Czechoslovak Mathematical Journal

Wacław Sierpiński

Sur un problème de M. J. Novák

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 2, 97–101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100020

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1(76) 1951

SUR UN PROBLÈME DE M. J. NOVÁK

W. SIERPIŃSKI, Warszawa.

(Reçu le 19 Avril 1951.)

L'auteur démontre l'équivalence de deux problèmes concernant les suites transfinies des ensembles infinis de nombres naturels.

M. J. NOVÁK m'a posé le problème N suivant. A et B étant deux ensembles donnés, écrivons $B \supset *A$ pour exprimer que $A - B$ est un ensemble fini.

Problème N. *Existe-t-il ou non une suite transfinie du type* Ω, $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$, *des ensembles infinis* N_ξ *de nombres naturels tels que* $N_\xi \supset *N_\eta$ *pour* $\xi < \eta < \Omega$ *et qu'il n'existe aucun ensemble infini* A *de nombres naturels tel que* $N_\xi \supset *A$ *pour* $\xi < \Omega$?

Or, en 1947 NICOLAS LUSIN a posé le problème qu'on peut énoncer ainsi:

Problème L. *Existe-t-il ou non une suite transfinie du type* Ω *d'ensembles infinis de nombres naturels,* $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ *telle que* $N_\xi \supset *N_\eta$ *pour* $\xi < < \eta < \Omega$ *et que les ensembles* $N_\xi - N_\eta$ *sont tous infinis pour* $\xi < \eta < \Omega$, *et qu'il n'existe aucun ensemble infini* A *de nombres naturels tel que* $N_\xi \supset *A$ *et que les ensembles* $N_\xi - A$ *soient infinis pour* $\xi < \Omega$?[1])

Dans la première partie de ce travail je démontrerai que *les problèmes* N *et* L *sont équivalents.*

Dans le volume 35 des Fundamenta Mathematicae, p. 148, en admettant l'hypothèse du continu, j'ai démontré que la réponse au problème L est positive. Vu l'équivalence des problèmes N et L il en résulte que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la réponse au problème N est positive. Dans la deuxième partie de ce travail je donnerai une démonstration directe de la proposition que l'hypothèse du continu entraîne la réponse positive au problème N.

1. Admettons que la réponse au problème L est positive et soit $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ une suite transfinie satisfaisant aux conditions de ce problème. Supposons qu'il existe un ensemble infini A de nombres naturels tel que $N_\xi \supset *A$ pour $\xi < \Omega$. Soit ξ un nombre ordinal $< \Omega$: on a donc $\xi < \xi + + 1 < \Omega$ et, d'après la propriété de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$, l'ensemble $N_\xi -$

[1]) Izvestia de l'Académie des Sciences de l'URSS **II** (1947), p. 410.

$- N_{\xi+1}$ est infini et, vu que $N_{\xi+1} \supset {}^*A$, l'ensemble $A - N_{\xi+1}$ est fini. Or, vu que

$$P - Q \supset (P - R) - (Q - R) \tag{1}$$

quels que soient les ensembles P, Q et R, on trouve

$$N_\xi - A \supset (N_\xi - N_{\xi+1}) - (A - N_{\xi+1})$$

et il en résulte que l'ensemble $N_\xi - A$ est infini pour $\xi < \Omega$, contrairement à l'hypothèse que la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ satisfait aux conditions du problème L.

Il n'existe donc aucun ensemble infini A de nombres naturels tel que $N_\xi \supset {}^*A$ pour $\xi < \Omega$. La suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ satisfait donc aux conditions du problème N.

Nous avons ainsi démontré que la réponse positive au problème L entraîne la réponse positive au problème N.

Admettons maintenant que la réponse au problème N est positive et soit $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ une suite transfinie satisfaisant aux conditions du problème N.

Soit α un nombre ordinal $< \Omega$. Si tous les ensembles $N_\alpha - N_\xi$ étaient finis pour $\alpha < \xi < \Omega$, alors, vu que, d'après la propriété de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$, les ensembles $N_\alpha - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \alpha$, les ensembles $N_\alpha - N_\xi$ seraient finis pour $\xi < \Omega$, ce qui contredit (pour $A = N_\alpha$) aux propriétés de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$. Il existe donc pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un nombre ordinal β tel que $\alpha < \beta < \Omega$ et que l'ensemble $N_\alpha - N_\beta$ est infini.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de nombres ordinaux $< \Omega$ comme il suit.

Posons $\alpha_1 = 1$. Soit maintenant λ un nombre ordinal donné, $1 < \lambda < \Omega$, et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres ordinaux α_ξ, où $\xi < \lambda$. Si λ est un nombre ordinal de 1^{re} espèce, $\lambda = \zeta + 1$, on a $\zeta < \lambda < \Omega$ et, comme nous avons démontré, il existe un nombre ordinal β tel que $\alpha_\zeta < \beta < \Omega$ et que l'ensemble $N_{\alpha_\zeta} - N_\beta$ est infini: soit α_λ le plus petit de tels nombres β. Si λ est un nombre ordinal de seconde espèce, soit α_λ le plus petit nombre ordinal $> \alpha_\xi$ pour $\xi < \lambda$.

