Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Havlíček

Surfaces réglées qui sont enveloppes de sphères

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 3, (187)–197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100027`

SURFACES RÉGLÉES QUI SONT ENVELOPPES DE SPHÈRES

KAREL HAVLÍČEK, Praha.

(Reçu le 26 juin 1951.)

Le résultat principal de cet article est donné par le théorème suivant: Chaque surface réglée (engendrée par des droites réelles) qui enveloppe une famille de sphères dépendant d'un paramètre est une surface de révolution.

1. Il est bien connu qu'il existe des surfaces réglées qui sont des enveloppes d'une famille de sphères dépendant d'un paramètre. Ce sont, par exemple, les surfaces réglées de révolution. En nous bornant aux surfaces engendrées par des droites réelles, nous pouvons démontrer que cet exemple donne toutes les surfaces de cette sorte. La démonstration fait l'objet de cet article

L'idée de cette démonstration est très simple, car on connaît les scalaires au moyen desquels nous pouvons déterminer les surfaces enveloppes de sphères (c'est à dire les surfaces qui enveloppent une famille de sphères dépendant d'un paramètre) ou les surfaces réglées. Il suffit de chercher les solutions communes de deux équations différentielles (aux dérivées partielles) suivantes:[1])

$$u_{\nu\lambda\mu}u_{\alpha\beta\gamma}P^{\nu\alpha}P^{\lambda\beta}P^{\mu\gamma} = 0, \tag{1}$$

$$a_{\nu\lambda\mu}a_{\alpha\beta\gamma}h^{\nu\alpha}h^{\lambda\beta}h^{\mu\gamma} = 0, \tag{2}$$

où $u_{\nu\lambda\mu}$, $a_{\nu\lambda\mu}$, $P^{\lambda\mu}$, $h^{\lambda\mu}$ sont des tenseurs symétriques. Ces tenseurs étant convenablement choisis, l'équation (1) donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit une surface enveloppe de sphères,[2]) l'équation (2) donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface (dont la courbure totale de Gauss est négative) soit une surface réglée.[3])

Nous pouvons simplifier le calcul. Considérons la surface enveloppe

---

[1]) Je suprime le symbole de sommation d'après un indice grec *muet* ($\alpha, \beta, \ldots$ $\ldots, \lambda, \mu, \ldots = \mathrm{I}, \mathrm{II}$).

[2]) *Havlíček* [1], p. 30, théorème (3,5). (La bibliographie est placée à la fin de l'article. Les chiffres entre crochets, qui suivent les noms des auteurs se rapportent à cette bibliographie.)

[3]) *Hlavatý* [2], p. 438, théorème (2,1) ou *Havlíček* [1], p. 32.

de sphères générale. Elle satisfait certainement à l'équation (1) et notre problème se réduit à la solution de l'équation (2). Parce que les sphères en question dépendent d'un seul paramètre, notre calcul conduit finalement aux équations différentielles ordinaires (sans dérivées partielles) — voir les équations (27).

2. Désignons par x, y, z les coordonnées cartésiennes rectangulaires dans l'espace euclidien à trois dimensions. Choisissons la notation et la terminologie bien connue:[4]) un vecteur $\boldsymbol{v}$ dans cet espace aura trois composantes v_x, v_y, v_z; désignons par $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et convenons d'appeler rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ le vecteur d'extrémités $(0, 0, 0)$ et (x, y, z).

Considérons une courbe réelle C et désignons par u l'arc de cette courbe. Le rayon vecteur d'un point quelconque de cette courbe est

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) \tag{3}$$

et supposons que les composantes de ce rayon vecteur soient des fonctions réelles de l'arc u admettant des dérivées continues jusqu'au troisième ordre dans un intervalle $u_1 < u < u_2$. Nous négligeons les points singuliers de C. Désignons par $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ les vecteurs unitaires des directions de la tangente, de la normale principale et de la binormale de C. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} t_x, & t_y, & t_z \\ n_x, & n_y, & n_z \\ b_x, & b_y, & b_z \end{vmatrix} = \gamma = \pm 1 \tag{4}$$

