Jaroslav Hájek

Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой корреляционной функцией

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 94–117

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100181

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕЙ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ВЫПУКЛОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

ЯРОСЛАВ ГАЕК, Прага.

(Поступило в редакцию 30/VI 1955 г.)

В работе выводятся при помощи специального спектрального разложения (3.2) выпуклых кореляционных функций некоторые результаты, касающиеся линейной оценки средней стационарного процесса; основная часть этих результатов содержится в теоремах 5.1, 5.2 и 5.5.

§ 1. Введение и итоги

Под случайным процессом $x(t)$ мы понимаем систему случайных величин, поставленных в соответствие действительному параметру — времени t. Распределение вероятностей этого процесса задано, если задано распределение вероятностей случайного вектора $\{x(t_1), \ldots, x(t_n)\}$, для каждого n и для всех значений параметра $t_1, \ldots, t_n$. Стационарность случайного процесса заключается в том, что распределение вероятностей векторов $\{x(t_1 + u), \ldots, x(t_n + u)\}$ не зависит от движения u.

Наиболее важной характеристикой стационарного случайного процесса является корреляционная функция

$$R(\tau) = \frac{\mathbf{E}x(t)\, x(t + \tau) - [\mathbf{E}x(t)]^2}{\mathbf{E}x^2(t) - \mathbf{E}[x(t)]^2}\,.$$

Корреляционная функция непрерывных стационарных процессов — и только такие будем в данной работе рассматривать — есть непрерывная функция переменного τ.

В теореме 5.1 дается нижняя граница дисперсии линейной оценки средней стационарного процесса с выпуклой корреляционной функцией; в теореме 5.2 установлено, что обычная интегральная оценка (5.15) в случае выпуклой корреляционной функции является асимптотически эффективной в смысле определения 5.1; содержанием теоремы 5.5 является утверждение, что выпуклым корреляционным функциям соответствуют однозначно функции распределения $\Phi(t)$, которые дают нам лучшую линейную оценку вида (4.1).

§ 2. Выпуклые кореляционные функции

Корреляционную функцию $R(\tau)$ называем выпуклой, если она удовлетворяет неравенству[1])

$$R(\tau_1) + R(\tau_2) \geqq 2R\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right); \quad \tau_1 \geqq 0\,, \quad \tau_2 \geqq 0\,. \tag{2.1}$$

Отсюда непосредственно видно, что выпуклая корреляционная функция должна быть невозрастающей функцией. Значит, существует предел

$$\lim_{\tau \to \infty} R(\tau) = R(\infty)\,. \tag{2.2}$$

Этот предел не может быть отрицательным, потому что это противоречило бы следующей лемме:

Лемма 2.1. *Для каждой корреляционной функции $R(\tau)$ и для каждого T справедливо*

$$\sup_{T \leqq \tau} \{R(\tau)\} \geqq 0\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. $R(\tau)$ — положительно определенная[2]) функция, и поэтому для каждого n и для всех $t_1, \ldots, t_n$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} R(t_i - t_j) \geqq 0\,.$$

Тем более должно быть

$$n + n(n-1) \max\,\{R(t_i - t_j);\, i \neq j\} \geqq 0\,,$$

или же

$$\max\,\{R(t_i - t_j)\,; \quad i \neq j\} \geqq -\frac{1}{n-1}\,,$$

откуда следует уже (2.3).

Итак, действительно, $R(\infty) \geqq 0$. Однако, достаточно исследовать случай $R(\infty) = 0$. Если, то-есть, $R(\infty) > 0$, то можно соответствующий стационарный процесс разложить в сумму динамического и недиманического слагаемых так, что для динамической составляющей будет $R(\infty) = 0$. Точнее это обстоятельство высказано в следующей теореме.

---

[1]) Статистический смысл неравенства (2.1) следующий: если мы хотим между два наблюдения на оси t поместить третье наблюдение так, чтобы дисперсия суммы всех трех наблюдений была минимальной, то оказывается лучше всего поместить его в середину.

[2]) Смотри Б. В. Гнеденко: „Курс теории вероятностей“, стр. 196.

Теорема 2.1. *Каждый стационарный случайный процесс $x(t)$, корреляционная функция $R(\tau)$ которого есть выпуклая функция, обладающая тем свойством, что $R(\infty) < 1$, можно представить в виде*

$$x(t) = y(t) + z , \tag{2.4}$$

где $y(t)$ — стационарный случайный процесс, корреляционная функция $Q(\tau)$ которого выпукла и $Q(\infty) = 0$; z есть случайная величина, независимая от t и ни для какого t ненаходящаяся в корреляции с $y(t)$.

Доказательство. Для простоты будем предполагать, что средняя процесса $x(t)$ равна нулю и что его дисперсия равна единице. Положим

$$z = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t . \tag{2.5}$$

Существование этого предела, в смысле сходимости в среднем квадратическом, гарантирует известная эргодическая теорема.[3]) Из выпуклости $R(\tau)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} R(t-u) = R(\infty) ,$$

значит,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t-u)\,\mathrm{d}t = R(\infty) . \tag{2.6}$$

Следовательно, и

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\U\to\infty}} \frac{1}{TU} \int_0^U \int_0^T R(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = R(\infty) .$$

Но последнее выражение есть ни что иное, как дисперсия случайной величины z, определенной уравнением (2.5), так что

$$\mathsf{D}^2 z = R(\infty) . \tag{2.7}$$

Положим, далее,

$$y(t) = x(t) - z \tag{2.8}$$

и докажем прежде всего, что этот процесс не находится в корреляции с величиной z. Так как, согласно (2.8),

$$zy(t) = zx(t) - z^2 ,$$

то достаточно доказать, что

$$\mathsf{E}zx(t) = R(\infty) . \tag{2.9}$$

Но, ввиду (2.5),

[3]) Смотри А. Я. Хинчин: „Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse“ Math. Ann., 1934, стр. 604.

$$\mathsf{E}zx(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T R(t-u)\,\mathrm{d}u \,,$$

откуда, принимая во внимание (2.6), непосредственно получаем (2.9).

