krajné body patria hranici päťuholníka $ABCDE$, a vypočítajte dĺžku čiary $\mathbf{M}$.

Riešenie (obr. 3). Úlohu budeme riešiť metódou súradníc. Ortonormálnu súradnicovú sústavu zvolíme tak, aby vrchol E daného päťuholníka bol jej začiatkom, os x bola



Obr. 3

totožná s priamkou EC a os y totožná s priamkou AE . Potom vrcholy päťuholníka majú tieto súradnice: $A[0, -1]$, $B[1, -1]$, $C[1, 0]$, $D\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E[0, 0]$.

Priamka AC má rovnicu $y = x - 1$. Rovnobežka s ňou prechádzajúca vrcholom E má preto rovnicu $y = x$ a priamku $CD \equiv y = -\sqrt{3}(x - 1)$ pretína v bode $F\left[\frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right]$. Priamky AC , EF rozdeľujú daný päťuholník na trojuholníky ABC , EFD a lichobežník $ACFE$. Ak označíme G stred úsečky AC a H stred úsečky EF , potom hľadaná množina $\mathbf{M}$ stredov všetkých úsečiek rovnobežných s priamkou AC , ktorých oba krajné body ležia na hranici daného päťuholníka, je lomená čiara pozostávajúca z úsečiek $\overline{BG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HD}$.

Kedže $G\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], H\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right]$, možno túto lomenú čiaru popísať rovnicami:

$$\overline{BG} \equiv y = -x, \quad x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1 \right\rangle;$$

$$\overline{GH} \equiv y = -(1 + 2\sqrt{3})x + \sqrt{3}, \quad x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle;$$

$$\overline{HD} \equiv y = 3x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \quad x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

a pre jej dĺžku d platí:

$$\begin{aligned} d &= \overline{BG} + \overline{GH} + \overline{HD} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{8-3\sqrt{3}} + \frac{1}{2}(\sqrt{30} - \sqrt{10}). \end{aligned}$$

C — P — 1

Určete všechna celá čísla x , která jsou řešením rovnice

$$3 \mid x - 1 \mid - 2x = 2 \mid 3x + 1 \mid.$$

Řešení. Protože $3 \mid x - 1 \mid = 2 \mid 3x + 1 \mid + 2x$, je na pravé straně číslo sudé, proto $x - 1$ je sudé, x je liché. Rozlišme případy (I) $x \geq 1$, (II) $x \leq -1$.

(I) Je-li $x \geq 1$, je $|x - 1| = x - 1$, $|3x + 1| = 3x + 1$ a dále $y = 3|x - 1| - 2x - 2|3x + 1| = 3x - 3 - 2x - 6x - 2 = -5x - 5 < 0$.

V případě (I) nemá daná rovnice řešení.

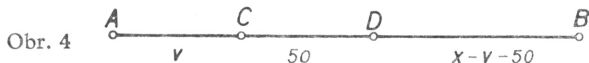
(II) Je-li $x \leq -1$, je $|x - 1| = 1 - x$, $|3x + 1| = -3x - 1$ a dále $y = 3 - 3x - 2x + 6x + 2 = x + 5$
 $y = 0$ právě když $x = -5$; toto číslo je jediný celočíselný kořen dané rovnice.

C — P — 2

Auto jelo z města A do města B stálou rychlostí. Po hodině jízdy pokračuje rychlostí sniženou na $\frac{3}{5}$ rychlosti původní. Tím se jeho příjezd do B opozdí o 2 hodiny. Kdyby k tomuto snížení došlo o 50 km blíže k B , opozdilo

by se jen o 80 minut. Vypočtete vzdálenost AB a původní rychlost auta.

Řešení. Na obr. 4 je naznačena jízda s dvouhodinovým a jízda s osmdesátiminutovým zpožděním. V bodě C , resp. D nastalo snížení počáteční rychlosti v na rychlost $\frac{3}{5}v$.



V tabulkách jsou zaznamenány dráhy (v km) i časy (v hodinách) obou jízd. Vzdálenost AB je označena x .

1. jízda	AC	CB	AB
rychlost	v	$\frac{3}{5}v$	—
dráha	v	$x - v$	x
čas	1	$\frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1\right)$	$\frac{x}{v} + 2$

2. jízda	AD	DB	AB
rychlost	v	$\frac{3}{5}v$	—
dráha	$v + 50$	$x - v - 50$	x
čas	$\frac{v + 50}{v}$	$\frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1 - \frac{50}{v}\right)$	$\frac{x}{v} + \frac{4}{3}$

Plánovaná doba jízdy byla v obou případech $\frac{x}{v}$ (h).

Skutečná doba 1. jízdy byla $\frac{x}{v} + 2$, 2. jízdy $\frac{x}{v} + \frac{4}{3}$
 $\left(80 \text{ min} = \frac{4}{3} \text{ h}\right)$. Z posledních řádek obou tabulek plyne
soustava

$$\begin{aligned} 1 + \frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1\right) &= \frac{x}{v} + 2 \\ 1 + \frac{50}{v} + \frac{5}{3}\left(\frac{x}{v} - 1 - \frac{50}{v}\right) &= \frac{x}{v} + \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Z první rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$\frac{x}{v} = 4. \quad (2)$$

Z druhé rovnice (1) dostaneme po úpravě

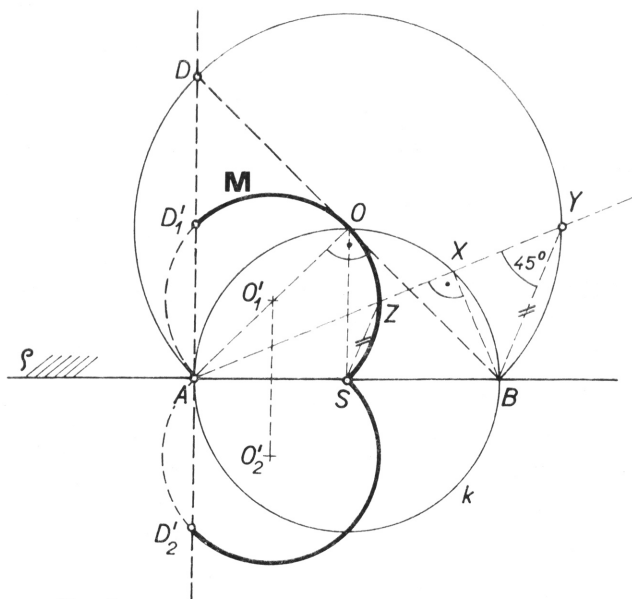
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{v} - \frac{2}{3} \cdot \frac{50}{v} = 2. \quad (3)$$

Spojením (2), (3) vyjde $v = 50$ a z (2) pak $x = 200$.
Zkouška ověří správnost řešení.

C — P — 3

Je dána kružnice k s průměrem AB . Na kružnici k zvolíme bod $X \neq A, B$ a na polopřímce AX sestrojíme bod Y tak, aby platilo $AY = AX + XB$. Vyšetřte množinu středů Z úseček AY pro všechny takové body X .

Řešení (obr. 5). Vyšetřujeme nejprve část hledané množiny **M**, která leží v jedné polorovině ϱ s hranicí AB . Protože je $AY \perp BX$, $XB = XY$, je $\triangle BXY$ pravoúhlý



Obr. 5

rovnoramenný s přeponou BY , a platí tedy $\sphericalangle AYB = 45^\circ$. Přitom $\sphericalangle BAY$ je ostrý. Vyšetřovaná část množiny **M** vznikne takto: množina všech bodů Y ležících v polorovině ϱ je půlkružnice bez krajních bodů nad přeponou BD pravoúhlého rovnoramenného $\triangle ABD$. Množina $\mathbf{M} \cap \varrho$, tj. množina středů Z úseček AY je obraz uvedené půlkružnice (bez krajních bodů) ve stejnolehlosti

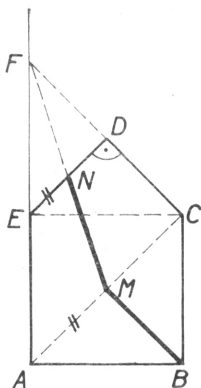
se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Symetrií podle osy AB vznikne zbývající část množiny $\mathbf{M}$. Body S , D'_1 , D'_2 do množiny $\mathbf{M}$ nenáleží.

C — P — 4

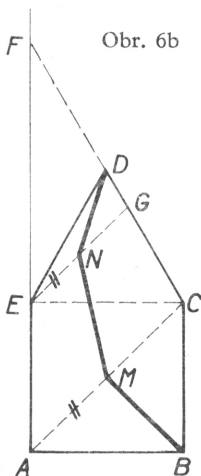
Pětiúhelník $ABCDE$ se skládá ze čtverce $ABCE$ a z rovnoramenného trojúhelníku CDE se základnou CE . Vyšetřte množinu středů všech úseček rovnoběžných s přímkou AC , jejichž oba krajní body náležejí hranici pětiúhelníku $ABCDE$.

Řešení. Rozlišíme tři případy: (I) $\sphericalangle CDE = 90^\circ$, (II) $\sphericalangle CDE < 90^\circ$, (III) $\sphericalangle CDE > 90^\circ$ (obr. 6 abc). Ve všech třech případech užíváme věty: Množina středů všech příček trojúhelníku PQR , které jsou rovnoběžné se stranou

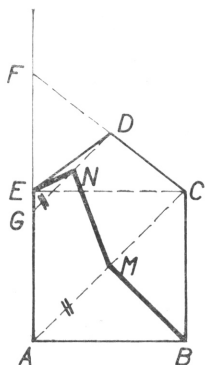
Obr. 6a



Obr. 6b



Obr. 6c



PQ , je těžnice tohoto trojúhelníku vedená z vrcholu R (bez bodu R). V případě (I) (obr. 6a) polopřímky AE , CD se protnou v bodě F ($\sphericalangle EAC$ je ostrý, $\sphericalangle DCA$ je pravý). Těžnice FM (M je střed úhlopříčky AC) je množina středů všech příček $\triangle ACF$ rovnoběžných se stranou AC ; obsahuje tedy i střed N úsečky DE . Hledaná množina středů je tedy lomená čára BMN (bez bodu B).

Obdobně se vyšetřuje množina $\mathbf{M}$ v případech (II) a (III). V případě (II) (obr. 6b) postupujeme tak dlouho, až narazíme na příčku $FG \triangle ACF$ rovnoběžnou s úsečkou AC ; její střed označíme N . Zbývající část množiny $\mathbf{M}$ je těžnice DN trojúhelníku DEG . Množina $\mathbf{M}$ je lomená čára $BMND$ bez krajních bodů.

V případě (III) (obr. 6c) postupujeme až k příčce $DG \parallel AC$; její střed označíme opět N . Zbývající část množiny $\mathbf{M}$ je těžnice EN trojúhelníku DEG ; množina $\mathbf{M}$ je opět lomená čára $BMNE$ bez krajních bodů.

Z — P — 1

Zjistěte, který ze zlomků

$$\frac{23456798}{29876543}, \frac{23456789}{29876534}$$

je větší.

Řešení. Prohlédneme-li pozorně oba zlomky, vidíme, že jejich čitatelé se od sebe liší jen o 9; podobně tomu je se jmenovateli. Označíme-li $23456789 = a$, $29876534 = b$, jsou dané zlomky

$$\frac{a + 9}{b + 9}, \frac{a}{b}.$$

Dále si uvědomíme, že dvě kladná čísla x, y můžeme porovnat buď pomocí jejich rozdílu, nebo pomocí jejich podílu. Platí totiž např. věta: $x > y$ (nebo $x = y$ nebo $x < y$), právě když je $\frac{x}{y} > 1$ (nebo $\frac{x}{y} = 1$ nebo $\frac{x}{y} < 1$).

Vypočteme tedy

$$\frac{x}{y} = \frac{(a + 9)b}{(b + 9)a} = \frac{ab + 9b}{ab + 9a}.$$

Protože je $b > a$, je $9b > 9a$, $ab + 9b > ab + 9a$, a tedy

$$\frac{a + 9}{b + 9} > \frac{a}{b},$$

neboli první zlomek je větší než druhý.

Označením mnohaciferných čísel dvěma písmeny a , b jsme si uspořili psaní a zároveň jsme přehledně zapsali postup, jak řešit obdobné úlohy.

Z — P — 2

Představte si, že jsme znásobili všechna přirozená čísla od 1 do 1976. Kolika nulami končí zápis výsledku v desítkové soustavě?

Řešení. Číslo $N = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1976$ se dá známým způsobem vyjádřit jako součin prvočinitelů (tj. prvočísel); provede se to tak, že každé z čísel 2, 3, ..., 1976 se vyjádří jako součin prvočinitelů (např. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $22 = 2 \cdot 11$, $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$). Ze všech těchto prvočinitelů nás zajímají jen prvočinitele rovné 2 a 5, neboť $2 \cdot 5 = 10$; kolik dvojic 2, 5 vytvoříme v součinu N , tolik můžeme v tomto součinu N utvořit činitelů rovných 10.

Označme a počet těch prvočinitelů čísla N , které jsou rovny 2. Protože každé sudé číslo ≤ 1976 obsahuje aspoň jednoho prvočinitele rovného 2, je

$$a \geq \frac{1}{2} \cdot 1976 = 988. \quad (1)$$

Označme b počet těch prvočinitelů čísla N , jež jsou rovny 5. Prvočinitel 5 se vyskytuje aspoň jednou u všech čísel ≤ 1976 , která jsou násobky pěti, tj. u čísel 5, 10, 15, 20, $\dots$, 1975; dále se vyskytuje aspoň dvakrát u násobků čísla 25, tj. 25, 50, 75, 100, $\dots$, 1975; dále se vyskytuje aspoň třikrát u násobků čísla 125, tj. 125, 250, 375, 500, $\dots$, 1875; konečně se vyskytuje aspoň čtyřikrát u násobků čísla 625, tj. 625, 1250, 1875.

Mezi čísla 1, 2, $\dots$, 1976 je 395 násobků pěti, neboť $1976 = 5 \cdot 395 + 1$; dále je mezi nimi 79 násobků dvaceti-pěti, neboť $1976 = 25 \cdot 79 + 1$; dále je mezi nimi 15 násobků čísla 125, neboť $1976 = 15 \cdot 125 + 101$; konečně jsou mezi nimi tři násobky čísla 625, neboť $1976 = 3 \cdot 625 + 101$. Číslo $3125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ je větší než 1976, a proto nepřichází v úvahu.

Ve vyjádření čísla N jako součinu prvočinitelů se vyskytuje tedy prvočíslo 5 b -krát, kde

$$b = 395 + 79 + 15 + 3 = 492. \quad (2)$$

Podle (1), (2) je $a > b$; číslo $b = 492$ udává počet nul, které má číslo N v dekadickém vyjádření na konci.

Z — P — 3

Obdélník $ABCD$ má délky stran $AB = 6\frac{3}{5}$ cm, $BC = 4\frac{2}{3}$ cm; označme F střed strany AB . Výpočtem řešte úlohu:

Na polopřímce BC sestrojte bod X takový, aby obsah

trojúhelníku AFX byl roven $\frac{5}{8}$ obsahu obdélníku $ABCD$.
(Vypočtete velikost úsečky BX .)

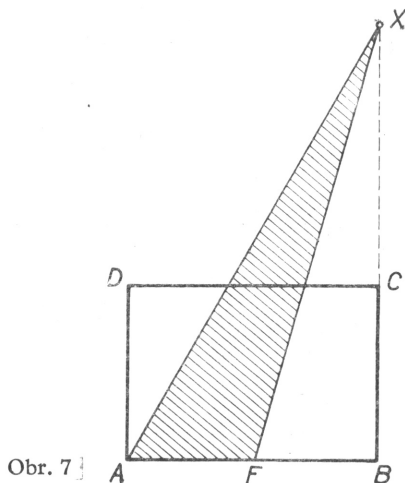
Řešení (obr. 7). Podle textu úlohy je $AB = \frac{33}{5}$, $BC = \frac{14}{3}$. Pět osmin obsahu obdélníku $ABCD$ je tedy číslo

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{33}{5} \cdot \frac{14}{3} = \frac{1}{4} \cdot 77. \text{ Označme } BX = x; \text{ obsah troj-}$$

$$\text{úhelníku } AFX \text{ je pak } \frac{1}{2} AF \cdot x = \frac{1}{4} AB \cdot x = \frac{1}{4} \cdot \frac{33}{5} x.$$

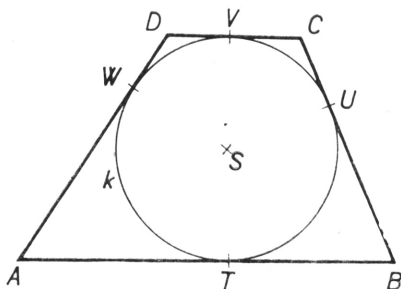
$$\text{Podmínka pro obsahy je } \frac{1}{4} \cdot \frac{33}{5} x = \frac{1}{4} \cdot 77. \text{ Odtud}$$

$$\frac{3}{5} x = 7, \text{ tj. } x = \frac{35}{3}.$$



Je dán lichoběžník $ABCD$, jehož střední příčka má délku 1 a jemuž lze vepsat kružnici. Vypočtete jeho obvod.

Řešení (obr. 8). Kružnice k vepsaná lichoběžníku $ABCD$ se dotýká jeho stran AB , BC , CD , DA v bodech,



Obr. 8

kteří označíme po řadě T , U , V , W . Podle známé vlastnosti tečen vedených z bodu ke kružnici platí

$$AW = AT, \quad BT = BU, \quad CU = CV, \quad DV = DW.$$

Sečtením

$$\begin{aligned} AW + AT + BT + BU + CU + CV + DV + DW &= \\ &= 2AT + 2BT + 2CV + 2DV = 2(AB + CD), \end{aligned}$$

tj. pro obvod o lichoběžníku $ABCD$ a jeho střední příčku s platí

$$o = 2 \cdot 2s = 4s = 4.$$

III. Soutěžní úlohy I. kola

KATEGORIE A

A – I – 1

Jsou-li z_1, z_2, z_3, z_4 komplexní čísla, pro něž $\operatorname{Re} z_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, pak

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 \neq 0.$$

Dokažte.

Riešenie. Predpokladajme, že uvedené tvrdenie neplatí. Teda platí rovnosť

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 = 0.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$(z_1 + z_2)(z_3 + z_4) = -z_1 z_2.$$

Vieme, že $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Môžeme deliť uvedenú rovnosť číslom $z_1 z_2$:

$$\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) (z_3 + z_4) = -1.$$

Podľa časti a) úlohy A-P-2 je $\operatorname{Re} \frac{1}{z_1} > 0$, $\operatorname{Re} \frac{1}{z_2} > 0$
a tiež

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) > 0, \quad \operatorname{Re} (z_3 + z_4) > 0,$$

a teda podľa časti b) tejto úlohy súčin $\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} \right) (z_3 + z_4)$
nemôže byť záporné reálne číslo.

A — I — 2

Určete nutnou a postačujúcu podmienku pro to, aby rovnice $x^3 + ax^2 + b = 0$ s neznámou x a reálnymi koeficienty a, b měla tři navzájem různé reálné kořeny.

Riešenie. Vyšetříme priebeh funkcie f definovanej predpisom

$$f(x) = x^3 + ax^2 + b.$$

Korene uvedenej rovnice sú nulové body funkcie f . Pre dosť malé záporné číslo x je $f(x)$ záporné, pre dosť veľké x kladné je $f(x)$ kladné číslo. Teda funkcia f má aspoň jeden nulový bod. Aby funkcia f mala tri nulové body, musí mať kladné lokálne maximum a záporné lokálne minimum. Uvedené je aj postačujúcou podmienkou. Funkcia f má deriváciu $f'(x) = 3x^2 + 2ax$, ktorá má nulové body $x_1 = 0$ a $x_2 = -\frac{2}{3}a$, pričom $f(x_1) = b$, $f(x_2) = \frac{4}{27}a^3 + b$.

Druhá derivácia v týchto bodoch má hodnoty $f''(x_1) = 2a$, $f''(x_2) = -2a$. Rozlíšime tri prípady.

i) $a = 0$. Potom $x_1 = x_2$ a funkcia f nemá lokálny extrém a ani tri nulové body.

ii) $a > 0$. Potom funkcia f má v bode x_1 lokálne minimum a v bode x_2 lokálne maximum. Má byť $f(x_1) < 0$ a $f(x_2) > 0$. Teda $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, tj.

$$b \left(\frac{4}{27} a^3 + b \right) < 0.$$

iii) $a < 0$. Potom funkcia f má v bode x_1 lokálne maximum a v bode x_2 lokálne minimum. Má byť $f(x_1) > 0$ a $f(x_2) < 0$. Teda $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, tj.

$$b \left(\frac{4}{27} a^3 + b \right) < 0.$$

Ak si uvedomíme, že z nerovnosti

$$b(4a^3 + 27b) < 0 \tag{1}$$

vyplýva, že

1. $a \neq 0$,
2. ak $a > 0$, tak $b < 0$,
3. ak $a < 0$, tak $b > 0$,

tak úhrnom dostávame, že nerovnosť (1) je nevyhnutná a postačujúca podmienka pre to, aby rovnica $x^3 + ax^2 + b = 0$ mala tri rôzne reálne korene.

A — I — 3

Určete všetky trojice prirozených čísel x, y, z , ktoré jsou řešením rovnice

$$x^2 - y^2 = 3z^2.$$

Riešenie. Nech trojice prirodzených čísiel x, y, z vyhovuje rovnici

$$x^2 - y^2 = 3z^2. \quad (1)$$

Nech d je najväčší spoločný deliteľ čísiel x, y, z . Potom aj prirodzené čísla $a = x : d$, $b = y : d$, $c = z : d$ vyhovujú rovnici (1) a sú nesúdeliteľné.

Označíme $u = a - b$, $v = a + b$. Potom platí

$$uv = 3c^2.$$

Ukážeme, že spoločný deliteľ čísiel u, v je 1 alebo 2.

Ak p je prvočíslo, ktoré delí u a v , tak p delí aj čísla $u + v = 2a$, $v - u = 2b$ a p^2 delí číslo $3c^2$. Keďže a, b, c sú nesúdeliteľné, tak musí byť $p = 2$. Z druhej strany $4 = 2^2$ tiež nie je spoločný deliteľ čísiel u, v , lebo by potom a, b, c boli párne, a teda súdeliteľné.

Rozlišujem dva prípady.

i) u, v sú nesúdeliteľné. Potom existujú nepárne prirodzené čísla k, l také, že buď

$$u = 3k^2, v = l^2,$$

alebo

$$u = k^2, v = 3l^2.$$

Potom buď

$$x = d \cdot \left(\frac{3k^2 + l^2}{2} \right), \quad y = d \cdot \left(\frac{l^2 - 3k^2}{2} \right), \quad z = dkl,$$

alebo

$$x = d \cdot \left(\frac{k^2 + 3l^2}{2} \right), \quad y = d \cdot \left(\frac{3l^2 - k^2}{2} \right), \quad z = dkl,$$

kde k, l sú nepárne a $l^2 > 3k^2$ alebo $3l^2 > k^2$, d je ľubovoľné prirodzené číslo.

ii) 2 je spoločný deliteľ u, v . Potom $\frac{u}{2}, \frac{v}{2}$ sú prirodzené čísla a platí

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{v}{2} = 3 \left(\frac{c}{2} \right)^2.$$

Zase existujú dve také prirodzené čísla k, l , z ktorých najviac jedno je párne, že buď

$$\frac{u}{2} = 3k^2, \frac{v}{2} = l^2,$$

alebo

$$\frac{u}{2} = k^2, \frac{v}{2} = 3l^2.$$

Potom buď

$$x = d(3k^2 + l^2), y = d(l^2 - 3k^2), z = 2dkl,$$

kde k, l sú prirodzené čísla, z ktorých najviac jedno je párne, $l^2 > 3k^2$, d je ľubovoľné prirodzené číslo, alebo

$$x = d(k^2 + 3l^2), y = d(3l^2 - k^2), z = 2dkl$$

kde k, l sú prirodzené čísla, z ktorých najviac jedno je párne, $3l^2 > k^2$, d je ľubovoľné prirodzené číslo.

Teda každé riešenie rovnice (1) má tvar

$$x = d \cdot \frac{3k^2 + l^2}{2}, \quad y = d \cdot \frac{|l^2 - 3k^2|}{2}, \quad z = dkl,$$

kde buď k, l sú nepárne prirodzené čísla a d je ľubovoľne prirodzené číslo, alebo k, l sú prirodzené čísla, z ktorých práve jedno je párne a d je ľubovoľné párne prirodzené číslo.

Skúškou sa ľahko zistí, že každá taká trojica čísiel je riešením rovnice (1).

A — I — 4

Jsou dána tři celá čísla a_0, a_1, a_2 tak, že rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný třemi. Z množiny $\mathbf{M}$ všech trojic celých čísel

$$(a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x), x \text{ celé}$$

lze vybrat takovou množinu $\mathbf{M}_1$, která má tyto dvě vlastnosti:

- (1) Každé dva různé prvky množiny $\mathbf{M}_1$ jsou trojice navzájem disjunktní.
- (2) Sjednocením všech trojic, které jsou prvky množiny $\mathbf{M}_1$, je množina všech celých čísel.

Dokažte vyslovenou větu.

Riešenie. Čísla a_0, a_1, a_2 dávajú pri delení tromi rôzne zvyšky. Nech sú to postupne z_0, z_1, z_2 . Teda každé z_i je niektoré z čísiel 0, 1, 2.

Nech $\mathbf{M}_1$ je množina všetkých trojíc $(a_0 + 3y, a_1 + 3y, a_2 + 3y)$, kde y je celé číslo.

Dve rôzne trojice nemajú spoločný prvok. Keby napr. $a_0 + 3y_1 = a_1 + 3y_2$, tak rozdiel $a_1 - a_0$ by bol deliteľný tromi.

Nech c je celé číslo. Ukážeme, že existuje také y , že c je

niektoré z čísiel $a_0 + 3y$, $a_1 + 3y$, $a_2 + 3y$. Nech z je zvyšok čísla c pri delení tromi. Potom buď $z = z_0$, alebo $z = z_1$, alebo $z = z_2$. Nech napr. $z = z_0$. Potom $c - a_0$ je deliteľné tromi, tj. existuje také celé číslo y , že $c - a_0 = 3y$. Potom $c = a_0 + 3y$.

A — I — 5

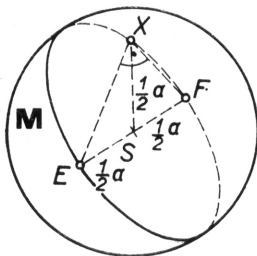
Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A'B'C'D'$, který má výšku v a dolní podstavu o hraně a . Necht body E a F jsou po řadě středy hran BC a AD .

Najděte množinu středů odvěsen všech pravouhlých trojúhelníků EXF s přeponou EF , jejichž vrchol X leží v podstavě $A'B'C'D'$. Proveďte diskusi vzhledem k číslům a a v .

Riešenie. Nech $\mathbf{M}$ je množina všetkých tých bodov X , ktoré sú vrcholom pravouhlého trojuholníka EFX s preponou EF .

Ukážeme pomocné tvrdenie:

Nech S je stred úsečky EF . Množina $\mathbf{M}$ je guľová



Obr. 9

plocha o strede S s polomerom $\frac{1}{2}a$, okrem koncových bodov E, F úsečky EF (obr. 9).