étant orthogonal, nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} &= 1, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1, \quad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 1, \\ \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} &= 0, \quad \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{b} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Désignons par k_1, k_2 les courbures scalaires de la courbe C et supposons

$$k_1 \neq 0. \tag{6}$$

On a donc les formules de Frenet bien connues (les accents désignent les dérivées par rapport à u, c'est à dire $(\ldots)' = \dfrac{\mathrm{d}(\ldots)}{\mathrm{d}u}$, $(\ldots)'' = \dfrac{\mathrm{d}^2(\ldots)}{\mathrm{d}u^2}, \ldots$):

$$\boldsymbol{t}' = k_1 \boldsymbol{n}, \ \boldsymbol{n}' = -k_1 \boldsymbol{t} + k_2 \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{b}' = -k_2 \boldsymbol{n}. \tag{7}$$

Supposons que cette courbe C soit le lieu des centres des sphères de rayon r, où $r = r(u)$ est une fonction réelle du paramètre u admettant des dérivées continues jusqu'au troisième ordre (dans l'intervalle $u_1 < u < u_2$) et telle que

[4]) *Hlavatý* [2].

$$0 < r < \infty. \tag{8}$$

De la théorie générale des surfaces enveloppes,[5]) nous pouvons déduire les équations de la surface enveloppe de ces sphères. Si nous désignons par $\boldsymbol{R}$ le rayon vecteur de cette surface enveloppe de sphères, nous avons[6])

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{t}rr' + \varrho(\boldsymbol{n} \cos v + \boldsymbol{b} \sin v), \tag{9}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur (3), le paramètre v variant dans l'intervalle $0 \leqq v < 2\pi$, et où

$$\varrho = + r \sqrt{1 - (r')^2}, \quad \left(r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\right) \tag{10}$$

est le rayon de la caractéristique circulaire de la famille de sphères considérées. La surface (9), qui est rapportée aux paramètres u. v ($u =$ = const sont les caracteristiques circulaires, donc les lignes de courbure) n'est pas une surface de révolution, puisque par suite de l'inégalité (6) la courbe C n'est pas une droite. En résumant ces résultats auxilliaires, nous avons:

Lemme: *On peut définir chaque surface enveloppe de sphères (les surfaces de révolution exceptées) par l'équatiin* (9); *cette surface est rapportée aux paramètres u, v ($u_1 < u < u_2$, $0 \leqq v < 2\pi$), les circonférences $u =$ const forment un des systèmes de lignes de courbure de cette surface.*

Remarque. Nous ne considérons que des surfaces réelles, c'est pourquoi nous supposons

$$|r'| < 1, \tag{11}$$

c'est à dire

$$\varrho > 0. \tag{12}$$

Si l'on avait $r' = \pm 1$, donc $\varrho = 0$, la formule (9) réprésenterait seulement une courbe réelle.

3. Employons la transformation

$$v = 2 \operatorname{arctg} t, \quad t = \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1 + t^2} \neq 0, \quad (-\infty < t < +\infty).$$

L'équation (9) devient

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{t}rr' + \varrho \left[\boldsymbol{n} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \boldsymbol{b} \frac{2t}{1 + t^2}\right]. \tag{13}$$

La surface considérée est maintenant rapportée aux paramètres $\xi^I = u$,

---

[5]) Voir par exemple *Hlavatý* [2], p. 103—112.

[6]) Voir par exemple *Lilienthal* [3], p. 64.

$\xi^{II} = t$. En écrivant $\mathbf{R}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi^\lambda}$, on peut déduire de la formule (13) à l'aide des formules (7) les équations suivantes

$$\mathbf{R}_I = U\mathbf{t} + V\mathbf{n} + W\mathbf{b},$$

$$\mathbf{R}_{II} = \frac{2\varrho}{(1+t^2)^2}[-2t\mathbf{n} + (1-t^2)\,\mathbf{b}]$$

où U, V. W sont les expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} U &= 1 - (r')^2 - rr'' - \varrho k_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ V &= \varrho' \frac{1-t^2}{1+t^2} - \varrho k_2 \frac{2t}{1+t^2} - rr'k_1 \\ W &= \varrho' \frac{2t}{1+t^2} + \varrho k_2 \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Des formules (10) et (12) nous pouvons facilement déduire les identités

