Czechoslovak Mathematical Journal

Miroslav Novotný

Construction de certains continus ordonnés de puissance $2^{\aleph_0}$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 2, 87–95

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100019

CONSTRUCTION DE CERTAINS CONTINUS ORDONNÉS DE PUISSANCE $2^{\aleph_0}$.

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno.

(Reçu le 4 Avril 1951.)

M. J. NOVÁK a construit six continus ordonnés de puissance $2^{\aleph_0}$ et de séparabilité $\aleph_1$. Il a énoncé l'hypothèse que l'un d'eux possède la même structure que l'ultracontinu de Bernstein. L'auteur démontre l'exactitude de cette hypothèse. Dans la seconde partie, l'auteur construit les continus ordonnés $\mathfrak{P}'_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 7$) de puissance $2^{\aleph_0}$ et de séparabilité $2^{\aleph_0}$ dont les propriétés sont analogues à celles des $\mathfrak{P}_k$.

M. J. NOVÁK a prouvé[1]) le théorème suivant: Soit P un continu ordonné; soit $\mathfrak{P}$ un système disjoint d'intervalles fermés et de sous-ensembles de P composés d'un seul point; supposons que $\mathfrak{P}$ possède au moins deux éléments et qu'on a $\bigcup \mathfrak{P} = P$. Dans ces hypothèses, $\mathfrak{P}$ est un continu ordonné. — M. NOVÁK obtient le continu fondamental Q en identifiant tous les couples des suites consécutives de l'ensemble de toutes les suites transfinies de type ω_1 formées de chiffres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences. A l'aide de certaines propriétés (a) — (e), il définit six systèmes d'intervalles fermés $\mathfrak{S}_1$ — $\mathfrak{S}_6$ dans Q; chacun de ces systèmes est disjoint. Soit $\mathfrak{P}_k$ le système dont les éléments sont 1. tous les intervalles fermés $y = I_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}_k$, 2. tous les ensembles $(x) \subset Q - \bigcup \mathfrak{S}_k$ composés d'un seul point. D'après le théorème, les ensembles $\mathfrak{P}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$) sont des continus ordonnés. Par un procédé analogue, M. L. MIŠÍK a construit[2]) le continu $\mathfrak{P}_7$. Tous ces continus ont la puissance $2^{\aleph_0}$ et la séparabilité[3]) $\aleph_1$.

Le système $\mathfrak{S}_3$ qui définit le continu $\mathfrak{P}_3$ est le système de tous les intervalles $I_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha)$ d'ordres minimum α présentant la propriété suivante: Deux suites croissantes de type ω d'indices $\lambda_n \to \alpha$, $\mu_n \to \alpha$ existent, pour lesquelles $x_{\lambda_n} = 0$, $x_{\mu_n} = 1$ (propriété (c)). $\mathfrak{P}_3$ possède des points aux caractères $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$.

---

[1]) *J. Novák*: On some ordered continua of power $2^{\aleph_0}$ containing a dense subset of power $\aleph_1$, Czechosl. math. Journ. **76** (1951), 63—79.

[2]) *L. Mišík*: On one ordered continuum, Czechosl. math. Journ. **76** (1951), 81—86.

[3]) Je dis que la séparabilité d'un ensemble M est égale à $\aleph_\nu$, si la puissance minimum du sous-ensemble dense en M est égale à $\aleph_\nu$.

Un continu ordonné aux propriétés semblables à celles de $\mathfrak{P}_3$ est appelé ultracontinu. F. Bernstein a défini[4]) un ensemble X_u de la façon suivante: Les éléments de l'ensemble X_u sont toutes les suites de type ω $x = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ formées de nombres ordinaux de la classe I et II, $0 \leqq \alpha_n < \omega_1$. La loi d'ordination de cet ensemble est la suivante: $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots < \beta_1\beta_2 \dots \beta_n \dots$, s'il existe un indice k tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1, 2, \dots, k - 1$, tandis que $\alpha_k < \beta_k$ pour k pair ou bien $\alpha_k > \beta_k$ pour k impair. L'ensemble X_u n'est pas un continu, parce qu'il admet des lacunes. En remplissant des lacunes, on construit un continu ordonné de puissance $2^{\aleph_0}$ qui s'appelle ultracontinu. L'ultracontinu possède des éléments aux caractères $c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$. M. Novák a énoncé l'hypothèse[5]) que l'ultracontinu de Bernstein est semblable au continu $\mathfrak{P}_3$.