Skutočne, ak bod X rôzny od bodov E, F leží na uvedenej guľovej ploche, tak X leží na kružnici, ktorá je priesečníkom tejto plochy a roviny EFX . Pritom EF je priemer tejto kružnice a podľa Thaletovej vety trojuholník EFX je pravouhlý s preponou EF .

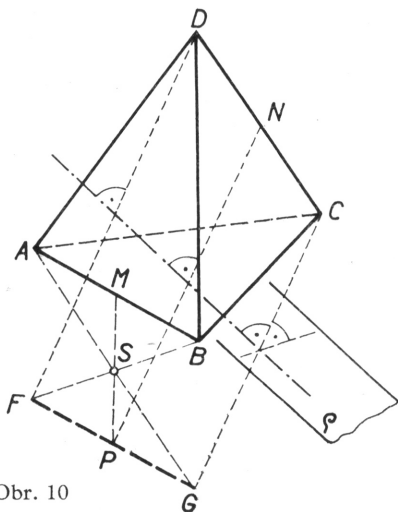
Ak naopak EFX je pravouhlý trojuholník s preponou EF , tak podľa Thaletovej vety bod X leží na kružnici s priemerom EF , a teda $SE = SX$. Odkiaľ vyplýva, že bod X leží na uvedenej guľovej ploche.

Ak $v > \frac{a}{2}$, tak žiaden bod množiny $\mathbf{M}$ neleží v podstavě $A'B'C'D'$ a vyšetřovaná množina středů odvíšen je prázdná.

Ak $v = \frac{a}{2}$, tak jediný společný bod množiny $\mathbf{M}$ a podstavě $A'B'C'D'$ je střed této podstavě S' . Potom hledaná množina má dva prvky, a to středy úseček ES', FS' .

Ak $v < \frac{a}{2}$, tak množina $\mathbf{M}$ a podstava $A'B'C'D'$ sa pretínajú v kružnici o strede S' a polomere $\sqrt{\frac{a^2}{4} - v^2}$. Hľadaná množina je zjednotenie kružníc o stredoch E', F' a polomere $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} - v^2}$, kde E', F' sú streďy úsečiek ES', FS' , ležiacich v rovine rovnobežnej s podstavou $ABCD$.

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť souměrnost podle středu S převádí hranu AB v tutěž úsečku, v kterou převádí souměrnost podle jisté roviny ρ hranu CD . Vyšetřte množinu všech bodů S této vlastnosti.



Obr. 10

Riešenie (obr. 10). Nech FG je úsečka, ktorá je obrazom hrany AB v stredovej súmernosti S podľa stredu S a súčasne je obrazom hrany CD v rovinnej súmernosti R podľa roviny ρ . Priamka FG leží v rovine σ , ktorá obsahuje priamku CD , a FG je rovnobežná s priamkou AB . Keďže priamky AB a CD nie sú rovnobežné, tak rovina σ je uvedenou podmienkou jednoznačne určená.

Označme postupne M, N, P stredy úsečiek $AB, CD,$

FG. Obrazom bodu *M* v súmernosti **S** je bod *P*. Obrazom bodu *N* v súmernosti **R** je tiež bod *P*.

Nech *p* je priamka idúca bodom *C* a je rovnobežná s priamkou *AB*. Nech *E*₁, *E*₂ sú obidva body na priamke *p*, pre ktoré platí *E*₁*C* = *E*₂*C* = *AB*. Nech *s*, *t* sú priamky idúce bodom *N* a kolmé na osi uhlov $\sphericalangle DCE_1$, $\sphericalangle DCE_2$.

Z vlastnosti stredovej súmernosti **S** vyplýva, že úsečka *FG* je rovnobežná s priamkou *p*. Z vlastností rovinovej súmernosti potom vyplýva, že stred *P* úsečky *FG* leží na priamke *s* alebo na priamke *t*. Nech **M** je obraz zjednotenia priamok *s* a *t* v priestorovej rovnoľahlosti so stredom *M* a koeficientom $\frac{1}{2}$. Pretože *S* je stred úsečky *MP*, tak

S patrí do množiny **M**.

Naopak, ak *S'* je nejaký bod množiny **M**, označíme *P'* jeho obraz pri priestorovej rovnoľahlosti so stredom *M* a koeficientom 2. Bod *P'* leží na priamke *s* alebo *t*. Úsečka rovnobežná s úsečkou *AB* a so stredom *P'* je stredovo súmerná podľa stredu *S'* s úsečkou *AB*. Ak bod *P'* leží na priamke *s*, tak táto úsečka je rovinovo súmerná s úsečkou *CD* v rovinovej súmernosti podľa roviny kolmej na priamku *s* a idúcej stredom úsečky *NP'*. Podobne v prípade, že bod *P'* leží na priamke *t*.

Ukázali sme teda, že **M** je hľadaná množina bodov.

B — I — 1

Nájdite všetky kladné riešenia sústavy

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2,$$

$$x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_{1975} + \frac{1}{x_{1976}} \leq 2,$$

$$x_{1976} + \frac{1}{x_1} \leq 2.$$

Riešenie. Odčítajme od oboch strán každej z nerovníc danej sústavy číslo 2 a potom všetky nerovnice sčítajme. Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{1976} \left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2 \right) \leq 0. \quad (1)$$

Ak si uvedomíme, že pre každé kladné číslo x_i platí

$$x_i + \frac{1}{x_i} - 2 \geq 0, \quad (2)$$

zistujeme, že v (1) musí platiť rovnosť. Pre čísla x_i , $i = 1, 2, \dots, 1976$ vyhovujúce danej sústave nerovníc musí preto platiť

$$\sum_{i=1}^{1976} \left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2 \right) = 0,$$

ale vzhľadom na (2) riešenie (3) dostaneme z rovníc

$$x_i + \frac{1}{x_i} - 2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 1976,$$

z ktorých vyplýva $x_i = 1$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, 1976$. Dosadením do pôvodnej sústavy nerovníc sa ľahko presvedčíme, že tieto čísla jej vyhovujú. Je to teda jediné riešenie danej sústavy.

B — I — 2

Sú dané reálne čísla $a, b \neq 0, c, r, s, t$, pre ktoré platí

$$ar - 2bs + ct = 0, \quad (1)$$

$$ac - b^2 > 0. \quad (2)$$

Potom platí

$$rt - s^2 \leq 0. \quad (3)$$

Dokážte.

Kedy v (3) nastane rovnosť?

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r \geq 0$ (v opačnom prípade môžeme uvažovať o číslach $-r, -s, -t$).

a) Nech $r > 0$. Z (2) dostaneme $ac > b^2 > 0$, z čoho vyplýva, že $c \neq 0$, a preto tiež platí

$$\frac{a}{c} > \frac{b^2}{c^2} > 0. \quad (4)$$

Z (1) po delení číslom c dostaneme vzhľadom na (4):

$$0 = \frac{a}{c}r - 2\frac{b}{c}s + t > r\frac{b^2}{c^2} + 2\left(-\frac{b}{c}\right)s + t.$$

Z toho vyplýva, že mnohočlen $rx^2 + 2sx + t$ premennej x s $r > 0$ má v čísle $-\frac{b}{c}$ zápornú hodnotu, a má preto dva rôzne reálne korene. Je preto jeho diskriminant $4s^2 - 4rt > 0$ čiže $rt - s^2 < 0$.

b) Ak $r = 0$, $t = 0$, potom z (1), vzhľadom na predpoklad, že $b \neq 0$, vyplýva, že tiež $s = 0$ a v (3) platí rovnosť.

c) Ak $r = 0$, $t > 0$, postupujeme analogicky ako v prípade a) s využitím toho, že vzhľadom na (2) je $a \neq 0$, a dostaneme, že musí byť $rt - s^2 < 0$.

Z vykonanej úvahy zároveň vyplýva, že v (3) nastane rovnosť vtedy a len vtedy, keď platí $r = s = t = 0$.

B — I — 3

Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla so súčtom nula, m najmenšie z nich, M najväčšie z nich. Potom platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM.$$

Dokážte.

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí

$$m = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n = M.$$

Potom však zrejme platí

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^n (x_1 - x_k)(x_k - x_n) &= (x_1 + x_n) \sum_{k=1}^n x_k - \\ &- nx_1x_n - \sum_{k=1}^n x_k^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Podľa podmienok úlohy je však $\sum_{k=1}^n x_k = 0$ a z nerovnosti

(1) preto dostávame

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq -nx_1x_n = -nmM,$$

čo sme mali dokázať.

B — I — 4

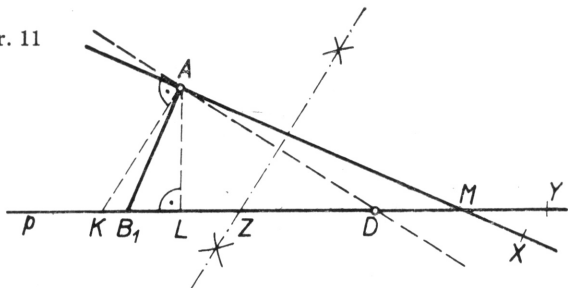
V rovine sú dané dva rôzne body A a D . Nájdite množinu stredov strán BC všetkých takých ostrouhlých trojuholníkov ABC , v ktorých bod D leží na úsečke BC .

Riešenie. Nech p je ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom D v danej rovine, rôzna od priamky AD . Päť kolmice vedenej z bodu A na priamku p označme L (obr. 11) a priesečník kolmice na priamku AD prechádzajúcej bodom A s priamkou p označme K . Ak má byť trojuholník ABC , ktorého strana BC leží na priamke p a ob-

sahuje bod D , ostrouhlý, musí zrejme jeho vrchol B ležať medzi bodmi K a L .

Nech B_1 je ľubovoľný bod priamky p ležiaci medzi bod-

Obr. 11



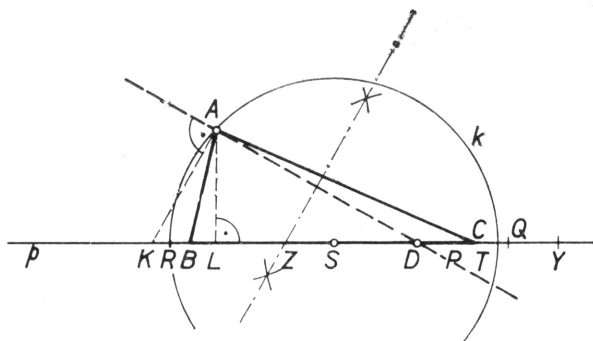
mi K a L . Zostrojme pravý uhol B_1AX a označme M priesečník priamky AX s priamkou p . Vrchol C trojuholníka ABC musí ležať medzi bodmi D a M .

Ak budeme uvažovať o rôznych polohách bodu B na úsečke KL od bodu K ku L , bude bod M nadobúdať rôzne polohy na polpriamke DY . Polpriamka DY tvorí teda množinu vrcholov C trojuholníka ABC . Tomu zodpovedajúca množina stredov S úsečiek BC bude polpriamka ZY okrem bodu Z , pričom Z je priesečník osi úsečky AD s priamkou p a zároveň stredom úsečky KD .

Ak túto úvahu urobíme pre všetky priamky prechádzajúce bodom D rôzne od priamky AD , zisťujeme, že každý bod S požadovanej vlastnosti musí ležať v otvorenej polrovine určenej osou úsečky AD a bodom D vrátane bodu D , ale bez ostatných bodov priamky AD .

Nech teda bod S leží v otvorenej polrovine určenej osou úsečky AD a bodom D , ale s výnimkou bodu D neleží na priamke AD .

Na priamke $SD \equiv p$ nech body K, L majú rovnaké vlastnosti ako bolo vyššie uvedené (obr. 12). Nech P, Q sú také body polpriamky DY , pre ktoré platí $SP = SL$,



Obr. 12

$SQ = SK$. Ak S má byť stredom strany BC , musí bod C ležať medzi bodmi P a Q .

Označme R, T priesečníky kružnice $k = (S; SA)$ s priamkou SD . Zrejme bod R leží medzi bodmi K a L , bod T medzi bodmi P a Q . Nech B je ľubovoľný bod priamky SD ležiaci medzi bodmi R, L . Na priamke SD zostrojíme bod C tak, aby platilo $SC = SB$. Bod C bude zrejme ležať medzi bodmi P a T . Takto zostrojený trojuholník ABC je ostrouhlý, bod D leží na úsečke BC a bod S je stredom strany BC .

Tým sme dokázali, že hľadanou množinou bodov je otvorená polrovina určená osou úsečky AD a bodom D vrátane bodu D , ale bez ostatných bodov priamky AD .

V rovine je daných 50 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na priamke. Dokážte: Trojuholníky určené trojicami daných bodov majú aspoň 200 vnútorných uhlov veľkosti menšej než 8° a z toho aspoň 100 vnútorných uhlov, ktorých veľkosť nepresahuje $7^\circ 30'$.

Riešenie. Označme $\mathbf{M}$ danú množinu bodov a nech X je ľubovoľný bod tejto množiny. Nech $\mathbf{U}_X$ je množina 49 uhlov s vrcholom v bode X , ktorých ramená prechádzajú ostatnými bodmi množiny $\mathbf{M}$.

Predpokladajme, že najviac 3 z uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ sú menšie než 8° . Potom však súčet zostávajúcich 46 uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ musí byť väčší než $46 \cdot 8^\circ = 368^\circ$, čo je spor, pretože súčet všetkých 49 uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ sa rovná 360° . Z toho vyplýva, že v $\mathbf{U}_X$ musia byť aspoň 4 uhly menšej veľkosti než 8° . Keďže túto vlastnosť má každý bod množiny $\mathbf{M}$, je tým prvá časť tvrdenia dokázaná.

Z predpokladu, že z uhlov množiny $\mathbf{U}_X$ má najviac jeden veľkosť najviac rovnú $7^\circ 30'$, analogicky vyplýva, že súčet zostávajúcich 48 uhlov tejto množiny musí byť väčší než $48 \cdot 7^\circ 30' = 360^\circ$, čo je opäť spor. V každej množine $\mathbf{U}_X$ existujú preto aspoň 2 uhly, ktorých veľkosť neprevyšuje $7^\circ 30'$, a vzhľadom na to, že množina $\mathbf{M}$ obsahuje 50 bodov, vyplýva z toho správnosť druhej časti dokazovaného tvrdenia.

Vo vnútri jednotkovej gule je daných päť bodov. Dokážte, že aspoň dva z nich majú vzdialenosť menšiu než $\sqrt{2}$.

Riešenie. Najskôr dokážeme nasledujúce tvrdenie: Ak je na guľovej ploche s polomerom 1 daných päť bodov, potom aspoň dva z nich majú vzdialenosť menšiu alebo rovnú $\sqrt{2}$.

Použijeme metódu nepriameho dôkazu a budeme predpokladať, že vzdialenosť každých dvoch z týchto bodov je väčšia než $\sqrt{2}$. Potom štyri z týchto bodov — označme ich B', C', D', E' — ležia v otvorenom polpriestore, ktorého hranica prechádza stredom guľovej plochy a je kolmá k polomeru idúcemu piatym z daných bodov — A' . Podľa výsledku prípravnej úlohy B-P-3 majú z bodov B', C', D', E' aspoň dva vzdialenosť menšiu než $\sqrt{2}$, čo je spor.

Nech sú teraz A, B, C, D, E dané body vo vnútri jednotkovej gule. Ak niektorý z nich leží v strede S danej gule, je tvrdenie zrejme pravdivé. Ak nie je tomu tak, utvoríme polpriamky SA, SB, SC, SD, SE . Ich priesečníky s guľovou plochou označme A', B', C', D', E' . Podľa vyššie dokázaného tvrdenia majú aspoň dva z týchto piatich bodov vzdialenosť menšiu alebo rovnú $\sqrt{2}$. Nech sú to napr. body A', B' . Potom vzdialenosť bodov A, B je zrejme menšia než $\sqrt{2}$, čím je tvrdenie úlohy dokázané.

C — I — 1

Nájdite všetky trojice jednocifrových čísiel a, b, c , pre ktoré platí $a = b + c$ a číslo s dekadickým zápisom $2ab3c7$ je deliteľné 37.

Řešení. Dané číslo N lze vzhledem k rovnosti $a = b + c$ napsat v tomto tvaru

$$N = 200307 + 10(1100b + 1001c)$$

neboli

$$N = 5413 \cdot 37 + 26 + 10(999 + 101)b + 10(999 + 2)c.$$

Číslo N je násobkem čísla 37, právě když je násobkem čísla 37 číslo

$$N_1 = 26 + 1010b + 20c;$$

je totiž $999 = 27 \cdot 37$.

Číslo N_1 je násobkem čísla 37, právě když je jeho násobkem číslo

$$N_2 = N_1 - 999b = 26 + 11b + 20c.$$

Protože $b \leq 9, c \leq 9, a = b + c \leq 9$, je

$$N_2 = 26 + 11a + 9c \leq 26 + 99 + 81 = 206.$$

Pro N_2 tedy přicházejí v úvahu násobky 37, 74, 111, 148, 185; od nich odečteme 26. Příslušné rovnice a z nich plynoucí hodnoty b, c jsou:

Rovnice		b	c	Poznámka
$11b + 20c = 11$	$11 = 37 - 26$	1	0	řešení
$11b + 20c = 48$	$48 = 74 - 26$	8	-2	$c < 0$
$11b + 20c = 85$	$85 = 111 - 26$	5	$\frac{3}{2}$	$b = 5$, neboť $85 - 11b$ je násobek deseti
$11b + 20c = 122$	$122 = 148 - 26$	2	5	řešení
$11b + 20c = 159$	$159 = 185 - 26$	9	3	není řešení, neboť $a = b + c = 12$

Úloha má tedy dvě řešení: čísla 211307 a 272357, jak se přesvědčíme zkouškou.

C — I — 2

Z miesta A výjdu do miesta B vzdialeného 600 km súčasne dva automobily. Rychlosť prvého je 60 km/h, druhého 50 km/h. Druhý voz neskôr zvýši svoju rýchlosť tak, že dorazí do miesta B súčasne s prvým vozom. Vyjadrite veľkosť zvýšenia priemernej rýchlosti druhého vozu pomocou veľkosti dráhy, ktorú vykonal s počiatočnou rýchlosťou.

Řešení. Označme C místo, kde druhé auto zvýšilo svou rychlost o δ (km/h). Pak doba jeho jízdy z A do B byla (v hodinách)

$$\frac{x}{50} + \frac{600 - x}{50 + \delta}.$$

Protože první auto projelo trať z A do B za $\frac{600}{60} = 10$ hodin, platí podle podmínky z textu úlohy

$$\frac{x}{50} + \frac{600 - x}{50 + \delta} = 10.$$

Odtud dostaneme

$$\delta = \frac{5000}{500 - x}$$

Např. zvýší-li druhé auto svou rychlost ve středu trati AB , je $x = 300$ a $\delta = 25$, takže zvýšená rychlost druhého auta je 75 km/h.

Je-li $x = 499$, je $\delta = 5000$, tj. rychlost druhého auta by měla být 5050 km/h, což je neuskutečnitelné.

C — I — 3

Určete všechna přirozená čísla n , pro něž je možno zlomek $\frac{2}{n}$ vyjádřit ve tvaru $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, kde x, y jsou vhodná přirozená čísla.

Řešení. Rovnici $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ upravíme na tvar

$$n = \frac{2xy}{y - x}. \quad (1)$$

Vyjádříme-li čísla x, y ve tvaru $x = \delta a, y = \delta b$, kde δ je největší společný dělitel čísel x, y , jsou čísla a, b nesoudělná; z (1) plyne, že číslo

$$n = \frac{2ab \cdot \delta}{b - a}$$

je celé. Je-li p prvočinitel čísla $b - a$, není prvočinitelem ani čísla a , ani b (plyne nepřímou z nesoudělnosti čísel a, b). Proto je číslo $b - a$ dělitelem čísla 2δ , tj.

$$2\delta = k(b - a)$$

neboli

$$\delta = \frac{k}{2}(b - a). \quad (2)$$

Ze vztahů $x = \delta a, y = \delta b$ a z (2) plyne

$$x = \frac{k}{2}(b - a)a, \quad y = \frac{k}{2}(b - a)b, \quad (3)$$

kde k je vhodné číslo celé. Zkouškou se přesvědčíme, že řešení (3) vyhovují rovnici (1), jestliže $kab = n$.

Nyní rozřešíme danou úlohu. Je-li n liché, zvolíme $k = 1, a = 1, b = n$ (a, b jsou nesoudělná) a dostaneme řešení

$$x = \frac{1}{2}(n - 1), \quad y = \frac{1}{2}n(n - 1).$$

Je-li sudé, zvolíme $k = 2$ a $a = 1, b = \frac{n}{2}$ (a, b jsou opět nesoudělné) a dostaneme řešení

$$x = \frac{1}{2}(n - 2), \quad y = \frac{1}{4}n(n - 2).$$

Úloha je tedy řešitelná pro všechna přirozená čísla $n > 1$.

C — I — 4

V prostoru je dána krychlová síť (obdoba čtvercové sítě v rovině). Mřížovými body nazýváme vrcholy krychlí této sítě. Zvolme kvádr o rozměrech a, b, c , který je složen z $a \cdot b \cdot c$ krychlí sítě. Označíme n, s a h počet mřížových bodů po řadě ležících uvnitř kvádru, uvnitř stěn kvádru a uvnitř hran kvádru. Dokažte, že pro objem V kvádru platí:

$$V = n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} + 1.$$

Řešení. Počet mřížových bodů ležících uvnitř daného kvádru je

$$n = (a - 1)(b - 1)(c - 1). \quad (1)$$

Počet mřížových bodů ležících uvnitř stěn je

$$s = 2(a - 1)(b - 1) + 2(b - 1)(c - 1) + 2(c - 1)(a - 1). \quad (2)$$

Počet mřížových bodů ležících uvnitř hran je

$$h = 4(a - 1) + 4(b - 1) + 4(c - 1). \quad (3)$$

Z (1), (2), (3) plyne

$$\begin{aligned} n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} &= (a - 1)(b - 1)(c - 1) + \\ &+ (a - 1)(b - 1) + (b - 1)(c - 1) + (c - 1)(a - 1) + \\ &+ (a - 1) + (b - 1) + (c - 1). \end{aligned}$$

Při další úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}n + \frac{s}{2} + \frac{h}{4} &= [(a-1)+1] \cdot [(b-1)+1] \cdot \\&\quad \cdot [(c-1)+1] - 1 = \\&= abc - 1 = V - 1,\end{aligned}$$

neboť pro objem kváдру platí $V = abc$.

C — I — 5

Je-li v délka nejmenší výšky trojúhelníku a P jeho obsah, pak platí

$$v \leq \sqrt[3]{P\sqrt{3}}.$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost?

Řešení. Dokazovaná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$v^2 \leq P\sqrt{3} \tag{1}$$

nebo také s nerovností

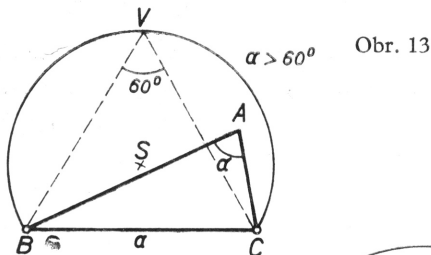
$$v \leq \frac{1}{2} a\sqrt{3}, \tag{2}$$

kde a je strana příslušná k nejmenší výšce v ; proto je a největší strana daného trojúhelníku. Proto je dále úhel α ležící proti straně a největší úhel a platí pro něj

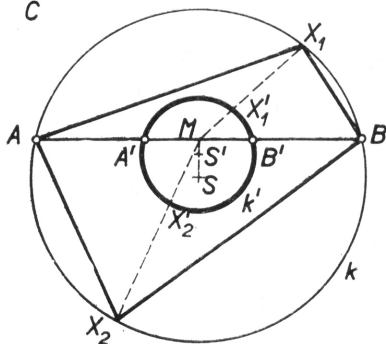
$$\alpha \geq 60^\circ$$

(v případě $\alpha < 60^\circ$ by platilo také $\beta < 60^\circ$, $\gamma < 60^\circ$; $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$, což je spor.)

Vrchol A ležící proti straně a je uvnitř úseče s tětivou a a obvodovým úhlem velikosti 60° (obr. 13). Největší možná délka nejmenší výšky $\triangle ABC$ je tedy výška rovnostranného



Obr. 13



Obr. 14

trojúhelníku BCV , tj. $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Platí tedy (2), (1) i dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane jen pro rovnostranný trojúhelník.

C — I — 6

Je dána kružnice k a její tětiva AB . Sestrojte množinu těžišť všech trojúhelníků ABX , kde X je bod kružnice k .

Řešení. Označíme-li M střed tětiny AB (obr. 14), je těžiště X'_1 trojúhelníku ABX_1 obraz bodu X_1 ve stejno-
 lehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{3}$ (těžiště dělí těž-
 nici v poměru $2:1$). Obrazem kružnice k je kružnice k' ,
 která po vyloučení bodů A' , B' je hledanou množinou
 bodů. Kružnici k' sestrojíme pomocí tří bodů: A' , B' , X'_1 .

Z – I – 1

Najděte všechna celá nezáporná čísla n , pro která je podíl

$$1260 : (3n + 1)$$

přirozené číslo.

Řešení. Jde o to, nalézt všechny kladné dělitele čísla 1260, které lze vyjádřit ve tvaru $3n + 1$, tj. dělitele, které při dělení třemi dávají zbytek 1. Předně je to číslo 1 (pro $n = 0$); je-li $n > 0$, je $3n + 1 > 1$ a číslo $3n + 1$ je vytvořeno pomocí prvočinitelů čísla 1260. Vyjádříme tedy číslo 1260 jako součin prvočinitelů

$$1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

a k jednotlivým prvočinitelům připišeme zbytky při dělení třemi:

Prvočinitel	2	2	3	3	5	7
Zbytek	2	2	0	0	2	1

Utvoříme ty dělitele čísla 1260, jež nejsou násobky tří, a připišeme k nim zbytky při dělení třemi (násobek tří nelze totiž napsat ve tvaru $3n + 1$):

Dělitel	2	5	7	2.2	2.5	2.7
Zbytek	2	2	1	1	1	2

Dělitel	5.7	2.2.5	2.2.7	2.5.7	2.2.5.7
Zbytek	2	2	1	1	2

Dostáváme tedy mimo $n = 0$ ještě tato řešení:

$3n + 1$	7	4	10	28	70
n	2	1	3	9	23

Z — I — 2

Domy ve větších obcích bývají označeny nejen popisnými čísly, ale ještě tzv. orientačními čísly, a to takto: V každé ulici jsou označeny domy po jedné její straně pořadové čísla 2, 4, 6, ..., na druhé straně 1, 3, 5, Kolik domů má ulice, jestliže na každé její straně je právě n domů, jejichž orientační číslo obsahuje aspoň jednu číslici 4. Úlohu řešte pro a) $n = 6$, b) $n = 9$.

Řešení. a) $n = 6$. Na straně sudých čísel jsou „čtyřkové“ domy

4, 14, 24, 34, 40, 42 .

Na straně lichých čísel jsou „čtyřkové“ domy

41, 43, 45, 47, 49, 141 .

Na obou stranách je tedy $21 + 71 = 92$ domů.

b) $n = 9$. Na straně sudých čísel jsou „čtyřkové“ domy

4, 14, 24, 34, 40, 42, 44, 46, 48 .