$$\left.\begin{aligned} \varrho\left[V\frac{1-t^2}{1+t^2} + W\frac{2t}{1+t^2}\right] &= Urr', \\ -V\frac{2t}{1+t^2} + W\frac{1-t^2}{1+t^2} &= q, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où l'on a posé

$$q = \varrho k_2 + rr'k_1 \frac{2t}{1+t^2}. \tag{16}$$

Les équations (15) permettent de calculer V et W à l'aide des expressions U et q. Toutes ces réductions faites, le premier tenseur fondamental $a_{\lambda\mu} = \mathbf{R}_\lambda \,.\, \mathbf{R}_\mu$ de la surface (13) devient [voir les formules (5)]

$$a_{I\,I} = \frac{U^2r^2}{\varrho^2} + q^2$$

$$a_{I\,II} = a_{II\,I} = \frac{2\varrho q}{1+t^2}$$

$$a_{II\,II} = \frac{4\varrho^2}{(1+t^2)^2}$$

avec le déterminant

$$A^2 = \begin{vmatrix} a_{I\,I}, & a_{I\,II} \\ a_{II\,I}, & a_{II\,II} \end{vmatrix} = \frac{4U^2r^2}{(1+t^2)^2} > 0.$$

Remarque. Nous supprimons le cas $A^2 = 0$, c'est à dire $U = 0$ [voir l'inégalité (8)]. L'équation $U = 0$ détermine l'arête de rebroussement de notre surface enveloppe de sphères,[7]) alors les points $U = 0$ ne sont que les points singuliers de la surface (13).

Désignons par ε le signe de $U \neq 0$,

$$\varepsilon = \text{signe de } U = \pm 1$$

et choisissons $A > 0$; il s'ensuit que nous pouvons écrire

$$A = \frac{2\varepsilon U r}{1 + t^2} > 0.$$

A l'aide du tenseur $a_{\lambda\mu}$ on peut construire les symboles de Christoffel $\left\{ {}^{\nu}_{\lambda\mu} \right\}$ (la connexion métrique). En écrivant, pour abréger, $U_u = \dfrac{\partial U}{\partial u}$, $q_u = \dfrac{\partial q}{\partial u}$, nous avons

$$\left\{ {}^{I}_{I\,I} \right\} = \frac{1}{U}\left[U_u + \frac{U r^2 r' r''}{\varrho^t} - \frac{r' q^2}{r} + k_1 q \frac{2t}{1 + t^2}\right]$$

$$\left\{ {}^{II}_{II\,II} \right\} = \frac{2}{U(1 + t^2)}\left[\frac{r' \varrho q}{r} - Ut\right]$$

$$\left\{ {}^{II}_{I\,II} \right\} = \left\{ {}^{II}_{II\,I} \right\} = \frac{1}{U}\left[\frac{U\varrho'}{\varrho} + \frac{r' q^2}{r} - k_1 q \frac{2t}{1 + t^2}\right]$$

$$\left\{ {}^{I}_{I\,II} \right\} = \left\{ {}^{I}_{II\,I} \right\} = \frac{2\varrho}{U(1 + t^2)}\left[k_1 \frac{2t}{1 + t^2} - \frac{r' q}{r}\right]$$

$$\left\{ {}^{II}_{I\,I} \right\} = \frac{1 + t^2}{2U\varrho}\left[U q_u - q\left(U_u + \frac{U r^2 r' r''}{\varrho^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{U^2 r^2}{\varrho^2} + q^2\right)\left(\frac{r' q}{r} - k_1 \frac{2t}{1 + t^2}\right)\right]$$

$$\left\{ {}^{I}_{II\,II} \right\} = - \frac{4 r' \varrho^2}{U r (1 + t^2)^2}.$$

Les composantes $b_{\lambda\mu}$ du deuxième tenseur fondamental de la surface (13) ont les valeurs suivantes [γ est le signe du déterminant (4)]:

$$b_{I\,I} = \frac{\varepsilon\gamma}{r}\left[q^2 - U + \frac{U^2 r^2}{\varrho^2}\right],$$

---

[7]) *Lilienthal* [3], p. 67.