Итак, остается только найти корреляционную функцию $Q(\tau)$ процесса $y(t)$ и показать, что она выпукла и удовлетворяет соотношению $Q(\infty) = 0$. Как мы только что доказали, $y(t)$ и z находятся в нулевой корреляции, так что

$$\mathsf{D}^2y(t) = \mathsf{D}^2x(t) - \mathsf{D}^2z = 1 - R(\infty)\,,$$

и кроме того, ввиду (2.8), (2.7) и (2.9),

$$\mathsf{E}y(t)\,y(t+\tau) = \mathsf{E}x(t)\,x(t+\tau) - \mathsf{E}zx(t) - \mathsf{E}zx(t+\tau) + \mathsf{E}z^2 = R(\tau) - R(\infty)\,.$$

Но это значит, что

$$Q(\tau) = \frac{R(\tau) - R(\infty)}{1 - R(\infty)}\,,$$

откуда следует, во-первых, что функция $Q(\tau)$ выпукла, и во-вторых, что $Q(\infty) = 0$. Так как по предположению $R(\infty) < 1$, то $Q(\tau)$ всегда существует. Этим доказательство завершается.

Из выпуклости и ограниченности $R(\tau)$ далее следует, что в каждой точке существует производная справа и производная слева.[4]) (Для нашей цели достаточно пользоваться для обеих производных общим символом $R'(\tau)$.) При этом для $\tau > 0$ производная справа не меньше производной слева, обе эти производные суть неубывающие функции, и $-R'(\tau)$ убывает до нуля быстрее, чем τ^{-1}. Последнее утверждение следует из следующей леммы:

Лемма 2.2. *Если корреляционная функция $R(\tau)$ выпукла, то*

$$\lim_{\tau\to\infty} \tau R'(\tau) = \lim_{\tau\to 0} \tau R'(\tau) = 0\,. \tag{2.10}$$

Доказательство. $R(\tau)$ — вполне непрерывна для $\tau > \varepsilon > 0$, потому что $\tau > \varepsilon > 0 \Rightarrow -R'(\tau) < -R'(\varepsilon) < \infty$. Кроме того $-R'(\tau)$ не возрастает, так что

$$R(\tfrac{1}{2}\tau) - R(\tau) = -\int_{\frac{1}{2}\tau}^{\tau} R'(u)\,\mathrm{d}u \geqq -\tfrac{1}{2}\tau R'(\tau) \geqq 0\,.$$

Так как $R(\tau)$ — выпуклая функция, то существует $R(\infty)$, и, следовательно, левая, а тем более и правая часть этого соотношения сходится для $\tau \to \infty$ к нулю. Существование второго предела следует аналогичным образом из непрерывности $R(\tau)$.

[4]) Литлвуд, Харди, Полья: „Inequalities", стр. 111.

§ 3. Спектральное разложение выпуклой корреляционной функции

Самой простой выпуклой корреляционной функцией является функция

$$\begin{aligned} r(\tau) &= 1 - |\tau| \quad \text{для} \quad |\tau| \leqq 1\,, \\ &= 0 \qquad\quad\; \text{для} \quad |\tau| > 1\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Легко можно показать, что эта корреляционная функция соответствует, помимо прочего, процессу $x_0(t)$, который может быть построен таким образом, что возьмем (i) независимые одна от другой случайные величины y_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) с любым[5]), но одинаковым для всех законом распределения (ii) от величин y_k независимую случайную величину φ с равномерным (ректангулярным) распределением над интервалом $(0, 1)$ и для t из (случайно меняющихся) интервалов

$$\varphi + k - 1 \leqq t < \varphi + k\,,$$

положим

$$x_0(t) = y_k\,.$$

Построенный таким образом процесс будет представлять собой скачкообразную функцию, которая постоянна на интервалах длины 1. Если φ фиксированно, то два наблюдение $x(t_1)$ и $x(t_2)$ будут тождественны или независимы смотря по тому, будут ли t_1 и t_2 точками одного и того же интервала $[\varphi + k - 1, \varphi + k)$ или нет.

Но самым важным свойством корреляционной функции $r(\tau)$ является то, что при помощи нее можно произвести спектральное разложение всех выпуклых корреляционных функций, для которых $R(\infty) = 0$. Об этом говорит следующая основная теорема:

Теорема 3.1. *Пусть корреляционная функция $R(\tau)$ выпукла и удовлетворяет условию $R(\infty) = 0$. Тогда*

$$R(\tau) = \int_0^\infty r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \mathrm{d}F(\lambda)\,, \tag{3.2}$$

где $F(\lambda)$ — положительная[1]) *функция распределения, точнее*

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda \tau\, \mathrm{d}R'(\tau)\,, \quad 0 \leqq \lambda < \infty\,, \tag{3.3}$$

и $r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)$ определена уравнениями (3.1).

Доказательство. Прежде всего надо доказать, что функция $F(\lambda)$, определенная соотношением (3.3), удовлетворяет в действительности тем условиям, которые налагаются на положительную функцию распределе-

[5]) Без оговорок, конечно, предполагается, что дисперсии y_k конечны.

[1]) Положительной называем такую функцию распределения, для которой $F(0) = 0$.

ния, т. е. что она не убывает и что $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$. Что $F(\lambda)$ есть неубывающая функция, следует непосредственно из того, что $R'(\tau)$ — неубывающая функция, а уравнения $F(0) = 0$, $F(\infty) = 1$ являются следствием тождества

$$F(\lambda) = \lambda\, R'(\lambda) - R(\lambda) + 1\,, \tag{3.4}$$

леммы 2.2 и предположения $R(\infty) = 0$.

Справедливость уравнения (3.2) для $\tau = 0$ следует непосредственно из того, что $F(\lambda)$ — положительная функция распределения. В случае $\tau > 0$ достаточно вспомнить (3.3) и объединить следующие тождества:

$$\int\limits_0^\infty r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) \mathrm{d}F(\lambda) = \int\limits_{|\tau|}^\infty \frac{\lambda - |\tau|}{\lambda}\, \mathrm{d}F(\lambda) = \int\limits_{|\tau|}^\infty (\lambda - |\tau|)\, \mathrm{d}R'(\lambda) =$$

$$= -\int\limits_{|\tau|}^\infty R'(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = R(|\tau|) = R(\tau)\,.$$

Замечание 3.1. Если $R(\tau)$ имеет при $\tau > 0$ вторую производную $R''(\tau)$, то существует спектральная плотность $f(\lambda) = F'(\lambda)$, причем

$$f(\lambda) = \lambda\, R''(\lambda)\,.$$

Например, для корреляционной функции $e^{-a\tau}$ получаем

$$f(\lambda) = a^2 \lambda e^{-a\lambda}\,.$$

Замечание 3.2. Из теоремы 3.1 следует, что выпуклой корреляционной функции $R(\tau)$ будет, помимо прочего, соответствовать процесс $x_0(t)$, построенный таким образом, что взяты (i) независимые друг от друга случайные величины y_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) с любым, но для всех одинаковым законом распределения, (ii) случайная величина φ, независимая от y_k и имеющая равномерное (ректангулярное) распределение над интервалом (0, 1), (iii) случайная величина λ, независимая от φ и от y_k и имеющая функцию распределения $F(\lambda)$ из уравнения (3.3), и наконец для t в (случайно меняющихся) интервалах

$$\lambda(\varphi + k - 1) \leqq t < \lambda(\varphi + k)\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

положено

$$x_0(t) = y_k\,. \tag{3.5}$$

Выгода этого представления заключается в том, что для фиксированного φ и λ вместо случайного стационарного процесса получаем последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин y_k, каждая из которых занимает на оси t интервал длины λ. Процесс $x_0(t)$ найдет важное применение в доказательствах теорем 5.1 и 5.4.