Dům č. 48 však nemusí být poslední, za ním může být ještě dům č. 50 a případně č. 52.

Na straně lichých čísel jsou „čtyřkové“ domy

41, 43, 45, 47, 49, 141, 143, 145, 147 .

Na obou stranách je tedy $24 + 74 = 98$ domů nebo $25 + 74 = 99$ domů nebo $26 + 74 = 100$ domů.

Z — I — 3

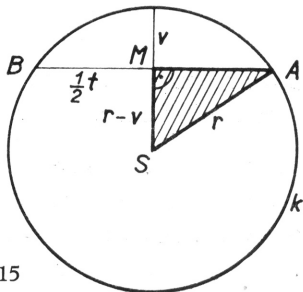
Kruhová úseč je omezena obloukem a tětivou kružnice.

a) Vyjádřete délku tětivy pomocí poloměru kružnice r a pomocí vzdálenosti středu oblouku od tětivy (tzv. výšky úseče).

b) Sestrojte úseč, jejíž tětiva má délku rovnou její výšce.

Řešení (obr. 15). Podle Pythagorovy věty pro $\triangle AMS$ (M je střed tětivy AB) platí

$$r^2 = \frac{1}{4} t^2 + (r - v)^2 .$$



Obr. 15

Po úpravě

$$t = 2\sqrt{v(2r - v)}. \quad (1)$$

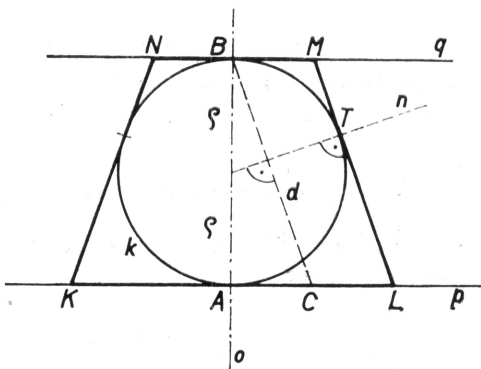
Dosadíme-li do vzorce (1) $t = v$, dostaneme po úpravě

$$v = \frac{8}{5}r. \quad (2)$$

Pomocí vzorce (2) provedeme konstrukci.

Z - I - 4

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $KLMN$, kterému



Obr. 16

lze vepsat kružnici, je-li dána délka d jeho ramene a poloměr ρ vepsané kružnice. Určete podmínku řešitelnosti.

Řešení (obr. 16). Úkolem je sestrojit ke kružnici k o poloměru ϱ dvě rovnoběžné tečny, v nichž budou ležet základny hledaného lichoběžníku, a pak určit směry jeho ramen. Rovnoběžné tečny ke kružnici k označme p , q

a požadujeme, aby větší základna lichoběžníku ležela v přímce p . Označme A, B body dotyku přímek p, q s kružnicí k ($A \in p, B \in q$). Zvolíme jednu z polorovin určených přímkou AB a v ní na přímce p sestrojíme takový bod C , že $BC = d$. Přímkou BC je pak určen směr jednoho z ramen hledaného lichoběžníku. Toto rameno prochází průsečíkem T kružnice k a kolmice n spuštěné z bodu S na BC . Druhé rameno lichoběžníku sestrojíme pomocí symetrie podle osy $o = AB$.

Podmínka řešitelnosti je zřejmě

$$2q < d.$$

IV. Úlohy II. kola

KATEGORIE A

A – II – 1a

Sú dané komplexné čísla z_1, z_2, z_3 také, že $\operatorname{Re} z_i > 0$ pre $i = 1, 2, 3$. Ak

$$z = \frac{z_2 z_3 + 1}{z_1 z_2 z_3 + z_1 + z_3},$$

potom $\operatorname{Re} z > 0$. Dokážte.

Riešenie. Podľa výsledku b) 2. prípravnej úlohy kategórie A je $z_2 z_3 + 1 \neq 0$. Preto je

$$z = \frac{1}{z_1 + \frac{z_3}{z_2 z_3 + 1}}.$$

a keďže $z_3 \neq 0$, tiež

$$z = \frac{1}{z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3}}}. \quad (1)$$

Podľa výsledku a) 2. prípravnej úlohy kategórie A z ne-

rovnosti $\operatorname{Re} z_3 > 0$ plynie, že tiež $\operatorname{Re} \frac{1}{z_3} > 0$. Keďže

$$\operatorname{Re} \left(z_2 + \frac{1}{z_3} \right) = \operatorname{Re} z_2 + \operatorname{Re} \frac{1}{z_3} > 0, \text{ je potom tiež}$$

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3}} > 0 \text{ a práve tak aj } \operatorname{Re} \left(z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3}} \right) > 0.$$

Z (1) potom hneď vyplýva, že $\operatorname{Re} z > 0$, čo sme mali dokázať.

A — II — 1b

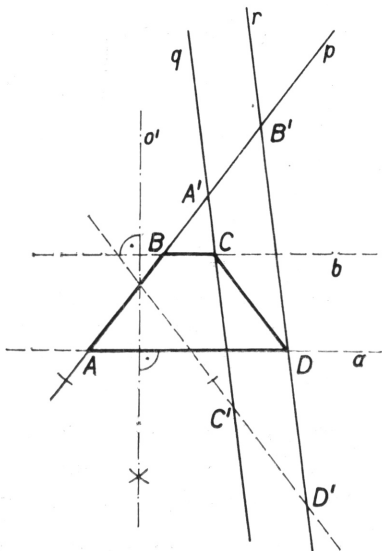
V rovine je dána priamka p a na ní štyri body A, B, A', B' v uvedenom poradí tak, že $AB > A'B'$. Ďalej sú dané dve navzájom rôzne rovnobežky q, r prechádzajúce po radě body A', B' .

Sestrojte na priamce q bod C a na priamce r bod D tak, aby A, B, C, D boli vrcholy rovnoramenného lichobežníku s ramenami AB a CD . Kolik řešení má úloha?

Řešení. Jsou-li body C, D hledanými body (obr. 17), je úsečka CD shodná s úsečkou AB . Protože je tedy $CD > A'B'$, může přímka CD náležet právě do dvou různých směrů. Ďalej směr osy souměrnosti výsledného lichobežníku je jednoznačně určen směrem přímky CD . Z těchto závěrů již plyne *konstrukce*.

Nejprve určíme směr přímky CD . Sestrojíme libovolnou dvojici bodů $C' \in q$ a $D' \in r$, pro něž platí $C'D' = AB$. Přímka $C'D'$ pak určuje směr hledané přímky CD . Ďalej nalezneme směr osy hledaného lichobežníku. Tento směr

je určen přímkou o' , jež je osou přímk AB a $C'D'$. Body A, B pak vedeme kolmice a, b na přímkou o' . Jeden z průsečíků a, b s přímkou q označíme C a jeden z průsečíků přímk a, b s přímkou r označíme D tak, aby bylo $CD \parallel C'D'$.



Obr. 17

Dále dokážeme, že sestrojené body C a D jsou hledané body. Protože $C'D' = AB$, je $C'D' > A'B'$ a přímky AB a $C'D'$ jsou různoběžné. Osa o' není kolmá na AB , takže body A, B, C ani body A, B, D neleží v téže přímce. Dále úsečka AB leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině qB' , a proto úsečky AB a CD nemají společné body. Dále platí buď $C = C'$ a $D = D'$, anebo čtyřúhelník $CDD'C'$ je rovnoběžník, takže $CD = C'D' = AB$. Z nerovnosti $CD > A'B'$ plyne, že AB a CD nejsou rovnoběžné. Pro-

tože $a \parallel b$, jsou body A, B, C, D vrcholy rovnoramenného lichoběžníku s rameny AB a CD .

Nyní je třeba ještě určit, kolik má úloha řešení. Pro přímkou $C'D'$ jsou dva možné směry. Pro každý tento směr přicházejí v úvahu opět dva různé směry pro osu o' . Zbývá zjistit, zda lze vždy mezi průsečíky přímek a, b a q, r nalézt body C a D požadovaných vlastností. Přímky a, b, q, r mají zřejmě vlastnost: Zvolíme-li libovolný bod M na přímce a (resp. na b, q, r) a vedeme-li jím rovnoběžku s $C'D'$, pak pro průsečík N s přímkou b (resp. a, r, q) platí $MN = C'D'$. Odtud plyne, že v rovnoběžníku, jehož strany leží v přímkách a, b, q, r , je právě jedna úhlopříčka rovnoběžná s $C'D'$. Její vrcholy pak stačí označit C, D tak, aby bylo $C \in q$ a $D \in r$. Úloha má tedy vždy čtyři řešení (dvě pro každý možný směr přímky $C'D'$).

A — II — 2a

Najdite všetky usporiadané dvojice $(x; y)$ celých čísel, ktoré spĺňajú rovnicu

$$16xy = (x^2 + 16y^2)(x^2 + y^2 + 5x + 5).$$

Riešenie. Rovnicu spĺňa dvojica $(0; 0)$. Nech je ďalej $(x; y) \neq (0; 0)$. Potom danú rovnicu možno upraviť na tvar

$$\frac{16xy}{x^2 + 16y^2} = x^2 + y^2 + 5x + 5.$$

Použitím nerovnosti $\frac{16ab}{a^2 + 16b^2} \leq 2$, ktorá platí pre ľubo-

voľné reálne čísla $a \neq 0$ alebo $b \neq 0$, dostaneme z predchádzajúcej rovnice nerovnicu

$$x^2 + y^2 + 5x + 3 \leq 0,$$

to jest

$$x^2 + 5x + (y^2 + 3) \leq 0,$$

ktorú spĺňajú len tie usporiadané dvojice celých čísel $(x; y)$, pre aké platí

$$25 - 4(y^2 + 3) \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + 5x + 3 \leq 0.$$

Prvú nerovnicu z tejto sústavy spĺňajú celé čísla $y \in \{1; 0; -1\}$.

Ak $y = \pm 1$, potom z druhej nerovnice sústavy dostaneme $x^2 + 5x + 4 \leq 0$. Riešením tejto nerovnice zistíme, že z celých čísel je spĺňajú len čísla $x \in \{-1; -2; -3; -4\}$. Dosadením do pôvodnej rovnice sa presvedčíme, že z usporiadaných dvojíc $(x; y)$, kde $x \in \{-1; -2; -3; -4\}$, $y \in \{1; -1\}$, spĺňa pôvodnú rovnicu len usporiadaná dvojice $(-4; -1)$.

Ak $y = 0$, potom z danej rovnice dostaneme rovnicu $x^2 + 5x + 5 = 0$, ktorá však nemá celočíselné riešenie.

Teda danú rovnicu spĺňajú len usporiadané dvojice $(0; 0)$, $(-4; -1)$.

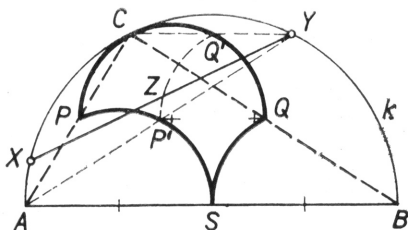
A — II — 2b

Je dána pŕlkružnice k s krajnými body A a B a na ní bod $C \neq A, B$.

a) Najdĕte množinu **M** stredŕ vĕch ŕseĕek XY , probíhá-li bod X oblouk AC a bod Y oblouk CB pŕlkružnice k (vĕdy vĕetnĕ krajnĕch bodŕ).

b) Vyjádřete obsah množiny **M** pomocí délky d úsečky AB a vzdálenosti v bodu C od přímky AB .

Řešení (obr. 18). a) Označme S střed půlkružnice, P střed úsečky AC , Q střed úsečky BC . Je-li $X = A$



Obr. 18

a probíhá-li bod Y oblouk CB , probíhá střed Z úsečky XY oblouk PS Thaletovy kružnice nad úsečkou AS . Je-li $Y = B$ a probíhá-li X oblouk AC , probíhá Z oblouk SQ Thaletovy kružnice nad SB . Je-li $X = C$ a Y probíhá oblouk CB , probíhá Z oblouk CQ Thaletovy kružnice nad PQ , je-li $Y = C$ a X probíhá oblouk AC , probíhá Z oblouk PC téže kružnice. Uvedené čtyři oblouky PS , SQ , QC a CP omezují oblast **M**₀, totiž oblast vyplněnou oblouky vzniklými posunutím oblouku PC tak, že nový krajní bod P' odpovídající P leží na oblouku PS . Dokážeme, že **M**₀ je totožná s hledanou množinou **M**.

Je-li totiž X bodem oblouku AC a Y bodem oblouku CB , leží Z na oblouku vzniklém posunutím PC o vektor $\frac{1}{2}(Y - C)$ a nový počátek P' patří oblouku PS . (Tento oblouk vznikne, zůstává-li Y pevný a probíhá-li X oblouk AC .) Je tedy $Z \in \mathbf{M}_0$.

Je-li obráceně $Z \in \mathbf{M}_0$, leží Z na některém z uvedených oblouků, např. $P'Q'$. Polopřímka AP' protne oblouk CB v bodu Y , neboť P' leží na oblouku PS , homotetickém s CB s poměrem homotetie $\frac{1}{2}$. Bod X , pro který je Z středem úsečky XY , však leží na oblouku AC , neboť oblouk $P'Q'$ je homotetický s AC s poměrem homotetie $\frac{1}{2}$. Proto $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$.

b) Plošný obsah množiny $\mathbf{M}$ je stejný jako obsah obdélníku $PSQC$ (úseč nad PC doplní část u oblouku SQ , úseč nad QC doplní část u oblouku PS). Proto je obsah roven polovině obsahu trojúhelníku ABC , tj. $\frac{1}{4} dv$.

A — II — 3a

Dokažte větu: Kladná čísla a, b, c jsou délkami stran tupouhlého trojúhelníku, právě když aspoň jedno z čísel

$$a^2 + b^2 - c^2, b^2 + c^2 - a^2, c^2 + a^2 - b^2 \quad (1)$$

je záporné a zároveň součet převrácených čísel k číslům (1) je záporný.

Řešení. a) Označme čísla (1) po řadě C, A, B . Zvolíme označení tak, aby bylo $C < 0$ a $b \geq a$. Pak je

$$0 < a \leq b < c \quad (2)$$

a

$$A > 0, B > 0, C < 0. \quad (3)$$

Součet převrácených čísel k číslům (1) je podle předpokladu záporný:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} < 0. \quad (4)$$

(4) upravíme na tvar

$$\frac{1}{ABC} [(A + B)C + AB] < 0. \quad (5)$$

Protože podle (3) je $ABC < 0$, je podle (5)

$$(A + B)C + AB > 0. \quad (5')$$

Dále je

$$A + B = 2c^2,$$

a tedy podle (5')

$$2c^2(a^2 + b^2 - c^2) + c^4 - (a^2 - b^2)^2 > 0,$$

$$2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 - (a^2 - b^2)^2 > 0,$$

konečně pak

$$[(a + b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a - b)^2] > 0. \quad (6)$$

Levou stranu (6) rozložíme v součin lineárních trojčlenů

$$(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a) > 0. \quad (7)$$

Vzhledem k (2) je první, třetí a čtvrtý činitel (7) číslo kladné; proto je také $a + b - c > 0$, tj.

$$a + b > c.$$

Protože c je největší z čísel a, b, c , lze z úseček délek a, b, c sestavit podle známé planimetrické věty trojúhelník.

Z předpokladu $C < 0$ podle kosinové věty plyne, že tento trojúhelník je tupouhlý.

b) Necht' jsou a, b, c délky stran trojúhelníku, jehož tupý úhel γ je sevřen stranami o délkách a, b . Podle kosinové věty je $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma < 0$ a dále pak zřejmě platí (3). Označíme strany a, b tak, aby platil vztah (2); podle trojúhelníkové nerovnosti pak jsou všichni čtyři činitelé na levé straně (7) kladná čísla a platí (7). Ze vztahu (7) odvodíme (6) a obrácením postupu a) dostaneme (5) a odtud (4).

Tím je věta úplně dokázána.

A — II — 3b

Je dán trojúhelník, jehož výšky jsou x_1, x_2, x_3 . Vypočítejte obsah tohoto trojúhelníku pomocí p, q, r , je-li

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \quad (1)$$

rovnice s kořeny x_1, x_2, x_3 .

Řešení. Necht' x_1, x_2, x_3 jsou v uvedeném pořadí výšky na strany a, b, c daného trojúhelníku. Pro obsah P tohoto trojúhelníku zřejmě platí:

$$x_1 = \frac{2P}{a}, \quad x_2 = \frac{2P}{b}, \quad x_3 = \frac{2P}{c}. \quad (2)$$

Podle známých vztahů pro kořeny a koeficienty kubické rovnice dále platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, \quad x_1x_2x_3 = r. \quad (3)$$

Odtud plyne, že je zároveň

$$p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0. \quad (4)$$

Z Heronova vzorce pro obsah P uvažovaného trojúhelníku vyplývá $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, odkud

$$P^2 = s[s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc]. \quad (5)$$

Z (2) a (3) postupně dostaneme

$$pabc = 2P(ab+bc+ca), \quad qabc = 4P^2(a+b+c), \\ rabc = 8P^3,$$

takže

$$abc = 8 \frac{P^3}{r}, \quad ab+bc+ca = 4 \frac{p}{r} P^2, \\ a+b+c = 2 \frac{q}{r} P. \quad (6)$$

Tedy

$$s = \frac{q}{r} P. \quad (7)$$

Po dosazení z (6) a (7) do (5) dostaneme

$$P^2 = \frac{q}{r} P \left[\frac{q^3}{r^3} P^3 - 2 \frac{q^3}{r^3} P^3 + 4 \frac{pq}{r^2} P^3 - 8 \frac{P^3}{r} \right],$$

tj.

$$P^2 = \frac{q}{r^4} (-q^3 + 4pqr - 8r^2) \cdot P^4. \quad (8)$$

Z předpokladu, že rovnice (1) má kořeny x_1, x_2, x_3 , jež jsou výškami daného trojúhelníku, jsme dospěli k rovnosti (8). Obsah P uvažovaného trojúhelníku je zřejmě kladné číslo, takže z rovnosti (8) vzhledem k nerovnostem (4) plyne, že

$$4pqr - 8r^2 - q^3 > 0, \quad (9)$$

takže

$$P = \frac{r^2}{\sqrt{q(4pqr - 8r^2 - q^3)}}.$$

B — II — 1a

Nech n je prirodzené číslo a a, b nezáporné reálné čísla, pro které platí $a \geq b$. Dokážte, že platí

$$a^n - b^n \geq (a - b)^n. \quad (1)$$

Určete všechny případy, kdy platí rovnost.

Řešení. Užijme matematickou indukci. Pro $n = 1$ tvrzení platí; dokonce nastává rovnost.

Pro každé přirozené číslo n na základě indukčního předpokladu (1) platí:

$$\begin{aligned} (a - b)^{n+1} &= (a - b)(a - b)^n \leq (a - b)(a^n - b^n) = \\ &= a^{n+1} - a^n b - b^n(a - b) \end{aligned} \quad (2)$$

Protože $a \geq b \geq 0$, je

$$a^n b \geq b^{n+1}, \quad b^n(a - b) \geq 0. \quad (3)$$

Tedy z (2) plyne

$$(a - b)^{n+1} \leq a^{n+1} - b^{n+1}. \quad (4)$$

Tím je daná nerovnost matematickou indukcí dokázána.

V nerovnostech (3) platí zároveň rovnosti, právě když

$$b = 0 \quad \text{nebo} \quad a = b. \quad (5)$$

Ovšem v tom případě platí rovnost i v (2), takže rovnost v nerovnosti (4) nastává, právě když platí (5). Odtud a z 1. kroku důkazu matematickou indukcí vyplývá, že v dokazované nerovnosti platí rovnost, právě když $n = 1$ nebo $b = 0$ nebo $a = b$.

Jiné řešení. Je-li $n = 1$ nebo $a = b$ nebo $b = 0$; pak platí dokazovaná nerovnost; dokonce v ní nastává rovnost.

Nechť $n > 1$ a $a > b > 0$. Dokazovanou nerovnost upravme na tvar

$$(a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \geq (a - b)^n,$$

z něhož je zřejmé, že dokazované nerovnosti je ekvivalentní nerovnost

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \geq (a - b)^{n-1}.$$

Ta však platí dokonce s ostrou nerovností, protože

$$a^{n-1} > (a - b)^{n-1}.$$

Další řešení. Pro každá dvě reálná čísla a, b taková, že $a \geq b \geq 0$, podle binomické věty platí:

$$a^n = [(a - b) + b]^n = (a - b)^n + k + b^n,$$

kde $k \geq 0$. Tedy

$$a^n \geq (a - b)^n + b^n,$$

tj.

$$a^n - b^n \geq (a - b)^n.$$

Rovnost nastane, právě když $k = 0$, tj. právě když $a - b = 0$ (tj. $a = b$) nebo $b = 0$ nebo $n = 1$.

V kruhu s poloměrem 1 je dáno šest bodů tak, že alespoň dva neleží na hraniční kružnici. Dokažte, že vzdálenost některých dvou z daných šesti bodů je menší než 1.

Řešení. Střed kruhu označme S a dané body $A_1, A_2, \dots, A_6$. Necht' $S \in \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$. Podle předpokladu je ještě alespoň jeden další daný bod mimo hraniční kružnici, takže tvrzení platí.

Necht' $S \neq A_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, 6$. Průsečíky polopřímek SA_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) s hraniční kružnicí označme B_i . Dále rozlišme dva případy:

a) Necht' pro některá navzájem různá i, k je $B_i = B_k$. Pak vzhledem k tomu, že $SB_i = 1$, je $A_i A_k < 1$ a tvrzení platí.

b) Necht' žádné dva z bodů B_i nesplývají. Pak nejmenší z úhlů $B_i S B_k$ ($i \neq k$) je nejvýše roven 60° . V příslušném trojúhelníku $B_i S B_k$ má nejdelší strana velikost rovnou 1. Proto $A_i A_k \leq 1$, a rovnost nastane, jen je-li $A_i = B_i$, $A_k = B_k$ a $\sphericalangle A_i S A_k = 60^\circ$. V tomto případě tvoří vždy dvě sousední polopřímky SA_j úhel 60° . Podle předpokladu alespoň dva z bodů $A_1, A_2, \dots, A_6$ neleží na hraniční kružnici; necht' A_p je takový bod. Mezi danými body existuje takový bod A_q , že $\sphericalangle A_p S A_q = 60^\circ$. Protože $\triangle B_p S B_q$ je rovnostranný, $B_p B_q = 1$ a $A_p \neq B_p$, je $A_p A_q < 1$. Tím je úloha zcela rozřešena.

Nájdite všetky také dvojice m, n prirodzených čísel, $m \neq n$, pre ktoré platí: Aritmetickým priemerom čísel m, n je dvojciferné číslo; ak navzájom zameníme jeho cifry, dostaneme geometrický priemer čísel m, n .

Riešenie. Nech m, n je dvojica prirodzených čísel, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy. Potom existujú prirodzené čísla p, q také, že $0 < p < 10, 0 < q < 10$, pričom platí

$$\frac{m+n}{2} = 10p + q, \quad \sqrt{m \cdot n} = 10q + p \quad (1)$$

čiže

$$(m+n)^2 = 4(100p^2 + 20pq + q^2), \quad (2)$$

$$4mn = 4(100q^2 + 20pq + p^2). \quad (3)$$

Z (2) a (3) priamo dostaneme

$$(m-n)^2 = 4 \cdot 99(p^2 - q^2). \quad (4)$$

Keďže $m \neq n$, z (4) vyplýva, že $p^2 - q^2 > 0$, čiže $p > q$ a ďalej platí, že $4 \cdot 9 \cdot 11(p-q)(p+q)$ je štvorcom prirodzeného čísla. To však je možné len tak, že buď $p-q$ alebo $p+q$ je deliteľné číslom 11. Keďže $p-q < 9$ $11 + p - q$. Musí teda platiť $11 \mid p+q$, ale $p+q < 20$, z čoho vyplýva: $p+q = 11$. Ďalej musí byť $p-q$ štvorcom prirodzeného čísla. Keďže $p+q$ je číslo nepárne, musí byť tiež $p-q$ nepárne číslo, ale z toho, že $p-q < 9$ vyplýva, že musí byť $p-q = 1$. Uvedeným podmienkam však vyhovujú len čísla $p = 6, q = 5$.

Pre hľadaná čísla m, n z (1) a (4) máme

$$m + n = 130, \quad |m - n| = \sqrt[3]{4 \cdot 99 \cdot 11} = 66. \quad (5)$$

Z (5) dostaneme, že danej úlohe vyhovuje len dvojice prirodzených čísel 98, 32, o čom sa ľahko presvedčíme skúškou:

$$\frac{98 + 32}{2} = 65, \quad \sqrt[3]{98 \cdot 32} = \sqrt[3]{3136} = 56.$$

B – II – 2b

Určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{x}{x + \frac{1}{x}} = y, \quad (1)$$

$$\frac{4y}{2y + \frac{1}{2y}} = 3z \quad (2)$$

$$\frac{6z}{3z + \frac{1}{3z}} = x. \quad (3)$$

Řešení. Nechť existuje trojice reálných čísel (x, y, z) , která je řešením dané soustavy. Z (1), (2) a (3) plyne, že $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Pro každé $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ jsou levé strany rovnic (1), (2), (3) kladné. Tedy

$$x > 0, y > 0, z > 0. \quad (4)$$

Vynásobením levých a pravých stran daných rovnic dostaneme po úpravě

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2y + \frac{1}{2y}\right)\left(3z + \frac{1}{3z}\right) = 8. \quad (5)$$

Z nerovnosti $(a - 1)^2 \geq 0$ platné pro každé číslo $a > 0$ plyne $a + \frac{1}{a} \geq 2$, přičemž rovnost nastane jen pro $a = 1$.

Podle (4) tedy

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2y + \frac{1}{2y}\right)\left(3z + \frac{1}{3z}\right) \geq 8,$$

přičemž (5) platí jen pro $x = 1, 2y = 1, 3z = 1$, tj. $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že trojice $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ soustavě (1) – (3) vyhovuje.

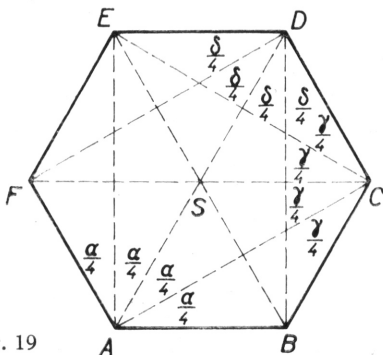
Závěr: Daná soustava má právě jedno řešení $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$.

B — II — 3a

Vrchol vypuklého šestiúhelníku nazveme pravidelně rozděleným, dělí-li tři úhlopříčky z něho vycházející jeho vnitřní úhel na čtyři stejné díly.

Dokažte větu: Má-li vypuklý šestiúhelník $ABCDEF$ vrcholy A, C a D pravidelně rozdělené, je pravidelný.

Řešení (obr. 19). Necht' vrcholy A , C a D daného vypuklého šestiúhelníku jsou pravidelně rozdělené. Potom podle věty *usu* jsou trojúhelníky ADE a ADC shodné.



Obr. 19

Podle téže věty jsou shodné též trojúhelníky ADF a ADB . Přímka AD je tedy osou souměrnosti daného šestiúhelníku.

