Miloš Zlámal

Über asymptotische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 75–93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100180

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ÜBER ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 29. VI. 1955.)

Im ersten Teil dieser Arbeit werden asymptotische Eigenschaften der Lösungen von $y'' + a(t)\,y' + y = 0$ untersucht besonders im Fall $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$. Im zweiten Teil sind asymptotische Formeln für die allgemeine Lösung der Sturmschen Differentialgleichung angegeben und mittels derselben wird eine einfache Bedingung gefunden, sodass alle Lösungen von $y'' + f(t)\,y = 0$, wo $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$, bei $t \to \infty$ gegen Null konvergieren. Im dritten Teil wird ein gegenteiliger Fall untersucht, nämlich die Gleichung $y'' + f(t)\,y = 0$, wo positive Werte von $f(t)$ für grosse t klein sind.

I

1. Wir werden uns mit der Differentialgleichung

$$y'' + a(t)\,y' + y = 0 \tag{1}$$

beschäftigen, wo der Dämpfungskoeffizient positiv und besonders $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$ ist. Bellman bemerkt (siehe [1], S. 163), dass wenn wir (1) mit der Gleichung derselben Form vergleichen, wo der Dämpfungskoeffizient eine positive Konstante ist, man intuitiv erwarten kann, dass bei $a(t) \to \infty$ alle Lösungen von (1) gegen Null streben. Auf der anderen Seite bemerkt er, dass zu hoffen ist, eine Lösung von (1) sei annäherungsweise gleich der Lösung von

$$a(t)\,y' + y = 0\,.$$

Wenn aber $a(t) \to \infty$ so schnell, dass $\int^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$, dann konvergieren die Lösungen der vorhergehenden Gleichung nicht gegen Null und wir können also erwarten, dass (1) eine nicht gegen Null konvergierende Lösung haben werde.

Unser Ziel ist Bedingungen anzugeben hinreichend einesteils dafür, dass alle Lösungen von (1) gegen Null streben, anderenteils, dass eine gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert konvergierende Lösung existiert.

2. Im folgenden werden wir voraussetzen, dass die reelle Funktion $a(t)$ für grosse t, sagen wir im Interval $\langle t_0, \infty)$, stetig ist und nötigenfalls eine stetige Ableitung hat. Dabei werden alle weiteren Voraussetzungen das Intervall $\langle t_0, \infty)$ betrefen. Wenn es uns um die lineare Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \tag{2}$$

gehen wird, setzen wir die Stetigkeit der Koefizienten $p(t)$ und $q(t)$ voraus.

Wir nennen eine Lösung $y(t)$ nichtoszillatorisch, wenn für grosse t $y(t) \neq 0$. Im gegenteiligen Fall, wenn nämlich $y(t)$ unendlich viele Nullstellen hat, sprechen wir von einer oszillatorischen Lösung, denn dann ändert $y(t)$ unendlich vielmal sein Vorzeichen, weil dort wo $y(t) = 0$, ist $y'(t) \neq 0$. Entweder sind alle Lösungen von (1) oszillatorisch oder alle nichtoszillatorisch.

Zuerst führen wir einige Hilfssätze ein.

Hilfsatz 1. *Es sei* $a(t) \geqq$ konst > 0. *Dann ist jede Lösung von* (1) *so wie ihre Ableitung eine beschränkte Funktion und* $\int^{\infty} y'^2(t)\, dt < \infty$.

Beweis: Multiplizieren wir (1) mit $2y'(t)$ und integrieren von t_0 bis t. Wir bekommen

$$y'^2(t) + 2\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, y'^2(\tau)\, d\tau + y^2(t) = \text{konst}\,,$$

woraus der Hilfssatz unmittelbar folgt.

Hilfsatz 2. *Wenn* $y(t)$ *nichtoszillatorisch ist, dann ist für grosse* t *entweder* $y(t) > 0$ *und* $y'(t) < 0$ *oder* $y(t) < 0$ *und* $y'(t) > 0$, *d. h.* $y^2(t)$ *nimmt ab. Hat die Gleichung* (1) *nichtoszillatorische Lösungen und ist* $a(t) \geqq$ konst > 0, *so konvergiert wenigstens eine Lösung monoton gegen Null.*

Beweis. Es sei $y(t) \neq 0$ in $\langle t_1, \infty)$. Wir können $y(t) > 0$ annehmen. Dann kann $y'(t)$ für grosse t nicht positiv sein, denn in diesem Fall würde $y(t)$ wachsen, sodass $y(t) \geqq c_1 > 0$ und, wie aus (1) folgt, $y''(t) \leqq -c_1$, woraus wir durch zweifache Integration

$$y(t) \leqq -\tfrac{1}{2}c_1 t^2 + y'(t_2)\,.\,t + y(t_2) \to -\infty$$

erhalten, was nicht möglich ist. $y'(t)$ kann aber nicht mehr als einmal sein Vorzeichen ändern. Denn wenn $y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, dann gilt $y''(t_1) \neq 0$, $y''(t_2) \neq 0$ (wäre nämlich vielleicht $y''(t_1) = 0$, dann folgt aus (1) $y(t_1) = 0$ und so $y(t) \equiv 0$) und einer der Werte $y''(t_1)$ und $y''(t_2)$ muss positiv sein. Das aber steht im Widerspruch mit (1). Es ist also ersichtlich, dass für grosse t $y'(t) < 0$ gilt.

Es sei jetzt $y_1(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung und $y_1(t) > 0$, $y_1'(t) < 0$.

Wenn $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) > 0$, ist $\dfrac{1}{y_1^2(t)}$ eine beschränkte Funktion und so $\int\limits^{\infty} \dfrac{1}{y_1^2(\tau)}\, e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau < \infty$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass

$$y_2(t) = y_1(t) \int\limits_t^{\infty} \frac{1}{y_1^2(\tau)}\, e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau$$

eine linear unabhängige Lösung ist. Diese konvergiert offenbar monoton gegen Null.

Hilfsatz 3. *Hat die Gleichung* (2) *eine im Intervall* $\langle t_0, \infty)$ *von Null verschiedene Lösung, dann ist das Integral* $K(t, \tau)$, *welches durch die Anfangsbedingungen* $K(\tau, \tau) = 0$, $K'(\tau, \tau) = 1$ *bestimmt wird, positiv für* $t > \tau \geqq t_0$.