Dans la première partie du travail présent, je prouve cette hypothèse. Puis, je donne une construction pour les autres continus $\mathfrak{P}_1$ — $\mathfrak{P}_7$ qui est analogue à celle de Bernstein.

Dans la deuxième partie, je construis les continus ordonnés $\mathfrak{P}'_1$ — $\mathfrak{P}'_7$ dont la puissance et la séparabilité est égale à $2^{\aleph_0}$. Ces continus jouissent des propriétés analogues à celles de $\mathfrak{P}_1$ — $\mathfrak{P}_7$.

1.

Théorème I.I. *Le continu $\mathfrak{P}_3$ est semblable à l'ultracontinu de Bernstein.*

Démonstration: Soit $x = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots \in X_u$. Posons $\gamma_n = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + 1 + \dots + \alpha_{n-1} + 1 + \alpha_n$, $\alpha = \lim \gamma_n$. Soit $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$ une suite transfinie formée de chiffres 0 et 1 dans laquelle $i_\lambda = 1$ pour $\lambda < \gamma_1$ et pour $\gamma_n \leqq \lambda < \gamma_{n+1}$, si n est un nombre pair, tandis que $i_\lambda = 0$ pour $\gamma_n \leqq \lambda < \gamma_{n+1}$, si n est un nombre impair. Deux suites croissantes $\{\gamma_{2n+1}\}_{n=0}^{\omega}$, $\{\gamma_{2n}\}_{n=1}^{\omega}$ existent ayant α pour limite pour lesquelles $i_{\gamma_{2n+1}} = 0$, $i_{\gamma_{2n}} = 1$. Alors, $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}_3$.

Désignons par le symbole f l'application de l'ensemble X_u en ensemble $\mathfrak{S}_3$ définie plus haut. Nous montrerons que f est une application sur l'ensemble $\mathfrak{S}_3$. — Soit $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}_3$. Soit α_1 le type d'ordre de l'ensemble de tous les chiffres 1 précédant le premier chiffre 0 de la suite $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ étant définis, désignons par le symbole $1 + \alpha_n$ le type d'ordre de l'ensemble maximum de chiffres égaux consécutifs dont le premier est $i_{\alpha_1+1+\alpha_2+\dots+1+\alpha_{n-1}}$. Je dis que la suite $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ est l'élément de l'ensemble X_u qui est appliqué sur $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha)$ par f. Si l'on pose $\gamma_n = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_n$, on a la relation $\lim \gamma_n = \alpha$; puis, $i_\lambda = 0$ pour $\gamma_n \leqq \lambda < \gamma_{n+1}$, si n est

---

[4]) *F. Bernstein*: Untersuchungen aus der Mengenlehre, Math. Ann. **61** (1905).
[5]) L. c. p. 72, footnote [5]).

un nombre impair et $i_\lambda = 1$, si n est un nombre pair d'après la définition des nombres α_n. Alors, $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) = f(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots)$.

L'application f conserve les relations d'ordre entre les éléments correspondants. Soit $x, y \in X_u$, $x < y$, $x = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, $y = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$, $I_{x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) = f(x)$, $I_{y_0 y_1 \dots y_\lambda \dots}$ $(\lambda < \beta) = f(y)$. Il existe un indice k de façon que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i < k$, tandis que $\alpha_k < \beta_k$ pour k impair ou $\alpha_k > \beta_k$ pour k pair. Les éléments des suites $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$, $y_0 y_1 \dots$ $\dots y_\lambda \dots$ $(\lambda < \beta)$ sont égaux pour $\lambda < \delta$, où $\delta = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_k$ dans le premier cas et $\delta = \beta_1 + 1 + \beta_2 + \dots + 1 + \beta_k$ dans le second. On a les relations $x_\delta = x_{\alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_k} = 0$, $y_\delta = 1$ dans le premier cas, les relations $y_\delta = y_{\beta_1 + 1 + \beta_2 + \dots + 1 + \beta_k} = 1$, $x_\delta = 0$ dans le second ce qui entraîne $f(x) < f(y)$. Il suit de là que les ensembles X_u et $\mathfrak{S}_3$ sont semblables.