Замечание 3.3. Из спектрального разложения (3.2) непосредственно следует, что всякая выпуклая функция $R(\tau)$, непрерывная в точке 0, причем $R(0) = 1$ и $R(\infty) = 0$, является положительно определенной и, следовательно, коррекционной функцией непрерывного стационарного процесса. Действительно, единственные свойства функции $R(\tau)$, которые были использованы в доказательстве о разложении (3.2), — это ее выпуклость и ее значения в точках 0 и ∞. Притом условие $R(\infty) = 0$ носит второстепенный характер.

§ 4. Линейная оценка средней стационарного процесса

Линейной оценкой средней

$$m = \mathsf{E}x(t)$$

стационарного случайного процесса $x(t)$ над интервалом $(0, T)$ будем разуметь интеграл Стилтьеса[2])

$$\bar{x} = \int_0^T x(t)\, d\Phi(t)\,, \tag{4.1}$$

где весовая функция $\Phi(t)$ может быть любая функция с ограниченным изменением, удовлетворяющая условию

$$\Phi(0) = 0\,, \quad \Phi(T) = 1\,. \tag{4.2}$$

Кроме того, будем для определенности предполагать, что $\Phi(t)$ непрерывна слева для $0 < t < T$. Наилучшей линейной оценкой, будет ли, конечно, такая существовать, назовем, как это обычно делается, линейную оценку с наименьшей дисперсией.

Весовая функция $\Phi(t)$, которая дает лучшую линейную оценку, обладает важным свойством, установленным в следующей теореме:

Теорема 4.1. *Весовая функция* $\Phi(t)$ *дает лучшую линейную оценку вида* (4.1) *тогда и только тогда, если*

$$f(u) = \int_0^T R(t-u)\, d\Phi(t) = \text{const}, \quad 0 \leqq u \leqq T\,. \tag{4.3}$$

Если же ни одна из допустимых весовых функций не выполняет этого условия, то не существует наилучшей линейной оценки.

Доказательство. Стационарный случайный процесс $x(t)$ представим себе как непрерывную кривую гильбертова пространства, причем переместим нуль в точку $x(0)$, так что нормой $x(t)$ будет служить $\mathsf{D}^2[x(t) - x(0)]$. Затем возьмем наименьшее линейное подпространство, содержащее часть кривой $x(t)$ для t в промежутке $0 \leqq t \leqq T$. Это подпространство будет,

[2]) Потому что мы в этой статье не выходим из рамок корреляционной теории, то достаточно брать здесь интеграл $\int_0^T x(t)\, d\Phi(t)$ в смысле сходимости в среднем квадратическом.

очевидно, содержать все точки вида (4.1). Кроме того, как известно, оно будет содержать одну и только одну точку $\tilde{x}$, в которой расстояние от первоначального нуля будет минимальным. Это значит, что для этой единственной точки $\tilde{x}$ будет

$$\mathbf{D}^2\tilde{x} = \inf_{\Phi} \{ \mathbf{D}^2[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t)] \} \,, \tag{4.4}$$

где инфимум берется через все допустимые весовые функции. Кроме того, точка $\tilde{x}$ и только эта точка будет для всех u интервала $0 \leqq u \leqq T$ выполнять соотношение

$$\operatorname{cov}[\tilde{x}, x(u) - \tilde{x}] = 0 \,, \quad 0 \leqq u \leqq T \,,$$

или же

$$\operatorname{cov}[\tilde{x}, x(u)] = \mathrm{const} \,, \quad 0 \leqq u \leqq T \,. \tag{4.5}$$

Если же $\tilde{x}$ может быть представлено в виде (4.1), то (4.5) эквивалентно (4.3). Но это не значит ни что иное, как то, что (4.3) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы статистика (4.1) была наилучшей линейной оценкой. Если же условию (4.3) не удовлетворяет ни одна из весовых функций $\Phi(t)$, то ни одна из статистик (4.1) не будет тождественной с $\tilde{x}$, и, следовательно, наилучшей линейной оценки не существует. Этим доказательство завершается.

Используя условие (4.3), можно найти „подбором" лучшую весовую функцию для некоторых важных, конкретно заданынх, корреляционных функций.

Пример 1. Пусть $R(\tau) = e^{-|\tau|}$. Тогда лучшая весовая функция, если она существует, должна удовлетворять условию (4.3), то-есть,

$$\int_0^T e^{-|t-u|}\, \mathrm{d}\Phi(t) = \mathrm{const}, \quad 0 \leqq u \leqq T \,. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) перепишем в виде

$$e^{-2u} \int_0^u e^t\, \mathrm{d}\Phi(t) + \int_u^T e^{-t}\, \mathrm{d}\Phi(t) = e^{-u}\, \mathrm{const} \,, \quad 0 \leqq u \leqq T \,,$$

и выясним, каким условиям будет удовлетворять $\Phi(t)$, если предположить, что в точках u, $0 < u < T$ она имеет производную. Продиференцировав оба части уравнения и упростив результат, получим

$$\int_0^u e^t\, \mathrm{d}\Phi(t) = \tfrac{1}{2} e^u\, \mathrm{const} \,, \quad 0 < u < T \,.$$

Но этому условию удовлетворяет „весовая" функция, которая в точке $t = 0$ имеет скачок $\frac{1}{2}$ const и которая линейна для $0 < t \leqq u$. Если же хотим, чтобы выполнялось (4.7) и для $u = T$, т. е. чтобы было

$$\int_0^T e^t\, \mathrm{d}\Phi(t) = e^T\, \mathrm{const} \,,$$

то $\Phi(t)$ должна иметь еще один скачок в точке $t = T$ величиною в $\frac{1}{2}$ const. Таким образом, получаем „весовую" функцию