La suite transfinie $\{\alpha_\xi\}$ est ainsi définie, par l'induction transfinie et, comme on le voit sans peine, on a $\alpha_\xi < \alpha_\eta < \Omega$ pour $\xi < \eta < \Omega$. Je dis que les ensembles $N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta}$ sont infinis pour $\xi < \eta < \Omega$.

En effet, si η est un nombre de 1^{re} espèce, $\eta = \zeta + 1$, il résulte de la définition du nombre α_η que l'ensemble $N_{\alpha_\zeta} - N_{\alpha_\eta}$ est infini, et, si $\xi < \eta$, on a $\xi \leqq \zeta$, donc $\alpha_\xi \leqq \alpha_\zeta$ et l'ensemble $N_{\alpha_\zeta} - N_{\alpha_\xi}$ est fini. Or, vu que

$$P - Q \supset (R - Q) - (R - P)$$

quels que soient les ensembles P, Q et R, on trouve

$$N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta} \supset (N_{\alpha_\zeta} - N_{\alpha_\eta}) - (N_{\alpha_\zeta} - N_{\alpha_\xi})$$

et il en résulte que l'ensemble $N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta}$ est infini.

Si η est un nombre ordinal de seconde espèce et si $\xi < \eta$, on a $\xi + 1 < \eta$ et $\alpha_\xi < \alpha_{\xi+1} < \alpha_\eta$ et l'ensemble $N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_{\xi+1}}$ est infini (d'après la définition du nombre $\alpha_{\xi+1}$) et, comme l'ensemble $N_{\alpha_\eta} - N_{\alpha_{\xi+1}}$ est fini et, d'après (1), on a

$$N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta} \supset (N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_{\xi+1}}) - (N_{\alpha_\eta} - N_{\alpha_{\xi+1}}),$$

on conclut que l'ensemble $N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta}$ est infini.

Les ensembles $N_{\alpha_\xi} - N_{\alpha_\eta}$ sont donc infinis pour $\xi < \eta < \Omega$.

Posons $M_\xi = N_{\alpha_\xi}$ pour $\xi < \Omega$. Les ensembles $M_\eta - M_\xi = N_{\alpha_\eta} - N_{\alpha_\xi}$ seront donc finis et les ensembles $M_\xi - M_\eta$ infinis pour $\xi < \eta < \Omega$.

Or, supposons qu'il existe un ensemble infini de nombres naturels A tel que les ensembles $A - M_\xi$ sont finis pour $\xi < \Omega$.

Soit λ un nombre ordinal quelconque $< \Omega$. La suite transfinie $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant croissante, il existe un nombre ordinal $\xi < \Omega$ tel que $\lambda < \alpha_\xi$ et, les ensembles $A - M_\xi = A - N_{\alpha_\xi}$ et $N_{\alpha_\xi} - N_\lambda$ étant finis, l'ensemble $A - N_\lambda \subset (A - N_{\alpha_\xi}) + (N_{\alpha_\xi} - N_\lambda)$ est fini. Les ensembles $A - N_\lambda$ seraient donc finis pour $\lambda < \Omega$, contrairement à l'hypothèse que $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est une suite satisfaisant aux conditions du problème N.

Il n'existe donc aucun ensemble infini de nombres naturels A tel que les ensembles $A - M_\xi$ soient finis pour $\xi < \Omega$.

La suite transfinie $\{M_\xi\}_{\xi<\Omega}$ satisfait donc aux conditions du problème L. Donc, si la réponse au problème N est positive, la réponse au problème L est aussi positive.

L'équivalence des problèmes N et L se trouve ainsi démontrée.

2. **Théorème.** *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω, $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$, des ensembles infinis de nombres naturels, telle que les ensembles $N_\eta - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \eta < \Omega$ et qu'il n'existe aucun ensemble infini A de nombres naturels tel que tout ensemble $A - N_\xi$ soit fini pour $\xi < \Omega$.*

Démonstration. La famille de tous les ensembles infinis de nombres naturels ayant la puissance du continu, il résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω, $\{M_\xi\}_{\xi<\Omega}$, formée de tous les ensembles infinis de nombres naturels.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω des ensembles infinis de nombres naturels comme il suit.

M_1 étant un ensemble infini de nombres naturels, il existe une suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels distincts appartenant à M_1. Posons $N_1 = \{n_1, n_3, n_5, \ldots\}$. L'ensemble $M_1 - N_1$ sera évidemment infini.

Soit maintenant α un nombre ordinal, $1 < \alpha < \Omega$, et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles infinis de nombres naturels N_ξ, où $\xi < \alpha$, et que les ensembles $N_\eta - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \eta < \alpha$ et les ensembles $M_\xi - N_\xi$ sont infinis pour $\xi < \alpha$.