En remplissant des lacunes de $\mathfrak{S}_3$, on obtient $\mathfrak{P}_3$, en remplissant des lacunes de X_u, on obtient l'ultracontinu de Bernstein. La similitude de X_u et $\mathfrak{S}_3$ entraîne celle de l'ultracontinu et du continu $\mathfrak{P}_3$.

Le système $\mathfrak{S}_2$ qui définit le continu $\mathfrak{P}_2$ est le système de tous les intervalles $I_{x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha)$ d'ordres minimum α présentant la propriété suivante: L'ensemble des indices $\lambda < \alpha$ pour lesquels $x_\lambda = 0$ est infini. Une construction du continu $\mathfrak{P}_2$ analogue à celle de Bernstein peut être facilement indiquée.

Théorème 1.2. *Soit B le continu obtenu de l'ensemble de toutes les suites de type ω formées de nombres ordinaux de la classe I et II et ordonnées d'après le principe de premières différences en remplissant ses lacunes. — Thèse: B est semblable au continu $\mathfrak{P}_2$.*

Démonstration: Désignons par le symbole X l'ensemble de toutes les suites de type ω formées de nombres ordinaux de la classe I et II et ordonnées d'après le principe de premières différences. Soit $x = \alpha_1 \alpha_2 \dots$ $\dots \alpha_n \dots \in X$. Posons $\gamma_n = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_n$, $\alpha = \lim \gamma_n$. Soit $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$ une suite transfinie formée de chiffres 0 et 1 dans laquelle $i_{\gamma_n} = 0$, $i_\lambda = 1$ pour $\lambda \neq \gamma_n$. L'ensemble des indices pour lesquels $i_\lambda = 0$ est alors infini, d'où il suit $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}_2$.

Désignons par le symbole f l'application de l'ensemble X en ensemble $\mathfrak{S}_2$ définie plus haut. Nous montrerons que f est une application sur l'ensemble $\mathfrak{S}_2$. — Soit $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) \in \mathfrak{S}_2$. Soit α_1 le type d'ordre de l'ensemble de tous les chiffres 1 précédant le premier chiffre 0; soit α_n le type d'ordre de l'ensemble de tous les chiffres 1 entre le $n - 1$-ième et n-ième chiffre 0 de la suite $i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$. Je dis que la suite $\alpha_1 \alpha_2 \dots$ $\dots \alpha_n \dots$ est l'élément de l'ensemble X qui est appliqué sur $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha)$ par f. Si l'on pose $\gamma_n = \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_n$, on a la relation $\lim \gamma_n = \alpha$; puis $i_{\gamma_n} = 0$, $i_\lambda = 1$ pour $\lambda \neq \gamma_n$ d'après la définition des nombres α_n. Alors, $I_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ $(\lambda < \alpha) = f(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots)$.

L'application f conserve les relations d'ordre entre les éléments correspondants. Soit $x, y \in X$, $x < y$, $x = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, $y = \beta_1\beta_2 \dots \dots \beta_n \dots$, $I_{x_0x_1\dots x_\lambda\dots}$ $(\lambda < \alpha) = f(x)$, $I_{y_0y_1\dots y_\lambda\dots}$ $(\lambda < \beta) = f(y)$. Il existe un indice k de façon que $\alpha_i = \beta_i$ pour $i < k$, tandis que $\alpha_k < \beta_k$. Les éléments des suites $x_0x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$, $y_0y_1 \dots y_\lambda \dots$ $(\lambda < \beta)$ sont égaux pour $\lambda < \alpha_1 + 1 + \alpha_2 + \dots + 1 + \alpha_k$, tandis que $x_{\alpha_1+1+\alpha_2+\dots+1+\alpha_k} = 0$, $y_{\alpha_1+1+\alpha_2+\dots+1+\alpha_k} = 1$ ce qui entraîne $f(x) < f(y)$. Il suit de là que les ensembles X et $\mathfrak{S}_2$ sont semblables.

En remplissant des lacunes de $\mathfrak{S}_2$, on obtient $\mathfrak{P}_2$, en remplissant des lacunes de X, on obtient le continu B. La similitude de $\mathfrak{S}_2$ et de X entraîne celle de $\mathfrak{P}_2$ et de B.