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0\,, \\ \Phi(t) &= \tfrac{1}{2}(1 + t)\,\mathrm{const}\,, \quad 0 < t < T\,, \\ \Phi(T) &= \tfrac{1}{2}(2 + T)\,\mathrm{const}\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

о которой уже нетрудно убедиться, что она удовлетворяет условию (4.3). Из условия $\Phi(t) = 1$ находим, что

$$\mathrm{const} = \frac{2}{2 + T}\,; \tag{4.8}$$

следовательно, лучшая линейная оценка имеет вид

$$\tilde{x} = \frac{x(0) + x(T) + \int\limits_0^T x(t)\,\mathrm{d}t}{2 + T}\,. \tag{4.9}$$

Это выражение представляет собой взвешенное среднее обычной интегральной оценки и среднего арифметического крайних точек.

Из тождества

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \sigma^2 \int\limits_0^T \int\limits_0^T R(t - u)\,\mathrm{d}\Phi(t)\,\mathrm{d}\Phi(u)$$

и из уравнений (4.3) и (4.8) получаем, что дисперсия лучшей линейной оценки в случае корреляционной функции $e^{-|t|}$ равна

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \frac{2}{2 + T}\,\sigma^2\,. \tag{4.10}$$

Для более общей функции $e^{-a|\tau|}$, $a > 0$ получаем аналогично

$$\tilde{x} = \frac{x(0) + x(T) + a\int\limits_0^T x(t)\,\mathrm{d}t}{2 + aT} \tag{4.11}$$

и

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \frac{2}{2 + aT}\,\sigma^2\,. \tag{4.12}$$

З а м е ч а н и е 1. Лучшую весовую функцию, если она вообще существует, можно найти среди функций, симметричных относительно точки $\frac{1}{2}T$, ибо для каждой весовой функции $\Phi(t)$ существует весовая функция $\Psi(t)$,

$$\Psi(t) = \tfrac{1}{2}[\Phi(t) + 1 - \Phi(T - t)]\,,$$

которая, очевидно, симметрична относительно точки $\frac{1}{2}T$ и которая дает более точную, в худшем случае одинаково точную, линейную оценку, как $\Phi(t)$. Точнее говоря, имеет место тождество

$$\mathsf{D}^2\bar{x}_\Phi = \mathsf{D}^2\bar{x}_\Psi + \mathsf{E}(\bar{x}_\Phi - \bar{x}_\Psi)^2$$

где $\tilde{x}_\Phi$ соотв. $\tilde{x}_\Psi$ есть линейная оценка, полученная при помощи весовой функции $\Phi(t)$ соотв. $\Psi(t)$.

То обстоятельство, что можем ограничиться симметричными весовыми функциями, очень часто облегчает нам нахождение наилучшего решения. Это наглядно показано на следующем примере.

Пример 2. Будем искать наилучшую весовую функцию для корреляционной функции $r(\tau)$, определенной уравнениями (3.1). Нетрудно убедиться в том, что условию (4.3) удовлетворяет весовая функция $\Phi(t)$, которой соответствует нахождение оценки $\tilde{x}$ из уравнения

$$\tilde{x} = \frac{(n+1)[x(0)+x(T)] + n[x(1)+x(T-1)] + \ldots + [x(n)+x(T-n)]}{(n+1)(n+2)}, \tag{4.13}$$

где n — наибольшее целое число, непревосходящее T, $T = n + \tau$, $0 \leqq \tau < 1$. Но мы лучше покажем, как можно „подбором" найти лучшую $\Phi(t)$, например, для $T = 2 + \tau$, $0 \leqq \tau < 1$. Будем прдеполагать, что функция $\Phi(t)$ имеет в точках $0, \tau, 1, 1+\tau, 2, 2+\tau$ скачки $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ и что всюду в остальных точках она постоянна. В силу замечания 1, можем ограничиться симметричными весовыми функциями, так что

$$p_1 = p_6,\ p_2 = p_5,\ p_3 = p_4,\ p_1 + p_2 + p_3 = p_4 + p_5 + p_6 = \tfrac{1}{2}\,. \tag{4.14}$$

Для $u < \tau$ условие (4.3) перепишется в виде

$$\int^{u+1} (1 - |t-u|)\,\mathrm{d}\Phi(t) = p_1(1-u) + p_2(1-\tau+u) + p_3 u =$$
$$= (p_3 + p_2 - p_1)\,u + p_1 + p_2(1-\tau) = \mathrm{const},$$

или же

$$p_3 + p_2 - p_1 = 0\,. \tag{4.15}$$

Аналогично для $\tau < u < 1$ получаем

$$\int_0^{u+1} (1 - |t-u|)\,\mathrm{d}\Phi(t) = p_1(1-u) + p_2(1-u+\tau) + p_3 u + p_4(u-\tau) =$$
$$= (p_4 + p_3 - p_2 - p_1)\,u + p_1 + p_2(1+\tau) - p_4\tau =$$
$$= \mathrm{const}\,,$$

или же, имея в виду (4.14)

$$2p_3 - p_2 - p_1 = 0\,. \tag{4.16}$$

Из уравнений (4.14), (4.15) и (4.16) вытекает

$$p_1 = p_6 = \tfrac{1}{4},\ p_2 = p_5 = \tfrac{1}{12}\,,\quad p_4 = p_2 = \tfrac{1}{6}\,,$$

что не противоречит общей формуле (4.13).

Дисперсия наилучшей линейной оценки (4.1) равна общему значению интегралов (4.4). Например, для $u = 0$ легко получаем, что значение интеграла (4.3), а следовательно, и $\mathbf{D}^2\tilde{x}$, равно

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \sigma^2\int\limits_0^1(1-t)\,\mathrm{d}\Phi(t) = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1-\tau}{(n+1)(n+2)}\right]\sigma^2\,. \tag{4.17}$$

Введя функцию $l(T)$, которая для целых T принимает значения

$$l(T) = \frac{1}{1+T}\,, \quad T = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,, \tag{4.18}$$

а в остальных точках является линейной, можем писать (4.17) в виде

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \sigma^2 l(T)\,. \tag{4.19}$$

Для более общей корреляционной функции $r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)$ будет

$$\mathsf{D}^2\tilde{x} = \sigma^2 l\left(\frac{T}{\lambda}\right). \tag{4.20}$$

Замечание 2. Если представлением корреляционной функции $r(\tau)$ считать процесс $x_0(t)$, введенный в начале § 3, то видно, что для целого T и для всякого φ над интервалом $(0,\, T)$ будет $T+1$ независимых случайных величин y_k с одним и тем же законом распределения. Наилучшей линейной оценкой будет тогда, конечно, их среднее арифметическое, которое получается для каждого φ тогда и только тогда, если положим

$$\tilde{x} = \frac{1}{T+1}\,[x(0) + x(1) + \ldots + x(T)]\,. \tag{4.21}$$

Согласно этому, общая формула (4.13) для целых T переходит в формулу (4.21), что нетрудно проверить.