Vrcholy A a C jsou pravidelně rozdělené, a proto průsečík S přímek AD a CF je středem kružnice vepsané trojúhelníku ACE . Z osové souměrnosti podle osy AD plyne, že bodem S prochází též přímka BE . Je totiž souměrně sdružená k přímce CF . Vrcholy A a C jsou pravidelně rozdělené, a proto přímka BS , tj. BE , je kolmá na úsečku AC . Dále přímka AD je kolmá na úsečku CE , neboť je její osou souměrnosti. Tedy bod S je též průsečíkem výšek trojúhelníku ACE . Trojúhelník ACE je proto rovnostranný.

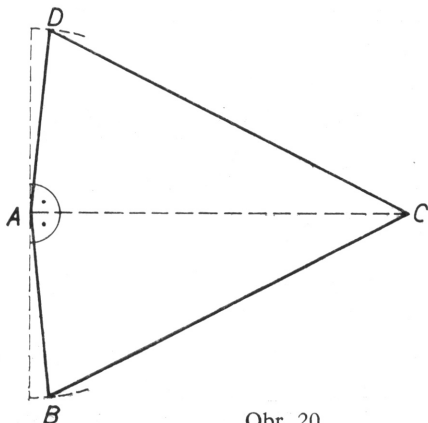
Platí $\sphericalangle CAE = \sphericalangle ACE = 60^\circ$, takže $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BCD = 120^\circ$. Z $\triangle ABC$ pak plyne, že $\sphericalangle ABC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$. Z osové souměrnosti šestiúhelníku

$ABCDEF$ podle osy AD vyplývá, že $\sphericalangle AFE = \sphericalangle DEF = 120^\circ$. Odtud již plyne, že $\sphericalangle CDE = 720^\circ - 5 \cdot 120^\circ = 120^\circ$. Šestiúhelník $ABCDEF$ má tedy všechny úhly shodné.

Ze shodnosti úhlů BAC a ACB je zřejmé, že $AB = BC$. Dále je $\sphericalangle CBD = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \sphericalangle BDC$. Tedy $BC = CD$. Z osově souměrnosti šestiúhelníku $ABCDEF$ podle AD pak vyplývá, že všechny jeho strany jsou shodné. Tím je zcela dokázáno, že šestiúhelník $ABCDEF$ je pravidelný.

B — II — 3b

Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, u něhož součet velikostí úseček AB , AC , AD je 20 cm a jehož obsah je větší než 49 cm^2 .



Obr. 20

Řešení (obr. 20). Je vhodné si uvědomit, že při stálých velikostech AB , AC a AD je obsah čtyřúhelníku tím větší, čím budou úhly $\sphericalangle DAC$ i $\sphericalangle BAC$ bližší pravému úhlu (oba ovšem nemohou být pravé). Přitom se vhodnou volbou úhlů $\sphericalangle DAC$ a $\sphericalangle BAC$ můžeme libovolně přiblížit obsahu $\triangle CBD$, který vznikne, leží-li body A , B , D v přímce. Obsah y tohoto trojúhelníku je

$$y = \frac{1}{2}(AB \cdot AC + AD \cdot AC) = \frac{1}{2}AC(AB + AD).$$

Uplatníme-li podmínky

$$AB + AC + AD = 20$$

a označíme-li $AB + AD = x$, vyjde

$$y = \frac{1}{2}x(20 - x)$$

$$y = 10x - \frac{1}{2}x^2.$$

Tato funkce nabývá svého maxima 50 pro $x = 10$.

Zvolíme tedy $AB = AD = 5$ cm, $AC = 10$ cm, vedeme k přímce AC dvě rovnoběžky ve vzdálenosti např. 4,95 cm a na nich najdeme body B a D vzdálené od bodu A vždy 5 cm, a to tak, aby úhly CAB i CAD byly ostré. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ pak bude 49,5 cm².

C — II — 1a

Rozhodnite, či existuje kvadratický trojčlen

$$ax^2 + bx + c$$

s celými koeficientami, ktorého diskriminant, tj. číslo $b^2 - 4ac$, je 75.

Riešenie. Ak taký trojčlen existuje, musí byť

$$b^2 - 4ac = 75$$

čiže

$$b^2 - 81 = 4ac - 6,$$

odkiaľ máme

$$(b - 9)(b + 9) = 2(2ac - 3). \quad (1)$$

Ľavá strana (1) musí byť tedy párne číslo. Ak však jeden z jej faktorov je párny, musí byť párny i druhý, z čeho vyplýva, že ľavá strana je v takom prípade deliteľná číslom 4. Z toho, že pravá strana (1) nie je číslom 4 deliteľná, vyplýva, že kvadratický trojčlen požadovanej vlastnosti neexistuje.

Jiné řešení. Číslo b v kvadratickém trojčlenu požadovaných vlastností zřejmě není sudé. Kdyby totiž bylo sudé, pak by číslo $b^2 - 4ac$ bylo dělitelné 4, což však není

možné, neboť číslo 75 není násobkem čtyř. Tedy pokud kvadratický trojčlen požadovaných vlastností existuje, pak číslo b je liché, takže existuje takové celé číslo k , že

$$b = 2k + 1.$$

Odtud dále plyne

$$b^2 - 4ac = 4k^2 + 4k + 1 - 4ac = 4(k^2 + k - ac) + 1.$$

Pak se ovšem číslo $b^2 - 4ac$ nemůže rovnat číslu 75, neboť 75 dává při dělení čtyřmi zbytek 3. Z toho plyne, že kvadratický trojčlen požadovaných vlastností neexistuje.

Další řešení. Hledejme celá čísla a, b, c , pro něž platí

$$b^2 - 4ac = 75.$$

Pro číslo b má tedy platit kongruence

$$b^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Avšak takové celé číslo b neexistuje, neboť lze snadno dokázat, že platí:

Jestliže je číslo b $\begin{matrix} \text{sudé} \\ \text{liché} \end{matrix}$, pak $\begin{matrix} b^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{matrix}$.

Odtud plyne, že kvadratický trojčlen s vlastnostmi požadovanými v textu úlohy neexistuje.

C — II — 1b

Z cifer 1, 2, ..., 9 vyberte všechny takové dvojice a, b , aby pro čísla s dekadickými zápisy $aabb, abba, aa$ platilo

$$aabb - abba = aa.$$

Řešení. V dekadickém rozvoji značí uvedená rovnost

$$1000a + 100a + 10b + b - (1000a + 100b + 10b + a) = \\ = 10a + a,$$

po úpravě

$$99a - 99b = 11a,$$

tj.

$$8a = 9b.$$

Číslo a je tedy násobkem 9 a číslo b násobkem 8, takže je jediná možnost:

$$a = 9 \text{ a } b = 8.$$

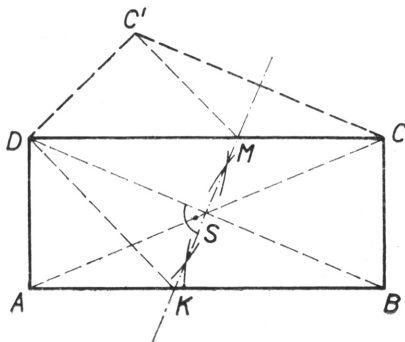
Skutečně platí

$$9988 - 9889 = 99.$$

Závěr: Úloha má jediné řešení — dvojici $a = 9, b = 8$.

C — II — 2a

Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = a, BC = b$, kde $a > b$. Vystříhneme-li tento obdélník z papíru a přeložíme



Obr. 21

tak, že vrchol B splyne s vrcholem D , vznikne pětiúhelník. Vyjádřete obsah tohoto pětiúhelníku pomocí a, b .

Řešení (obr. 21). Přeložení odpovídá souměrnosti podle osy úsečky BD . Ta protne stranu AB v bodě K a stranu DC v bodě M . Trojúhelník SBK je podobný $\triangle ABD$, takže $\frac{BK}{BD} = \frac{BS}{AB}$, odkud $BK = \frac{a^2 + b^2}{2a}$. Obsah pětiúhelníku je roven obsahu obdélníku, zmenšenému o obsah $\triangle KMD$, tj. o dvojnásobek obsahu trojúhelníku SBK , jehož výška je $\frac{1}{2}b$. Hledaný obsah je tedy

$$ab - \frac{a^2 + b^2}{2a} \cdot \frac{b}{2} = \frac{(3a^2 - b^2)b}{4a}.$$

C — II — 2b

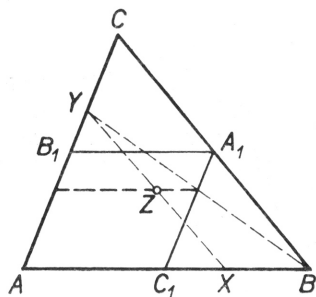
Je dán $\triangle ABC$. Najděte množinu těžišť všech $\triangle AXY$ takových, že bod X je vnitřním bodem úsečky AB a bod Y vnitřním bodem úsečky AC .

Řešení. Označme Z střed strany XY libovolného $\triangle AXY$, který splňuje podmínky uvedené v textu dané úlohy. Pak pro těžiště T tohoto trojúhelníku platí $AT = \frac{2}{3}AZ$, tj. těžiště T je obrazem bodu Z ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Daná úloha bude tedy rozřešena, budeme-li znát řešení následující úlohy:

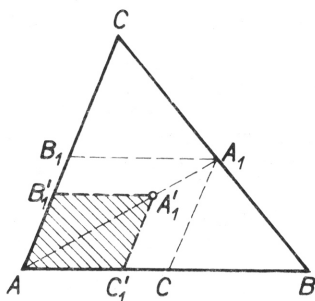
Je dán $\triangle ABC$. Najděte množinu středů všech úseček

XY takových, že bod X je vnitřním bodem úsečky AB a bod Y vnitřním bodem úsečky AC .

Zvolme (obr. 22) uvnitř úsečky AC pevný bod Y . Pak zřejmě množinou středů všech úseček XY , kde X je vnitř-



Obr. 22



Obr. 23

ní bod úsečky AB , je vnitřek střední příčky $\triangle AYB$. Tato střední příčka má velikost $\frac{1}{2}AB$, je rovnoběžná s AB a její vzdálenost od AB je rovna polovině vzdálenosti bodu Y od AB . Odtud plyne, že množinou středů všech úseček XY takových, že bod X je vnitřním bodem úsečky AB a Y vnitřním bodem úsečky AC , je vnitřek rovnoběžníku $AC_1A_1B_1$, kde C_1 , A_1 , B_1 jsou po řadě středy stran AB , BC , AC .

Tedy množinou těžišť všech $\triangle AXY$ je vnitřek rovnoběžníku $AC'_1A'_1B'_1$, jež je obrazem rovnoběžníku $AC_1A_1B_1$ ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$ (viz obr. 23). Snadno se zjistí, že $AC'_1 = \frac{1}{3}AB$ a $AB'_1 = \frac{1}{3}AC$.

Je dána soustava tří rovnic s dvěma neznámými x, y a s parametrem a :

$$\begin{aligned}x + y &= a + 2, \\3x - 2y &= 1, \\ax + (1 - a^2)y &= \frac{2}{5}a^2 + 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Zjistěte, pro které hodnoty parametru a je soustava (1) řešitelná, a určete všechna její řešení.

Řešení. Řešením prvních dvou rovnic (1) dostaneme

$$x = 1 + \frac{2}{5}a, \quad y = 1 + \frac{3}{5}a.\tag{2}$$

Zkoumáme, pro které a vyhovuje řešení (2) třetí rovnici (1) tím, že dosadíme za x, y ze vzorců (2) do třetí rovnice (1). Po úpravě vyjde

$$(a - 1) \left[\frac{3}{5}a(a + 1) + a \right] = 0$$

a dále

$$a(a - 1) \left(a + \frac{8}{3} \right) = 0.\tag{3}$$

Z (3) dostáváme tři možné hodnoty a pro řešitelnost soustavy (1)

$$a = 0, \quad a = 1, \quad a = -\frac{8}{3}.\tag{4}$$

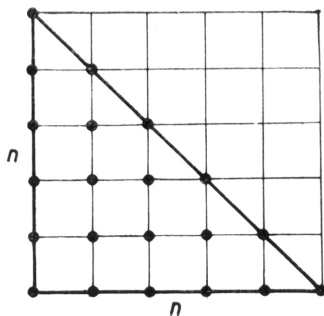
Zkouškou ověříme, že soustava (1) má tato tři řešení:

a	0	1	$-\frac{8}{3}$
x	1	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{15}$
y	1	$\frac{8}{5}$	$-\frac{3}{5}$

C — II — 3b

Nechť n je přirozené číslo. Krychli s hranou délky n rozdělíme v n^3 shodných jednotkových krychlí; vrcholy těchto jednotkových krychlí nazýváme mřížové body. Potom rozdělíme krychli o hraně délky n ve dva shodné trojboké hranoly, které mají za podstavy pravoúhlé rovno-ramenné trojúhelníky s odvěsnami délky n .

- Odvoďte vzorec pro počet N mřížových bodů obsažených v jednom z těchto hranolů.
- Dokažte, že číslo N je liché právě tehdy, je-li n násobek čtyř.



Obr. 24

Řešení. a) Podstava uvažovaného trojbokého hranolu je rovnoramenný trojúhelník (viz obr. 24, kde je $n = 5$).

Označíme-li x počet mřížových bodů v podstavě hranolu, pak je

$$2x = (n + 1)^2 + (n + 1), \quad (1)$$

neboť mřížové body na úhlopříčce čtverce — a těch je $n + 1$ — jsou počítány v součtu $2x$ dvakrát. Je $N = x(n + 1)$, protože na každé přímce procházející kterýmkoli mřížovým bodem podstavy a kolmé k podstavě leží právě $n + 1$ mřížových bodů. Ze vzorce $N = x(n + 1)$ vyjde s ohledem na (1)

$$N = \frac{n + 1}{2} \cdot [(n + 1)^2 + (n + 1)]$$

a po úpravě

$$N = \frac{1}{2} (n + 1)^2 \cdot (n + 2). \quad (2)$$

b) Je-li číslo N liché, není n liché; neboť při lichém n je $(n + 1)^2$ násobek čtyř, $\frac{1}{2}(n + 1)^2$ je sudé, a tudíž N je sudé. Je-li tedy číslo N liché, pak číslo n musí být sudé: pak je $(n + 1)^2$ liché, $\frac{1}{2}(n + 2)$, tj. $\frac{n}{2} + 1$, také liché, tudíž $\frac{n}{2}$ sudé, n násobek čtyř. Tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující pro to, aby číslo N bylo liché, jak vyplývá z obráceného postupu.

Ověření je možné podle tabulky:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
N	6	18	40	75	126	196	288	405

n	9	10	11	12	13	14	15	16
N	550	726	936	1183	1470	1800	2176	2601

Z — II — 1

Určete nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1977.

Řešení. Hledané číslo n je nejmenší ze všech přirozených čísel, která mají ciferný součet 1977. Odtud plyne, že číslo n má zápis s nejmenším možným počtem cifer, tj. že v jeho zápisu jsou všechny cifry nenulové a největší možný počet z nich jsou devítky.

Z rovnosti

$$1977 = 9 \cdot 219 + 6$$

plyne, že číslo n má ve svém zápisu 219 devítek a jednu šestku. Protože n je nejmenší ze všech dvousetdvaceticiferných přirozených čísel, v jejichž zápisu je jedna cifra 6 a ostatní jsou 9, platí

$$n = \underbrace{699 \dots 9}_{\text{celkem 219 devítek}}$$

Poznámka. Nalezené číslo n lze psát také ve tvaru $7 \cdot 10^{219} - 1$.

Do úhlu AVB , jehož velikost je 60° , jsou vepsány kružnice $k = (S, r)$ a $k' = (S', 6)$ tak, že mají vnější dotyk a S leží uvnitř úsečky VS' .

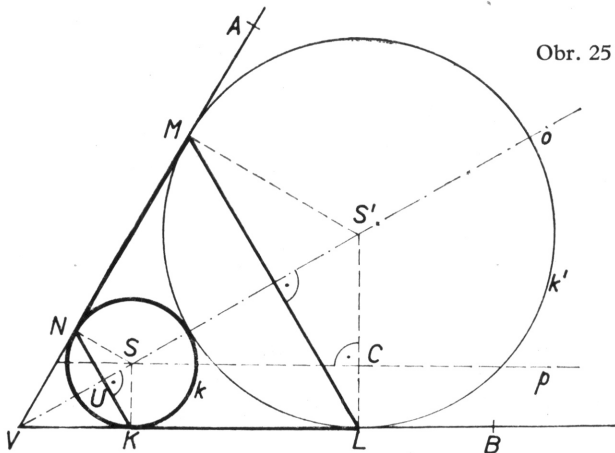
a) Vypočtete poloměr r .

b) Vypočtete obsah čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou body dotyku kružnic k a k' s rameny VA a VB .

Řešení (obr. 25). Body S a S' leží na ose $\sphericalangle AVB$. Protože S leží uvnitř úsečky VS' , je $r < 6$. Označme body dotyku kružnic k a k' s ramenem VB po řadě K, L a s ramenem VA po řadě N, M .

a) Bodem S vedme přímku p rovnoběžnou s VB a označme C její průsečík s $S'L$. Poněvadž $\sphericalangle CS'S = 60^\circ$, je

$$CS' = \frac{1}{2} SS' = \frac{1}{2}(r + 6). \quad (1)$$



Obr. 25

Protože $CL = KS = r$, je

$$CS' = 6 - r. \quad (2)$$

Z (1) a (2) dostáváme

$$r = 2.$$

b) Obsah čtyřúhelníku $KLMN$ vypočteme, odečteme-li od obsahu $\triangle VLM$ obsah $\triangle VKN$. Osa úhlu $\sphericalangle AVB$ je střednou kružnic k a k' , takže tětivy NK a ML jsou kolmé na přímkou SS' . Trojúhelníky VLM a VKN jsou tedy rovnostranné. Označme U průsečík NK a VS . V trojúhelníku KUS je $\sphericalangle KUS = 90^\circ$ a $\sphericalangle KSU = 60^\circ$. Tedy

$$US = \frac{r}{2} = 1, \text{ takže } NK = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}. \text{ Podobně}$$

se zjistí, že $ML = 6\sqrt{3}$. Obsahy rovnostranných trojúhelníků VKN a VLM jsou po řadě podle známého vzorce

$$\frac{1}{4}(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ a } \frac{1}{4}(6\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Obsah čtyřúhelníku $KLMN$ je tedy

$$24\sqrt{3} \doteq 41,6.$$

Z — II — 3

Zjistěte, které z čísel

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001}, \quad \frac{2}{1\,000\,000}$$

je větší.

Řešení. Položme $a = 1\,000\,000$. Pak pro daná čísla platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} &= \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} = \\ &= \frac{2a}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{a^2-1}, \quad \frac{2}{1\,000\,000} = \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

Daná čísla lze porovnat podílem nebo rozdílem.

1. Užijeme podíl. Platí:

$$\frac{2a}{a^2-1} : \frac{2}{a} = \frac{2a}{a^2-1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{a^2-1}.$$

Zřejmě $a^2 > a^2 - 1$, takže uvažovaný podíl je větší než 1. Platí tedy

$$\frac{1}{999\,999} + \frac{1}{1\,000\,001} > \frac{2}{1\,000\,000}. \quad (1)$$

2. Užijeme rozdíl. Platí:

$$\frac{2a}{a^2-1} - \frac{2}{a} = \frac{2a^2 - 2(a^2-1)}{a(a^2-1)} = \frac{2}{a(a^2-1)} > 0,$$

tj. docházíme také k závěru (1).

Z — II — 4

Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $AB > CD$. Označme M a N po řadě středy základů AB a CD .

Dokažte: Je-li

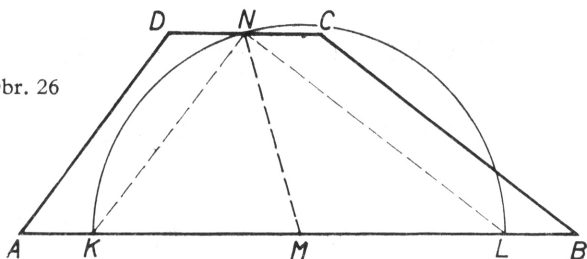
$$MN = \frac{1}{2}(AB - CD),$$

pak

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Řešení. Bodem N vedme (obr. 26) rovnoběžky s přímkami AD a BC , jejich průsečíky s přímkou AB označme po řadě K a L . Z konstrukce bodů K a L plyne, že $AK =$

Obr. 26



$= BL = \frac{1}{2} CD$. Bod M je tedy středem úsečky $KL = AB - CD$, takže z předpokladu plyne

$$KM = ML = MN.$$

Bod N leží tedy na půlkružnici nad průměrem KL , takže

$$\sphericalangle KNL = 90^\circ,$$

a tedy

$$\sphericalangle NKL + \sphericalangle KLN = 90^\circ.$$

Protože $\sphericalangle NKL = \sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle NLK = \sphericalangle CBA$, plyne dokazovaná rovnost z poslední rovnosti.

Jiné řešení. Body C a D vedeme rovnoběžky s přímkou MN . Průsečíky s přímkou AB označme U a V (obr. 27). Platí

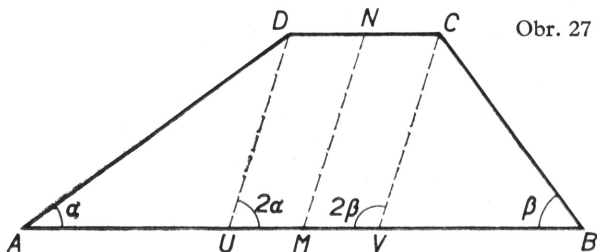
$$UM = MV = DN = NC = \frac{1}{2} CD < \frac{1}{2} AB,$$

takže U a V jsou vnitřní body úsečky AB . Z konstrukce bodů U a V plyne

$$DU = CV = \frac{1}{2}(AB - CD) \quad (1)$$

a

$$\begin{aligned} AU &= AM - UM = \frac{1}{2}(AB - CD), \\ BV &= BM - VM = \frac{1}{2}(AB - CD). \end{aligned} \quad (2)$$



Trojúhelníky AUD a BVC jsou podle (1) a (2) rovno-
ramenné s hlavními vrcholy U a V . Z vlastnosti vnějšího
úhlu trojúhelníka vyplývá:

$$\begin{aligned} \sphericalangle UAD &= \frac{1}{2} \sphericalangle MUD, \\ \sphericalangle VBC &= \frac{1}{2} \sphericalangle MVC. \end{aligned} \quad (3)$$

Podle konstrukce bodů U a V je $UD \parallel VC$, takže

$$\sphericalangle MUD + \sphericalangle MVC = 180^\circ. \quad (4)$$

Zřejmě $\sphericalangle UAD = \sphericalangle BAD$ a $\sphericalangle VBC = \sphericalangle ABC$, takže
z (3) a (4) dostáváme dokazovanou rovnost.

V. Úlohy III. kola kategorie A

A — III — 1

V kocke s hranou velikosti 1 je daných 2050 bodov. Dokážte, že medzi nimi existuje päť takých, ktoré ležia vo vnútri gule s polomerom $\frac{1}{9}$.

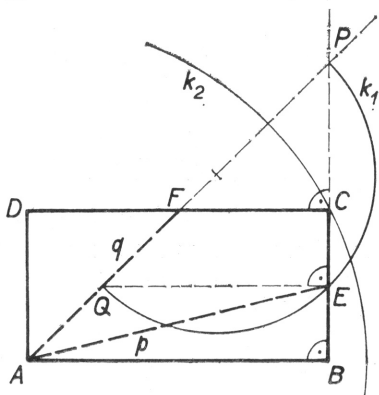
Riešenie. Celú kocku so stranou 1 môžeme rozdeliť na 512 kociek so stranou dĺžky $\frac{1}{8}$. Keďže $4 \cdot 512 = 2048 < 2050$, musí podľa Dirichletovho priehradkového princípu existovať medzi nimi aspoň jedna, ktorá obsahuje najmenej päť z daných bodov. Ak tejto kocke opíšeme guľovú plochu, pre jej polomer r platí

$$r = \frac{\sqrt{3}}{16} = \sqrt{\frac{3}{256}} < \sqrt{\frac{3}{255}} = \frac{1}{\sqrt{85}} < \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}.$$

A — III — 2

Jsou dána kladná čísla p a q . Sestrojte pravoúhlý rovnoběžník $ABCD$ tak, aby platilo $AE = p$, $AF = q$, kde E a F jsou po řadě středy stran BC a CD . Udejte podmínky řešitelnosti.

Řešení (obr. 28). *Rozbor:* Označme P bod polopřímky AF , pro který platí $AP = 2 \cdot AF$, a dále Q střed úsečky AF . Protože $QE \perp BC$ a dále $P \in BC$, leží E na Thaletově



Obr. 28

kružnici nad úsečkou PQ . Zároveň ovšem E leží na $k_2 = (A; p)$. Odtud plyne *konstrukce*: Vyjdeme od úsečky AF délky q . Sestrojíme body P a Q tak, jak je uvedeno v rozboru, dále Thaletovu kružnici k_1 a kružnici $k_2 = (A; p)$. Jejich průsečík je bod E . Vrcholy B a C jsou pak paty kolmic z A a F na PE . Potom lichoběžník $ABCF$ doplníme na pravoúhlý rovnoběžník $ABCD$. *Zkouška:* Přímo z konstrukce vyplývá, že $AF = q$ a $AE = p$. Zřejmě E je tedy střed strany BC , neboť QE je střední příčka lichoběžníku $ABCF$. Dále je F středem strany CD , neboť CF je střední příčka trojúhelníku ABP , takže $CF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$.

Podmínkou řešitelnosti je existence dvou společných bodů kružnic k_1 a k_2 (E nesmí být na přímce AP). Protože

středná obou kružnic má délku $\frac{5}{4}q$ a poloměry jsou p a $\frac{3}{4}q$, je úloha řešitelná, platí-li

$$p - \frac{3}{4}q < \frac{5}{4}q < p + \frac{3}{4}q$$

neboli

$$p < 2q \quad \text{a} \quad q < 2p,$$

tj.

$$\frac{p}{2} < q < 2p.$$

A — III — 3

Vyšetřete a v Gaussově rovině komplexních čísel graficky znázorněte množinu hodnot, jichž může nabýt součet $S = Z + W$ dvou komplexních jednotek Z a W , pro něž zároveň platí:

$$\operatorname{Im} Z \geq 0 \quad \text{a} \quad \operatorname{Re} W \geq 0.$$

Poznámka: $\operatorname{Im} Z$ značí imaginární část čísla Z , $\operatorname{Re} W$ vyjadřuje reálnou část čísla W .

Řešení. Čísla Z a W napíšme ve tvaru

$$Z = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad (1)$$

$$W = \cos \psi + i \sin \psi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Položme

$$\omega = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\varphi - \psi), \quad (3)$$

takže

$$\omega + \varepsilon = \varphi, \quad \omega - \varepsilon = \psi. \quad (4)$$

Vzhledem k (1) a (2) pak je

$$-\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{3}{4}\pi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{3}{4}\pi. \quad (5)$$

Součet $S = Z + W$ nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$S = (\cos \varphi + \cos \psi) + i (\sin \varphi + \sin \psi).$$

Podle známých vzorců odtud dostáváme

$$S = 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot (\cos \omega + i \sin \omega). \quad (6)$$

Přitom $\cos \omega + i \sin \omega$ je komplexní jednotka s argumentem ω a $|S| = 2 \cdot |\cos \varepsilon|$.