Beweis. Es sei $y(t) \neq 0$ in $\langle t_0, \infty)$. Dann gilt

$$K(t, \tau) = y(\tau) \,.\, y(t) \int\limits_{\tau}^{t} \frac{1}{y^2(u)}\, e^{-\int\limits_{\tau}^{u} p(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u\,.$$

Hilfsatz 4. *Ist* $a(t) \geqq 2$, *so sind die Lösungen von* (1) *nichtoszillatorisch, genauer sie haben höchstens eine Nullstelle in* $\langle t_0, \infty)$.

Beweis. Es wird nachgewiesen werden, dass eine gewisse Lösung $y_1(t)$ positiv im Intervall $\langle t_0, \infty)$ ist. Es sei $y_1(t)$ das Integral von (1), welches in t_0 die Anfangswerte $y_1(t_0) = e^{-t_0}$, $y_1'(t_0) = -e^{-t_0}$ annimmt. Setzen wir jetzt $v(t) = y_1(t) - e^{-t}$, *so gilt*

$$v'' + 2v' + v = -[a(t) - 2]\, y_1'(t)$$

und $v(t_0) = v'(t_0) = 0$. Wenn wir die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung mit $F(t)$ bezeichnen, bekommen wir durch Variation der Konstanten

$$v(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, \tau)\, F(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{3}$$

wo $K(t, \tau)$ das Integral von $v'' + 2v' + v = 0$ ist, welches die Anfangsbedingungen $K(\tau, \tau) = 0$, $K'(\tau, \tau) = 1$ erfüllt. Nach dem Hilfssatz 3 ist $K(t, \tau) > 0$ für $t > \tau \geqq t_0$.

Jetzt kann behauptet werden, dass $y_1(t) > 0$ und $y_1'(t) < 0$ im ganzen Intervall $\langle t_0, \infty)$ gilt. Denn $y_1(t)$ ist jedenfalls positiv und $y_1'(t)$ negativ in einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0, was aus den Anfangswerten $y_1(t_0) = e^{-t_0} > 0$, $y_1'(t_0) = -e^{-t_0} < 0$ folgt. Darum, wäre $y_1(t)$ nicht positiv und $y_1'(t)$ nicht negativ im ganzen Intervall $\langle t_0, \infty)$, so müsste ein solches $t_1 > t_0$ existieren, dass entweder $y_1(t) > 0$ in $\langle t_0, t_1\rangle$, $y_1'(t) < 0$ in $\langle t_0, t_1)$ und $y_1'(t_1) = 0$ oder $y_1'(t) < 0$ in $\langle t_0, t_1\rangle$, $y_1(t) > 0$ in $\langle t_0, t_1)$ und $y_1(t_1) = 0$ gälte. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, weil dann aus (1) $y''(t_1) < 0$ folgt, sodass $y_1(t)$ in t_1 ein relatives Maximum haben müsste. Der zweite Fall ist gleichfalls nicht möglich. Denn dann wäre $F(t) > 0$ in $\langle t_0, t_1 \rangle$, so dass (3) $v(t) \geqq 0$ in $\langle t_0, t_1 \rangle$ und speziell $y_1(t_1) \geqq e^{-t_1} > 0$ ergeben würde. Es ist also $y_1(t)$ eine nichtoszillatorische Lösung.

Ähnlicherweise lässt sich beweisen, dass (2) nichtoszillatorische Lösungen hat, wenn entweder $p(t) \geqq p_0 > 0$ und $0 < q(t) \leqq q_0$ oder $p(t) \leqq p_0 \leqq 0$ und $q(t) \leqq q_0$, wobei $p_0^2 - 4q_0 \geqq 0$.

3. Jetzt geben wir eine hinreichende Bedingung dafür an, dass alle Lösungen von (1) gegen Null konvergieren.

Satz 1. *Es sei* $a(t) \geqq$ konst > 0 *und* $a'(t)$ *von oben beschränkt. Dann konvergiert jede Lösung von* (1) *gegen Null bei* $t \to \infty$.

Beweis. Nach dem Hilfssatz 1 ist $|y(t)| \leqq c_1$, $|y'(t)| \leqq c_2$, $\int^{\infty} y'^2(t)\, \mathrm{d}t < \infty$. Wählen wir ein natürliches ungerades n so gross, dass $a'(t) \leqq \frac{1}{2}(n + 1)$ gilt. Multiplizieren wir (1) mit $y^n(t)$ und integrieren von t_0 bis t, dabei die ersten zwei Glieder partiell. Wir bekommen

$$y'(t)\, y^n(t) - n \int_{t_0}^{t} y^{n-1}(\tau)\, y'^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{n+1}\, a(t)\, y^{n+1}(t) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[1 - \frac{1}{n+1}\, a'(\tau)\right] y^{n+1}(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \text{konst}\,,$$

woraus zu ersehen ist, dass

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} y^{n+1}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq \int_{t_0}^{t} \left[1 - \frac{1}{n+1}\, a'(\tau)\right] y^{n+1}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqq c_2 c_1^n +$$

$$n c_1^{n-1} \int_{t_0}^{\infty} y'^2(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \text{konst}$$

und also

$$\int^{\infty} y^{n+1}(t)\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Weil $y^{n+1}(t)$ eine nichtnegative Funktion mit beschränkter Ableitung ist, folgt aus der Konvergenz des Integrals $\int^{\infty} y^{n+1}(t)\, \mathrm{d}t$ leicht $\lim_{t \to \infty} y^n(t) = 0$, also auch $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

4. Lassen wir in dem Satz 1 nur die Voraussetzung $a(t) \geqq$ konst > 0 gelten, so ist die Behauptung dieses Satzes nicht richtig, wie wir uns leicht überzeugen, wenn wir $a(t) = t^2 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$ nehmen. Dann ist nämlich $y_1 = e^{\frac{1}{t}}$ eine Lösung, aber $y_1(t) \to 1$. Im ersten § wurde die Möglichkeit der Vermutung erwähnt, dass alle Lösungen gegen Null streben oder eine nicht gegen Null strebende Lösung existiert je nachdem, ob das Integral $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}$ divergiert oder konvergiert. Wir beweisen jetzt die Berechtigung dieser Vermutung. Wir werden aber einige, wenn auch wenig beschränkende Voraussetzungen über die Ableitung von $a(t)$ machen müssen.

Satz 2. *Es sei* $a(t) \geqq 2$,

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} \to \infty \tag{4}$$

und

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{a'(t)}{J(t)\, a^2(t)} > -1\,. \tag{5}$$

Dann konvergiert jede Lösung von (1) *streng monoton gegen Null bei* $t \to \infty$.