§ 5. Линейная оценка средней стационарного случайного процесса с выпуклой корреляционной функцией

Дисперсия линейной оценки (4.1) зависит, очевидно, только от весовой функции $\Phi(t)$ и от корреляционной функции и дисперсии соответствующего стационарного процесса $x(t)$. Но все-таки в том случае, когда корреляционная функция $\Phi(t)$ является выпуклой, оказывается полезным рассматривать конкретный стационарный процесс $x_0(t)$, построенный в замечании 3.2, а затем при помощи него выводить общие результаты. Как уже было сказано в замечании 3.2, процесс $x_0(t)$ в (случайно меняющихся) интервалах

$$\lambda(\varphi + k - 1) \leqq t < \lambda(\varphi + k)\,, \quad k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots \tag{5.1}$$

равен

$$x_0(t) = y_k \tag{5.2}$$

причем λ, φ, y_k $(k = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \ldots)$ — независимые одна от другой случайные величины такие, что функция распределения величины λ есть $F(\lambda)$, которая зависит по (3.3) от $R(\tau)$, φ имеет равномерное распределение над интервалом (0, 1), а y_k распределены по произвольному, но для всех одинаковому, закону.

Исследуем прежде всего распределение случайной величины ν, которая по определению равна числу индексов k, для которых $\lambda(\varphi + k - 1) \in (0, T)$. Действительный смысл этой величины заключается в том, что при фиксированных λ и φ, (которых ν является функцией), можно при помощи $\nu + 1$ случайных величин $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$ построить процесс $x_0(t)$ на всем интервале $(0, T)$. При фиксированном λ и меняющемся φ случайная величина ν принимает, очевидно, только два значения n и $n + 1$, где n — наибольшее целое число, не превышающее T/λ:

$$T = \lambda(n + \tau)\,, \quad 0 \leqq \tau < 1\,. \tag{5.3}$$

При этом

$$P(\nu = n \mid \lambda) = 1 - \tau\,,$$
$$P(\tau = n + 1 \mid \lambda) = \tau\,,$$

где t определено уже уравнением (5.3). Это значит, что

$$\mathbf{E}(\nu + 1 \mid \lambda) = (n + 1)(1 - \tau) + (n + 2)\,\tau = n + \tau + 1\,,$$

или же, ввиду (5.3),

$$\mathbf{E}(\nu + 1 \mid \lambda) = \frac{T}{\lambda} + 1\,. \tag{5.4}$$

Кроме этого

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\nu + 1}\,\middle|\,\lambda\right) = \frac{1 - \tau}{n + 1} + \frac{\tau}{n + 2} = l\left(\frac{T}{\lambda}\right), \tag{5.5}$$

функция $l(T)$ была определена уравнением (4.18).

Функция распределения случайной величины λ есть $F(\lambda)$, так что в согласии с (5.4) получаем

$$\mathbf{E}(\nu + 1) = 1 + T\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda)\,. \tag{5.6}$$

Так как по определению (3.3)

$$F(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \tau\,\mathrm{d}R'(\tau)\,,$$

то, имея ввиду известные свойства интеграла Стилтьеса, можем писать

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}F(\lambda) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}R'(\lambda) = |R'(0)|\,;$$

подставляя это в (5.6), получаем

$$\mathbf{E}(\nu + 1) = 1 + |R'(0)|\,T\,. \tag{5.7}$$

Линейную оценку в случае процесса $x_0(t)$ можно писать в виде

$$\tilde{x} = \int_0^T x_0(t)\, \mathrm{d}\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\nu} y_k P_k\,,$$

где веса P_k равны

$$\begin{aligned} P_0 &= \Phi(\lambda\varphi)\,, \\ P_\nu &= 1 - \Phi[\lambda(\varphi + \nu - 1)]\,, \\ P_k &= \Phi[\lambda(\varphi + k)] - \Phi[\lambda(\varphi + k - 1)]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu - 1\,. \end{aligned}$$

При фиксированных λ и φ будет, следовательно, $\bar{x}$ взвешенным средним независимых и одинаково распределенных случайных величин $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$, и как таковой не может иметь дисперсию меньшую арифметического среднего $\frac{1}{\nu + 1}(y_0 + y_1 + \ldots + y_\nu)$. Это значит, что

$$\mathbf{D}^2(\bar{x}\,|\,\lambda, \varphi) \geqq \frac{\sigma^2}{\nu + 1}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{D}^2\bar{x} \geqq \sigma^2 \mathbf{E}\left(\frac{1}{\nu + 1}\right). \tag{5.8}$$

Но с другой стороны, согласно (5.7),

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\nu + 1}\right) \geqq \frac{1}{\mathbf{E}(\nu + 1)} = \frac{1}{1 + |R'(0)|\, T}\,;$$

таким образом, для процесса $x_0(t)$ а, следовательно, и для каждого иного процесса, имеющего дисперсию, равную σ^2, и выпуклую корреляционную функцию $R(\tau)$, независимо от выбора весовой функции $\Phi(t)$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathbf{D}^2\left[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t)\right] \geqq \frac{\sigma^2}{1 + |R'(0)|\, T}\,. \tag{5.9}$$

Так, например, для корреляционной функции $e^{-\tau}$ имеем

$$\mathbf{D}^2\bar{x} \geqq \frac{\sigma^2}{1 + T}\,,$$

что находится в полном согласии с результатом (4.10). Неравенство (5.9) интересно своей простотой, но нам, однако, понадобится более точный результат, следующий из уравнений (5.5) и (5.8):

$$\mathbf{D}^2\left[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t)\right] \geqq \sigma^2 \int_0^\infty l\left(\frac{T}{\lambda}\right) \mathrm{d}F(\lambda)\,. \tag{5.10}$$

Замечание 1. Для корреляционной функции $r(\tau)$, определенной уравнениями (3.1), неравенство (5.10) примет вид

$$\mathbf{D}^2\bar{x} \geqq \sigma^2\, l(T)\,.$$

Как мы уже видели в примере 2 § 4 (см. уравнение (4.19)), для наилучшей линейной оценки наступает в этом неравенстве случай равенства. Это значит что в случае стационарного процесса $x_0(t)$ всегда будет $\tilde{x}$ средним арифметическим наблюдений y_k, несмотря на то, попадает ли их в зависимости от φ в интервал $(0, T)$ $n+1$ или $n+2$. В этом можно, наконец, убедиться непосредственно из определяющего уравнения (4.13).