Une construction des autres continus $\mathfrak{P}_k$ analogue à celle de Bernstein peut être aussi indiquée. Il existe toujours un sous-ensemble $\mathfrak{R}_k$ dense en $\mathfrak{S}_k$ de puissance $2^{\aleph_0}$ et une application biunivoque de $\mathfrak{R}_k$ sur l'ensemble X de toutes les suites de type ω formées de nombres ordinaux de la classe I et II. Alors, on peut ordonner l'ensemble X de façon que X et $\mathfrak{R}_k$ deviennent semblables. En remplissant des lacunes de X, on obtient le continu B semblable à $\mathfrak{P}_k$.

La loi d'ordination de B est très compliquée dans tous les autres cas excepté $\mathfrak{P}_1$.

2.

Lemme. *Soit C un continu ordonné. Soit C^ω l'ensemble de toutes les suites de type ω formées d'éléments du continu C et ordonnées d'après le principe de premières différences. — Thèse: C^ω est un continu ordonné.*

Démonstration: Soit $x = x_0x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \omega)$ un élément de C^ω. La suite $x_0x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha < \omega)$ sera appelée segment d'ordre α de l'élément x. Si $x_0x_1 \dots x_\lambda \dots$ $(\lambda < \omega) < y_0y_1 \dots y_\lambda \dots$ $(\lambda < \omega)$ étaient des éléments consécutifs de C^ω, il existerait un indice $\delta < \omega$ tel que $x_\lambda = y_\lambda$ pour $\lambda < \delta$ et $x_\delta < y_\delta$. Les éléments $x_\delta < y_\delta$ seraient consécutifs dans C ce qui est absurde. Alors, l'ensemble C^ω est dépourvu de sauts.

On peut remarquer encore que toute coupure du continu C — les coupures $C \cup \emptyset$ et $\emptyset \cup C$ inclus — définit un seul élément.

Une coupure de l'ensemble C^ω soit donnée. L'ensemble de tous les segments d'ordre 1 est semblable à C. Nous construirons une section commençante et une section finissante de l'ensemble de ces segments de façon que la section finissante contient les segments de tous les éléments de la section finissante de la coupure donnée, la section commençante les segments de tous les éléments de la section commençante. Deux cas sont à distinguer: 1. La section commençante et finissante ont un élément commun. 2. La section commençante et finissante n'ont aucun élément commun. Dans le deuxième cas, la décomposition de l'ensemble des segments est une coupure et, l'ensemble des segments d'ordre 1 étant un continu, définit un seul élément. Dans les deux cas, un segment caractéristique $\bar{x}_0$ d'ordre 1 existe qui est ou bien l'élément commun de deux sections ou bien le dernier élément de la section commençante ou bien le premier élément de la section finissante. Nous pouvons continuer par l'induction: Supposons $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ définis. Considérons l'ensemble de tous les segments $x_0x_1 \ldots x_n$ où $x_k = \bar{x}_k$ pour $k < n$. Cet ensemble est semblable à C. Nous construirons la section finissante de l'ensemble de ces segments composée de segments de tous les éléments de la section finissante de la coupure donnée et la section commençante composée de segments de tous les éléments de la section commençante. Comme ci-dessus, cette construction définit un segment caractéristique d'ordre $n + 1$ $\bar{x}_0\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}\bar{x}_n$ qui est ou bien l'élément commun des deux sections ou bien le dernier élément de la section commençante ou bien le premier élément de la section finissante.

L'élément $\bar{x}_0\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$ de C^ω est ou bien le dernier élément de la section commençante ou bien le premier de la section finissante de la coupure donnée. Par exemple, s'il appartenait à la section finissante et s'il y existait un élément $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$ antérieur à lui, il existerait un indice $\delta < \omega$ tel que $x_\lambda = \bar{x}_\lambda$ pour $\lambda < \delta$, $x_\delta < \bar{x}_\delta$. Or ceci est impossible, parce que la définition de $\bar{x}_\delta$ entraîne $\bar{x}_0\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_\delta \leqq \bar{x}_0\bar{x}_1 \ldots \ldots \bar{x}_{\delta-1}x_\delta$, c'est-à-dire $\bar{x}_\delta \leqq x_\delta$. Alors, l'ensemble C^ω est dépourvu de lacunes.