Dále zjistíme, jakých hodnot může nabývat ε při dané hodnotě ω . Dosadíme-li podle (4) do nerovností (1) a (2), pak s přihlédnutím k nerovnostem (5) snadno poznáme, že

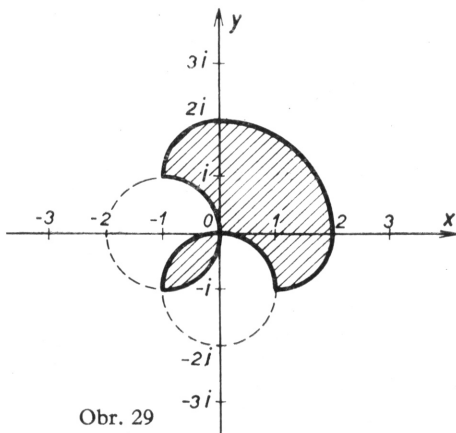
$$\text{pro } -\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \text{ je } -\omega \leq \varepsilon \leq \omega + \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

$$\text{pro } \frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{3}{4}\pi \text{ je } \omega - \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \leq \pi - \omega. \quad (8)$$

Dále pro takto vymezené hodnoty ε nalezneme maximální a minimální hodnoty $2 \cdot \cos \varepsilon$:

$$\text{pro } -\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq 0 \text{ je } -2 \sin \omega \leq 2 \cos \varepsilon \leq 2 \cos \omega, \quad (9)$$

$$\text{pro } 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{4} \text{ je } -2 \sin \omega \leq 2 \cos \varepsilon \leq 2, \quad (10)$$



Obr. 29

pro $\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$ je $-2 \cos \omega \leq 2 \cos \varepsilon \leq 2$, (11)

pro $\frac{\pi}{2} \leq \omega = \frac{3}{4}\pi$ je $-2 \cos \omega \leq 2 \cos \varepsilon \leq 2 \sin \omega$. (12)

Poněvadž v udaných mezích lze φ a ψ , resp. ω a ε , volit zcela libovolně, je hledanou množinou hodnot součtu $Z + W$ právě množina všech čísel tvaru (6), kde ω splňuje (5) a $2 \cdot \cos \varepsilon$ leží v mezích udaných příslušnou nerovností (9) až (12). Tím je vlastně tato množina popsána v polárních souřadnicích. Grafické znázornění je na obr. 29.

Poznámka. Při řešení lze využít symetrie podle osy 1. a 4. kvadrantu.

Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$x + y + z = 3, \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}, \quad (2)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 45. \quad (3)$$

Riešenie. Ak nejaká trojica x, y, z vyhovuje danej sústave, potom musí zrejme byť $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. Z (2) dostaneme

$$xy + yz + zx = \frac{5}{12} xyz. \quad (4)$$

Zrejme platí:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz,$$

z čoho po dosadení z (1), (3), (4) a jednoduchkej úprave dostaneme

$$xyz = -24, \quad (5)$$

odkiaľ po dosadení do (4) hneď príde

$$xy + yz + zx = -10. \quad (6)$$

Z (1), (6), (5) vyplýva na základe známych vzťahov medzi koreňmi a koeficientami kubickej rovnice, že x, y, z vyhovujúce danej sústave musia byť koreňmi rovnice

$$u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = 0. \quad (7)$$

Keďže $u^3 - 3u^2 - 10u + 24 = (u - 2)(u^2 - u - 12) =$
 $= (u - 2)(u + 3)(u - 4)$, rovnici (7) vyhovujú čísla
 $2, -3, 4$.

Dosadením sa ľahko presvedčíme, že všetky permutácie
čísel tejto trojice sú riešeniami danej sústavy. Sú to:

$(2, -3, 4), (2, 4, -3), (-3, 2, 4), (-3, 4, 2), (4, 2, -3),$
 $(4, -3, 2)$.

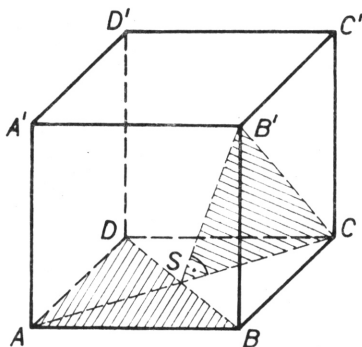
A — III — 5

Na priamke jsou dány navzájem různé body $A_1, A_2, \dots, A_n$. Každý z nich označíme právě jednou ze čtyř barev tak, aby bylo každé barvy použito. Dokažte, že pak v dané přímce existuje úsečka, která obsahuje právě po jednom bodu některých dvou z uvedených barev a alespoň po jednom bodu obou zbylých barev.

Řešení. Můžeme předpokládat, že body následují v přímce za sebou v pořadí $A_1, A_2, \dots, A_n$. Necht k je nejmenší index takový, že mezi body $A_1, A_2, \dots, A_k$ už jsou body všech čtyř barev. Má tedy A_k jinou barvu než kterýkoli z bodů $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$. Označme j největší index takový, že $1 \leq j \leq k - 1$ a že mezi body $A_j, A_{j+1}, \dots, A_k$ už jsou body všech čtyř barev. Má tedy A_j jinou barvu než kterýkoli z bodů $A_{j+1}, A_{j+2}, \dots, A_k$. Úsečka $A_j A_k$ už má požadovanou vlastnost, neboť barvy bodů A_k a A_j se vyskytují mezi body $A_j, A_{j+1}, \dots, A_k$ právě jednou a zbylé dvě barvy aspoň jednou.

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$; střed stěny $ABCD$ označme S . Určete všechny body X , které mají zároveň tyto dvě vlastnosti:

1. X náleží některé hraně dané krychle;
2. čtyřstěny $ABDX$ a $CB'SX$ mají objemy sobě rovné.



Obr. 30

Řešení. Uvažujme krychli o hraně délky 1 (obr. 30). Obsah $\triangle ABD$ je $P_1 = \frac{1}{2}$. Přímka AC je kolmá na rovinu DBB' , a proto obsah $\triangle CB'S$ je

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{3}.$$

Označme vzdálenosti hledaného bodu X od rovin ABD a $CB'S$ po řadě d_1 , d_2 . Pak čtyřstěny $ABDX$ a $CB'SX$

mají po řadě objemy $V_1 = \frac{1}{6} d_1$ a $V_2 = \frac{1}{12} d_2 \sqrt{3}$. Z 2. vlastnosti bodu X plyne

$$2d_1 = d_2 \sqrt{3}. \quad (1)$$

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, že $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 0, 0]$, $D = [0, 1, 0]$, $A' = [0, 0, 1]$. Nechť $X = [u, v, w]$ je hledaný bod. Bod X leží na některé z hran dané krychle a je vrcholem čtyřstěnu $ABDX$, a proto

$$w > 0. \quad (2)$$

Pro vzdálenost d_1 bodu X od roviny ABC tedy platí

$$d_1 = w. \quad (3)$$

Rovina ACB' má rovnici

$$x - y - z = 0, \quad (4)$$

takže vzdálenost bodu X od roviny SCB' je

$$d_2 = \frac{|u - v - w|}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Podle (1), (3), (5) dostáváme

$$2w = |u - v - w|. \quad (6)$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Nechť $u - v - w > 0$. Z podmínky (2), z rovnice (4) roviny ACB' a z toho, že $B = [1, 0, 0]$, plyne, že v tomto případě hledaný bod X leží uvnitř klínu určeného polovinami ACB a ACB' . Bod X může tedy ležet jedinečně

na hraně BB' , tzn., že pro jeho souřadnice platí: $u = 1$, $v = 0$. Podle (6) pak $w = \frac{1}{3}$.

Pro bod $X = \left[1, 0, \frac{1}{3}\right]$ je $d_1 = \frac{1}{3}$, $d_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Potom je $V_1 = V_2 = \frac{1}{18}$.

b) Necht' $u - v - w < 0$. Obdobně jako v případě a) se zjistí, že hledaný bod X leží uvnitř klínu určeného polorovinami ACD a ACB' . Z podmínky (2) a rovnice (6) plyne, že bod X leží v otevřené polorovině, jež má početní vyjádření

$$x - y + z = 0 \quad \wedge \quad z > 0. \quad (7)$$

Její hraniční přímka je AC .

Nejprve je třeba zjistit, zda tato polorovina protíná hranu DD' . Pro bod X ležící na DD' by platilo $u = 0$ a $v = 1$, takže po dosazení do (7) máme $z = w = 1$, tj. $X = D'$. Pro tento bod X je $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, takže $V_1 = V_2 = \frac{1}{6}$.

Tedy bod D' splňuje podmínky úlohy. Otevřená polorovina ACD' nemá mimo bod D' s hranami dané krychle žádné další společné body.

Závěr: Existují právě dva body X s požadovanými vlastnostmi, jedním z nich je bod D' a druhý leží na hraně BB' , přičemž jeho vzdálenost od bodu B je $\frac{1}{3}BB'$.

VI. Texty úloh krajských kol kategorie Z

Krajská kola kategorie Z jsou třetími koly v této kategorii. Jejich organizace včetně výběru úloh a určení data konání je zcela v pravomoci příslušného KV MO. Ve všech slovenských krajích proběhlo toto kolo v témž termínu, přičemž úlohy byly jednotné.

V dalších odstavcích uvádíme texty úloh, které se řešily v jednotlivých krajích.

PRAHA

1. V součinu všech přirozených čísel od 1001 do 3001 zjistěte, kolik je čísel dělitelných číslem 30 a mocninami čísla 30.

2. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$ o čtvercové podstavě (hrana $a = 8$ cm) a výšce $v = 10$ cm. Na hraně DD' (jejím prodloužení) určete bod X tak, aby se objem jehlanu $XABCD$ rovnal polovině objemu kváдру. Vypočtěte velikost povrchu jehlanu.

Řešte obecně i numericky!

3. Automobilový silniční okruh měří 21 km a automobilista jej projíždí čtyřikrát průměrnou rychlostí 60 km/h. Od startu S současně s ním vyjede v témže směru cyklista,

který jede rychlostí 15 km/h. Určete místo a dobu, kdy dojde k 1., 2. a 3. setkání.

Na 18. km měl cyklista defekt a zdržel se opravou 2 minuty. Dále pak jel zvýšenou rychlostí a s automobilistou se setkal v místě původně očekávaného třetího setkání. Jakou zvýšenou rychlostí musel cyklista jet?

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici o poloměru ρ , je-li dána délka jeho střední příčky $EF = s$ a délka jeho ramene $AD = d$.

Proveďte diskusi řešení (při obecném zadání) a uvažte, kdy nedostanete lichoběžník.

Konstrukci proveďte pro konkrétní zadání: $\rho = 2$ cm, $s = 6$ cm, $d = 5$ cm.

STŘEDOČESKÝ KRAJ

1. Kniha má 1111 stran. Všechny strany jsou očíslované.

a) Kolik číslic bylo použito?

b) Kolikrát byla použita nula?

c) Kolikrát byla použita jednička?

2. Najděte všechna přirozená čísla dělitelná osmi, jejichž ciferný součet je sedm a součin jejich číslic je šest.

3. Pavel a Petr vedou pionýrské oddíly žáků osmých tříd. Rozdíl stáří Petra a Pavla činí čtyři roky. Věk jednoho i druhého je vyjádřen celým číslem. Pavlovi je právě tolik let, kolik bude Petrovi, až bude Pavlovi třikrát tolik, jako bylo Petrovi, když bylo Pavlovi dvakrát tolik, kolik bylo Petrovi, když bylo Pavlovi půlkrát tolik, kolik je nyní Petrovi. Jak staří jsou Petr a Pavel?

4. Ze čtverce o straně $a = 111$ cm se má vystříhnout pět stejně velkých čtverců. Jakou nejdelší stranu mohou mít?

5. Je dán čtvrtkruh SBC s poloměrem $r = SB = SC$. Bod A je takový bod oblouku BC , pro nějž platí, že úhel ASB se rovná šedesáti stupňům. Bod X je libovolný bod úsečky SC .

a) Vyjádřete obsah útvaru omezeného úsečkami BX , AX a obloukem AB pomocí délky $x = SX$ a poloměru r .

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah tohoto útvaru roven polovině obsahu čtvrtkruhu SBC , a porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC .

JIHOČESKÝ KRAJ

1a) Ze sousedních obcí A , B vyjeli proti sobě cyklisté Bedřich (z obce A) a Petr (z obce B). Poprvé se potkali 500 m od obce A . Ve vesnicích se oba hned obrátili a při zpáteční cestě se potkali 300 m od obce B . Bedřich jel rychlostí 10 km/h.

Jakou průměrnou rychlostí jel Petr a jaká je vzdálenost obcí A , B ?

1b) Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova se má vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu. Kolik kg každého druhu pájky se musí použít?

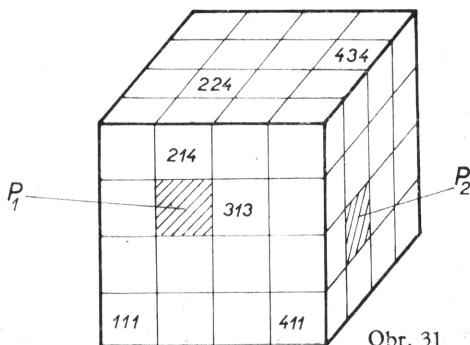
2a) Pionýrský oddíl „Všeználcí“ má velmi schopnou vedoucí. Pro každou schůzku má připraveno nové překvapení. Dnes si přijdou na své bystré hlavy. Vedoucí Jarka

přišla s tímto problémem: „Je možné pomocí právě čtyř trojek (ne víc a také ne méně) a čtyř základních početních úkonů (sčítání, odčítání, násobení, dělení) sestavit hodnoty od nuly do deseti?“ Aby všichni pochopili podstatu úlohy, přidala jedno řešení: $10 = 3 \times 3 + 3 : 3$.

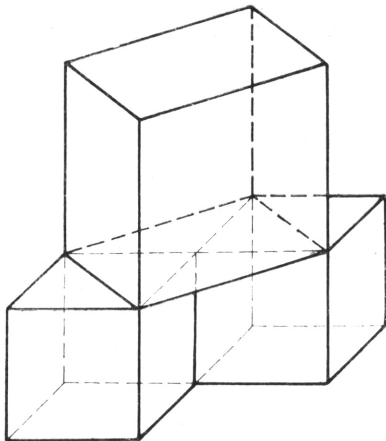
Váš úkol je nyní stejný. Zapsat hodnoty od nuly do devíti.

2b) Trenér družstva košíkové žákyň se po odchodu tří začek do vyšší věkové kategorie rozhodl družstvo doplnit — omladit. Proto poslal pomocného cvičitele na výzvědy do sportovní přípravy. Po jeho návratu dostal na otázku: „Jak je to s výškou?“ (rozumějte děvčat) zajímavou odpověď: „Květa je vyšší než Irena, která je menší než Jarmila, ta je zase vyšší než Zdena, která je menší než Eva. Eva je vyšší než Jarmila. Květa je menší než Eva. Zdena je vyšší než Květa, která je menší než Jarmila. Zdena je vyšší než Irena a Irena je menší než Eva.“

1. O kolika děvčatech pomocný trenér vlastně mluvil?
2. Která tři jsou největší?



Obr. 31



Obr. 32

3. Seřadte je všechna přesně podle velikosti od největší počínaje.

3a) Je dána krychle složená z 64 krychliček jednotkové velikosti. Krychličky jsou označeny trojčifernými čísly (složenými z cifer 1, 2, 3, 4), a to způsobem, který máte zjistit z obrázku (obr. 31).

a) Zkonstruuje „kanál“ složený z krychliček tak, aby vycházel z pole P_1 a končil na poli P_2 a byl co nejkratší (kanál musí vést vnitřkem dané krychle). Vypište, které krychličky musíte při konstrukci „kanálu“ vyjmout.

b) Vypočtete velikost vnitřních stěn kanálu.

3b) Těleso na obrázku (obr. 32) je složeno ze tří krychlí.

a) Vypočtete jeho objem.

b) Vypočtete jeho povrch.

c) Narýsujte jeho síť.

4a) Je dána přímka p a mimo ni bod A . Sestrojte kolmici z bodu A na přímku p pomocí pravítka (bez měřítka) a kružidla, jímž lze sestrojit kružnici pouze jednou (pak již kružidlo nefunguje).

4b) Je dána kružnice a mimo ni bod C . Z tohoto bodu jsou vedeny tečny k dané kružnici. Body dotyku označte A, B ($AC = BC = 10$ cm). Dále je vedena třetí tečna ke kružnici s dotykovým bodem T , která protíná úsečky AC, BC v bodech X, Y .

Vypočtete obvod trojúhelníku XYC .

ZÁPADOČESKÝ KRAJ

1. Upravte výraz $V = a(b - 2c)^2 + b(a - 2c)^2 + 8abc - 2c(a + b)^2$ jako součin tří dvojčlenů a rozhodněte, jaký vztah platí mezi a, b, c , je-li $V = 0$.

2. Jaká musí být čísla x, y , je-li pěticiferné číslo $x321y$ dělitelné dvanácti. Najděte všechna řešení úlohy.

3. Je dán obdélník $ABCD$ o stranách $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm. Na úhlopříčce AC určete bod X (konstrukcí) tak, aby obsah trojúhelníku XAB byl dvojnásobkem obsahu trojúhelníku XBC .

4. Dokažte, že v trojúhelníku, jehož strany AB, BC, CA mají velikosti rovné třem po sobě následujícím přirozeným číslům větším nebo rovným třem, platí: Výška spuštěna na stranu BC (prostřední velikost) dělí tuto stranu na úsečky, jejichž rozdíl má velikost rovnou 4.

SEVEROČESKÝ KRAJ

1. Představte si, že napíšete všechna přirozená čísla od 1 do 5555. Kolik devítek přitom napíšete?

2. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a přímka p ve vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S . Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k , jehož vrchol A leží na přímce p .

3. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{5\,555\,555\,553}{5\,555\,555\,557} \text{ , } \frac{6\,666\,666\,664}{6\,666\,666\,669}$$

je větší.

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a = 10$ cm. Každá ze stran BC , CD je rozdělena devíti body na deset shodných úsečků. Střed K strany AB je spojen s dělicím bodem X strany BC a vrchol B je spojen s dělicím bodem Y strany CD . Které dělicí body X , Y musíme vybrat, aby přímky KX , BY byly navzájem kolmé?

VÝCHODOČESKÝ KRAJ

1. Čtyřciferné číslo je zakončeno 2. Přesuneme-li tuto číslici na první místo a ostatní tři číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 234 větší než původní číslo. Určete původní číslo.

2. Zuby 15zubového ozubeného kola na prvním hřídeli zapadají do zubů 36zubového ozubeného kola na druhém hřídeli. Na druhém hřídeli je ještě 16zubové ozubené

kolo, jehož zuby zapadají do 50zubového ozubeného kola na třetím hřídeli. Po kolika otáčkách prvního hřídele se dostanou všechna ozubená kola poprvé znovu do původní polohy?

3. Je dán obecný trojúhelník ABC o stranách a, b, c .

a) Vypočtete poloměry kružnic, jež se vzájemně vně dotýkají a jejichž středy leží ve vrcholech A, B, C trojúhelníka ABC . (Poloměry kružnic vyjádřete pomocí velikostí stran a, b, c .)

b) Sestrojte tyto kružnice pro pravoúhlý trojúhelník ABC , jehož odvěsny jsou $a = 6$ cm, $b = 8$ cm.

4. Je dán čtverec $ABCD$ o velikosti strany a a čtverec $MNPQ$ o velikosti strany b , přičemž a je větší než b a vrcholy M, N, P, Q leží na úhlopříčkách čtverce $ABCD$ (M, P na úhlopříčce AC a N, Q na úhlopříčce BD).

Sestrojte čtverec $XYZT$ tak, aby jeho vrcholy ležely na obvodu čtverce $ABCD$ a aby body M, N, P, Q ležely na obvodu čtverce $XYZT$ (hledaný čtverec $XYZT$ je čtverci $ABCD$ vepsán a čtverci $MNPQ$ opsán).

Proveďte rozbor, popis konstrukce a diskusi řešení vzhledem k velikostem stran a, b . Potom proveďte vlastní konstrukci pro $a = 10$ cm a $b = 6$ cm.

JIHOMORAVSKÝ KRAJ

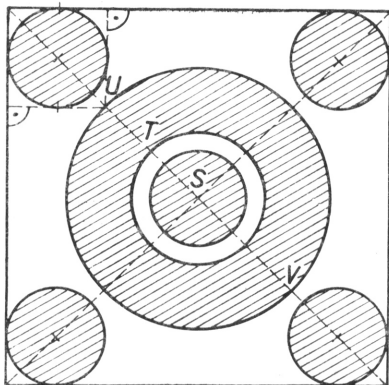
1. Kůň uběhl polovinu cesty bez nákladu rychlostí 12 km/h. Zbylou část cesty táhl vůz rychlostí 4 km/h. Jaká byla průměrná rychlost, tzn. jakou stálou rychlostí

by se musil kůň pohybovat, aby celou cestu urazil ve stejném čase?

2. Přirozené číslo x je dělitelné šestnácti, jeho ciferný součet v desítkové soustavě je 7, součin jeho číslic je 6. Určete všechna taková čísla x .

3. Ze čtverce materiálu o straně a bylo vyřezáno 5 menších shodných kruhových podložek a jedna větší, která má tvar mezikruží (viz obr. 33; body U, S, V dělí úhlopříčku čtverce na čtyři shodné části, bod T je středem úsečky US).

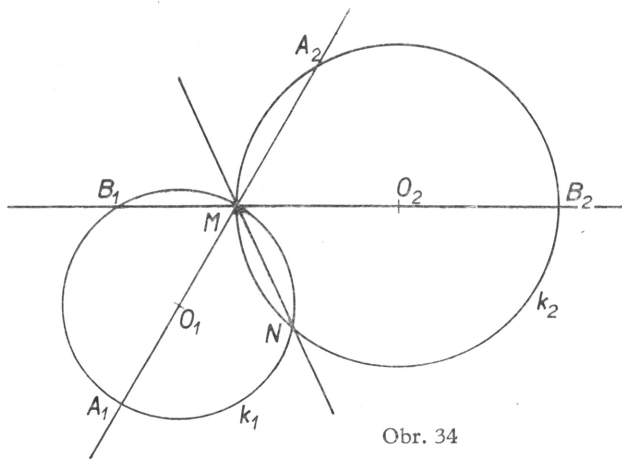
Určete, zda odpad materiálu je menší než 50 %.



Obr. 33

4. Body M, N jsou průsečíky dvou kružnic k_1, k_2 se středy O_1, O_2 . Přímka O_1M protíná kružnici k_1 v bodě A_1 , kružnici k_2 v bodě A_2 . Přímka O_2M protíná kružnici k_1 v bodu B_1 , kružnici k_2 v bodu B_2 (viz obr. 34). Dokažte,

že bod N leží na spojnici bodů A_1, B_2 a že přímka MN prochází průsečíkem C přímek A_1B_1 a A_2B_2 .



Obr. 34

SEVEROMORAVSKÝ KRAJ

1. Velitel čety, která měla 100 vojáků, zjistil, že mnoho vojáků onemocnělo chřipkou. Zkoušel sestavit ze zdravých vojáků ucelený útvar. Při nástupu do trojstupu mu zbyl jeden voják, do čtyřstupu dva, do pětistupu tři vojáci, do šestistupu čtyři vojáci. Kolik vojáků onemocnělo?

2. Jakým dvojčíslem končí číslo 3^{1977} ?

3. Z kůže tvaru půlkruhu o poloměru $r = 4$ cm je vystřižena kruhová záplata o poloměru 2 cm. Ze zbývajících částí kůže jsou vystřiženy dvě shodné kruhové záplaty o největším možném poloměru. Kolik procent kůže zůstalo po vystřižení všech tří záplat?

4. V lichoběžníku $ABCD$, kde $AB \parallel CD$, $AB = 6$ cm, $CD = 4$ cm, $v = 5$ cm, střední příčka protíná úhlopříčky AC a BD v bodech X , Y . Určete a) velikost úsečky XY ; b) vzdálenost průsečíku V úhlopříček AC , BD od strany AB .

KRAJE SLOVENSKÉ SOCIALISTICKÉ REPUBLIKY

1. Nájďte všetky dvojčíferné čísla s dekadickým zápisom ab tak, aby pre čísla s dekadickými zápismi aa , bb , ab , ba , bbc platilo $aa + bb + ab + ba = bbc$.

2.a) Nájďte zlomok $\frac{p}{q}$ s celočíselným kladným menovateľom menším než 50 a s celočíselným číateľom tak, aby

$$\frac{2}{17} < \frac{p}{q} < \frac{3}{25}.$$

b) Ukážte, že podmienkam úlohy a) vyhovuje jediný zlomok.

3. Daný je pravouhlý štvorsten $ABCD$ ($AD \perp BD \perp CD \perp AD$; $AD = BD = CD = 2$ cm) a stred Q hrany AD . Aké najmenšie je číslo $QX + XY$, ak X leží na hrane AB a Y na hrane BC ?

4. Daný je lichobežník $ABCD$ so základňou AB . Zvoľme vnútri úsečky BC body X_1 a X_2 tak, aby platilo $BX_1 =$

$= X_1X_2 = X_2C = \frac{1}{3}BC$, a vnútri úsečky AD body Y_1
a Y_2 tak, aby $AY_1 = Y_1Y_2 = Y_2D = \frac{1}{3}AD$.

a) Dokážte, že útvar $X_1X_2Y_2Y_1$ je lichobežník.

b) Vypočítajte obsah lichobežníka $X_1X_2Y_2Y_1$ pomocou obsahu lichobežníka $ABCD$.

VII. Korešpondenčný seminár MO v školskom roku 1976/77

Vychádzajúc z dobrých skúseností, ktoré sa získali organizovaním prvých dvoch korešpondenčných seminárov (1974/75 a 1975/76), rozhodlo PÚVMO uskutočniť v škol. roku 1976/77 už tretí ročník tejto formy práce s talentovanými žiakmi s tým, aby sa v ňom využili všetky pozitívne poznatky z predchádzajúcich dvoch ročníkov. Návrh účastníkov predložil podpredseda ÚVMO *doc. dr. Ľ. Moravčík, CSc.*, na základe výsledkov XXV. ročníka MO. Návrh vychádzal z predpokladu, že v Prahe a v Bratislave sa bude konať celomestský seminár, ktorého účastníci budú dostávať úlohy korešpondenčného seminára ako domáce práce. Preto boli do korešpondenčného seminára vybraní len účastníci z ostatných krajov ČSSR v tomto počte: Stredočeský 5, Juhočeský 3, Západočeský 1, Severočeský 2, Východočeský 3, Juhomoravský 2, Severomoravský 9, Západoslovenský 2, Stredoslovenský 9 a Východoslovenský 2 — celkom 38.

Pre seminár boli vybrané tieto tematické okruhy úloh:

Kombinatorika — po prvý raz bol vyskúšaný trojetapový súbor 30 úloh, ktoré boli rozosielané po 10 úlohách na jeden mesiac od náročnejších k menej náročným úlohám návodného charakteru. Súbor 30 úloh z kombinatoriky zostavil, riešenia opravil a zhodnotil *dr. M. Koman, CSc.*,

z Pedagogickej fakulty UK v Prahe. Tento experiment sa celkove osvedčil, ale bol značne náročný na čas a prácu zostavovateľa a hodnotiteľa. Riešenia tohto súboru, resp. jeho jednotlivých častí, zaslalo 28 riešiteľov a bolo treba zhodnotiť a komentovať 247 riešení.