Beweis. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$z'' + a(t)\, z' + q(t)\, z = 0\,, \tag{6}$$

wo

$$q(t) = -\frac{a'(t)}{a^2(t)\, J(t)} - \frac{2}{a^2(t)\, J^2(t)} + \frac{1}{J(t)}\,.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $z_1(t) = \frac{1}{J(t)} \to 0$. Die zweite linear unabhängige Lösung ist $z_2(t) = z_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{z_1^2(\tau)}\, e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau$. Offenbar gilt

$$0 < z_2(t) = z_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} J^2(\tau)\,.\, e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau < z_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} e^{J(\tau)}\,.\, e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= z_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\int\limits_{t_0}^{\tau}\left[a(s) - \frac{1}{a(s)}\right]\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

und also, weil $a(t) \geqq 2$,

$$0 < z_2(t) < z_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-{}^3/_2\tau}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

so dass auch $z_2(t) \to 0$. Darum konvergiert jede Lösung von (6) gegen Null bei $t \to \infty$.

Beachten wir noch, dass $q(t) < 1$ für grosse t gilt. Denn aus (5) folgt für grosse t $-\frac{a'(t)}{a^2(t)\, J(t)} \leqq 1 - \varepsilon$, wenn ε eine hinreichend kleine positive Zahl ist, so dass für grosse t $q(t) \leqq 1 - \varepsilon + \frac{1}{J(t)}$ und also mit Rücksicht auf (5) sicher $q(t) < 1$ gilt.

Es sei jetzt $y(t)$ ein beliebiges Integral von (1). Wegen $a(t) \geqq 2$ ist dieses nach dem Hilfssatz 4 nichtoszillatorisch, so dass wir nach dem Hilfssatz 2 für grosse t, sagen wir im Intervall $\langle t_1, \infty)$, $y(t) > 0$ und $y'(t) < 0$ annehmen können. Es sei $z(t)$ das Integral von (6), welches in t_1 dieselben Anfangswerte wie $y(t)$ hat. Wenn wir $v(t) = z(t) - y(t)$ setzen, so bekommen wir

$$v'' + a(t)\, v' + q(t)\, v = [1 - q(t)]\, y \tag{7}$$

und

$$v(t_1) = v'(t_1) = 0\,.$$

Bezeichnen wir die rechte Seite von (7) wieder mit $F(t)$, dann gilt (3). Dabei ist nach dem Hilfssatz 3 $K(t, \tau) > 0$ für $t > \tau \geqq t_1$. Wegen $q(t) < 1$ gilt ausserdem $F(t) > 0$. So folgt aus (3) $v(t) > 0$ für $t > t_1$ d. h.

$$0 < y(t) < z(t) \quad \text{für} \quad t > t_1$$

und weil $z(t) \to 0$, also $y(t) \to 0$.

Satz 3. *Es sei*

$$\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} < \infty \tag{8}$$

und

$$\frac{a'(t)}{a^2(t)} \leqq \vartheta < 1\,. \tag{9}$$

Dann hat (1) *ein gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert streng monoton konvergierendes Integral.*

Beweis. Zuerst folgt aus (8) und (9) $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$, denn (9) bedeutet, dass die Funktion $\frac{1}{a(t)}$ eine von unten beschränkte Ableitung hat, was mit (8) zusammen $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{a(t)} = 0$ nach sich zieht. Wenn wir darum $c > 1$ so wählen, dass $1 - \frac{1}{c} > \vartheta$ gilt, wird für grosse t

$$\frac{a'(t)}{a^2(t)} \leqq 1 - \frac{1}{c} - \frac{c}{a^2(t)} \tag{10}$$

bestehen.

Zum Vergleich nehmen wir jetzt die Gleichung

$$z'' + b(t)\, z' + z = 0\,, \tag{11}$$

wo

$$b(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} + \frac{c}{a(t)} + \frac{a(t)}{c}\,.$$

Wir bemerken, dass mit Rücksicht auf (10) $b(t) \leqq a(t)$ besteht und dass $z_1(t) = \exp\left(-c\int\limits_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)}\right)$ ein Integral von (11) ist.

Die Lösungen von (1) sind nichtoszillatorisch; darum ist das Integral $K(t, \tau)$ nach dem Hilfssatz 3 positiv für $t > \tau \geqq t_1$, wenn t_1 hinreichend gross ist. Es sei jetzt $y_1(t)$ ein Integral von (1), welches in t_1 dieselben Anfangswerte wie $z_1(t)$ annimmt. Setzen wir $v(t) = y_1(t) - z_1(t)$, bekommen wir

$$v'' + a(t)\,v' + v = -[a(t) - b(t)]\,z_1'(t)$$

und $v(t_1) = v'(t_1) = 0$, so dass wieder (3) besteht, wo $F(t) = -[a(t) - b(t)]\,.\,z_1'(t) \geqq 0$ und also $v(t) \geqq 0$, d. h.

$$y_1(t) \geqq z_1(t) \geqq \exp\left(-c\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{ds}{a(s)}\right) = \text{konst} > 0\,.$$

Die Behauptung des Satzes 3 lässt sich auch auf andere Art beweisen, wenn wir (9) durch $a'(t) \geqq 1$ ersetzen. Wir formulieren dies als

Satz 4. *Es sei* $a'(t) \geqq 1$ *und* $\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)} < \infty$. *Dann hat* (1) *ein gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert streng monoton konvergierendes Integral.*

Beweis. Wählen wir t_1 so gross, dass $a(t) \geqq 2$ für $t \geqq t_1$ gilt. Es sei $y_1(t)$ das durch die Anfangsbedingungen $y_1(t_1) = 2$, $y_1'(t_1) = -a(t_1)$ bestimmte Integral. Ich behaupte, $y_1(t)$ sei positiv und $y_1'(t)$ negativ im ganzen Intervall $\langle t_1, \infty)$. Setzen wir nämlich $y_1(t) = u\,.\exp\,(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t}a(s)\,ds)$, dann gilt

$$u'' + \varphi(t)\,u = 0\,, \tag{12}$$

wo $\varphi(t) = -\frac{1}{2}a'(t) - \frac{1}{4}a^2(t) + 1 < 0$ und $u(t_1) = 2$, $u'(t_1) = 0$. Daraus sehen wir nach den bekannten Resultaten über die Gleichung der Form (12) (siehe [2], II. Teil, S. 48), dass $u(t) > 0$ in $\langle t_1, \infty)$, also auch $y_1(t) > 0$ in $\langle t_1, \infty)$ gilt. Wäre $y_1'(t)$ nicht ständig negativ, so müsste ein solches $t_2 > t_1$ existieren, dass $y_1'(t) < 0$ für $t_1 \leqq t < t_2$ und $y_1'(t_2) = 0$ gälte. Dann wäre aber notwendig $y_1''(t_2) \geqq 0$, was im Widerspruch mit der Gleichung (1) steht. Es ist also auch $y_1'(t) < 0$ in $\langle t_1, \infty)$.

Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir (1) in der Form

$$y_1' + \frac{1}{a(t)}\,y_1 = -\frac{1}{a(t)}\,y_1''(t)$$

und lösen diese Gleichung als eine lineare nichthomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit rechter Seite gleich $-\frac{1}{a(t)}\,y_1''(t)$. Wenn wir das Resultat durch die partielle Integration umformen, erhalten wir

$$y_1(t) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right)\left[y_1(t_1) - \int_{t_1}^{t} \frac{1}{a(\tau)} \cdot \exp\left(\int_{t_1}^{\tau} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right) \cdot y_1''(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] =$$

$$= \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right)\left[y_1(t_1) + \frac{1}{a(t_1)}\, y_1'(t_1) - \frac{1}{a(t)}\, y_1'(t) \, . \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t} \frac{1 - a'(\tau)}{a^2(\tau)}\, y_1'(\tau) \, . \exp\left(\int_{t_1}^{\tau} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right) \mathrm{d}\tau\right] \geqq$$

$$\geqq \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right)\left[y_1(t_1) + \frac{1}{a(t_1)}\, y_1'(t_1)\right] = \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right),$$

so dass

$$y_1(t) \geqq \exp\left(-\int_{t_1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)}\right) = \text{konst} > 0 \, .$$

5. Bellman betrachtet l. c. auch die Differentialgleichung

$$\varepsilon(t)\, y'' + y' + y = 0 \, , \tag{13}$$

wo $\varepsilon(t)$ positiv in $\langle t_0, \infty)$ und $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$ ist. Man kann erwarten, sagt er, dass (13) ein Integral $y_1(t)$ asymptotisch gleich e^{-t}, $y_1 = e^{-t}[1 + o(1)]$, hat. Gleichzeitig bemerkt er aber, dass wir durch die Transformation $y = e^{-t} \, . \, v$ aus (13)

$$v'' + \left[\frac{1}{\varepsilon(t)} - 2\right] v' + v = 0 \tag{14}$$

bekommen, also eine Gleichung der Form (1), wo $a(t) = \dfrac{1}{\varepsilon(t)} - 2$, so dass $a(t) \to \infty$. Es ist also offenbar, dass das Integral $y_1(t) \sim e^{-t}$ gerade dann existieren wird, wenn (14) ein gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert strebendes Integral haben wird. Durch die Anwendung des Satzes 3 und 4 bekommen wir leicht folgendes Resultat:

Satz 5. *Es sei* $\int \varepsilon(t)\, \mathrm{d}t < \infty$ *und entweder* $\varepsilon'(t) \geqq -\vartheta > -1$ *oder* $\varepsilon'(t) \leqq -\varepsilon^2(t)$. *Dann hat* (13) *ein solches Integral* $y_1(t)$, *dass*

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}[1 + o(1)] \, .$$

Beweis. Weil $\varepsilon(t)$ positiv und das Integral $\int^{\infty} \varepsilon(t)\, \mathrm{d}t$ konvergent ist, folgt aus $\varepsilon'(t) \geqq -\vartheta$ $\lim\limits_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$. Dasselbe gilt auch im zweiten Fall, wo $\varepsilon'(t) \leqq -\varepsilon^2(t)$, wie man sich leicht durch die Integration dieser Ungleichung überzeugen kann (wir erhalten nämlich $\varepsilon(t) \leqq \left(\dfrac{1}{t - t_0 + \dfrac{1}{\varepsilon(t_0)}}\right)$. Darum ist der Koeffizient

$a(t) = \frac{1}{\varepsilon(t)} - 2$ in (14) positiv und, weil für grosse t $\frac{1}{a(t)} = \frac{\varepsilon(t)}{1 - 2\varepsilon(t)} \leqq 2\varepsilon(t)$ gilt, so ist $\int^{\infty} \frac{ds}{a(s)} < \infty$. (14) erfüllt also die erste Voraussetzung in den Sätzen 3 und 4. Es sind aber auch die anderen Voraussetzungen erfüllt, denn aus der Ungleichung $\varepsilon'(t) \leqq -\varepsilon^2(t)$ folgt $a'(t) \geqq 1$ und aus $\varepsilon'(t) \geqq -\vartheta > -1$ folgt $\frac{a'(t)}{a^2(t)} \leqq \frac{\vartheta}{[1 - 2\varepsilon(t)]^2}$ und für grosse t $\frac{a'(t)}{a^2(t)} \leqq \vartheta'$, wo $\vartheta < \vartheta' < 1$.

II

6. Jetzt werden wir uns mit der Sturmschen Differentialgleichung

$$[p(t)\, y']' + q(t)\, y = 0 \tag{15}$$

beschäftigen, wo die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ stetig für grosse t sind, sagen wir in $\langle t_0, \infty)$, und $p(t)$ positiv ist, und mit ihrem Spezialfall

$$y'' + f(t)\, y = 0\,. \tag{16}$$

Zuerst leiten wir asymptotische Formeln für die allgemeine Lösung von (15) ab. Dann zeigen wir, dass man die Voraussetzungen bedeutend einschränken kann, wenn es sich um die Gleichung der Form (16) handelt. Endlich wenden wir diese Formeln zur Untersuchung von (16) im Fall $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Es ist nämlich bekannt [3], dass, wenn $f(t)$ monoton gegen ∞ bei $t \to \infty$ strebt, eine Lösung von (16) gegen Null konvergiert und es gibt eine Reihe von Bedingungen (siehe [4], [5]), welche dazu hinreichend sind, dass alle Lösungen von (16) gegen Null konvergieren. Aus unseren asymptotischen Formeln folgt unmittelbar eine solche einfache Bedingung.