Вернемся к неравенству (5.10). Так как

$$\lim_{T\to\infty} T\, l\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \lambda\,,$$

то, воспользовавшись этим, можно писать

$$\liminf_{T\to\infty} T\,\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}\Phi_T(t)\Big] \geqq \sigma^2 \int_0^\infty \lambda\,\mathrm{d}F(\lambda)\,, \tag{5.11}$$

где в качестве $\Phi_T(t)$ можно взять для каждого T любую весовую функцию. Чтобы нам удалось выразить неравенство (5.11) „на языке корреляционных функций", мы должны доказать следующую лемму.

Лемма 5.1. *Если корреляционная функция $R(\tau)$ является выпуклой и таковой, что $R(\infty) = 0$, то*

$$\int_0^\infty \lambda\,\mathrm{d}F(\lambda) = 2\int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{5.12}$$

где функция $F(\lambda)$ определена по уравнению (3.3).

Доказательство. На основании теоремы Фубини можно писать

$$\int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty\int_0^\infty r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\mathrm{d}F(\lambda)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty\int_0^\infty r\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}F(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \lambda\,\mathrm{d}F(\lambda)\,,$$

чем доказательство и завершается.

Полученные результаты сформулируем в следующую теорему.

Теорема 5.1. *Если корреляционная функция $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ является выпуклой, то*

$$\liminf_{T\to\infty} T\,\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}\Phi_T(t)\Big] \geqq 2\sigma^2 \int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{5.13}$$

для каждого T можно в качестве $\Phi_T(t)$ взять любую весовую функцию.

Определение 5.1. Если при условиях теоремы 5.1 имеет место

$$\lim_{T\to\infty} T\,\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}\Phi_T(t)\Big] = 2\sigma^2 \int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau < +\infty\,, \tag{5.14}$$

то соответствующую линейную оценку условимся называть *асимптотически эффективной.*

Следующая теорема говорит, что обычная ,,интегральная" линейная оценка

$$\frac{1}{T}\int_0 x(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.15}$$

является асимптотически эффективной.

Теорема 5.2. *Если выпуклая корреляционная функция удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty R(\tau)\,\mathrm{d}\tau < +\infty\,, \tag{5.16}$$

то линейная оценка (5.15) *является асимптотически эффективной в смысле определения* 5.1.

Доказательство. Умножив дисперсию оценки (5.15) на $(\sigma^{-2}T)$, получим

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T R(t-u)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = 2\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)R(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int_0^T R(t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}\int_0^T tR(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Надо, следовательно, доказать, что последний интеграл при $T\to\infty$ сходится к нулю. По предположению можно найти для каждого $\varepsilon > 0$ такое T_0, что для всех $T > T_0$

$$\int_{T_0}^T R(t)\,\mathrm{d}t < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Выберем $T_1 > T_0$ так, чтобы

$$\frac{T_0}{T_1} < \frac{\varepsilon}{2\int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Тогда для $T > T_1$ будет

$$\frac{1}{T}\int_0^T t\,R(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T_0} t\,R(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{T_0}^T t\,R(t)\,\mathrm{d}t \leqq$$

$$\leqq \frac{T_0}{T}\int_0^{T_0} R(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T_0}^T R(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

чем доказательство завершается.

В примерах 1 и 2 § 4 мы видели, что наилучшие весовые функции, соответствующие корреляционным функциям $e^{-|\tau|}$ и $r(\tau)$, являются неубывающими, то-есть, в сущности это функции распределения. Следующая теорема говорит, что то же самое можно утверждать о всех выпуклых корреляционных функциях.

Теорема 5.3. 1° *Пусть дана выпуклая корреляционная функция $R(\tau)$, соответствующая стационарному случайному процессу $x(t)$ и удовлетворяющая условию $R(\infty) < 1$.*

2° *Возьмем произвольное натуральное число n и значения $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и рассмотрим множество линейных оценок вида*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x(t_i)\,, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,. \tag{5.17}$$

Тогда веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые дают дисперсию оценки (5.17) минимальной, все неотрицательны, т. е.

$$p_i \geqq 0\,. \tag{5.18}$$

Доказательство. Так как

$$\mathbf{D}^2\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i x(t_i)\Big] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R(t_i - t_j)\, p_i p_j\,, \tag{5.19}$$

то наилучшие веса суть решения системы линейных уравнений [3])

$$p_1 R(t_i - t_1) + p_2 R(t_i - t_2) + \ldots + p_n R(t_i - t_n) = \text{const}\,, \tag{5.20}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Предположим, что значения $t_1, t_2, \ldots, t_n$ были упорядочены по величине, $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$; возьмем определенные веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и разделим индексы $1, 2, \ldots, n$ на три взаимно непересекающихся множества A, B, C так, что

$$\begin{aligned} &j \in A \iff p_j > 0\,, \\ &j \in B \iff p_j < 0\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \\ &j \in C \iff p_j = 0\,, \end{aligned} \tag{5.21}$$

Затем введем функции

$$f(t) = \sum_{j\in A} p_j R(t - t_j)\,, \tag{5.22}$$

и

$$g(t) = \sum_{j\in B} (-p_j) R(t - t_i)\,. \tag{5.23}$$

Эти функции позволяют нам написать систему уравнений (5.20) в виде

$$f(t_i) - g(t_i) = \text{const}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{5.24}$$

[3]) Уравнения (5.20) являются не непрерывным аналогом условия (4.3).

Теперь покажем, что предположение, что веса $p_1, p_2, \ldots, p_n$ удовлетворяют уравнениям (5.24) и одновременно не удовлетворяют неравенствам (5.8), т. е. что они образуют непустое множество B, приводит нас к противоречию.