Algebra — súbor 7 úloh vybral, riešenia opravil, zhodnotil a komentoval *dr. M. Šisler, CSc.*, ktorý korigoval celkom 114 riešení od 21 riešiteľov.

Školská teória čísel — súbor 8 úloh, ktorý zostavil a riešenia hodnotil odb. asist. *M. Kaukič* z VŠD v Žiline. Celkom korigoval 97 riešení od 19 riešiteľov.

Postupnosti a rady — súbor 8 úloh vybral, korigoval a poznámkami pre riešiteľov opatril *dr. J. Kubát*, prof. gymnázia v Pardubiciach. Korigoval celkom 109 riešení od 18 riešiteľov.

Z 38 vybraných riešiteľov sa seminára zúčastnilo zasielaním svojich riešení celkom 28 riešiteľov z týchto krajov: Stredočeský 3, Severočeský 2, Západočeský 1, Juhočeský 3, Východočeský 2, Severomoravský 9, Juhomoravský 1, Západoslovenský 1, Stredoslovenský 5, Východoslovenský 1.

Po zhodnotení riešení všetkých tematických celkov možno za najúspešnejších považovať nasledujúcich účastníkov korešpondenčného seminára: *Hájek*, G Bílovec — 37 riešení (z celkového počtu 53 úloh), *Navrátil*, G Olomouc 34, *Gurka*, G Bílovec 33, *Kalousek*, G Jablonec n. N. 31, *Tas*, G Bílovec 31, *Hančl*, G Bílovec 31, *Čadek*, G Brno 29, *Kolařík*, G Bílovec 29, *Trnka*, G Tábor 26, *Petrák*, G Ostava 26, *Kratochvíl*, G Pardubice 25, *Turek*, G Hradec Králové 25, *Koukol*, G Sušice 21, *Štěpka*, G Bílovec 21, *Quittner*, G Prievidza 20.

Z vyššie uvedených žiakov šesť — Navrátil, Kalousek, Čadek, Kratochvíl, Turek, Quittner — päť boli členmi osemčlenného družstva ČSSR na XIX. MMO v Belehrade. Z nich 5 získalo ceny a Kratochvílovi, ktorý sa stal absolútnym víťazom XXVI. ročníka MO, chýbal k získaniu 3. ceny na XIX. MMO len jediný bod. Treba ešte dodať, že aj siedmy člen družstva na XIX. MMO — Takáč — riešil korešpondenčný seminár, ale len 10 úloh prvej témy. Možno i to bolo príčinou, že hoci na XVIII. MMO získal 3. cenu, na XIX. MMO neuspel a získal len 3 body. Ukazuje sa totiž takmer priama závislosť výsledkov v korešpondenčnom seminári a na MMO. Z tohto hľadiska možno povedať, že korešpondenčný seminár pozitívne ovplyvňuje prípravu nášho družstva na MMO. Vzhľadom na túto skutočnosť mieni PÚVMO pokračovať vo využívaní tejto formy prípravy pre MMO aj v nasledujúcom školskom roku.

Pre informáciu čitateľov uvádzame teraz všetky úlohy, ktoré dostali na riešenie účastníci korešpondenčného seminára 1976/77.

Kombinatorika (zostavil RNDr. M. Koman, CSc.):

1.1. Kocka s hranou k (k je celé kladné číslo) je rozdelená na k^3 jednotkových kociek. Zistite, či možno všetky jednotkové kocky zafarbiť červenou a modrou farbou tak, aby vždy každá kocka susedila práve s dvoma ďalšími kockami tej istej farby. (Kocky sú susedné, ak majú spoločnú stenu.)

1.2. V nekonečnej sieti zhodných štvorcov je zafarbených práve n štvorcov čiernou farbou, ostatné sú biele. To je tzv. nultá generácia. Z k -tej generácie ($k = 0, 1, 2, \dots$) vznikne $(k + 1)$ -tá generácia týmto prefarbením: Každý

štvorec $[a, b]$ (a je číslo stĺpca, b číslo riadku, v ktorom štvorec leží) z $(k + 1)$ -tej generácie má rovnakú farbu ako väčšina zo štvorcov $[a, b]$, $[a + 1, b]$, $[a, b + 1]$ v k -tej generácii.

a) Dokážte, že v istej generácii zostanú len biele štvorce.

b) Dokážte, že v n -tej generácii sú vždy všetky štvorce biele.

c) Charakterizujte všetky nulté generácie s n čiernymi štvorcami, pre ktoré je n -tá generácia prvej generácie so všetkými štvorcami bielymi.

1.3. Hra. Na stole je daných N gúl, z ktorých je a bielych, b červených a c modrých ($N = a + b + c$). Ťahom rozumieme túto výmenu: Zvolíme ľubovoľné 2 gule rôznych farieb, ktoré vymeníme za jedinou guľu zostávajúcej farby. (Napríklad pre $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ môžeme zvoliť guľu bielu a modrú, ktoré odstránime a namiesto nich pridáme červenú guľu. Vznikne nová pozícia $a_1 = 2$, $b_1 = 6$, $c_1 = 7$.) Partia končí, keď už nemožno vykonať žiadnu výmenu.

a) Dokážte, že vo všetkých partiách, ktoré končia tým, že na stole zostane jediná guľa, má táto guľa vždy rovnakú farbu.

b) Určte farbu poslednej gule v závislosti na číslach N , a , b , c .

1.4. Vrcholy pravidelného N -uholníka ($N > 3$) sú ohodnotené číslami $+1$ a -1 . (Každému vrcholu je priradené práve jedno z týchto čísel.) Cieľom je určiť súčin všetkých ohodnotení. Je dovolené klásť otázky: Čomu sa rovná súčin ohodnotení zvolených m vrcholov ($N \geq 2m$).

Určte najmenší možný počet P otázok, ktorý dovoľuje určiť hľadaný súčin všetkých ohodnotení.

1.5. Na množine všetkých postupností zložených z 3000 cifier, z ktorých každá je 1 alebo 2, sú dovolené výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc. Napr. postupnosť

$$\begin{array}{ccccccc} 112 & 122 & 212 & 11 & \dots & & \\ & \underline{\hspace{1cm}} & \overline{\hspace{1cm}} & & & & \end{array}$$

možno zmeniť na postupnosť novú

$$\begin{array}{ccccccc} 112 & 212 & 122 & 11 & \dots & & \\ & \overline{\hspace{1cm}} & \underline{\hspace{1cm}} & & & & \end{array}$$

Dve postupnosti nazveme ekvivalentnými, ak jednu možno konečným počtom dovolených výmen zmeniť na druhú.

Určte počet všetkých neekvivalentných postupností.

1.6. Dokážte, že v nekonečnom desatinnom rozvoji Ludolfovoho čísla π možno pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 nájsť aspoň jeden taký úsek, že prirodzené číslo zapísané v danom poradí číslicami z tohto úseku je deliteľné číslom n .

Napr. pre $n = 17$ je jeden taký úsek v zápise čísla

$$3, \quad 141 \quad 592 \quad 653 \quad \dots$$

$\underline{\hspace{1cm}}$

podčiarknutý.

1.7. Medzi všetkými n -cifernými číslami ($n \geq 2$), v ktorých zápise se nevyskytuje nula, určte také číslo, aby rozdiel tohto čísla a jeho ciferného súčinu bol čo najväčší.

1.8. Je daný ľubovoľný mnohočlen k -teho stupňa

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \quad (1)$$

s nezápornými celočíselnými koeficientami $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Postupnosť funkčných hodnôt mnohočlena (1) pre $n = 0, 1, 2, \dots$ označíme

$$A_0, A_1, A_2, \dots \quad (2)$$

Postupnosť ciferných súčtov všetkých členov postupnosti (2) označíme

$$C_0, C_1, C_2, \dots \quad (3)$$

Dokážte, že v postupnosti (3) existuje nekonečne mnoho sebe rovných členov.

1.9. Na množine všetkých nezáporných celých čísel je daná operácia „ $\cdot$ “, ktorá má pre všetky a, b, c nasledujúce vlastnosti:

$$a \cdot b = b \cdot c; \quad (1)$$

$$a \cdot b = c \Rightarrow b \cdot c = a; \quad (2)$$

$$a \cdot b > c \Rightarrow b \cdot c < a \text{ alebo } a \cdot c < b. \quad (3)$$

a) Určte hodnoty $0 \cdot 0; 0 \cdot 1; 1 \cdot 1; 0 \cdot 2$.

b) Dokážte, že pre všetky a platí: $0 \cdot a = a; 1 \cdot a = a + 1$ pre párne $a; 1 \cdot a = a - 1$ pre nepárne a .

c) Dokážte, že pre všetky a, b, c platí:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c.$$

d) Určte všetky hodnoty $a \cdot b$ pre $a \leq 7, b \leq 7$.

e) Ukážte, že existuje najviac jedna operácia s vlastnosťami (1) – (3).

f) Ukážte, že taká operácia existuje, a uďte predpis pre výpočet ľubovoľnej hodnoty $a \cdot b$. Špeciálne vypočítajte $1976 \cdot 366$.

g) Dokážte, že operácia „ $\cdot$ “ je grupovou operáciou na množine všetkých nezáporných celých čísel.

1.10. Je daná ľubovoľná funkcia $y = F(x)$ definovaná pre všetky reálne čísla. Dokážte, že možno určiť také dve funkcie $y = f(x)$ a $y = g(x)$, že

a) $F(x) = f(x) + g(x)$ pre všetky x ;

b) graf každej z funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ je stredove súmerný. (Stredy súmernosti oboch grafov môžu byť rôzne.)

2.1. Zafarbenie vyhovujúce vlastnostiam z úlohy 1.1 možno uskutočniť práve vtedy, keď je k párne číslo. Dokážte.

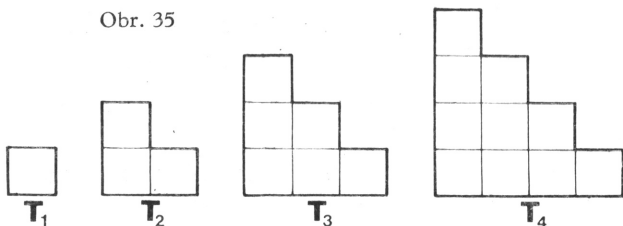
2.2. Nech všetky čierne štvorce nulte generácie (pozri úlohu 1.2) možno pokryť obrazcom T_m (pozri obr. 35; obrazce možno v sieti štvorcov ľubovoľne posúvať, ale nemožno ich otáčať).

Potom v m -tej generácii sú všetky štvorce biele. Dokážte.

2.3. a) Dokážte tvrdenie z úlohy 1.3 a) matematickou indukciou.

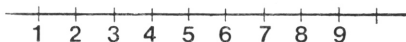
b) Vyhľadajte pre všetky $N \leq 8$ všetky východiskové trojice a, b, c , pre ktoré partie končiace jedinou guľou dávajú bielu guľu.

Obr. 35



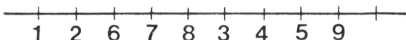
2.4. Riešte úlohu 1.4 pre prípad $m = 3$. Dokážte, že v tomto prípade je výsledok: $n = 3k \Rightarrow P = k$; $n = 3k + 1 \Rightarrow P = k + 1$, $n = 3k + 2 \Rightarrow P = k + 2$. (Např. pre $n = 3k$ musíte dokázať: $P \leq k$ a $P \geq k$.)

2.5. Je daná postupnosť 3000 bodov (např. obrazy čísel 1, 2, 3, ..., 3000 na číselnej osi; obr. 36).



Obr. 36

Obr. 37



Na tejto postupnosti je dovolená operácia výmeny ľubovoľných dvoch za sebou nasledujúcich trojíc bodov. Např. z vyššie uvedenej postupnosti môžeme získať postupnosť na obr. 37.

Určte množinu všetkých bodov danej postupnosti, s ktorými možno stotožniť povolenými výmenami ľubovoľne zvolený bod. (Kam možno např. presunúť z východzieho postavenia bod 7?)

2.6. Z číslíc 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná nekonečná postupnosť.

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (1)$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n nesúdeliteľné s číslom 10 možno nájsť v postupnosti (1) taký úsek

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m},$$

že prirodzené číslo zapísané týmito číslicami v uvedenom poradí je deliteľné číslom n .

2.7. Rozdiel čísla N a jeho ciferného súčinu označme $r(N)$. Sú dané dve päťciferné čísla $A = 999\,11$, $B = 777\,99$.

Určte čísla $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ tak, aby boli splnené podmienky:

a) $C_0 = B, C_5 = A$;

b) dvojice susedných čísel C_i, C_{i+1} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) sa líšia len v jednej číslici;

c) $r(C_0) \leq r(C_1) \leq r(C_2) \leq r(C_3) \leq r(C_4) \leq r(C_5)$.

2.8. Ciferný súčet čísla

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

označíme C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Dokážte, že medzi číslami

$$C_0, C_1, C_2, \dots \quad (4)$$

možno nájsť nekonečne mnoho čísel, ktoré sa sebe rovnajú.

2.9. Ak operácia „ $\cdot$ “ má vlastnosti (1) — (3) z úlohy 1.9, potom pre všetky kladné a, b platí

$$a \cdot b = c,$$

kde c je najmenšie nezáporné číslo, ktoré sa nevyskytuje medzi číslami

$$0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, \dots, (a - 1) \cdot b,$$

$$a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, \dots, a \cdot (b - 1);$$

dokážte. Dokážte, že obe nerovnosti $a \cdot b > c$, $a \cdot b < c$ vedú k sporu.

2.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$ tak, že každá z funkcií f a g má graf stredove súmerný.

3.1. Ak zafarbenie danej vlastnosti (pozri úlohu 1.1) existuje, potom modrých a červených kociek je párny počet. Dokážte.

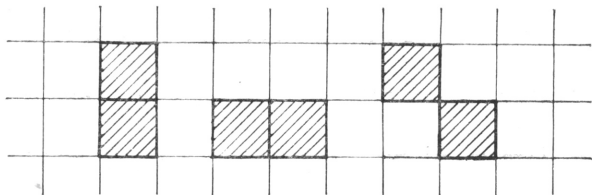
3.2. V nekonečnej sieti štvorcov (pozri úlohu 1.2) nazveme dva štvorce susednými práve vtedy, ak nastane niektorá z možností na obr. 38.

Množinu $\mathbf{M}$ všetkých čiernych štvorcov nultej generácie rozdelíme na komponenty $K_1, K_2, \dots$ tejto vlastnosti: Dva štvorce $A, B \in \mathbf{M}$ patria tomu istému komponentu práve vtedy, ak možno dôjsť od jedného k druhému postupným prechodom po susedných poliach. Napr. na obr. 39 sa množina čiernych štvorcov rozpadne na tri komponenty.

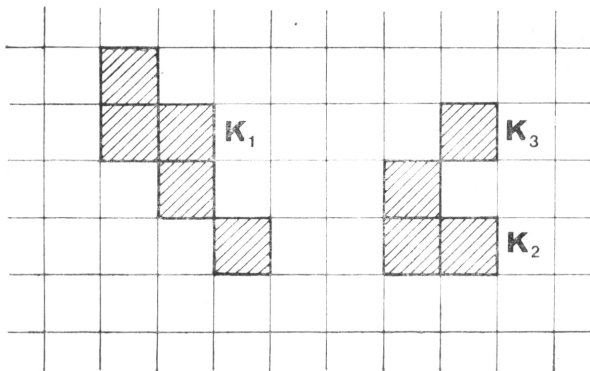
Dokážte: Ak množina $\mathbf{M}$ obsahujúca n štvorcov sa skladá z jedného komponentu, ktorý nemožno pokryť žiadnym z obrazcov $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ (pozri úlohu 2.2), potom sa v n -tej generácii po prvý raz vyskytnú samé biele štvorce.

3.3. Dokážte (pozri úlohu 1.3):

a) Ak je N párne číslo, potom sú buď všetky a, b, c párne, alebo len jedno párne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba



Obr. 38



Obr. 39

výslednej gule rovnaká ako farba gulí, ktorých je párny počet.

b) Ak je N nepárne číslo, potom sú buď všetky čísla a, b, c nepárne, alebo len jedno je nepárne. V prvom prípade partia nemôže končiť jedinou guľou. V druhom prípade je farba výslednej gule zhodná s farbou gulí, ktorých je nepárny počet.

3.4. Dokážte, že výsledok úlohy 1.4 je tento: Nech $N = m \cdot d + r, 0 \leq r < m$. Ak je m nepárne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d; r \neq 0, r$ párne $\Rightarrow P = d + 2; r$ nepárne $\Rightarrow P = d + 1$.

Ak je m párne číslo, potom $r = 0 \Rightarrow P = d; r \neq 0, r$ párne $\Rightarrow P = d + 1, r$ nepárne číslo $\Rightarrow P$ neexistuje.

3.5. Dokážte: Nech $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ sú dve n -členné ($n \geq 1$) postupnosti čísl 1 a 2. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby

postupnosti α , β boli ekvivalentné (pozri úlohu 1.5), je splnenie týchto podmienok:

$$a_1 + a_4 + a_7 + \dots = b_1 + b_4 + b_7 + \dots,$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots = b_2 + b_5 + b_8 + \dots,$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots = b_3 + b_6 + b_9 + \dots.$$

3.6. Z číslíc 0, 1, 2, ..., 9 je zostavená ľubovoľná postupnosť

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad (1)$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n možno nájsť medzi $n + 1$ číslami zapísanými v uvedenom poradí číslami $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{n+1}$, $a_2 a_3 a_4 \dots a_{n+1}$, $a_3 a_4 \dots a_{n+1}$, atď., a_{n+1} aspoň dve, ktoré pri delení číslom n dávajú ten istý zvyšok.

3.7. Hľadané číslo (pozri úlohu 1.7) má tvar

$$A = 999 \dots 9 \, 111 \dots 1.$$

Určte počet deviatok a počet jedničiek a ukážte, že $r(A)$ (pozri úlohu 2.7) je najväčšie možné číslo, tj. pre ľubovoľné n -ciferné číslo B , v ktorého dekadickom zápise

$$B = b_n b_{n-1} \dots b_3 b_2 b_1$$

nie sú žiadne nuly a $B \neq A$, je $r(A) > r(B)$. Dokážte! (Použite napr. postup naznačený v úlohe 2.7.).

3.8. Dve čísla M , N nazveme podobnými, ak po vyškrtnutí núl v dekadických zápisoch oboch čísel dostaneme to isté číslo. (Např. 3 074, 3 700 40 sú podobné čísla.)

Dokážte, že medzi funkčnými hodnotami mnohočlenov

a) $13n + 24$;

b) $2n^2 + 13n + 124$

pre $n = 0, 1, 2, \dots$ je nekonečne mnoho navzájom podobných čísel.

3.9. Zostavte si tabuľku operácie „ $\cdot$ “ pre všetky $a \leq 7$, $b \leq 7$ použitím výsledku úlohy 2.9. Všetky čísla v tejto tabuľke vyjadrite v dvojkovej sústave. Vyjde napr.

$$3 \cdot 5 = 6 \text{ čiže } (11)_2 \cdot (101)_2 = (110)_2.$$

Na základe tabuľky vyslovte hypotézu o možnosti výpočtu hodnoty $c = a \cdot b$, ak sú a, b vyjadrené v dvojkovej sústave. Hypotézu dokážte.

3.10. Ukážte, že funkciu $y = |x|$ možno vyjadriť ako súčet dvoch funkcií $y = f(x)$ a $y = g(x)$ tak, že

a) graf funkcie f je stredove súmerný podľa bodu $[0,0]$ a graf funkcie g je stredove súmerný podľa bodu $[1,0]$.

b) Pre $x \in \langle 0,1 \rangle$ je $f(x) = |x|$ a $g(x) = 0$.

Načrtnite grafy funkcií f a g v intervale $\langle -3,3 \rangle$.

Algebra (zostavil RNDr. M. Šisler, CSc.):

1. Riešte rovnicu

$$\frac{a_1 - a_2}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{a_2 - a_3}{(x - a_2)(x - a_3)} + \dots + \frac{a_n - a_1}{(x - a_n)(x - a_1)} = x,$$

kde $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$.

2. Pre ktoré celé čísla x a y platí $x(y^2 + 1) + y^2 = (x + y)^2$?

3. Nech z_i sú komplexné čísla, $|z_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$. Potom

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i - 1 \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - 1|;$$

dokážte.

4. Nájdite všetky hodnoty parametra p , pre ktorý platí nerovnosť

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz \geq p(x^2 + y^2 + z^2)$$

pre všetky x, y, z .

5. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať koeficient a v rovnici

$$x^3 - ax^2 + bx - 8 = 0,$$

aby všetky korene tejto rovnice boli kladné?

6. Ukážte, že rovnica

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n = 0$$

nemá pre párne n žiadny reálny koreň.

7. Nech z je komplexný koreň rovnice $x^3 + 3 = 0$, w koreň rovnice $x^2 + x + 1 = 0$. Nech $\mathbb{Q}(z) = \{az + b | a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}(w) = \{aw + b | a, b \in \mathbb{Q}\}$, kde $\mathbb{Q}$ je množina racionálnych čísel. Ukážte, že existujú práve dve zobrazenia T množiny $\mathbb{Q}(z)$ na množinu $\mathbb{Q}(w)$ také, že platí: a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$,

b) $T(xy) = T(x)T(y)$ pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{Q}(z)$,

c) existuje aspoň jedno číslo $a \in \mathbb{Q}$ tak, že $T(a) \neq 0$.

Školská teória čísel (zostavil M. Kaukič):

1. Je daná rovnica

$$x^2 - ny^2 = 1, \quad (1)$$

kde n je prirodzené číslo.

a) Rovnica (1) je riešiteľná v obore prirodzených čísel; dokážte.

b) Ak usporiadaná dvojica (x_0, y_0) prirodzených čísel vyhovuje rovnici (1) a neexistuje také prirodzené $\bar{x} < x_0$, že pre niektoré prirodzené $\bar{y}$ je $(\bar{x}, \bar{y})$ riešením rovnice (1), potom všetky riešenia v prirodzených číslach rovnice (1) sa dajú určiť zo vzťahu

$$x + y\sqrt{n} = (x_0 + y_0\sqrt{n})^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

a to porovnaním „racionálnej“ a „iracionálnej“ časti oboch strán poslednej rovnosti. Dokážte.

2. Nech $f_0(x) = \frac{x}{2}$, $f_1(x) = 3x + 1$ sú funkcie definované na množine všetkých reálnych čísel. Reťazcom čísla x nazveme každú konečnú postupnosť

$$a_0 = x, \quad a_1 = f_{i_1}(x), \quad a_2 = f_{i_2}(f_{i_1}(x)), \dots, \\ a_k = f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\dots(f_{i_2}(f_{i_1}(x))\dots))$$

kde $i_m \in \{0, 1\}$ pre $m = 1, 2, \dots, k$, pričom v postupnosti $i_1, i_2, \dots, i_k$ nie sú nikde za sebou dve jedničky.

Ak sú čísla a_0, a_k prirodzené, potom všetky čísla v reťazci čísla x sú prirodzené. Dokážte.

3. Nech n je prirodzené číslo. Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ sú všetky nepárne práve vtedy, keď $n = 2^m - 1$, kde m je prirodzené číslo; dokážte.

4. Pokúste sa nájsť netriviálne postačujúce podmienky pre to, aby v postupnosti prirodzených čísel $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ k ľubovoľnej usporiadanej skupine dekadických cifier existoval člen v_n taký, že jeho dekadický zápis začína zvolenou skupinou cifier.

5. Vo vrcholoch pravidelného šesťuholníka sú napísané celé čísla $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ také, že ich súčet sa rovná nule. Prenosom nazveme odčítanie jedničky od čísla stojaceho v niektorom vrchole a jej pričítanie k číslu stojacemu v niektorom zo susedných vrcholov. Aký minimálny počet prenosov treba urobiť, aby čísla vo všetkých vrcholoch šesťuholníka boli rovné nule?

6. Existujú také prirodzené čísla x, y , aby $x^2 + y$ aj $x + y^2$ boli druhými mocninami prirodzených čísel?

7. Všetky prirodzené čísla m , pre ktoré je číslo $m^m + 1$ deliteľné číslom 30, tvoria aritmetickú postupnosť; dokažte. Nájdite túto postupnosť.

8. Na každej z 20 kartičiek je napísaná práve jedna z cifier od 0 do 9 tak, že každá z cifier sa vyskytuje práve na dvoch kartičkách.

Rozhodnite, či tieto kartičky možno usporiadať do radu tak, aby kartičky s nulami boli vedľa seba, medzi kartičkami s jednotkou bola práve jedna kartička, medzi kartičkami s dvojkou práve dve kartičky, atď., až medzi kartičkami s deviatkou bolo práve 9 kartičiek.

Postupnosti a rady (zostavil RNDr. Ľ. Kubát):

1. Je daná postupnosť:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad (n + 2)(n + 1) a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$$

Vyjadrite n -tý člen postupnosti.

2. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou d . Potom

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} + a_1 a_2 a_3 \dots a_k + a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+k-1} = \\ = a_0 a_1 a_2 \dots a_k + \frac{a_n a_{n+1} \dots a_{n+k} - a_0 a_1 \dots a_k}{(k+1)d};$$

dokážte.

3. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú korene rovnice

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0.$$

Vypočítajte hodnotu súčtu

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1}.$$

4. Ak označíme $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$, potom platí $n \cdot S_k(n) = S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + \dots + S_k(2) + S_k(1)$;

dokážte.

5. Vypočítajte súčet:

$$\text{a) } S_n = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \dots + n \cdot x^n;$$

$$\text{b) } S_n = 1 + 4 \cdot x + 9 \cdot x^2 + \dots + n^2 \cdot x^{n-1}.$$

6. Postupnosť $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ je určená rekurentne takto:

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - \frac{5}{2}.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$[u_n] = 2 \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

(Poznámka. Symbol $[c]$ znamená celú časť čísla c .)

7. Fibonacciho postupnosť $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ je rekurentne definovaná takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Ak uvažujeme o ľubovoľných štyroch za sebou idúcich členoch Fibonacciho postupnosti, pričom budeme považovať súčin krajných členov a dvojnásobok súčinu stredných členov za dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka, potom bude dĺžka jeho prepony jedným z členov tejto postupnosti; dokážte.

8. Dokážte, že pre n -tý člen Fibonacciho postupnosti platí:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k}.$$

VIII. Správa o XIX. medzinárodnej matematickej olympiáde

1. ORGANIZÁCIA A PRIEBEH SÚŤAŽE

XIX. medzinárodná matematická olympiáda (MMO) sa konala v dňoch 1.—13. 7. 1977 v Juhoslávii. Vlastná súťaž i jej rámcový program sa uskutočnili len na území Zväzovej republiky srbskej a jej poriadateľmi boli Savez družstva matematicára, fizičara i astronoma Jugoslavije a Družstvo matematicára, fizičara i astronoma SR Srbije. Členovia týchto spoločností tvorili prakticky organizačný výbor i celý organizačný štáb súťaže. Predsedom organizačného výboru XIX. MMO bol *prof. dr. Vojin Dajović*, profesor belehradskej univerzity.