$$b_{I\,II} = b_{II\,I} = \frac{2\varepsilon\gamma\varrho q}{r(1+t^2)},$$

$$b_{II\,II} = \frac{4\varepsilon\gamma\varrho^2}{r(1+t^2)^2} \neq 0.$$

Il s'ensuit

$$B^2 = \begin{vmatrix} b_{I\,I}, & b_{I\,II} \\ b_{II\,I}, & b_{II\,II} \end{vmatrix} = -\frac{4U}{(1+t^2)^2}\left[rr'' + k_1\varrho\frac{1-t^2}{1+t^2}\right].$$

Si l'on désigne par K la courbure totale de Gauss de la surface considérée, on a

$$K = \frac{B^2}{A^2} = -\frac{1}{Ur^2}\left[rr'' + k_1\varrho\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]. \tag{17}$$

Théorème 1. *Chaque surface enveloppe de sphères qui est différente d'une surface de révolution est une surface non développable.*

Démonstration. Les surfaces développables sont caractérisées par l'équation $K = 0$. Dans notre cas la formule (17) donne $rr''(1+t^2) + k_1\varrho(1-t^2) = 0$, c'est à dire

$$t^2(rr'' - k_1\varrho) + rr'' + k_1\varrho = 0. \tag{18}$$

L'équation (18) n'est que l'équation d'une courbe sur la surface considérée, car elle ne peut pas être satisfaite en tous les points de cette surface. On peut le voir immédiatement: en effet, si l'équation (18) était satisfaite pour toutes les valeurs de t, on aurait $rr'' - k_1\varrho = 0$ et $rr'' + k_1\varrho = 0$, c'est à dire $rr'' = 0$ et $k_1\varrho = 0$, ce qui contredit les conditions (6) et (12).

Il résulte du théorème 1 que nous avons

$$K \neq 0, \text{ donc } B^2 \neq 0 \tag{19}$$

en tous les points de la surface (13) (excepté les points d'une certaine courbe), et que le tenseur $b_{\lambda\mu}$ est du rang 2. Cela nous permet construire le tenseur $h^{\nu\lambda}$ qui est donné par les relations

$$b_{\lambda\mu}h^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu,\ \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 0 \text{ pour } \nu \neq \mu \\ 1 \text{ pour } \nu = \mu. \end{cases}$$

On a

$$h^{II} = \frac{b_{II\,II}}{B^2} \neq 0,\ h^{I\,II} = h^{II\,I} = -\frac{b_{I\,II}}{B^2},\ h^{II\,II} = \frac{b_{I\,I}}{B^2}.$$

Ecrivons

$$b_{\omega\mu\lambda} = \frac{\partial}{\partial\xi^\omega}b_{\mu\lambda} - \{^{\alpha}_{\mu\omega}\}b_{\alpha\lambda} - \{^{\alpha}_{\lambda\omega}\}b_{\mu\alpha}.$$

Ces expressions $b_{\omega\mu\lambda}$ ne sont que les composantes covariantes d'un tenseur symétrique ($b_{\omega\mu\lambda} = b_{(\omega\mu\lambda)}$).[8]) En employant les formules précédentes, nous avons dans notre cas

$$b_{III} = \frac{\varepsilon\gamma}{r^2}\left[-3r'q^2 + 4rk_1q\frac{t}{1+t^2} + U_ur + Ur' - \frac{Ur^2}{\varrho^2}(Ur' - 2rr'r'')\right]$$

$$b_{IIII} = b_{IIII} = b_{IIII} = \frac{4\varepsilon\gamma\varrho}{r^2(1+t^2)}\left[k_1r\frac{t}{1+t^2} - r'q\right]$$

$$b_{IIIII} = b_{IIIII} = b_{IIII} = -\frac{4\varepsilon\gamma r'\varrho^2}{r^2(1+t^2)^2}$$

$$b_{IIIIII} = 0.$$

4. La surface (13) est une surface enveloppe de sphères, elle satisfait alors à la condition (1). Nous pouvons le vérifier très facilement, parce que le troisième tenseur $Q_{\lambda\mu}$ de notre surface est de rang 2; ($Q_{II}Q_{IIII} - Q_{III}^2 = -\frac{\varrho^4}{r^4(1+t^2)^2} \neq 0$); l'hypothèse assurant l'existence des tenseur $P^{\lambda\mu}$ et $u_{\nu\lambda\mu}$ est alors satisfaite.[9]) Nous avons, dans notre cas, $P^{II} = 0$, $u_{IIII} = u_{IIIII} = u_{IIIIII} = 0$,[10]) l'équation (1) est alors satisfaite et il ne reste qu'à chercher les solutions de l'équation (2).