Множество A никогда не может быть пустым, потому что $\sum p_i = 1$. Если и множество B есть непустое множество, то найдется такой индекс $r > 1$, что или

$$\{1, 2, \ldots, r-1) \subset B \cup C \quad \text{и} \quad r \in A\,, \tag{5.25}$$

или

$$\{1, 2, \ldots, r-1) \subset A \cup C \quad \text{и} \quad r \in B\,. \tag{5.26}$$

Если наступит возможный случай (5.25), то можно написать следующую цепь импликаций

$$\{j \in A\} \Rightarrow \{j \geqq r\} \Rightarrow \{|t_r - t_j| < |t_{r-1} - t_j|\}\,.$$

Отсюда, ввиду того, что функция $R(\tau)$ не возрастает, вытекают неравенства

$$R(t_r - t_j) \geqq R(t_{r-1} - t_j)\,, \quad j \in A\,. \tag{5.27}$$

По предположению $R(\infty) < 1$, следовательно и $R(\tau) < 1$, как только $\tau > 0$. Это значит, что в частном случае при $j = r$ получаем острое неравенство

$$1 = R(t_r - t_r) > R(t_{r-1} - t_r)\,. \tag{5.28}$$

Непосредственным следствием неравенств (5.27) и (5.28) является неравенство

$$\sum_{j \in A} p_j R(t_r - t_j) > \sum_{j \in A} p_j (t_{r-1} - t_j)\,,$$

или же

$$f(t_r) > f(t_{r-1})\,. \tag{5.29}$$

По предположению справедливо уравнение (5.24), а поэтому неравенство (5.29) эквивалентно неравенству

$$g(t_r) > g(t_{r-1})\,. \tag{5.30}$$

Если же наступит второй возможный случай (5.26), то также получим неравенства, (5.29) и (5.30). Разница тут только в том, что сначала выведем неравенство (5.30), а только затем неравенство (5.29).

По тем же причинам будеть существовать индекс $s < n$ такой, что или

$$\{s + 1, \ldots, n\} \subset B \cup C \quad \text{и} \quad s \in A\,, \tag{5.31}$$

или

$$\{s + 1, \ldots, n\} \subset A \cup C \quad \text{и} \quad s \in B\,, \tag{5.32}$$

и таким же образом, как в случае индекса r, можно вывести, что всегда

$$f(t_s) > f(t_{s+1})\,, \tag{5.33}$$

соответственно

$$g(t_s) > g(t_{s+1})\,. \tag{5.34}$$

Из определения индексов r и s следует, что $r \leq s$. Следовательно, существует такой индекс m, что $r \leq m \leq s$ и

$$f(t_m) > f(t_{m-1}) , \quad f(t_m) \geq f(t_{m+1}) , \tag{5.35}$$

соответственно

$$g(t_m) > g(t_{m-1}) , \quad g(t_m) \geq g(t_{m+1}) . \tag{5.36}$$

Если бы, то-есть, такой индекс не существовал, то не могло бы выполняться по крайней мере одно из неравенств (5.29) и (5.33), соответственно, (5.30) и (5.34).

Функция $R(\tau)$ является, по предположению, выпуклой на всяком интервале, не содержащем нуля. Это значит, что функция $f(t)$, соответственно $g(t)$, определенная уравнением (5.22), соотв. (5.23) является выпуклой на всяком интервале, в котором не содержится ни одна точка t_j такая, что $j \in A$, соотв. $j \in B$. Но это свойство функции $f(t)$, соотв. $g(t)$ совместимо с неравенствами (5.35), соотв. (5.36) тогда и только тогда, если $m \in A$, соотв. $m \in B$. Другими словами, должно быть одновременно $m \in A$ и $m \in B$, т. е. $p_m > 0$ и $p_m < 0$. Итак, мы пришли к противоречию, чем и завершается доказательство.

Замечание 1. Наилучшая линейная оценка $\tilde{x}$ с геометрической точки зрения является центром шара, описанного около точек $x(t_1), \ldots, x(t_n)$. Таким образом, теорема 5.3 эквивалентна следующему утверждению. Симплекс с вершинами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ содержит центр описанного шара $\tilde{x}$, если существуют такие числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и такая функция $R(\tau)$, выпуклая на интервале $(0, \infty)$, что

$$(x_i - \tilde{x}, x_j - \tilde{x}) = \sigma^2 R(|t_i - t_j|) , \quad i, j = 1, \ldots, n .$$

В следующей теореме покажем, что решения, полученные нами в примерах 1 и 2 § 4, являются единственными возможными, точнее говоря, что выпуклой корреляционной функции соответствует самое больше одна наилучшая весовая функция.

Теорема 5.4. *Пусть выпуклая корреляционная функция $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ удовлетворяет условию $R(\infty) < 1$. Тогда весовые функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ могут выполнять уравнение*

$$\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t) = \int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Psi(t) \tag{5.37}$$

тогда и только тогда, если

$$\Phi(t) \equiv \Psi(t) . \tag{5.38}$$

Доказательство. Если $R(\infty) > 0$, то по теореме 2.1 можно писать $x(t) = y(t) + z$, причем корреляционная функция процесса $y(t)$ удовлетворяет условию $Q(\infty) = 0$. Но уравнение (5.37), ввиду того, что z не зависит от t, эквивалентно уравнению

$$\int_0^T y(t)\, \mathrm{d}\Phi(t) = \int_0^T y(t)\, \mathrm{d}\Psi(t)\,.$$

Следовательно, достаточно ограничиться случаем $R(\infty) = 0$.

Допустим, что уравнение (5.37) имеет место, а уравнение (5.38) неверно. В таком случае существует точка t такая, что

$$\Delta(t) = \Phi(t) - \Psi(t) \neq 0\,, \quad t \in (0, T)\,. \tag{5.39}$$

По договору из § 4 берем в качестве весовых функций только те функции, которые непрерывны внутри интервала $(0, T)$ слева, так что соотношение (5.39) гарантирует существование таких чисел ε, t_0, что $\varepsilon > 0$, $0 < t_0 < t$ и

$$\Delta^2(u) > \varepsilon \quad \text{как только } t_0 < u < t\,. \tag{5.40}$$

Чтобы доказать несовместимость этого предположения с уравнением (5.37), достаточно отсюда вывести, что

$$\mathsf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\, \Delta(t)\Big] > 0\,. \tag{5.41}$$

Построим для нашей корреляционной функции $R(\tau)$ опять конкретный процесс $x_0(\tau)$ по замечанию 3.2. Затем выберем число $\lambda_0 > 0$ так, чтобы было $F(\lambda_0) < 1$ и обозначим через S явление, которое состоит в том, что числа λ и φ были избраны таким способом, что

а) $\lambda \geqq \lambda_0$,

б) точки t_0 и t не попали в один и тот же интервал из интервалов (5.1).