V SFRJ sa konala r. 1967 IX. MMO známa tým, že sa súťaže matematických nádejí po prvý raz zúčastnili družstvá západoeurópskych krajín (Veľkej Británie, Francúzska, Talianska a Švédska). Juhoslovanskí hostitelia zostali i tentoraz verní svojim snahám o rozširovanie počtu zúčastnených zemí a poslali pozvanie na XIX. MMO do 27 krajín. Pozvanie prijali *Rakúsko* (A), *Belgicko* (B), *Bulharsko* (BG), *Kuba* (C), *ČSSR* (CS), *NSR* (D), *NDR* (DDR), *Alžírsko* (DZ), *Francúzsko* (F), *Veľká Británia* (GB), *Maďarsko* (H), *Taliansko* (I), *Mongolsko* (M), *Holandsko* (NL), *Polsko* (PL), *Rumunsko* (R), *Švédsko* (S), *Fínsko* (SF), *ZSSR*

(SU), USA a súťaž se zúčastnilo samozrejme družstvo domácej *Juhoslávie* (YU). Všetky uvedené družstvá boli osemčlenné, okrem štyroch, ktoré z rôznych dôvodov vyslali menší počet žiakov: B — 7, C — 4, DZ — 3, I — 5. Popri rekordnej účasti 21 krajín sa teda XIX. MMO zúčastnil aj rekordný počet — 155 riešiteľov. Pôvodne prijala pozvanie tiež Vietnamská socialistická republika, ktorá poslala aj návrh úloh pre súťaž, ale deň pred otvorením olympiády sa ospravedlnila, práve tak ako Grécko. Brazília vyslala na XIX. MMO svojho pozorovateľa, lepšie rečeno pozorovateľku, ktorá sa zúčastnila niektorých rokovaní jury a slávnostného otvorenia súťaže. Pozvanie neprijali, resp. naň nereagovali, India, Nórsko a Albánsko.

Predsedom medzinárodnej jury súťaže, ktorú tvorili vedúci delegácií zúčastnených krajín, bola *dr. Milica Ilič-Dajovićová*, profesorka belehradskej univerzity, ktorá vykonávala rovnakú funkciu už pri MMO pred desiatimi rokmi.

Vedúci delegácií sa schádzali do Belehradu v piatok 1. 7. 1977, skadiaľ ich organizátori po skupinách odviezli mikrobusedom do kúpeľného mestečka *Arandjelovac*, centra srb-skej Šumadije, ležiaceho 86 km juhovýchodne od hlavného mesta SFRJ. Tamejší hotel „Staro zdanje“ zriadený v niekdejšom sídle kniežaťa Miloša Obrenoviča sa stal na desať dní nielen bydliskom, ale aj miestom práce jury XIX. MMO. Okrem už tradičnej izolácie vedúcich delegácií od členov družstiev sledovali tak organizátori vytvorenie optimálnych podmienok pre náročnú prácu spojenú s výberom súťažných úloh a hodnotením riešení, čo sa im v plnej miere podarilo.

Už pri IX. MMO urobili juhoslovanskí hostitelia prvý pokus zorganizovať malé sympóziu o vyučovaní matematiky, ktoré aj napriek značnej improvizácii bolo vcelku pozitívne hodnotené. Za 9 predchádzajúcich rokov ne našli nasledovníka v tomto smere, ale myšlienke konania sympózií pri príležitosti MMO nedali zaspáť a do rám-cového programu XIX. MMO zaradili nielen sympóziu učiteľov, ale aj malé sympóziu žiakov.

Sympóziu „*Mládež a matematika*“ bola venovaná celá sobota 2. 7. 1977. Konalo sa v Arandjelovci a okrem vedú-cich zahraničných delegácií sa ho zúčastnil celý rad do-mácich učiteľov a odborníkov z oblasti vyučovania mate-matiky. Odznelo na ňom 12 referátov, ktoré priniesli celý rad cenných poznatkov z oblasti vyučovania matematiky a starostlivosti o matematické talenty.

G. Burosč (DDR) hovoril o školskom systéme v NDR a formách práce s matematickými talentami. A. P. Savin (SU) sa zaoberal mimoškolskými formami práce s talen-tami v ZSSR a poslaním populárno-vedeckého časopisu Kvant. E. Hódi (H) informoval o cieľoch a obsahu reformy vyučovania matematiky na základnej škole v Maďarsku uskutočňovanej v rokoch 1974/75 až 1985/86. P. Kenderov (BG) predložil výsledky analýzy kolektívu bulharských matematikov o tom, ako olympiáda vplýva na zlepšovanie vyučovania matematiky na strednej škole. I. Orlov (YU) vo svojom referáte uvádzal konkrétne príklady toho, ako numerická matematika pomáha získávať zaujem mládeže o matematiku. R. C. Lynnes (GB) rozoberal vplyv olym-piády na úroveň vyučovania matematiky v britských stred-ných školách a najmä na výber matematických talentov.

D. Gerll (F) informoval o zásadách súťaže „Concours général“ pravidelne poriadanej vo Francúzsku a o obsahu vyučovania matematiky na francúzskych stredných školách.

T. Mühlgassner (A) stručne informoval o výsledkoch práce skupiny odborníkov, ktorá pripravovala návrh nového obsahu vyučovania matematiky v rakúskych stredných školách. *J. Moravčík* (CS) hovoril o niektorých formách objavovania a vedenia matematických talentov v ČSSR a o obsahu vyučovania matematiky v triedach s rozšíreným vyučovaním matematiky. *I. Cuculescu* (R) sa zaoberal otázkami vyučovania teórie pravdepodobnosti v strednej škole. *S. L. Greitzer* (USA) hovoril o formách a metódach výberu družstva USA pro MMO a význame olympiád pre vyučovanie matematiky. *M. Ilič-Dajovičová*, ktorá sympóziu predsedala, v záverečnom referáte zdôraznila, že si treba všimnúť obsah a úroveň vyučovania matematiky všetkých žiakov a nielen budúcich matematikov. S odvolaním sa na sovietskeho akademika Kolmogorova podčiarkla, že by bolo zle, ak by sme pre štúdium matematiky získali len tých, ktorí sa zúčastňujú na súťažiach v riešení úloh. V záverečnom slove vyslovila nádej, že za týmto sympóziom budú každoročne nasledovať ďalšie, aby prispeli k skvalitneniu vyučovania matematiky a starostlivosti o matematické talenty v účastníckych zemiach.

Aj napriek tomu, že niektoré z prednesených referátov boli viac-menej improvizované, možno sympóziom hodnotiť ako úspešné. Ukázalo, že by bolo účelné v organizovaní podobných podujatí pokračovať aj pri budúcich MMO, zvlášť pri vzrastajúcom počte zúčastnených krajín.

Bolo by však potrebné, aby sa tematika sympózia vopred užšie tématicky vymedzila.

Organizátori XIX. MMO prisľúbili, že budú všetky prednesené referáty publikovať v osobitnej publikácii, ktorú rozošlú všetkým účastníkom sympózia i ďalším záujemcom.

Večer po skončení sympózia sa uskutočnilo malé spoločenské stretnutie vedúcich delegácií s členmi organizačného výboru XIX. MMO, na ktorom predseda organizačného výboru *prof. dr. V. Dajovič* zaprial členom jury veľa úspechov v ich zodpovednej práci a príjemný pobyt v socialistickej Juhoslávii.

Poriadatelia MMO dostali z 12 krajín do 27. 6. 1977 (kedy prišiel návrh z ČSSR) celkom 54 návrhov úloh pre súťaž, z ktorých komisia pre úlohy vybrala a spracovala 16 ako základ pre prácu jury. Do tohto výberu sa nedostala žiadna zo 6 úloh sovietskeho návrhu, ktorý vedúci delegácie SU priviezol do Belehradu až pri svojom príchode 1. 7. Vybraných 16 úloh s riešeniami dostali členovia jury ešte pred začiatkom sympózia 2. 7. a prvé dve zasadnutia jury v nedeľu 3. 7. slúžili k tomu, aby se z tohto širšieho výberu zostavil najvhodnejší celok 6 úloh pre súťaž. Rokovanie jury bolo náročné a zdĺhavé nielen preto, že sa každé vystúpenie prekladalo do všetkých rokových jazykov (ruština, nemčina, angličtina, francúzština), ale aj z toho dôvodu, že sa pomerne často hlasovalo. Aj napriek tomu sa však jury podarilo už na druhom zasadnutí v nedeľu večer schváliť nielen výber 6 úloh, ale aj ich rozdelenie na oba súťažné dni. Čas, ktorý sa tým oproti plánovanému programu získal, si však vzhľadom na technické podmienky

(bola k dispozícii prakticky len jediná tabuľa) vyžiadalo formulovanie textov vybraných úloh v oficiálnych jazykoch. Tejto práci bol venovaný celý pondelok 4. 7. a siahodlhému rokovaniu o maximálnom počte bodov za úplné riešenie úloh padla dokonca za obeť aj plánovaná účasť členov jury na divadelnom predstavení v rámci festivalu „Mermer a zvuci“, každoročne poriadanom v Arandjelovci.

V pondelok 4. 7. pricestovali do Belehradu družstvá zúčastnených krajín vedené zástupcami vedúcich delegácií. Žiakov na celý čas trvania XIX. MMO ubytovali v Pionierskom mestečku na okraji Belehradu a zástupcov vedúcich delegácií vo večerných hodinách autobus dopravil do hotela „Staro zdanje“ v Arandjelovci, aby sa až do konca olympiády podieľali na práci jury. Tá sa už za ich účasti v utorok 5. 7. predpoludním venovala prekladu textov úloh do materčiny súťažiacich žiakov a naklepaniu prekladov na stroji. Tým sa skončila prvá časť práce jury. Aktívneho oddychu jej členov mala slúžiť popoludňajšia exkurzia autobusom do Resavskej jaskyne a do kláštora Manasija.

Slávnostné otvorenie XIX. MMO sa uskutočnilo v stredu 6. 7. ráno v aule areálu Pionierskeho mestečka, v priestoroch ktorého sa konala tiež vlastná súťaž. Po krátkych prejavoch predsedu organizačného výboru *prof. dr. V. Dajoviča* a predsedkyne jury *prof. dr. M. Ilič-Dajovičovej* sa účastníci súťaže rozišli do ôsmich tried, aby si zmerali sily v riešení prvej trojice nasledujúceho súboru úloh, ktorý im jury pripravila.

PRVÝ DEŇ SÚŤAŽE — 6. JÚLA 1977

- noviti*
1. Vo vnútri daného štvorca $ABCD$ sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ABK , BCL , CDM , DAN . Dokážte, že stredy štyroch úsečiek KL , LM , MN , NK spolu se stredmi ôsmich úsečiek AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN , AN tvoria množinu vrcholov pravidelného dvanásťuholníka. (Holandsko, 6 bodov.)
 2. V konečnej postupnosti reálnych čísel je súčet každých siedmich za sebou nasledujúcich členov záporný a súčet každých jedenástich za sebou nasledujúcich členov kladný. Rozhodnite, aký je maximálny počet členov takej postupnosti. (Vietnamská socialistická republika, 6 bodov.)
 3. Nech $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo a nech V_n je množina prirodzených čísel tvaru

$$1 + kn,$$

kde $k = 1, 2, \dots$. Číslo $c \in V_n$ nazveme nerozložiteľným vo V_n , ak neexistujú čísla $p, q \in V_n$ také, že $c = pq$. Dokážte, že existuje číslo $r \in V_n$, ktoré možno vyjadriť ako súčin čísel nerozložiteľných vo V_n viac než jedným spôsobom. (Rozklady lišiace sa len poradím faktorov z V_n sa považujú za rovnaké.) (Holandsko, 7 bodov.)

DRUHÝ DEŇ SÚŤAŽE — 7. JÚLA 1977

- uvádzame funkcie*
4. Nech a, b, A, B sú dané reálne čísla a nech

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x,$$

kde ←

je-li
Ak $f(x) \geq 0$ pre každé reálne x , potom

$$a^2 + b^2 \leq 2 \quad \text{a} \quad A^2 + B^2 \leq 1.$$

Dokážte. (Veľká Británia, 6 bodov.)

- zbytek*
5. Nech a a b sú prirodzené čísla. Nech q je podiel a r zvyšok, ktoré dostaneme pri delení čísla $a^2 + b^2$ číslom $a + b$. Nájdite všetky dvojice a, b , pre ktoré platí $q^2 + r = 1977$. (NSR, 7 bodov.)

- je-li*
6. Nech f je funkcia definovaná na množine všetkých prirodzených čísel, ktorej hodnoty sú prirodzené čísla. $\rightarrow$

jestliže
Ak pre každé prirodzené číslo n platí

$$f(n+1) > f(f(n)),$$

potom $f(n) = n$ pre každé prirodzené číslo n . Dokážte. (Bulharsko, 8 bodov.)

V zátvorke za textom úlohy je uvedené, ktorá krajina úlohu navrhla, a maximálny počet bodov, ktorý mohol žiak získať za jej úplné riešenie. Tieto údaje však žiaci pri súťaži nepoznali. Dozvedeli sa len, že na riešenie každej trojice súťažných úloh majú 4 hodiny čistého času. Rovnako ako na predchádzajúcich troch MMO sa po oba súťažné dni najneskoršie pol hodiny po obdržaní textov úloh mohli na pripravených lístkoch písomne spýtať na prípadné nejasnosti v texte. Na ich otázky po predchádzajúcom prerokovaní v jury písomne odpovedali vedúci delegácií.

V prvý súťažný deň po splnení tejto úlohy dostali vedúci delegácií a ich zástupcovia možnosť hodinovej prechádzky v centre Belehradu a presne na poludnie ich v priestoroch rektorátu belehradskej univerzity v zastúpení rektora prof.

Jankoviča prijal jeden z prorektorov, ktorý v krátkom privítacom prejave zaželel plný úspech XIX. MMO a o. i. uviedol, že na 23 fakultách univerzity študuje viac než 50 tisíc študentov.

Popoludní po návrate do Arandjelovca sa jury zišla na prvú spoločnú poradu s koordinátormi, ktorými boli prevažne bývalí juhoslovanskí účastníci MMO. Pre každú úlohu boli určené dvaja: 1 — L. Čukiči, S. Jankovič; 2 — M. D. Ašič, V. V. Kovačević; 3 — V. Jankovič, M. Božič; 4 — D. P. Dugošija, M. Jevtič; 5 — M. Mršević, S. Ogujanovič; 6 — D. Vukomanovič, E. Udovičić. Títo predložili návrhy zásad hodnotenia riešení jednotlivých úloh, ktoré jury po dlhšej diskusii s niektorými úpravami prijala. Jury taktiež rozhodla, aby hodnotenie riešení domáceho družstva koordinovali vedúci delegácií týchto krajín: 1 — NL, 2 — CS, 3 — PL, 4 — GB, 5 — D, 6 — BG. Ide o krajiny, ktoré príslušnú úlohu navrhli, s výnimkou úlohy č. 2, zaslanej VSR (CS bola vybraná preto, lebo československá úloha navrhnutá v širšom výbere sa ako posledná nedostala do definitívnej šestice), a úlohy č. 3 navrhutej NL (PL bolo určené preto, aby vedúci delegácie NL nemusel koordinovať riešenia dvoch úloh).

Po skončení porady dostali vedúci delegácií z rúk starostlivej predsedníčky jury riešenia svojho družstva a začala sa neľahká práca spojená s hodnotením riešení a ich koordináciou.

Vo štvrtok 7. 7. pri návrate z Belehradu sa vedúci delegácií krátko zastavili v medzinárodnom pionierskom tábore Gorane pod Avalou, kde sa konala letná matematická škola pre vybraných žiakov základných škôl. Popoludní sa začalo

s koordináciou hodnotení riešení podľa presne zostaveného plánu, v ktorom sa na družstvo a úlohu počítalo s jednou hodinou. Koordinácia pokračovala po celý piatok (8. 7.) i sobotu (9. 7.). Po skončení koordinácie v sobotu podvečer sa jury zišla na svoje záverečné zasadnutie. Na tomto sa najskôr riešili otázky hodnotenia riešení v tých prípadoch, keď nedošlo k dohode koordinátorov a vedúcich delegácií. Keďže bolo takýchto prípadov tentoraz nezvyčajne veľa a na sobotu večer bola plánovaná spoločná večera za účasti predstaviteľov mesta Arandjelovac, muselo byť zasadnutie jury prerušené a aj napriek často až príliš rezolútnemu počínaniu predsedníčky jury mu padlo za obeť ešte celé nedeľné predpoludnie. Po vyriešení sporných otázok a schválení hodnotení prišlo k rozhodnutiu o určení hraníc pre ceny. Po dlhšej diskusii a niekoľkých hlasovaniach dospela jury k nasledujúcemu záveru: *I. cena* 40—34 bodov, *II. cena* 33—24 bodov a *III. cena* 23—17 bodov. To znamenalo, že *I. cenu* dostane 13, *II. cenu* 29 a *III. cenu* 35 účastníkov XIX. MMO, čím bola dodržaná aj zásada stanovená poriadateľmi v štatúte olympiády, aby celkový počet odmenených neprekročil polovicu všetkých účastníkov, pretože zo 155 účastníkov dostalo cenu 77.

V závere zasadnutia jury rokovala o návrhoch koordinátorov na udelenie špeciálnych cien za zvlášť elegantné riešenia, resp. zovšeobecnenia súťažných úloh. Boli schválené návrhy na udelenie špeciálnej ceny za elegantné riešenie 2. úlohy československému žiakovi *Martinu Čadkovi* a za jej zovšeobecnenie anglickému žiakovi *Johnovi Robertovi Rickardovi*, ktorý dostal špeciálnu cenu tiež za elegantné riešenie 3. úlohy. Z celkom 5 návrhov na špe-

ciálne ceny za riešenie 3. úlohy schválilo jury ešte ďalšie tri: pre jedného bulharského, maďarského a sovietskeho účastníka. Za riešenie 6. úlohy bol koordinátormi na špeciálnu cenu navrhnutý jeden sovietsky účastník a jedného zo svojich žiakov navrhoval vedúci holandskej delegácie. Návrh koordinátorov pri hlasovaní neprešiel a o holandskom návrhu *prof. dr. M. Ilič-Dajovičová* vôbec nedala hlasovať. Za riešenie 1., 4. a 5. úlohy sa žiadne špeciálne ceny nenavrhovali.

Po skončení pracovnej časti zasadnutia dostal slovo vedúci delegácie Rumunska *prof. I. Cuculescu*, ktorý v mene zahraničných delegácií poďakoval organizátorom za starostlivosť a vytvorenie veľmi dobrých podmienok pre prácu jury XIX. MMO a v závere svojho vystúpenia pozval všetky zúčastnené delegácie na XX. MMO do Rumunska.

Ihneď po skončení zasadnutia sa členovia jury rozlúčili s hotelom „Staro zdanje“ a mestečkom Arandjelovac, kde našli príjemné prostredie pre svoju prácu a po tretí (zároveň však aj posledný) raz sa vydali na pomerne únavnú cestu autobusom do Belehradu, kde boli pre zvyšok svojho pobytu v Juhoslávii ubytovaní v hoteli Metropol na Bulvare Revoluciji v centre mesta.

Členovia súťažných družstiev od svojho príchodu do Belehradu (v pondelok 4. 7.) trávili väčšinu voľného času na športoviskách Pionierskeho mestečka, v ktorom boli ubytovaní. Do ulíc hlavného mesta Juhoslávie sa dostali prakticky až po súťaži, keď v piatok 8. 7. predpoludním absolvovali prehliadku Belehradu, navštívili známy Kelemegdan (opevnená časť mesta nad sútokom Sávy a Dunaja) a Múzeum súčasného umenia. Popoludní sa v areáli Pio-

nierskeho mestečka mohli zúčastniť na šachovej simultánke s jedným z početných juhoslovanských šachových majstrov a večer sa stretli s predstaviteľmi belehradskej mládeže na koncerte študentov hudobnej školy.

V sobotu 9. 7. absolvovali celodenný autokarový zájazd do Resavskej jaskyne a kláštora Manasija a nedeľa 10. 7. bola venovaná *malému sympóziu účastníkov XIX. MMO*. Predpoludním v dvoch sekciách odznelo celkom 10 vystúpení mladých matematických talentov, medzi ktorými bol aj československý žiak *J. Kratochvíl*, ktorý hovoril na tému „*Použitie matematickej indukcie pri riešení niektorých úloh*“. Jeho vystúpenie sa stretlo s úspechom a zaslúženou pozornosťou. Popoludňajšej časti sympózia sa zúčastnili už aj vedúci delegácií a ich zástupcovia. V rámci „nej“ všetkých 5 nositeľov špeciálnych cien prednieslo riešenia úloh, za ktoré boli odmenení. Značný úspech v tejto časti sympózia nielen medzi účastníkmi súťaže, ale najmä u členov jury si vyslúžili Angličan *John Robert Rickard* a náš *Martin Čadek*.

Po skončení sympózia sa uskutočnilo prvé stretnutie vedúcich delegácií a ich zástupcov s členmi družstiev po absolvovaní súťaže, pri ktorom došlo k zhodnoteniu výsledkov, rozboru chýb, zaslúženým pochvalám i výčitkám.

V pondelok 11. 7. podnikli všetci účastníci XIX. MMO (členovia jury, žiaci i organizátori) celodenný výlet 3 loďami typu Raketa (Beograd, Smederevo, Novi Sad) po prúde Dunaja až do Tekije pri Železných vrátach, kde si prezreli hydroelektrárňu Djerdap s 12 Kaplanovými turbínami, vybudovanú ako spoločné dielo Rumunska a Juhoslávie. Po spoločnom obede v hoteli Djerdap v Kladove sa plavili

naspäť do Belehradu a počas takmer štvorhodinovej plavby si krátili čas pozorovaním dunajských brehov a stretávaných plavidiel.

V utorok 12. 7. predpoludním mali žiaci voľno, členov jury krátko pred poludním prijal predseda mestskej skupštiny hlavného mesta SFRJ. Večer o 18.00 hod. sa v aule Pionierskeho mestečka konalo slávnostné zakončenie súťaže, vyhlásenie výsledkov a odovzdanie diplomov odmeneným žiakom. Na zasadnutí, ktoré viedol *prof. dr. Dajovič* predniesli krátke prejavy *Salich Nuši*, predseda Socialistického zväzu Juhoslávie, *Bora Stankovič*, predseda Zväzu spoločnosti matematikov, fyzikov a astronómov Juhoslávie a vedúci rumunskej delegácie *prof. dr. Ioan Cuculescu*, ktorý v závere svojho vystúpenia zopakoval svoje pozvanie zúčastnených krajín na XX. MMO do Rumunska. Na rozdiel od predchádzajúcich MMO nevystúpil tentoraz nik z účastníkov súťaže. Diplomy odmeneným odovzdala predsedníčka jury *prof. dr. Milica Ilić-Dajovičová*.

Ihneď po skončení slávnosti sa v jedálni Pionierskeho mestečka konala rozlúčková večera na záver XIX. MMO. Poľská delegácia odcestovala z Belehradu už pred slávnostným zakončením 12. 7. a ostatné delegácie sa postupne lúčili s dejiskom XIX. MMO od včasného rána v stredu 13. 7. Ako jednu z posledných odvážalo lietadlo juhoslovanského JAT o 15.00 hod. z belehradského letiska cez Záhreb do Prahy aj československú delegáciu.

XIX. MMO bola organizačne dobre pripravená a mala predovšetkým pracovný charakter. Sympóziom vedúcich delegácií a malým sympóziom žiakov priniesla nový moment, ktorý by si zaslúžil nasledníkov medzi organizátormi

budúcich MMO. Jednoznačne možno konštatovať, že to bola v prvom rade srdečná záležitosť srbských matematikov, ktorí urobili všetko pre to, aby nezostali nič dlžní tradičnej slovanskej pohostinnosti.

2. VÝSLEDKY SÚŤAŽE

So svojou najdôležitejšou a dá sa povedať, že aj najťažšou úlohou — výberom šestice súťažných úloh — si tentoraz jury poradila pomerne rýchle a zdá sa, že vcelku úspešne. Nedostatok vhodných úloh z geometrie sice spôsobil, že sa

Počet získa- ných bodov	Úloha č. 1	Úloha č. 2	Úloha č. 3	Úloha č. 4	Úloha č. 5	Úloha č. 6
8	—	—	—	—	—	29
7	—	—	39	—	28	1
6	99	31	13	43	14	2
5	16	1	1	3	11	2
4	13	4	1	4	17	13
3	9	34	4	6	5	16
2	4	4	2	7	2	7
1	9	42	11	36	34	18
0	5	39	84	56	44	67

do výberu dostala značne staromódna a nenáročná holandská úloha o pravidelnom dvanásťuholníku, ale zostávajúcich päť úloh tvorilo čo do obťažnosti relatívne vyrovnaný a tematicky pestrý celok, o čom svedčí aj v nasledujúcej tabuľke uvedený prehľad o počte účastníkov olympiády, ktorí získali ten-ktorý počet bodov za riešenie jednotlivých úloh.

Z toho vychádza táto relatívna úspešnosť účastníkov XIX. MMO pri riešení jednotlivých súťažných úloh:

1. 82,8 %, 2. 38,6 %, 3. 35,7 %, 4. 38,4 %, 5. 44,8 %, 6. 31,7 %.

S jednotlivými úlohami si najlepšie poradili nižšie uvedené súťažné družstvá: 1. BG a YU, ktoré stratili len 1 bod, 2. GB so ziskom 32 bodov zo 48 možných, 3. H so ziskom 42 bodov z 56 možných, 4. družstvo SU získalo 32 bodov zo 48 možných, 5. USA pri zisku 46 bodov z 56 možných a 6. PL, ktoré získalo 41 bodov zo 64 možných.

Najúspešnejším účastníkom XIX. MMO bol jednoznačne Angličan *John Robert Rickard*, ktorý získal plný počet 40 bodov a špeciálne ceny za riešenie 2. i 3. úlohy. Okrem neho plný počet bodov získali ešte 2 členovia družstva USA, jeden sovietsky a jeden rakúsky žiak. So stratou jediného bodu absolvoval náročnú súťaž najlepší príslušník holandského družstva, ktoré sa stalo najväčším prekvapením tohtoročnej olympiády, keď na doterajším MMO sa vyskytovalo v tabuľke spravidla vždy medzi poslednými. Vedúci holandskej delegácie *prof. dr. J. van de Craats*

Celkové výsledky XIX. MMO sú zhrnuté
v tejto prehľadnej tabuľke:

Kra- jina	Počet získaných cien				Počet špec. cien	Súčet bodov	Neoficiálne poradie	Pozn.
	I.	II.	III.	Spolu				
A	1	1	2	4	—	151	12.	7 žiakov
B	—	—	—	—	—	33		
BG	—	3	3	6	1	172	6.	
C	—	—	—	—	—	41		4 žiaci
CS	—	3	2	5	1	161	9.	
D	1	1	4	6	—	165	7.	
DDR	2	1	1	4	—	163	8.	3 žiaci
DZ	—	—	—	—	—	17		
F	1	—	—	1	—	126	14.	
GB	1	3	3	7	2	190	3.—4.	5 žiakov
H	1	3	2	6	1	190	3.—4.	
I	—	—	—	—	—	22		
M	—	—	—	—	—	49	17.	3 žiaci
NL	1	2	3	6	—	185	5.	
PL	1	2	2	5	—	157	11.	
R	—	1	2	3	—	122	15.	5 žiakov
S	1	1	2	4	—	137	13.	
SF	—	—	1	1	—	88	16.	
SU	1	2	4	7	1	192	2.	3 žiaci
USA	2	3	1	6	—	202	1.	
YU	—	3	3	6	—	159	10.	

vysvetľoval tento nečekaný úspech nebyvale dôkladnou a svedomitou prípravou, ktorú tohtoročné družstvo absolvovalo. Bodové rozdiely medzi jednotlivými družstvami nie sú tentoraz príliš veľké. Medzi družstvom USA (v neoficiálnom hodnotení 1.) a družstvom Rakúska (12.) je rozdiel len 51 bodov, kým napr. na XVIII. MMO medzi družstvom ZSSR (1. so ziskom 250 bodov) a družstvom USA (3. so 188 bodmi) bol rozdiel až 62 bodov. V porovnaní s vlaňajškom popri už spomínanom družstve Holandska zaznamenali znateľné zlepšenie najmä družstvá ČSSR, Juhoslávie a Maďarska. Lepší výsledok než na XVIII. MMO dosiahli tiež družstvá USA, NDR, Poľska, Švédska a Fínska. Relatívne slabšie bolo tohto roku družstvo ZSSR. Dobrý štandard, i keď s určitou stratou, potvrdilo družstvo Veľkej Británie. V solídnych výkonoch pokračovalo družstvo Bulharska a na nováčka veľmi pekný výsledok dosiahlo družstvo NSR. Určitým sklamaním je výsledok francúzskeho a čiastočne tiež rakúskeho družstva, hoci obe mali v svojom strede po jednom vynikajúcom jednotlivcovi, ktorý získal prvú cenu.