Les inégalités (19) permettent de construire le tenseur $a_{\nu\lambda\mu}$. En notant

$$K_\lambda = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial \xi^{\cdot}} = \frac{A^2}{B^2}\frac{\partial K}{\partial \xi^\lambda},$$

où K est donné par la formule (17), nous avons:[11])

---

[8]) *Hlavatý* [2], p. 336—337.

[9]) *Havlíček* [1], p. 22, 27—31. *Remarque.* Il y a une faute d'impression dans le travail cité, p. 22; les formules (1,6) doivent avoir la forme

$$P^{II} = \frac{Q_{IIII}}{(Q)^2},\quad P^{III} = P^{III} = -\frac{Q_{III}}{(Q)^2},\quad P^{IIII} = \frac{Q_{II}}{(Q)^2}.$$

[10]) Le tenseur $u_{\nu\lambda\mu}$ était construit à l'aide d'un certain tenseur symétrique $v_{\nu\lambda\mu}$ (voir *Havlíček* [1]). Mais nous pouvons calculer les composantes $u_{\nu\lambda\mu}$ à l'aide des formules du paragraphe précédent, parce qu'on peut démontrer l'égalité $v_{\nu\lambda\mu} = -b_{\nu\mu\lambda}$ (voir Mathematical Reviews, Vol. **11**, No 5, p. 396).

[11]) Pour déduire la formule pour K_I, il est utile d'écrire $rr'' + k_1\varrho\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\varrho^2}{r^2} - U$ dans la formule (17).

$$K_I = \frac{4(2Ur^2r'r'' + U_u\varrho^2)}{B^2r^2(1+t^2)^2} - \frac{2r'}{r}$$

$$K_{II} = \frac{16k_1\varrho^3t}{B^2r^2(1+t^2)^4}.$$

Les composantes $a_{\nu\lambda\mu}$ sont données de la manière suivante:

$$a_{\nu\lambda\mu} = b_{\nu\lambda\mu} - \tfrac{1}{4}[K_\nu b_{\lambda\mu} + K_\lambda b_{\nu\mu} + K_\mu b_{\nu\lambda}], \tag{20}$$

et elles satisfont aux équations[12])

$$a_{\nu\lambda\mu}h^{\lambda\mu} = 0, \ (\nu = I, II). \tag{21}$$

Désignons par S le scalaire

$$S = a_{\nu\lambda\mu}a_{\alpha\beta\gamma}h^{\nu\alpha}h^{\lambda\beta}h^{\mu\gamma},$$

alors $S = 0$ n'est que l'équation (2) qui est *la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* (avec $K < 0$) *soit une surface réglée.*[12])

Le tenseur $a_{\nu\lambda\mu}$ étant symétrique ($a_{\nu\lambda\mu} = a_{(\nu\lambda\mu)}$), nous pouvons exprimer le scalaire S à l'aide des composantes $a_{III}, a_{IIII}, a_{IIIII}, a_{IIIIII}$, ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned} S = {} & a^2_{III}(h^{II})^3 + 3[a^2_{IIII}h^{II} + a^2_{IIIII}h^{IIII}][h^{II}h^{IIII} + 2(h^{III})^2] + \\ & + a^2_{IIIIII}(h^{IIII})^3 + 6a_{III}a_{IIII}(h^{II})^2h^{III} + \\ & + 6a_{III}a_{IIIII}h^{II}(h^{III})^2 + 2a_{III}a_{IIIIII}(h^{III})^3 + \\ & + 12a_{IIII}a_{IIIII}h^{III}[h^{II}h^{IIII} + (h^{III})^2] + \\ & + 6a_{IIII}a_{IIIIII}(h^{III})^2h^{IIII} + 6a_{IIIII}a_{IIIIII}h^{III}(h^{IIII})^2. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