7. Satz 6. *Es sollen die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ eine stetige zweite Ableitung in $\langle t_0, \infty)$ haben, es sei $p(t)\,.\,q(t) \geqq$ konst > 0,*

$$\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{p(s)} \to \infty \tag{17}$$

und

$$[p(t)\,.\,A'(t)]' \geqq 0\,, \tag{18}$$

wo $A(t) = [p(t)\,.\,q(t)]^{-\frac{1}{4}}$. Dann gelten für die allgemeine Lösung von (15) die folgenden asymptotischen Formeln

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)\,.\,q(t)}} \left[y_0 \sin\left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}\, ds + \varphi_0 \right) + o(1) \right], \tag{19}$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{p^3(t)}} \left[y_0 \cos\left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}\, ds + \varphi_0 \right) + o(1) \right]. \tag{20}$$

Beweis. Zuerst beweisen wir

$$A'(t) \leqq 0\,, \tag{21}$$

$$\lim_{t\to\infty} p(t)\,.\,A(t)\,.\,A'(t) = 0\,, \tag{22}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)\,A^2(s)} \to \infty\,. \tag{23}$$

Aus (18) folgt, dass $p(t)\,.\,A'(t)$ nicht abnimmt. Wäre $A'(t_1) > 0$, dann gälte $p(t)\,.\,A'(t) \geqq p(t_1)\,.\,A'(t_1) = c > 0$ für $t \geqq t_1$, sodass

$$A'(t) \geqq c\,\frac{1}{p(t)}\,, \quad A(t) \geqq c \int_{t_1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} + A(t_1)$$

und mit Rücksicht auf (17) $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \infty$, was im Widerspruch mit $p(t)\,.\,q(t) \geqq$ $\geqq$ konst > 0, d. h. $A(t) \leqq$ konst, steht. Somit ist (21) bewiesen. Weiter hat $p(t)\,.\,A'(t)$ einen Grenzwert kleiner oder gleich Null, weil es eine nicht abnehmende Funktion mit nicht positiven Werten ist. Dieser Grenzwert muss Null sein, denn im Fall $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)\,.\,A'(t) = -\,d^2$, $d \neq 0$, hätten wir

$$A'(t) \leqq -\,\frac{d^2}{p(t)}\,, \quad A(t) \leqq -\,d^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} + A(t_0) \to -\,\infty\,,$$

was nicht möglich ist. Weil $A(t) \leqq$ konst, so ist auch (22) richtig. Was die Behauptung (23) betrifft, so ist

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)\,.\,A^2(s)} \geqq \text{konst} \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} \to \infty\,.$$

Jetzt führen wir in (15) eine neue unabhängige wie auch eine neue abhängige Veränderliche durch die Liouvillesche Transformation

$$x = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)\,A^2(s)}\,, \qquad y(t) = \frac{z(x)}{\sqrt[4]{p(t)\,.\,q(t)}} = A(t)\,.\,z(x)$$

ein. Vor allem wenn $t \to \infty$, dann $x \to \infty$ und umgekehrt, wie aus (23) folgt. Weiter erhalten wir nach einer leichten Umformung

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + [1 + \psi(x)]\,z = 0\,, \tag{24}$$

wo

$$\psi(x) = p(t)\,A^3(t)\,.\,[p(t)\,.\,A'(t)]'\,.$$

Wenn $\int\limits^{\infty}|\psi(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, gelten, wie bekannt (siehe [6]), für die algemeine Lösung von (24) folgende asymptotische Formeln:

$$z(x) = y_0 \sin(x + \varphi_0) + o(1)\,, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y_0 \cos(x + \varphi_0) + o(1)\,. \tag{26}$$

Aber mit Rücksicht auf (18) und (21) bekommen wir

$$\int\limits_{x_0}^{a}|\psi(x)|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0}^{a} p(t)\,A^3(t)\,.\,[p(t)\,.\,A'(t)]'\,\mathrm{d}x = \int\limits_{t_0}^{b} A(t)[p(t)\,.\,A'(t)]'\,\mathrm{d}t = \tag{27}$$
$$= [p(t)\,.\,A(t)\,.\,A'(t)]_{t_0}^{b} - \int\limits_{t_0}^{b} p(t)\,.\,A'^2(t)\,\mathrm{d}t \leqq -\,p(t_0)\,A(t_0)\,A'(t_0)\,.$$

Darum folgt (19) aus (25). Ausserdem gilt

$$y'(t) = \frac{1}{p(t)\,A(t)}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + A'(t)\,z = \frac{1}{p(t)\,A(t)}\left[\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + p(t)\,A(t)\,.\,A'(t)\,z\right],$$

woraus (20) folgt, wenn wir unter Beachtung von (22) aus (25) und (26) einsetzen.

8. Nach dem Satz 6 gelten, wenn $f(t) \geqq$ konst > 0 und $[f^{-1/4}(t)]'' \geqq 0$, für die allgemeine Lösung von (16) die Formeln

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(t)}}\left[y_0 \sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{f(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right], \tag{28}$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{f(t)}\left[y_0 \cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{f(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right]. \tag{29}$$

Diese Formeln hat schon Mattel [7] angegeben, aber unter speziellen Voraussetzungen. Wir stellen nun unter Beweis, dass wir unsere Voraussetzungen in diesem Fall noch einschränken können, dass wir nämlich die Forderung der Existenz einer stetigen nichtnegativen zweiten Ableitung von $f^{-1/4}(t)$ durch die Forderung ihrer Konvexität ersetzen können.[1]) Wir erreichen dies dadurch, dass wir die Funktion $f^{-1/4}(t)$ passend durch eine Funktion approximieren, welche eine stetige, nichtnegative zweite Ableitung hat.

Satz 7. *Es sei $f(t) \geqq$ konst > 0 und die Funktion $f^{-1/4}(t)$ sei konvex in $\langle t_0, \infty)$. Dann gelten für die allgemeine Lösung von* (16) *die Formeln* (28) *und* (29).

Beweis. Es sei $g(t)$ eine Funktion, welche eine stetige zweite Ableitung in

[1]) Auf die Möglichkeit einer solchen Einschränkung hat mich dr J. Kurzweil aufmerksam gemacht.