Maintenant, il faut énoncer les définitions suivantes:

Le point de $\mathfrak{P}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ est dit de première espèce, s'il s'agit du premier ou du dernier élément de $\mathfrak{P}_k$ ou bien si son caractère est égal à c_{00}. Les autres points de $\mathfrak{P}_k$ sont appelés points de seconde espèce.

Je dis que l'élément $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$ de $\mathfrak{P}_k^\omega$ présente la propriété α, s'il existe un indice $p < \omega$, pour lequel x_p est de seconde espèce. $x = x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$ étant un élément quelconque de $\mathfrak{P}_k^\omega$ présentant la propriété α, nous désignons par p l'indice minimum, pour lequel x_p est de seconde espèce. Tout point $z_0z_1 \ldots z_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$ de $\mathfrak{P}_k^\omega$ tel que $z_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda \leqq p$ présente aussi la propriété α. Nous disons que l'intervalle $I'_{x_0x_1\ldots x_p}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $y_0y_1 \cdots y_\lambda \cdots (\lambda < \omega)$ de $\mathfrak{P}_k^\omega$ tels que $y_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda \leqq p$, présente la propriété α.

Désignons par le symbole $\mathfrak{S}'_k$ le système de tous les intervalles $I'_{x_0x_1\ldots x_p} \subset \mathfrak{P}_k^\omega$ d'ordres minimum $p + 1$ présentant la propriété α. $\mathfrak{S}'_k$ est un système disjoint d'intervalles de $\mathfrak{P}_k^\omega$. Supposons, par contre, que $I'_{i_0i_1\ldots i_\lambda\ldots}$ $(\lambda \leqq p)$, $I'_{j_0j_1\ldots j_\lambda\ldots}$ $(\lambda \leqq p')$ sont deux éléments distincts de $\mathfrak{S}'_k$ ayant un point commun, à savoir $x_0x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega)$. Soit $p \leqq p'$; il en

[6]) Le lecteur trouvera, dans le travail de *M. Novák* (pour $k = 1, 2, \ldots, 6$) et de *M. Mišík* (pour $k = 7$), l'exposé d'importantes propriétés des continus ordonnés $\mathfrak{P}_k$. Je suppose la connaissance des définitions et de certaines propriétés des continus $\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_7$.

résulte $x_\lambda = i_\lambda$ pour $\lambda \leqq p$ ce qui entraîne que x_p est de seconde espèce. En même temps, nous avons $x_\lambda = j_\lambda$ pour $\lambda \leqq p'$; la minimalité de p' implique $p = p'$, $i_\lambda = j_\lambda$ pour $\lambda \leqq p$. Alors, les deux intervalles sont identiques contrairement à l'hypothèse.

Observons que les intervalles de $\mathfrak{S}'_k$ sont fermés.

Désignons par le symbole $\mathfrak{P}'_k$ le système dont les éléments sont 1. tous les intervalles fermés $y = I'_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ $(\lambda \leqq p) \in \mathfrak{S}'_k$ et 2. tous les sous-ensembles $(x) \subset \mathfrak{P}^\omega_k - \mathbf{U}\mathfrak{S}'_k$ composés d'un seul point, $\mathbf{U}\mathfrak{S}'_k$ étant l'ensemble de tous les points $x \in \mathfrak{P}^\omega_k$ qui appartiennent à l'un au moins des intervalles $I' \in \mathfrak{S}'_k$.

Théorème 2.1. $\mathfrak{P}'_k$ *est un continu ordonné de puissance* $2^{\aleph_0}$.

Démonstration: $\mathfrak{P}'_k$ est un continu ordonné d'après le théorème 1 de M. Novák et d'après le lemme. La puissance de $\mathfrak{P}'_k$ est au moins égale à celle de $\mathfrak{P}_k$, c'est-à-dire à $2^{\aleph_0}$; elle est au plus égale à celle de $\mathfrak{P}^\omega_k$, c'est-à-dire à $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Désignons par 0 le premier, par 1 le dernier élément de $\mathfrak{P}_k$. Désormais, nous représenterons un intervalle-point de $\mathfrak{P}'_k$, $I' \in \mathfrak{S}'_k$, $I' = I'_{i_0 i_1 \ldots i_p}$ par la suite $i_0 i_1 \ldots i_p 000 \ldots$

Theorème 2.2. *Soit* $x = x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ *un point de* $\mathfrak{P}'_k$. *S'il existe un indice minimum* $n < \omega$ *tel que* $x_n \neq 0$ *et* $x_\lambda = 0$ *pour* $\lambda > n$ *ou tel que* $x_n \neq 1$ *et* $x_\lambda = 1$ *pour* $\lambda > n$, *le caractère du point* x *de* $\mathfrak{P}'_k$ *est égal à celui du point* x_n *de* $\mathfrak{P}_k$. *Le premier et le dernier point de* $\mathfrak{P}'_k$ *n'ont pas de caractère, le caractère des autres points est égal à* c_{00}.