En employant les équations (21), nous pouvons simplifier la formule (22). Les équations (21) sont lenéaires par rapport aux composantes $a_{\nu\lambda\mu}$; il est alors facile d'éliminer a_{III} et a_{IIII} des équations (21) et (22). Cette éliminatioh est possible, parce que nous avons $h^{II} \neq 0$. Nous obtenons

$$S = \frac{4}{(h^{II})^2}[h^{II}h^{IIII} - (h^{III})^2]^2[a^2_{IIIII}h^{II} + 2a_{IIIII}a_{IIIIII}h^{III} + a^2_{IIIIII}h^{IIII}]. \tag{23}$$

Dans notre cas, la formule (20) donne

$$a_{IIIII} = -\frac{2\varepsilon\gamma\varrho^2}{B^2r^2(1+t^2)^4}\left[4Ur^2r'r'' + 2\varrho^2\left(U_u + \frac{4k_1qt}{1+t^2}\right) + \right.$$
$$\left. + B^2rr'(1+t^2)^2\right]$$

$$a_{IIIIII} = -\frac{48\varepsilon\gamma k_1\varrho^5t}{B^2r^3(1+t^2)^6}.$$

---

[12]) *Hlavatý* [2], p. 435—440.

Portons ces expressions dans la formule (23), et remplaçons U et q par les expressions correspondantes. [Voir les formules (14) et (16).] Ayant

$$h^{I\,I} h^{II\,II} - (h^{I\,II})^2 = \frac{1}{B^2},$$

on obtient

$$S = \frac{2^8 \varepsilon \gamma \varrho^8}{B^6 b^2_{II\,II} r^7 (1 + t^2)^{14}} p(t), \tag{24}$$

où $p(t)$ est un polynôme en t du 8^e degré:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{8} c_i t^i.$$

Si nous posons pour abréger

$$f = (3r'r'' + rr''')\,\varrho + 3rr'k_1[1 - (r')^2 - rr''] + \varrho^2 k_1' - 2rr'\varrho k_1^2,$$
$$g = (3r'r'' + rr''')\,\varrho - 3rr'k_1[1 - (r')^2 - rr''] - \varrho^2 k_1' - 2rr'\varrho k_1^2,$$

les coefficients c_i du polynôme $p(t)$ sont les suivants:

$$\left.\begin{aligned}
c_0 &= f^2\\
c_1 &= 4\varrho^2 k_1 k_2 f\\
c_2 &= 4\varrho^4 k_1^2 k_2^2 - 36 r^2 k_1^2 \{rr''[1 - (r')^2 - rr''] + \varrho k_1[1 - (r')^2 -\\
&\quad - 2rr''] - \varrho^2 k_1^2\} + 4[(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 4rr'\varrho k_1^2]\, f\\
c_3 &= 4\varrho^2 k_1 k_2 [f + 2(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 8rr'\varrho k_1^2]\\
c_4 &= 4[(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 4rr'\varrho k_1^2]^2 -\\
&\quad - 72 r^2 k_1^2 \{rr''[1 - (r')^2 - rr''] + \varrho^2 k_1^2\} + 8\varrho^4 k_1^2 k_2^2 + 2fg\\
c_5 &= 4\varrho^2 k_1 k_2 [g + 2(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 8rr'\varrho k_1^2]\\
c_6 &= 4\varrho^4 k_1^2 k_2^2 - 36 r^2 k_1^2 \{rr''[1 - (r')^2 - rr''] - \varrho k_1[1 - (r')^2 - 2rr''] -\\
&\quad - \varrho^2 k_1^2\} + 4[(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 4rr'\varrho k_1^2]\, g\\
c_7 &= 4\varrho^2 k_1 k_2 g\\
c_8 &= g^2
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ces coefficients c_i sont alors des fonctions continues du paramètre u dans l'intervalle $u_1 < u < u_2$.

Le théorème suivant n'est qu'un théorème auxiliaire:

Théorème 2. *Il existe des points* (u, t) *de la surface* (13), *pour lesquels le polynôme* $p(t)$ *de la formule* (24) *est différent de zéro.*

La démonstration de ce théorème se fait par l'absurde. Il suffit de démontrer que la supposition contraire

$$p(t) = 0 \tag{26}$$

(en tous les points de la surface considérée) conduit à une contradiction.