$\langle t_0, \infty)$ hat, $g(t) \geqq$ konst > 0 und $[g^{-1/4}(t)]'' \geqq 0$. Führen wir in (16) die Liouvillesche Transformation

$$x = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g(s)}\, \mathrm{d}s, \quad y(t) = A(t)\, z(x), \quad A(t) = g^{-1/4}(t)$$

ein, dann erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + [1 + \varphi(x)]\, z = 0 ,$$

wo

$$\varphi(x) = \frac{f(t) - g(t)}{g(t)} + \psi(t) , \quad \psi(t) = A^3(t)\, A''(t) .$$

Wenn $\int^{\infty} |\varphi|\, \mathrm{d}x = \int^{\infty} |\varphi| \sqrt{g(t)}\, \mathrm{d}t < \infty$ besteht, so gelten die Formeln (25) und (26), so dass

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{g(t)}} [y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} \sqrt{g(s)}\, \mathrm{d}s + \bar{\varphi}_0) + o(1)] , \tag{30}$$

$$y'(\tau) = \sqrt[4]{g(t)}[y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} \sqrt{g(s)}\, \mathrm{d}s + \bar{\varphi}_0) + o(1)] . \tag{31}$$

Mit Rücksicht auf $A''(t) \geqq 0$ ist aber $|\varphi(t)| \leqq \frac{1}{g(t)} |f(t) - g(t)| + \psi(t)$ und

$$\int |\varphi|\, \mathrm{d}x \leqq \int \psi\, \mathrm{d}x + \int g^{-1/2}(t)\, |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t .$$

Das Integral $\int^{\infty} \psi\, \mathrm{d}x$ ist nach (27) konvergent. (30) und (31) gelten also gewiss, wenn

$$\int^{\infty} g^{-1/2}(t)\, |f(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t < \infty .$$

Wenn $g^{-1/4}(t) = f^{-1/4}(t)[1 + o(1)]$ gilt, folgt weiter

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(t)}} [y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} \sqrt{g(s)}\, \mathrm{d}s + \bar{\varphi}_0) + o(1)]$$

und gilt weiters $\int^{\infty} |f^{1/2}(t) - g^{1/2}(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, so ist

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(t)}} [y_0 \sin (\int_{t_0}^{t} \sqrt{f(s)}\, \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)] ,$$

wo $\varphi_0 = \int_{t_0}^{\infty} [g^{1/2}(t) - f^{1/2}(t)]\, \mathrm{d}t + \bar{\varphi}_0$. Aus $g^{-1/4}(t) = f^{-1/4}(t)[1 + o(1)]$ folgt ausserdem $g^{1/4}(t) = f^{1/4}(t)[1 + o(1)]$, so dass auch

$$y'(t) = \sqrt[4]{f(t)}[y_0 \cos (\int_{t_0}^{t} \sqrt{f(s)}\, \mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)] .$$

Für den Beweis der Formeln (28) und (29) genügt es also zu zeigen, dass man die Funktion $f(t)$ mit einer solchen Funktion $g(t)$ approximieren kann, welche eine stetige zweite Ableitung mit $[g^{-1/4}(t)]'' \geqq 0$ hat und

$$\int^{\infty} g^{-1/2}(t)\, |f(t) - g(t)|\, dt < \infty\,, \quad g^{-1/4}(t) = f^{-1/4}(t)[1 + o(1)]\,,$$
$$\int^{\infty} |f^{1/2}(t) - g^{1/2}(t)|\, dt < \infty\,.$$

Bei Einführung der Bezeichnung $B(t) = g^{-1/4}(t)$ kann man diese Forderungen folgenderweise schreiben:

$$\int^{\infty} B^2(t) \left| \frac{1}{A^4(t)} - \frac{1}{B^4(t)} \right| dt < \infty\,, \tag{32_1}$$

$$B(t) = A(t)[1 + o(1)]\,, \tag{32_2}$$

$$\int^{\infty} \left| \frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right| dt < \infty\,. \tag{32_3}$$

Wir wollen aber eine Funktion $B(t) \geqq A(t)$ konstruieren, welche eine stetige nichtnegative zweite Ableitung hat und dabei

$$B(t) = A(t) \left\{ 1 + O\left[\frac{A^2(t)}{t^2}\right] \right\}. \tag{33}$$

Aus (33) folgt gewiss (32_2), denn weil $f(t) \geqq$ konst > 0, ist $A(t)$ eine beschränkte Funktion im Intervall $\langle t_0, \infty)$. Weiter ist

$$\left| \frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right| = \frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} = \frac{A(t) + B(t)}{A^2(t)\, B^2(t)}\, (B(t) - A(t)) \leqq$$
$$\leqq \frac{2}{A^3(t)}\, (B(t) - A(t)) = \frac{2}{A^2(t)} \cdot O\left[\frac{A^2(t)}{t^2}\right] \leqq \frac{\text{konst}}{t^2}\,,$$

so dass (32_3) erfüllt wird und endlich

$$B^2(t) \left| \frac{1}{A^4(t)} - \frac{1}{B^4(t)} \right| = B^2(t) \left(\frac{1}{A^2(t)} + \frac{1}{B^2(t)} \right) \left(\frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right) \leqq$$
$$\leqq 2\, \frac{B^2(t)}{A^2(t)} \left(\frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right) = 2 \left\{ 1 + O\left[\frac{A^2(t)}{t^2}\right] \right\} \left(\frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right) \leqq$$
$$\leqq \text{konst} \left(\frac{1}{A^2(t)} - \frac{1}{B^2(t)} \right),$$

so dass (32_1) erfüllt wird. Es genügt also zur Beendigung des Beweises eine Funktion $B(t)$ mit den oben erwähnten Eigenschaften zu konstruieren.

Bezeichnen wir mit J_n das Intervall $\langle t_0 + n - 1, t_0 + n \rangle$. Vor allem ist $A(t)$ eine nicht wachsende Funktion, denn wäre $A(t_2) > A(t_1)$ für $t_2 > t_1$, so folgt aus der Konvexität $A(t) \geqq A(t_1) + \dfrac{A(t_2) - A(t_1)}{t_2 - t_1}\, (t - t_1) \to \infty$. $A(t)$ ist aber eine beschränkte Funktion. Weiter ist $A(t)$ gleichmässig stetig in J_1, denn eine beschränkte, konvexe Funktion ist stetig. Darum wenn wir eine hinreichend feine Einteilung des Intervall J_1 $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k_1} = t_0 + 1$ wählen und mit $\bar{B}(t)$ die Funktion bezeichnen, deren Graph aus den die Punkte $(\tau_\nu, A(\tau_\nu))$ verbinden Strecken besteht, so wird der Unterschied $|A(t) - B(t)| = \bar{B}(t) - - A(t)$ willkürlich klein. Wählen wir die Einteilung so fein, dass

$$\bar{B}(t) - A(t) \leqq \frac{1}{2} \frac{A^3(t_0 + 1)}{(t_0 + 1)^2} .$$

$\bar{B}(t)$ ist konvex in J_1 und hat mit Ausnahme der Punkte τ_ν eine stetige, nicht negative (nämlich gleich Null) zweite Ableitung. Jetzt ersetzen wir $\bar{B}(t)$ in der Umgebung der Spitzen $(\tau_\nu, A(\tau_\nu))$, $\nu = 1, \ldots, k_1$, mit „kleinen Bogen" in solcher Weise, dass die neue Funktion eine stetige, nicht negative zweite Ableitung innerhalb J_1 habe und von $\bar{B}(t)$ sehr wenig abweiche, nämlich

$$0 \leqq B(t) - \bar{B}(t) \leqq \frac{1}{2} \frac{A^3(t_0 + 1)}{(t_0 + 1)^2} .$$