Démonstration: Soit $x = x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ un point de $\mathfrak{P}'_k$; désignons par ${}_\mu y = {}_\mu y_0 {}_\mu y_1 \ldots {}_\mu y_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega,\ \mu < \omega)$ le point de $\mathfrak{P}'_k$ tel que ${}_\mu y_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda < \mu$, ${}_\mu y_\lambda = 0$ pour $\lambda \geqq \mu$. Désignons par ${}_\mu z = {}_\mu z_0 {}_\mu z_1 \ldots {}_\mu z_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega,\ \mu < \omega)$ le point tel que ${}_\mu z_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda < \mu$, ${}_\mu z_\lambda = 1$ pour $\lambda \geqq \mu$. Si x_λ n'est pas égal à 0 ou à 1 à partir d'un certain indice, $\{{}_\mu y\}^\omega_{\mu=1}$ et $\{{}_\mu z\}^\omega_{\mu=1}$ sont des suites dénombrables qui ne sont pas stationnaires[7]) et qui tendent vers le point x du continu $\mathfrak{P}'_k$, la première étant non décroissante, la seconde non croissante. Alors, le caractère du point x est égal à c_{00}.

Si tout x_λ est égal à 0 ou à 1 à partir d'un certain indice et s'il ne s'agit ni du premier ni du dernier élément de $\mathfrak{P}'_k$, il existe un indice n tel que $x_n \neq 0$, $x_\lambda = 0$ pour $\lambda > n$ ou bien $x_n \neq 1$, $x_\lambda = 1$ pour $\lambda > n$.

Si x_n est de première espèce, définissons, dans le premier cas, une suite dénombrable $\{x^\mu\}^\omega_{\mu=n+1}$ en posant $x^\mu = x^\mu_0 x^\mu_1 \ldots x^\mu_\lambda \ldots$ $(n + 1 \leqq$

---

[7]) Je dis que la suite $\{a_\mu\}^\omega_{\mu=1}$ est stationnaire, s'il existe un indice $n_0 < \omega$ tel que la relation $a_\lambda = a_{\lambda'}$ se présente pour tous λ, λ', pour lesquels $n_0 \leqq \lambda < \omega$, $n_0 \leqq \lambda' < \omega$.

$\leq \mu < \omega$, $\lambda < \omega$), $x^\mu_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda \neq \mu$, $x^\mu_\mu = 1$ pour $\mu > n$. La suite $\{x^\mu\}^\omega_{\mu=n+1}$ converge vers le point x de $\mathfrak{P}'_k$; elle est décroissante et dénombrable. — x_n étant différent de 0, il existe une suite dénombrable et croissante $\{^\mu x_n\}^\omega_{\mu=1}$ formée d'éléments de $\mathfrak{P}_k$ et convergente vers le point x_n. La suite $\{x_0 x_1 \ldots {}^\mu x_n 000 \ldots\}^\omega_{\mu=1}$ tend vers le point x de $\mathfrak{P}'_k$, elle est dénombrable et croissante. Alors, le caractère du point x de $\mathfrak{P}'_k$ est égal à c_{00}. Pareillement, on démontre cette thèse dans le second cas, où $x_n \neq 1$, $x_\lambda = 1$ pour $\lambda > n$, x_n étant un point de première espèce du continu $\mathfrak{P}_k$.