Distinguons maintenant deux cas:

1. α est un nombre de première espèce, $\alpha = \beta + 1$. On a donc $\beta < \alpha$ et, d'après notre hypothèse, l'ensemble infini N_β est défini. Si l'ensemble $M_\alpha - N_\beta$ est infini, posons $N_\alpha = N_\beta$. Si l'ensemble $M_\alpha - N_\beta$ est fini, l'ensemble $M_\alpha N_\beta$ est infini et il existe une suite infinie $n_1, n_2 \ldots$ formée de nombres distincts de cet ensemble. Posons $N_\alpha = \{n_1, n_3, n_5, \ldots\}$. Dans tous les cas l'ensemble $M_\alpha - N_\alpha$ sera infini et on aura $N_\alpha \subset N_\beta$, et, les ensembles $N_\eta - N_\xi$ étant finis pour $\xi < \eta < \alpha$ et les ensembles $M_\xi - N_\xi$ étant infinis pour $\xi < \alpha$, les ensembles $N_\alpha - N_\xi \subset \subset N_\beta - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \alpha$, donc les ensembles $N_\eta - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \eta \leqq \alpha$ et les ensembles $M_\xi - N_\xi$ sont infinis pour $\xi \leqq \alpha$.

2. α est un nombre ordinal de seconde espèce. Comme $\alpha < \Omega$, il existe alors une suite infinie de nombres ordinaux croissants $\alpha_1 < \alpha_2 < < \ldots$, telle que $\alpha = \lim\limits_{k<\omega} \alpha_k$. Comme $\alpha_k < \alpha_{k+1} < \Omega$ pour $k = 1, 2, \ldots$, les ensembles $N_{\alpha_{k+1}} - N_{\alpha_k}$ sont finis pour $k = 1, 2, \ldots$ Soit n_1 un nombre de l'ensemble N_{α_1}. Or, soit k un nombre naturel > 1. L'ensemble $R_k = = (N_{\alpha_2} - N_{\alpha_1}) + (N_{\alpha_3} - N_{\alpha_2}) + \ldots + (N_{\alpha_k} - N_{\alpha_{k-1}})$ est fini et l'ensemble $N_{\alpha_k} - R_k$ est infini. Soit n_k un élément de cet ensemble distinct de $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$. Posons $P = \{n_1, n_2, \ldots\}$: Si l'ensemble $M_\alpha - P$ est infini, posons $N_\alpha = P$. Si l'ensemble $M_\alpha - P$ est fini, l'ensemble $M_\alpha P$ est infini et il existe une suite infinie de nombres naturels croissants $k_1 < < k_2 < \ldots$, telle que $n_{k_i} \in M_\alpha P$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Posons alors $N_\alpha = = \{n_{k_1}, n_{k_3}, n_{k_5}, \ldots\}$. L'ensemble $M_\alpha - N_\alpha$ sera donc infini.

Soit maintenant ξ un nombre ordinal $< \alpha$. Comme $\lim\limits_{k<\omega} \alpha_k = \alpha$, il existe un nombre naturel l tel que $\xi < \alpha_l < \alpha$, et il résulte de notre hypothèse que l'ensemble $N_{\alpha_l} - N_\xi$ est fini. Or, on a pour $k > l$:

$$N_{\alpha_k} - N_{\alpha_l} \subset (N_{\alpha_k} - N_{\alpha_{k-1}}) + (N_{\alpha_{k-1}} - N_{\alpha_{k-2}}) + \ldots + \\ + (N_{\alpha_{l+1}} - N_{\alpha_l}) \subset R_k$$

d'où $N_{\alpha_k} - R_k \subset N_{\alpha_l}$, donc, d'après $n_k \in N_{\alpha_k} - R_k$, on trouve $n_k \in N_{\alpha_l}$ pour $k > l$. Comme $k_1 < k_2 < \ldots$, on a $k_i \geqq i$ pour $i = 1, 2, \ldots$ donc $n_{k_i} \in N_{\alpha_l}$ pour $i > l$ et, comme $N_\alpha = \{n_{k_1}, n_{k_3}, n_{k_5}, \ldots\}$, on voit que l'ensemble $N_\alpha - N_{\alpha_l}$ est fini. Vu que $N_\alpha - N_\xi \subset (N_\alpha - N_{\alpha_l}) + (N_{\alpha_l} - N_\xi)$

et que, d'après $\xi < \alpha_l < \alpha$, l'ensemble $N_{\alpha_l} - N_\xi$ est fini, on conclut que l'ensemble $N_\alpha - N_\xi$ est fini (pour $\xi < \alpha$).

La suite transfinie d'ensembles $\{N_\xi\}_{\xi < \Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et les ensembles $N_\eta - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \eta < \Omega$ et les ensembles $M_\xi - N_\xi$ sont infinis pour $\xi < \Omega$.

Supposons maintenant qu'il existe un ensemble infini de nombres naturels A tel que les ensembles $A - N_\xi$ sont finis pour $\xi < \Omega$. Vu la définition de la suite $\{M_\xi\}_{\xi < \Omega}$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $A = M_\alpha$. L'ensemble $A - N_\alpha = M_\alpha - N_\alpha$ étant, comme nous savons, infini, cela contredit à l'hypothèse sur l'ensemble A.

Notre théorème est ainsi démontré.