Prácu jury možno hodnotiť celkove ako úspešnú, i keď bola v niektorých momentoch poznamenaná prílišnou autoritatívnosťou jej predsedníčky *prof. dr. Milice Ilič-Dajovičovej*, spôsobenou pravdepodobne aj nedostatkom poznatkov o metódach práce používaných pri rokovaní jury MMO. V zložení jury okrem vedúcich družstiev zúčastňujúcich sa MMO po prvý raz (DZ) resp. po viacročnej absencii (B, I) k podstatnejším zmenám nedošlo, o čom svedčí aj nižšie uvedený prehľad:

A	prof. Thomas Mühlgassner	prof. Wolfgang Ratzinger
B	Frederic Burvenich	Buy Halin
BG	dr. Petar Kenderov	Dimo Seraf. Angelov
BR	prof. dr. Rosa Feldmannová (pozorovateľka)	—
C	Felix Recio	—
CS	doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.	dr. František Zítek, CSc.
D	prof. Arthur Engel	Horst Sewerin
DDR	prof. Gustav Burosch	dr. Monika Noacková
DZ	Mohamed Bekada	Amokrane Calou
F	prof. Denis Gerll	prof. Christian Gautier
GB	Robert Cranston Lyness	Terence J. Heard
H	prof. Endre Hódi	doc. dr. István Reiman
I	I. Volčič	G. Felician
M	prof. Uršincerengin Sanžmjatav	Sagdarača Gombyn
NL	prof. dr. Jan van de Craats	prof. Bert Boon
PL	mgr. Andrzej Małowski	dr. Maciej Bryński
R	prof. dr. Ioan Cuculescu	prof. Uran Canstantiri
S	dr. Lars-Åke Lindahl	—
SF	dr. Matti Lehtinen	prof. Hetkki Valkams
SU	Anatolij Pavlovič Savin	Vladimír Alexej. Orlov
USA	prof. dr. Samuel L. Greitzer	prof. Murray S. Klamkin
YU	Zoran Kadelburg	prof. Lazar Milin

3. PODROBNEJŠIE O ČESKOSLOVENSKEJ ÚČASTI

Československé družstvo pro XIX. MMO vybralo predsedníctvo ÚVMO predovšetkým na základe výsledkov II. a III. kola kategórie A XXVI. ročníka MO. Pri nominácii však prihliedlo tiež k poznatkom z dvoch sústredení širšieho výberu, ktoré sa konali v Štíříně od 28. 3. do 2. 4., resp. 13.—25. 6. 1977, k poznatkom z korešpondenčného seminára a predchádzajúcej účasti členov širšieho výberu na MMO. Príležitosť zmerať si sily s matematickými talentami 20 krajín zo 4 svetadielov dostala táto osmička žiakov (v tabuľke zároveň uvádzame výsledky, ktoré v riešení úloh XIX. MMO dosiahli). Tab. na násl. straně.

Bolo to družstvo, ktoré možno označiť za jedno najskúsenejších, ktoré za posledné roky ČSSR na MMO reprezentovali, ak uvážime, že J. Navrátil šiel na MMO po štvrtý, J. Kratochvíl po tretí a P. Quittner s P. Takáčom po druhý raz, pričom I. Turek úspešne reprezentoval už na MFO, kde získal 3. cenu. Celkový výsledok, ktorý družstvo dosiahlo v počte získaných cien i v neoficiálnom hodnotení krajín treba rozhodne považovať za úspech — je najlepší, ktorý družstvo ČSSR dosiahlo na MMO od r. 1968 v Moskve. Zároveň však treba po pravde povedať, že v silách družstva bolo tentoraz podstatne viac. Pre psychickú labilitu nečekané sklamali víťaz XXVI. roč. MO J. Kratochvíl, ktorý na XVIII. MMO v Rakúsku získal II. cenu, ale najmä víťaz XXV. ročníka MO P. Takáč, ktorý si z XVIII. MMO priviezol III. cenu. Svoj štandardný výkon podal J. Navrátil, ktorého zisk jediného bodu

Por. čís.	Meno a priezvisko, trieda, škola	Počet bodov získaný za riešenie							Cena
		ú.1	ú.2	ú.3	ú.4	ú.5	ú.6	Spolu	
1.	<i>Martin Čadek,</i> 4. tr. G Brno	5	6	0	6	2	0	19	III. špec. za 2.ú.
2.	<i>Zdeněk Kalousek,</i> 3. tr. G Jablonec n. N.	6	6	6	0	7	3	28	II.
3.	<i>Jan Kratochvíl,</i> 3. tr. G Pardubice	6	1	6	1	1	1	16	
4.	<i>Jiří Navrátil,</i> 4. tr. G Olomouc	6	0	7	6	6	8	33	II.
5.	<i>Pavol Quittner,</i> 4. tr. G Prievidza	6	4	0	1	7	8	26	II.
6.	<i>Peter Takáč,</i> 4. tr. G Šafárikovo	3	0	0	0	0	0	3	
7.	<i>Josef Tkadlec,</i> 2. tr. G Bílovec	6	6	0	2	0	1	15	
8.	<i>Ilja Turek,</i> 3. tr. G Hradec Králové	6	3	0	6	6	0	21	III.
Súčet družstva		44	26	19	22	29	21	161	

delil od I. ceny. Veľmi sme mu ju všetci priali a za svoj svedomitý prístup k reprezentácii by si ju bol opravdu zaslúžil, veď pre ČSSR získal III. cenu už na XVII. i XVIII. MMO. Za to si právom zaslúži poďakovanie a pranie aspoň rovnakých úspechov vo svojom vysokoškolskom štúdiu. Veľmi príjemne prekvapil Z. Kalousek

i M. Čadek, zvlášť ziskom špeciálnej ceny, očakávaný výsledok dosiahli P. Quittner, I. Turek a nakoniec aj J. Tkadlec, hoci nezískal cenu. Bol však najmladším členom družstva a mimochodom prvým reprezentantom na MMO zo špeciálnych tried s rozšíreným vyučovaním matematiky.

I keď dosiahnutý výsledok netreba preceňovať, možno povedať, že je do určitej miery logickým dôsledkom zvýšenej pozornosti, ktorá sa v posledných rokoch širšiemu výberu pre MMO v ČSSR venuje. Máme tu na mysli predovšetkým dve sústredenia v celkovej dĺžke 3 týždňov v rokoch 1976 a 1977, tri ročníky korešpondenčného seminára a snahu o skvalitnenie tradičných podujatí organizovaných pre matematické talenty. Právom možno očakávať, že ďalšie skvalitnenie týchto podujatí prinesie ešte výraznejšie úspechy na medzinárodnom poli.

Po spoločenskej stránke družstvo reprezentovalo veľmi dobre a za úspech možno považovať aj vystúpenie J. Kratochvíla a M. Čadka na malom sympóziu účastníkov XIX. MMO.

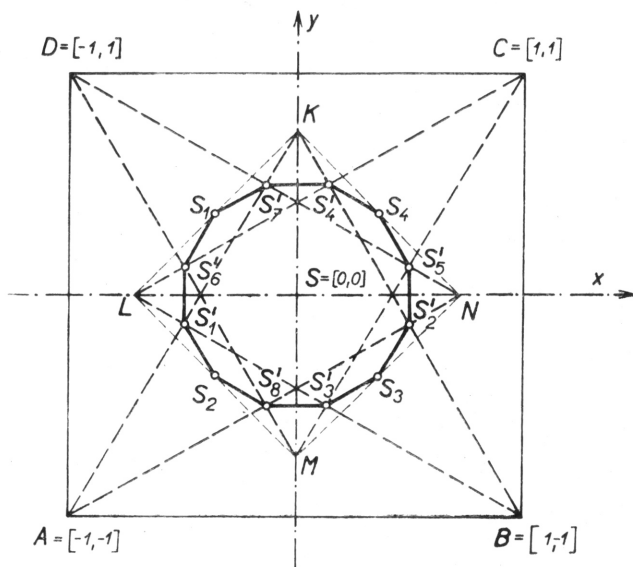
S dobrým ohlasom sa stretlo tiež vystúpenie vedúceho čl. delegácie na sympóziu „Mládež a matematika“, o ktorom sme už hovorili vyššie. Jedna z úloh navrhnutých ČSSR, ktorá bola vybratá do širšieho výberu 16 úloh, našla pomerne dosť priaznivcov medzi členmi jury a chýbalo opravdu len málo k tomu, aby sa dostala do šestice vybraných úloh. Svojím konštruktívnym prístupom vedenie čl. delegácie pozitívne prispelo k práci jury i k práci koordinátorov a nedostalo sa do žiadnej spornej situácie, ktorých bolo na tohtoročnej MMO výnimočne veľa. Celkove mož-

no teda účasť čs. delegácie na XIX. MMO hodnotiť ako úspešnú a priať si, aby sme mohli dospieť k aspoň takému konštatovaniu aj po budúcej — jubilejnej MMO.

4. RIEŠENIE SÚŤAŽNÝCH ÚLOH

Riešenie 1. úlohy (spracované podľa riešenia I. Tureka).

Označme S stred štvorca $ABCD$ (obr. 40), S_1, S_2, S_3, S_4 v uvedenom poradí stredy úsečiek KL, LM, MN, NK a $S'_1, S'_2, \dots, S'_8$ v uvedenom poradí stredy úsečiek $AK,$



Obr. 40

$BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$. Zvoľme v rovine štvorca $ABCD$ kartézsku súradnicovú sústavu tak, aby platilo: $S = [0; 0]$, $A = [-1; -1]$, $B = [1; -1]$, $C = [1; 1]$, $D = [-1; 1]$. Potom zrejme $K = [0; \sqrt{3} - 1]$, $L = [1 - \sqrt{3}; 0]$, $S_1 = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}); \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \right]$, $S'_1 = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \right]$.

Ľahko sa zistí, že $\overline{SS_1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \overline{SS'_1} = \overline{S'_1 S_1}$. Z toho vyplýva, že $\triangle SS_1 S'_1$ je rovnostranný. Zo symetrie podľa osí AC, BD vyplýva, že tiež $\triangle SS_3 S'_8$, $\triangle SS_1 S'_4$ a $\triangle SS_3 S'_5$ sú rovnostranné. Z toho je však zřejmé, že rovnakú vlastnosť majú tiež $\triangle SS'_4 S'_5$ a $\triangle SS'_1 S'_8$. Body $S_1, S'_1, S'_8, S_3, S'_5, S'_4$ sú teda vrcholmi pravidelného šesťuholníka so stredom S a stranou dĺžky $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Keďže $M = [0; 1 - \sqrt{3}]$, je $S_2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}); \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \right]$, $S'_3 = \left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}; -\frac{1}{2} \right]$ a analogicky ako hore sa vypočíta, že $\overline{SS_2} = \overline{SS'_3} = \overline{S_2 S'_3} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, z čoho vzhľadom na symetriu dostávame, že $S_2 S'_3 S'_2 S'_4 S'_7 S'_6$ je taktiež pravidelný šesťuholník so stredom S a stranou $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Keďže osi symetrie $S_1 S_3 \equiv BD$ a $S_2 S_4 \equiv AC$ oboch šesťuholníkov sú na seba kolmé, možno získať jeden šesťuholník z druhého otočením o 90° okolo stredu S . Z toho vyplýva, že ich vrcholy tvoria množinu vrcholov pravidelného dvanásťuholníka, čo sme mali dokázať.

Riešenie 2. úlohy (podľa riešenia *M. Čadeka* odmeneného špeciálnou cenou).

Uvažujme o postupnosti

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1)$$

reálnych čísel a označme $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Podľa textu úlohy musí platiť

$$\left. \begin{array}{l} s_{k+7} < s_k \quad \text{pre každé } k = 1, 2, \dots, n-7, \\ s_{k+11} > s_k \quad \text{pre každé } k = 1, 2, \dots, n-11, \\ s_7 < 0, \quad s_{11} > 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Nech $n \geq 17$. Potom z (2) postupne dostaneme:

$$\begin{aligned} s_{17} &> s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > \\ &> s_{15} > s_4 > s_{11} > 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10} > s_{17}, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že by malo platiť

$$s_{17} > s_{17},$$

čo je spor.

Musí preto byť $n \leq 16$. Ak má postupnosť (1) so 16 členmi mať požadované vlastnosti, musí pre jej čiastočné súčty s_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ platiť

$$\begin{aligned} s_6 &> s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > s_{15} > \\ &> s_4 > s_{11} > 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10}. \end{aligned} \quad (3)$$

V reťazci nerovností (3) sa z čísel s_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ vyskytuje každé práve raz. Existuje teda nekonečne mnoho 16-členných postupností s_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ reálnych

čísel vyhovujúcich vzťahom (3). Ku každej z nich dostaneme postupnosť (1) požadovaných vlastností, ak položíme

$$a_1 = s_1, a_k = s_k - s_{k-1}, k = 2, 3, \dots, 16. \quad (4)$$

Špeciálne pri voľbe

$$\begin{aligned} s_6 = 12, s_{13} = 11, s_2 = 10, s_9 = 9, s_{16} = 8, s_5 = 7, s_{12} = 6, \\ s_1 = 5, s_8 = 4, s_{15} = 3, s_4 = 2, s_{11} = 1, s_7 = -1, s_{14} = \\ = -2, s_3 = -3, s_{10} = -4 \end{aligned}$$

dostaneme zo (4) postupnosť

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5,$$

ktorá má 16 členov a všetky požadované vlastnosti, ako sa ľahko presvedčíme.

Ukázali sme tak, že maximálny počet členov postupnosti (1) požadovaných vlastností je 16.

Riešenie 3. úlohy.

Ľahko sa vidí, že čísla $(n-1)^2$, $(2n-1)^2$ a $(n-1) \cdot (2n-1)$ sú z V_n pre každé prirodzené číslo $n > 2$:

$$\begin{aligned} (n-1)^2 &= 1 + (n-2)n, (2n-1)^2 = 1 + (4n-4)n, \\ (n-1)(2n-1) &= 1 + (2n-3)n. \end{aligned}$$

Preskúmame tieto čísla z hľadiska rozložiteľnosti na súčin faktorov z V_n . Nech platí: $(n-1)^2 = (1+kn)(1+mn)$, kde k, m sú prirodzené čísla. Keďže $(1+kn)(1+mn) = 1 + (k+m+kmn)n$, je $(n-1)^2$ rozložiteľné vo V_n vtedy a len vtedy, keď $k+m+kmn = n-2$ čiže

$$k+m+2 = (1-km)n. \quad (1)$$

Je zrejmé, že pre žiadne prirodzené číslo n nemôžu exis-

tovať prirodzené čísla k, m tak, aby platilo (1), pretože pre každé prirodzené číslo k, m je ľavá strana kladná, pravá strana nekladná. Zrejme

$$(2n - 1)^2 = (1 + kn)(1 + mn) \text{ vtedy a len vtedy, keď}$$

$$k + m + kmn = 4n - 4$$

čiže

$$k + m + 4 = (4 - km)n. \quad (2)$$

K tomu, aby existovali prir. čísla k, m vyhovujúce (2), sú len tieto možnosti:

$k = m = 1$, z (2) máme $n = 2$, zatiaľ čo uvažujeme len o $n > 2$; *

$k = 1, m = 2$ alebo $k = 2, m = 1$, kedy z (2) dostaneme $2n = 7$, čomu nevyhovuje žiadne prirodzené číslo n ;

$k = 1, m = 3$ alebo $k = 3, m = 1$, kedy z (2) máme $n = 8$.

Vo V_8 však $(2n - 1)^2 = 15^2 = 225 = 9 \cdot 25 = (1 + 1.8)(1 + 3.8)$ a čísla $1 + 1.8, 1 + 3.8$ sú zrejme vo V_8 nerozložiteľné.

Číslo $(n - 1)(2n - 1)$ je vo V_n rozložiteľné vtedy a len vtedy, keď $k + m + kmn = 2n - 3$ čiže

$$k + m + 3 = (2 - km)n. \quad (3)$$

Ľahko sa vidí, že (3) môžu vyhovovať len $k = m = 1$, a to pre $n = 5$. Vo V_5 však $(n - 1)(2n - 1) = 4 \cdot 9 = 36 = (1 + 1.5)^2$, pričom číslo $1 + 1.5$ je už vo V_5 nerozložiteľné.

Zistili sme teda, že číslo $r = (n - 1)^2 (2n - 1)^2$, ktoré zrejme patrí do V_n pre každé $n > 2$:

$$r = 1 + [(2n - 3)(2n^2 - 3n + 2)] \cdot n,$$

možno vo V_n rozložiť aspoň 2 spôsobmi na súčin faktorov nerozložiteľných vo V_n :

Pre $n \neq 5, 8$

$$r = (n - 1)^2 (2n - 1)^2 = [(n - 1)(2n - 1)]^2.$$

Pre $n = 5$: $r = 4^2 \cdot 9^2$ možno rozložiť buď na súčin $r = (1 + 3.5)(1 + 16.5)$, alebo na súčin $r = (1 + 1.5)^4$, pričom faktory oboch rozkladov sú už vo V_5 nerozložiteľné.

Pre $n = 8$: $r = 7^2 \cdot 15^2$ a možné rozklady sú buď $r = (1 + 6.8)(1 + 1.8)(1 + 3.8)$, alebo $r = (1 + 13.8)^2$.

Riešenie 4. úlohy.

Označme $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $R = \sqrt{A^2 + B^2}$. Stačí zrejme uvažovať o takom prípade, keď z každej dvojice čísel a, b , resp. A, B , je aspoň jedno číslo rôzne od nuly. V takom prípade však existujú reálne čísla φ, ψ tak, že

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi; \quad A = R \cos 2\psi, \quad B = R \sin 2\psi$$

a po dosadení do

$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$
dostaneme

$$f(x) = 1 - r \cos(x - \varphi) - R \cos 2(x - \psi).$$

Nech $R > 1$. Potom z čísel

$$f(\psi) = 1 - r \cos(\psi - \varphi) - R,$$

$$f(\psi + \pi) = 1 + r \cos(\psi - \varphi) - R$$

je pri ľubovoľných reálnych hodnotách φ, ψ aspoň jedno záporné, čo je spor s tým, že $f(x) \geq 0$ pre všetky reálne x .

Nech $r > \sqrt{2}$. Potom z čísel

$$f\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - r \frac{\sqrt{2}}{2} + R \sin 2(\varphi - \psi),$$

$$f\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - r \frac{\sqrt{2}}{2} - R \sin 2(\varphi - \psi)$$

je pri ľubovoľných φ, ψ aspoň jedno záporné, čo je opäť spor s nezápornosťou funkcie f .

Musí preto súčasne platiť $r \leq \sqrt{2}$, $R \leq 1$, čo je zrejme ekvivalentné nerovnostiam, ktorých správnosť sme mali dokázať.

Riešenie 5. úlohy.

Podľa textu úlohy má platiť

$$a^2 + b^2 = q(a + b) + r, 0 \leq r < a + b; q, r \text{ celé}; \quad (1)$$

$$q^2 + r = 1977. \quad (2)$$

Keďže $1977 = 44^2 + 41$, musí byť $q \leq 44$. Uvažujeme najskôr o prípade $q = 44$, $r = 41$. Po dosadení do (1) dostaneme

$$a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41,$$

z čoho po doplnení na úplné štvorce máme

$$(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009. \quad (3)$$

Položme

$$a - 22 = x, \quad b - 22 = y, \quad (4)$$

kde x, y sú celé čísla. Potom (3) prejde do tvaru

$$x^2 + y^2 = 1009, \quad (5)$$

čo je rovnice symetrická vzhľadom na x a y . Môžeme preto bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $x \leq y$. Keďže štvorec celého čísla môže končiť len niektorou z cifier 0, 1, 4, 5, 6, 9, môžu rovnici (5) vyhovovať len také dvojice celých čísel, ktorých štvorce sú zakončené buď ciframi 0 a 9, alebo ciframi 4 a 5. Uvažujme preto o číslach zakončených cifrou 0 alebo 5 so štvorcom menším než 1009 a zostavme tabuľku

z	0	5	10	15	20	25	30
z^2	0	25	100	225	400	625	900
$1009 - z^2$	1009	984	909	784	609	384	109

Z čísel v treťom riadku tabuľky má celočíselnú druhú odmocninu len číslo $784 = 28^2$.

Rovnici (5) vyhovujú tedy len tieto dvojice celých čísel x, y , pre ktoré platí $x \leq y$:

x	15	-15	-28	-28
y	28	28	15	-15

Po dosadení do (4) prvé dve dvojice dávajú

$$a = 37, b = 50, \text{ resp. } a = 7, b = 50, \quad (6)$$

kým tretia a štvrtá dvojica nedáva prirodzené a, b .

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe dvojice (6) vyhovujú podmienkam úlohy:

$$37^2 + 50^2 = 3869, \quad 3869 = 44 \cdot 87 + 41,$$

$$7^2 + 50^2 = 2549, \quad 2549 = 44 \cdot 57 + 41.$$

Pre $q \leq 43$ z (2) dostávame $r \geq 128$. Z druhej strany však z nerovnosti $2ab \leq a^2 + b^2$ a z (1) vyplýva

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 2q(a + b) + 2r$$

čiže

$$a + b \leq 2q + \frac{2r}{a + b}. \quad (7)$$

Kedže $r < a + b$, je $\frac{r}{a + b} < 1$ a zo (7) máme $a + b < 2(q + 1)$. Pre $q \leq 43$ však z toho vyplýva $r < a + b < 88$, čo je spor.

Záver: Úloha má až na poradie čísel a, b práve dve rôzne riešenia určené v (6).

Riešenie 6. úlohy (spracované podľa riešenia *P. Quittnera*).

Najskôr úplnou indukciou dokážme, že ak k je dané prirodzené číslo, potom pre každé prirodzené číslo $n > k$ platí $f(n) > k$.

1. Nech $k = 1, n > 1$. Potom vzhľadom na

$$f(n + 1) > f(f(n)) \quad (1)$$

platí: $f(n) > f(f(n - 1)) \geq 1$, pretože $n - 1$ je prirodzené číslo a hodnoty funkcie f sú prirodzené čísla ≥ 1 . Teda $f(n) > 1$.

2. Nech pre nejaké prirodzené číslo $k \geq 1$ a pre každé prirodzené číslo n platí

$$n > k \Rightarrow f(n) > k. \quad (2)$$

Uvažujeme o $n > k + 1$. Potom $n - 1 > k$ a podľa (2) platí $f(n - 1) > k$ čiže $f(n - 1) = k + m$, kde $m \geq 1$ je prirodzené číslo. Potom však podľa (1) $f(n) > f(f(n - 1)) = f(k + m)$ a podľa (2) $f(k + m) > k$ čiže $f(k + m) \geq k + 1$. Dostali sme tedy, že $f(n) > k + 1$, čím je platnosť (2) dokázaná pre každé prirodzené číslo k .

Z toho však už priamo vyplýva, že pre každé prirodzené číslo n

$$f(n) \geq n. \quad (3)$$

Ak by totiž pre nejaké n platilo $f(n) < n$, potom podľa (2) by muselo platiť $f(n) > f(n)$, čo je spor.

Ďalej dokážeme, že funkcia f je rastúca pre všetky prirodzené n .

Ak by totiž pre nejaké prirodzené číslo m platilo

$$f(m) \geq f(m + 1),$$

potom by vzhľadom na (3) muselo platiť $f(m) \geq m + 1$ čiže $f(m) = m + p$, kde $p \geq 1$ je prirodzené číslo. Teda

$$m + p = f(m) \geq f(m + 1) > f(f(m)) = f(m + p) \geq m + p,$$

čo je spor.

Platí teda pre každé prirodzené číslo n a q

$$f(n + q) > f(n). \quad (4)$$

Teraz už ľahko dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n platí:

$$f(n) = n .$$

Ak by totiž pre nejaké prirodzené číslo n_0 platilo $f(n_0) > n_0$, potom by existovalo prirodzené číslo $k \geq 1$ tak, že $f(n_0) = n_0 + k$.

Podľa (1) však potom

$$f(n_0 + 1) > f(f(n_0)) = f(n_0 + k) ,$$

čo je spor so (4).

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Obsah

Předmluva	3
I. Průběh XXVI. ročníku matematické olympiády . . .	7
II. Přípravné úlohy I. kola	
Kategorie A	35
Kategorie B	42
Kategorie C	50
Kategorie Z	56
III. Soutěžní úlohy I. kola	
Kategorie A	61
Kategorie B	71
Kategorie C	79
Kategorie Z	87
IV. Úlohy II. kola	
Kategorie A	92
Kategorie B	103
Kategorie C	112
Kategorie Z	121
V. Úlohy III. kola kategorie A	127
VI. Texty úloh krajských kol kategorie Z	137
VII. Korešpondenční seminár MO v školskom roku 1976/77	147
VIII. Správa o XIX. medzinárodnej matematickej olympiáde	167

Edice Pomocné knihy pro žáky

Za přispění spolupracovníků zpracovali
doc. Jan Vyšín, CSc., dr. Jiří Mída,
doc. dr. Jozef Moravčík, CSc., a doc. dr. Lev Bukovský, CSc.

DVACÁTÝ ŠESTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Obálku a vazbu navrhl Jaromír Jarkovský
Vydání 1. — Praha 1979 — Počet stran 200
Odpovědný redaktor: Stanislav Horák
Výtvarný redaktor: Václav Hanuš
Technická redaktorka: Marie Fišálová

Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 5, Praha 2, Václavská ul. 12
AA 7,22 (6,69 AA textu, 0,53 AA grafiky) — 7,66 VA
Náklad 3550 výtisků
Tematická skupina a podskupina 03/2
Cena brožovaného výtisku Kčs 9,50
505/21,825

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze
jako svou publikaci č. 5-42-14/26

14 - 668 - 79

Kčs 9,50

**matematická
olympiáda**

MO

SPN 5-42-14/26

14-668-79

03/2

Kčs 9,50