Reste à considérer le cas, où x_n est de seconde espèce, $x_\lambda = 0$ pour $\lambda > n$ (le cas, où $x_\lambda = 1$ pour $\lambda > n$ est exclu par la représentation choisie des intervalle-points de $\mathfrak{P}'_k$). L'ensemble de tous les $y < x$ est confinal avec l'ensemble de tous les $y < x$ pour lesquels $y \in J_{x_0 x_1 \ldots x_{n-1}} \subset \mathfrak{P}'_k$, parce que x est un point intérieur de cet intervalle. Ici et ci-après, je désigne par $J_{x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots}$ $(\lambda < \alpha) \subset \mathfrak{P}'_k$ l'ensemble de tous les éléments $u_0 u_1 \ldots u_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ tels que $u_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda < \alpha < \omega$, les éléments de $\mathfrak{P}'_k$ étant représentés par la règle choisie. L'ensemble de tous les $y < x$, $y \in J_{x_0 x_1 \ldots x_{n-1}}$ peut être écrit sous la forme $\bigcup\limits_{t < x_n} J_{x_0 x_1 \ldots x_{n-1} t}$. D'après une remarque de Hausdorff[8]), l'ensemble $\bigcup\limits_{t < x_n} J_{x_0 x_1 \ldots x_{n-1} t}$ est confinal avec l'ensemble de tous les $t \in \mathfrak{P}_k$, $t < x_n$. Pareillement, l'ensemble de tous les $z > x$ est coïnitial avec l'ensemble de tous les $t \in \mathfrak{P}_k$, $t > x_n$. Alors, les caractères du point x de $\mathfrak{P}'_k$ et du point x_n de $\mathfrak{P}_k$ sont égaux.

Théorème 2.3. *La séparabilité du continu $\mathfrak{P}'_k$ est égale à $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration: Soit $x_0 \in \mathfrak{P}_k$ de première espèce. Par conséquent, J_{x_0} est un intervalle de $\mathfrak{P}'_k$ et deux intervalles de cette sorte sont évidemment disjoints. La puissance du système de tous ces intervalles est égale à $2^{\aleph_0}$ d'après le théorème 3 de M. Novák.

Théorème 2.4. *Le continu $\mathfrak{P}'_k$ est quasihomogène.*

Démonstration: Supposons les points de $\mathfrak{P}'_k$ représentés d'après la règle choisie. Soit $x = x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$, $y = y_0 y_1 \ldots y_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$, $x, y \in \mathfrak{P}'_k$, $x < y$. Il existe un indice $\delta < \omega$ tel que $x_\lambda = y_\lambda$ pour $\lambda < \delta$, $x_\delta < y_\delta$. Aucun $x_\lambda \in \mathfrak{P}_k$ n'est de seconde espèce pour $\lambda < \delta$; sinon, on aurait $x = y$. Soit $x_\delta < c < y_\delta$ dans $\mathfrak{P}_k$, c étant de première espèce. Définissons pour $z \in \mathfrak{P}'_k$, $z = z_0 z_1 \ldots z_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ l'application f comme il suit: $f(z) = z'_0 z'_1 \ldots z'_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$, où $z'_\lambda = x_\lambda$ pour $\lambda < \delta$, $z'_\delta = c$, $z'_\lambda = z_{\lambda-\delta-1}$ pour $\lambda > \delta$. Par ce procédé, une application conforme du continu $\mathfrak{P}'_k$ sur l'intervalle $J_{x_0 x_1 \ldots x_{\delta-1} c} \subset \mathfrak{P}'_k$ est construite. Nous avons démontré que tout intervalle aux extrémités $x < y$ contient l'intervalle

---

[8]) *F. Hausdorff*: Grundzüge der Mengenlehre, 1914, p. 166.

$J_{x_0x_1\ldots x_{\delta-1}c}$ qui est semblable au continu $\mathfrak{P}'_k$ tout entier ce qui entraîne la quasihomogénéité de $\mathfrak{P}'_k$.

Théorème 2.5. *Soit $x \in \mathfrak{P}'_k$. La puissance de l'ensemble de tous les points de $\mathfrak{P}'_k$ dont le caractère est égal à celui de x est égale à $2^{\aleph_0}$; ces points forment un sous-ensemble dense en $\mathfrak{P}'_k$.*

Démonstration: D'après la démonstration du théorème 2.3, $\mathfrak{P}'_k$ contient un système d'intervalles de puissance $2^{\aleph_0}$. D'après 2.4, chacun d'eux contient au moins un point au caractère égal à celui de x. L'ensemble de ces points a la puissance au moins égale à $2^{\aleph_0}$. Cette puissance est au plus égale à $2^{\aleph_0}$ d'après 2.1, alors, elle est égale à $2^{\aleph_0}$. La deuxième partie de notre proposition résulte facilement du théorème 2.4.