Das ist offenbar möglich. Dann gilt

$$0 \leqq B(t) - A(t) \leqq \frac{A^3(t_0 + 1)}{(t_0 + 1)^2} . \tag{34}$$

Im Intervall J_2 konstruieren wir zuerst auf dieselbe Weise $\bar{B}(t)$ so, dass

$$0 \leqq \bar{B}(t) - A(t) \leqq \frac{1}{2} \frac{A^3(t_0 + 2)}{(t_0 + 2)^2}$$

und dann ersetzen wir die Spitzen $(\tau_\nu, A(\tau_\nu))$, $\nu = 1, \ldots, k_2 - 1$, und gleichzeitig die Spitze $(t_0 + 1, A(t_0 + 1))$ mit „kleinen Bogen" so, dass die neue Funktion eine stetige, nicht negative zweite Ableitung hat und

$$0 \leqq B(t) - \bar{B}(t) \leqq \frac{1}{2} \frac{A^3(t_0 + 2)}{(t_0 + 2)^2}$$

Offenbar hat $B(t)$ eine stetige, nichtnegative zweite Ableitung in $(t_0, t_0 + 2)$ und es gilt (34) in J_1 und in J_2

$$0 \leqq B(t) - A(t) \leqq \frac{A^3(t_0 + 2)}{(t_0 + 2)^2} .$$

Auf diese Art konstruieren wir eine Funktion $B(t)$ in $\langle t_0, \infty)$, welche überall eine stetige, nicht negative zweite Ableitung hat und die Ungleichungen

$$0 \leqq B(t) - A(t) \leqq \frac{A^3(t_0 + n)}{(t_0 + n)^2} \quad \text{für } t \in J_n$$

erfüllt. Weil $A(t)$ nicht wächst, so gilt

$$0 \leqq B(t) - A(t) \leqq \frac{A^3(t_0 + [t - t_0] + 1)}{(t_0 + [t - t_0] + 1)^2} \leqq \frac{A^3(t)}{t^2} ,$$

wenn durch $[a]$ für einen Augenblick die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich a bezeichnet wird, so dass

$$B(t) = A(t)\left\{1 + O\left[\frac{A^2(t)}{t^2}\right]\right\}.$$

Korollar. *Ist die Funktion $f^{-1/4}(t)$ konvex im Intervall $\langle t_0, \infty)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$, so konvergiert jede Lösung von* (16) *gegen Null bei $t \to \infty$, während die Ableitung unbeschränkt ist. Genauer*

$$y(t) = 0[f^{-1/4}(t)]\,, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{|y'(t)|}{f^{1/4}(t)} > 0\,.$$

Diese Bedingung ist viel allgemeiner als die von Biernacki, dass nämlich $f'(t)$ positiv sei und nicht wachse und selbstverständlich $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$ (siehe [5], Theorem V). Denn ist $f'(t)$ positiv und nimmt nicht zu, so hat $A(t) = f^{-1/4}(t)$ eine nicht abnehmende Ableitung, so dass für $t_2 > t_1$

$$A\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - A(t_1) = \int\limits_{t_1}^{\frac{1}{2}(t_1+t_2)} A'(t)\,\mathrm{d}t \leqq \frac{t_2 - t_1}{2} A'\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

$$A\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) - A(t_2) = -\int\limits_{\frac{1}{2}(t_1+t_2)}^{t_2} A'(t)\,\mathrm{d}t \leqq -\frac{t_2 - t_1}{2} A'\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

gilt und durch Addition erhalten wir

$$2A\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leqq A(t_1) + A(t_2)\,,$$

also ist $A(t)$ konvex. Auf der anderen Seite erfüllen die Funktionen $f(t) = ct^n$, $f(t) = ce^{\alpha t}$ $(c, \alpha > 0, n > 1)$ die Bedingung, dass $f^{-1/4}(t)$ konvex ist, aber ihre Ableitungen wachsen, sind sogar unbeschränkt.

III.

9. Im letzten Teil zeigen wir, dass, wenn die positiven Werte von $f(t)$ hinreichend klein sind, sich die Lösungen von (16) gerade ungekehrt als im vorhergehenden Fall verhalten, dass nämlich alle nicht beschränkt sind. Wir leiten jedoch dieses Resultat auch für die Gleichung der allgemeineren Form (15) ab.

Wir führen die Bezeichnung $F^+(t) = \frac{1}{2}[F(t) + |F(t)|]$ ein.

Satz 8. *Es gelte* (17) *und es sei*

$$\liminf_{t\to\infty} \left[\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}\right]^{-2} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{s}^{t} \frac{q^+(s)}{p(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s = 0\,. \tag{35}$$

Dann sind nicht alle Lösungen von (15) beschränkt.

Beweis. Es seien $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die Lösungen von (15) mit Aufangswerten

$$y_1(t_0) = 1,\ y_1'(t_0) = 0\,, \quad y_2(t_0) = 0,\ y_2'(t_0) = 1\,.$$

Dann ist bekannt (siehe [8], S. 122), dass die Funktion $r(t) = \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t)}$ die Differentialgleichung

$$[p(t)\, r'(t)]' + q(t)\, r - \frac{p^2(t_0)}{p(t)\, r^3} = 0 \tag{36}$$

erfüllt. Dabei $r(t_0) = 1$, $r'(t_0) = 0$.