Le paramètre t varie dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, donc on déduit de l'hypothèse (26)

$$c_i = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, 8). \tag{27}$$

Ces équations sont des équations différentielles pour les fonctions r, ϱ, k_1, k_2 du paramètre u. Les équations $c_0 = 0$, $c_8 = 0$ donnent [voir les formules (25)]

$$f = 0, \quad g = 0 \tag{28}$$

Il s'ensuit $f + g = 0$, c'est à dire que

$$(3r'r'' + rr''')\,\varrho - 2rr'\varrho k_1^2 = 0. \tag{29}$$

Les équations (28) et $c_3 + c_5 = 0$ donnent

$$\varrho^2 k_1 k_2 [(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 4rr'\varrho k_1^2] = 0. \tag{30}$$

Il faut maintenant distinguer deux cas: 1. $k_2 \neq 0$ (la courbe C est une courbe gauche); 2. $k_2 = 0$ (la courbe C est une courbe plane).

1. $k_2 \neq 0$. L'équation (30) donne, en vertu des inégalités (6) et (12) $[k_1 \neq 0,\ \varrho \neq 0]$:

$$(3r'r'' + rr''')\,\varrho + 4rr'\varrho k_1^2 = 0.$$

En éliminant l'expression $(3r'r'' + rr''')\,\varrho$ entre cette équation et l'équation (29), nous obtenons

$$rr'\varrho k_1^2 = 0,$$

donc

$$r' = 0,$$

alors $r = \text{const.}$ On en déduit que l'équation $c_2 - c_6 = 0$ devient

$$r^2 \varrho k_1^3 = 0,$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses $r > 0$, $\varrho > 0$, $k_1 \neq 0$ — voir (8), (12), (6). Il s'ensuit que, dans ce cas, $(k_2 \neq 0)$, l'hypothèse (26) ne peut pas être réalisée.

2. $k_2 = 0$. Dans ce cas il résulte de l'équation $c_2 + c_6 = 0$ et des formules (28), (8), (6) que

$$rr''[1 - (r')^2 - rr''] - \varrho^2 k_1^2 = 0.$$

Par suite de cette équation et des équations (28), (29), la condition $c_4 = 0$ devient

$$(6rr'\varrho k_1^2)^2 - 36r^2\varrho^2 k_1^4 = 0.$$

En nous référant de nouveau aux inégalités $r > 0$, $\varrho > 0$, $k_1 \neq 0$, nous avons

$$(r')^2 - 1 = 0$$

ce qui est en contradiction avec la condition (11). Donc, dans ce deuxième cas, $(k_2 = 0)$, l'hypothèse (26) conduit aussi à une contradiction.

Le théorème 2 est alors démontré. Il en résulte le théorème suivant:

Théorème 3. *La surface* (13) *n'est pas une surface réglée.*

Démonstration. Laissons de coté les surfaces à points à courbure totale positive, ($K > 0$), car, dans ce cas, notre théorème est évident.[13]) Supposons alors $K \leqq 0$. La surface (13) étant une surface non développable (voir le théorème 1), la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit une surface réglée, est $S = 0$,[14]) où S est donné par la formule (24). Mais il est facile de voir que cette équation se réduit à la condition (26) qui n'est pas satisfaite ici (voir théorème 2). Il s'ensuit que la surface considérée n'est pas une surface réglée.

5. Le résumé de notre étude est alors donné par le théorème suivant:

Théorème 4. *Étant donné une surface réelle qui enveloppe une famille de sphères dépendant d'un paramètre, la condition nécessaire et suffisante pour que cette surface soit une surface réglée* (*engendrée par des droites réelles*), *est que cette surface soit une surface réglée de révolution, donc un cylindre de révolution ou un cône de révolution ou finalement un hyperboloïde de révolution réglé.*

Démonstration. En vertu de notre lemme et du théorème 3, il ne reste qu'à chercher les surfaces réglées qui enveloppent une famille de sphères considérée parmi les surfaces de révolution.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] *K. Havlíček:* Sur les surfaces enveloppes de sphères. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **74** (1949), 21—40.

[2] *V. Hlavatý:* Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. (P. Noordhof N. V., Groningen-Batavia, 1939.)

[3] *R. Lilienthal:* Vorlesungen über Differentialgeometrie, II. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1913.)

[13]) Il est bien connu que nous avons toujours $K \leqq 0$ pour les surfaces réglées, dont les génératrices sont réelles.

[14]) *Hlavatý* [2], p. 348, théorème (2,1).