Théorème 2.6. *Le continu $\mathfrak{P}_k$ est semblable à un sous-ensemble de $\mathfrak{P}'_k$.*

Démonstration: Les éléments de $\mathfrak{P}'_k$ sont représentés par des suites dénombrables de points de $\mathfrak{P}_k$. Définissons $f(x) = x000\ldots$ pour $x \in \mathfrak{P}_k$. Alors, $f(x) \in \mathfrak{P}'_k$ et f conserve la relation d'ordre.

Théorème 2.7. *Le continu $\mathfrak{P}'_k$ est semblable à un sous-ensemble de $\mathfrak{P}'_3$.*

Démonstration: Soit x un point quelconque de $\mathfrak{P}_k$ au caractère c_{00}; x est un intervalle-point $I_{i_0i_1\ldots i_\lambda\ldots}$ $(\lambda < \alpha)$. Si le développement $i_0i_1\ldots$ $\ldots i_\lambda\ldots$ $(\lambda < \alpha)$ jouit de la propriété (c), faisons correspondre au point x le point $y = I_{i_0i_1\ldots i_\lambda\ldots}$ $(\lambda < \alpha)$ de $\mathfrak{P}_3$. Si le développement ne présente pas la propriété (c), faisons correspondre au point x le point $y = I_{x_0x_1\ldots x_\lambda\ldots}$ $(\lambda < \alpha + \omega)$ de $\mathfrak{P}_3$ où $x_\lambda = i_\lambda$ pour $\lambda < \alpha$, $x_\alpha = x_{\alpha+2} = \ldots = x_{\alpha+2n} = \ldots = 0$, $x_{\alpha+1} = x_{\alpha+3} = \ldots = x_{\alpha+2n+1} = \ldots = 1$. Faisons ensuite correspondre aux extrémités de $\mathfrak{P}_k$ les extrémités de $\mathfrak{P}_3$. Alors, à tout point de première espèce de $\mathfrak{P}_k$ correspond un point de première espèce de $\mathfrak{P}_3$.

Un point de seconde espèce de $\mathfrak{P}_k$ a au moins un développement qui ne jouit pas de propriété (c); faisons lui correspondre le point y de seconde espèce de $\mathfrak{P}_3$ ayant le même développement.

Nous avons construit une application du continu $\mathfrak{P}_k$ sur un sous-ensemble du continu $\mathfrak{P}_3$; à un point x de première espèce correspond un point y de première espèce de $\mathfrak{P}_3$; pareillement, à un point x de seconde espèce correspond un point y de seconde espèce de $\mathfrak{P}_3$. Cette application réalise évidemment une similitude.

Les éléments de $\mathfrak{P}'_k$ sont représentés par des suites dénombrables de points de $\mathfrak{P}_k$. Soit $x = x_0x_1\ldots x_\lambda\ldots$ $(\lambda < \omega)$, $x \in \mathfrak{P}'_k$. Ou bien tous les x_λ sont de première espèce dans $\mathfrak{P}_k$ pour $\lambda < \omega$; ou bien un $p < \omega$ minimum existe tel que x_λ est de première espèce dans $\mathfrak{P}_k$ pour $\lambda < p$, x_p est de seconde espèce dans $\mathfrak{P}_k$ et $x_\lambda = 0$ dans $\mathfrak{P}_k$ pour $p < \lambda < \omega$. Si nous faisons correspondre les points y_λ de $\mathfrak{P}_3$ aux points x_λ de $\mathfrak{P}_k$ par le procédé précédent, $y_0 y_1 \ldots y_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ est un point de $\mathfrak{P}'_3$. Car ou bien $y_0 y_1 \ldots y_\lambda \ldots$ $(\lambda < \omega)$ est une suite de points de première espèce de $\mathfrak{P}_3$; ou bien tous les y_λ sont de première espèce dans $\mathfrak{P}_3$ pour $\lambda < p$, y_p est de seconde espèce dans $\mathfrak{P}_3$ et $y_\lambda = 0$ dans $\mathfrak{P}_3$ pour $p < \lambda < \omega$. Un seul point $f(z) \in \mathfrak{P}'_3$ correspond à tout point $z \in \mathfrak{P}'_k$. Cette correspondence réalise évidemment une similitude.