Jetzt seien alle Lösungen von (15) beschränkt, so dass $r(t) \leqq C_1$. Aus (36) folgt dann

$$[p(t)\, r']' \geqq -C_1\, q^+(t) + C_2 \frac{1}{p(t)}\,,$$

wo C_1 und C_2 positive Konstanten sind. Bei der ersten Integration von t_0 bis t dieser Ungleichung erhalten wir

$$p(t)\, r' \geqq -C_1 \int_{t_0}^{t} q^+(s)\, \mathrm{d}s + C_2 \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}$$

und bei der zweiten

$$r(t) \geqq 1 - C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(\tau)} \int_{t_0}^{\tau} q^+(s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau + C_2 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{p(\tau)} \int_{t_0}^{\tau} \frac{1}{p(s)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= 1 - C_1 \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} \frac{q^+(s)}{p(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\, C_2 \left[\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}\right]^2 =$$

$$1 + \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}\right]^2 \left\{C_2 - 2C_1 \left[\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)}\right]^{-2} \cdot \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} \frac{q^+(s)}{p(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}s\right\}.$$

Aus (17) und (35) folgt $\limsup\limits_{t \to \infty} r(t) = \infty$, was im Widerspruch mit $r(t) \leqq C_1$ steht.

Korollar. *Es sei*

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} f^+(s)\, \mathrm{d}s = 0\,. \tag{37}$$

Dann sind nicht alle Lösungen von (16) *beschränkt.*[1])

Beweis. (17) ist offenbar erfüllt. Die Bedingung (35) bedeutet hier

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{(t - t_0)^2} \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{t} f^+(s)\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}s = 0\,,$$

[1]) Zusatz bei Korrektur: Denselben Satz beweist *A. Wintner* in dem Artikel On linear instability (Quart. Appl. Math. XIII, 192–195, 1955).

was dasselbe ist wie

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} (t - s) f^+(s) \, ds = 0 .$$

Dieses ist erfüllt, wenn (37) gilt, denn $\frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} (t - s) f^+(s) \, ds \leqq \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} f^+(s) \, ds$.

Bemerkung. (37) ist erfüllt, wenn z. B.

$$\lim_{t \to \infty} f^+(t) = 0$$

oder

$$\int_{t_0}^{\infty} f^+(s) \, ds < \infty .$$

LITERATUR

[1] *R. Bellman*: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, Moskva 1954 (russische Übersetzung des Buches Stability Theory of Differential Equations).

[2] *G. Sansone*: Equazioni differenziali nel campo reale, Bologna 1948, 2. Aufl.

[3] *H. Milloux*: Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)\,x = 0$, Prace Mat. Fiz. *41* (1934), 39—54.

[4] *A. Wiman*: Über die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Arkiv för Mat., och Fys., *12* (1917).

[5] *M. Biernacki*: Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)\,x = 0$, Prace Mat. Fiz. *40* (1933), 163—171.

[6] *G. Ascoli*: Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine (Atti della R. Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, Ser. 6, vol. *XXII* (1935), S. 234—243, namentlich 240—241).

[7] *M. Matell*: Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen, Uppsala 1924, Appelbergs Boktrykeri Aktiebolag.

[8] *E. Kamke*: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I, 4. Aufl., Leipzig 1951.

Резюме

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.
(Поступило в редакцию 29/VI 1955 г.)

В первой части этой работы исследуются асимптотические свойства решений дифференциального уравнения

$$y'' + a(t)\,y' + y = 0\,, \tag{1}$$

а именно в случае $a(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Во второй части даются асимптотические формулы для общего решения уравнения Штурма

$$[p(t)\,y']' + q(t)\,y = 0\,, \tag{2}$$

при помощи которых находится простое условие, достаточное для того, чтобы все решения уравнения

$$y'' + f(t)\,y = 0 \tag{3}$$

стремились к нулю при $t \to \infty$. В третьей части исследуется обратный случай, а именно уравнение (3), в котором $f(t)$ принимает малые положительные значения.

Главные результаты:

I. *Если* $a(t) \geqq 2$, *то решения ур-ия* (1) *являются неосцилляционными.*

II. *Пусть* $a(t) \geqq \text{konst} > 0$ *и* $a'(t)$ *ограничена сверху; тогда всякое решение ур-ия* (1) *стремится к нулю.*

III. *Пусть*

$$a(t) \geqq 2,\ J(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} \to \infty$$

и

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{a'(t)}{J(t)\,a^2(t)} > -1$$

Тогда всякое решение ур-ия (1) *стремится строго монотонно к нулю при* $t \to \infty$.

IV. *Пусть* $\displaystyle\int^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{a(s)} < \infty$ *и или* $\dfrac{a'(t)}{a^2(t)} \leqq \vartheta < 1$ *или* $a'(t) \geqq 1$. *Тогда ур-ие* (1) *имеет интеграл, стремящийся к отличному от нуля пределу.*

V. *Пусть в интервале* $\langle t_0, \infty)$ *функции* $p(t)$ *и* $q(t)$ *обладают непрерывной второй производной, пусть*

$$p(t)\,.\,q(t) \geqq \text{konst} > 0, \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} \to 0 \quad \text{и} \quad [p(t)\,.\,A'(t)]' \geqq 0\,,$$

где $A(t) = [p(t)\,.\,q(t)]^{-1/4}$. *Тогда для общего решения ур-ия* (2) *справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)\,q(t)}}\left[y_0 \sin\left(\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right]$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{p^3(t)}}\left[y_0 \cos\left(\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}\,\mathrm{d}s + \varphi_0\right) + o(1)\right].$$

VI. *Пусть* $f(t) \geqq \text{konst} > 0$ и *функция* $f^{-1/4}(t)$ *выпукла в интервале* $\langle t_0, \infty)$. *Тогда для общего решения ур-ия* (3) *справедливы асимптотические формулы*

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{f(t)}}\,[y_0 \sin(\int_{t_0}^{t}\sqrt{f(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)]$$

$$y'(t) = \sqrt[4]{f(t)}\,[y_0 \cos(\int_{t_0}^{t}\sqrt{(f(s)}\,\mathrm{d}s + \varphi_0) + o(1)]\,.$$

VII. *Если функция* $f^{-1/4}(t)$ *выпукла в интервале* (t_0, ∞) *и* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$, *то все решения ур-ия* (3) *стремятся к нулю при* $t \to \infty$.

VIII. *Если*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)} = \infty \text{ и } \liminf_{t\to\infty} \left[\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{p(s)}\right]^{-2}.\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t}\frac{q^+(s)}{p(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s = 0\,,$$

где $q^+(t) = \frac{1}{2}[|q(t)| + q(t)]$, *то не все решения ур-ия* (2) *ограничены.*