Вероятность явления S будет равняться

$$P(S) = \int_{\lambda_0}^{\infty} h(\lambda)\, \mathrm{d}F(\lambda)\,,$$

где

$$h(\lambda) = \min\left[1, \frac{t - t_0}{\lambda}\right].$$

Так как λ_0 было выбрано так, чтобы было $F(\lambda_0) < 1$, то будет $P(S) > 0$, а поэтому неравенство (5.41) для $x(t) = x_0(t)$ следует из неравенства

$$\mathsf{D}^2\Big[\int_0^T x_0(t)\, \mathrm{d}\Delta(t) \,\Big|\, S\Big] > 0\,. \tag{5.42}$$

Теперь возьмем произвольные числа λ а φ такие, при которых наступает явление S. Так как при осуществлении явления S числа t_0 и t не попали в один и тот же интервал из интервалов (5.1), то можно найти такую точку u, $t_0 < u < t$, что случайные величины $\int\limits_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)$ и $\int\limits_u^T x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)$ имеют независимые условные распределения. Но это значит, что

$$\mathbf{D}^2[\int\limits_0^T x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)|\lambda, \varphi] \geqq \mathbf{D}^2[\int\limits_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)|\lambda, \varphi]\,. \qquad (5.43)$$

По предположению (5.40) будет $\Delta(u) \neq 0$, и слеводательно, будет существовать случайная величина $[\Delta(u)]^{-1}\int\limits_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)$. Эта величина при фиксированных λ и φ есть взвешенное среднее случайных величин y_k, которые, согласно (5.2), находятся в интервале $(0, u)$. Но величин y_k не может появиться в интервале $(0, u)$ больше, чем $u/\lambda + 2$, а тем более не больше, чем $t/\lambda_0 + 2$, так как $u < t$ и $\lambda \geqq \lambda_0$. Из сказанного можно заключить, что

$$[\Delta(u)]^2\,\mathbf{D}^2\left[\int\limits_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)\,|\,\lambda, \varphi\right] \geqq \frac{\sigma^2}{t/\lambda_0 + 2}\,. \qquad (5.44)$$

Потому что $t_0 < u < t$, то справедливо (5.40), и следовательно,

$$\mathbf{D}^2\left[\int\limits_0^u x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)\,|\,\lambda, \varphi\right] \geqq \frac{\varepsilon\sigma^2}{t/\lambda_0 + 2}\,. \qquad (5.45)$$

Тем более, согласно (5.43), должно быть

$$\mathbf{D}^2\left[\int\limits_0^T x_0(t)\,\mathrm{d}\Delta(t)\,|\,\lambda, \varphi\right] \geqq \frac{\varepsilon\sigma^2}{t/\lambda_0 + 2}\,. \qquad (5.46)$$

Последнее неравенство справедливо при любых λ и φ, для которых осуществляется явление S, и, следовательно, должно быть верным и неравенство (5.42). Этим теорема доказана, потому что, как уже было сказано, из неравенства (5.42) следует неравенство (5.41), которое ведет к противоречию. Теорему, мы правда, доказали только для процесса $x_0(t)$, но ввиду линейности проблемы, она доказана этим для всякого другого процесса с той же корреляционной функцией.

Замечание 2. Из теоремы 5.4, помимо прочего вытекает, что при условиях из теоремы 5.3 случайные величины $x(t_1), \ldots, x(t_n)$ будут линейно независимыми; с геометрической точки зрения, они будут вершинами симплекса.

Теорема 5.5. *Если выпуклая корреляционная функция $R(\tau)$ стационарного случайного процесса $x(t)$ удовлетворяет условию $R(\infty) < 1$, то существует одна и только одна весовая функция $\Phi(t)$, дающая наилучшую линейную оценку средней процесса $x(t)$ над интервалом $(0, T)$. Функция $\Phi(t)$ не убывает.*

Доказательство. Положим

$$t_i^{(n)} = T\frac{i}{n}, \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n, \\ n = 1, 2, \ldots, \end{array} \tag{5.47}$$

и найдем веса $p_i^{(n)}$ лучших линейных оценок вида $\sum_{i=1}^{n} p_i^{(n)} x(t_i^{(n)})$. Это значит, что для любых чисел $q_i^{(n)}$, $\sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)} = 1$ будет справедливым неравенство

$$\mathbf{D}^2\Big[\sum_{i=1}^{n} p_i^{(n)} x(t_i^{(n)})\Big] \leqq \mathbf{D}^2\Big[\sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)} x(t_i^{(n)})\Big]. \tag{5.48}$$

По теореме 5.3 для каждого n будет $p_i^{(n)} \geqq 0$. Согласно теореме Хели, существует, следовательно, такая последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$, что

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{t_i(n_j)<t} p_i^{(n_j)} = \Phi(t), \quad 0 \leqq t < T, \tag{5.49}$$

где $\Phi(t)$ — неубывающая функция, причем $\Phi(0) = 0$. Положим $\Phi(T) = 1$; если $\Phi(t)$ для $0 < t < T$ слева не непрерывна, то ее преобразуем, чтобы она стала непрерывной и возьмем ее в качестве весовой функции. Из другой теоремы Хели следует, что

$$\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t)\Big] = \lim_{j\to\infty} \mathbf{D}^2\Big[\sum_{i=0}^{n_j} p_i^{(n_j)} x(t_i^{(n_j)})\Big]. \tag{5.50}$$

Возьмем произвольную иную весовую функцию $\Psi(t)$ и положим

$$q_i^{(n)} = \Psi(t_{i+1}^{(n)}) - \Psi(t_i^{(n)}), \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, n, \\ n = 1, 2, \ldots, \end{array}$$

где точки $t_i^{(n)}$ определены уравнением (5.47). Тогда будет

$$\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Psi(r)\Big] = \lim_{j\to\infty} \mathbf{D}^2\Big[\sum_{i=0}^{n_j} q_i^{(n_j)} x(t_i^{(n_j)})\Big]. \tag{5.51}$$

Из уравнений (5.50) и (5.51) и из неравенств (5.48) вытекает, что

$$\mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Phi(t)\Big] \leqq \mathbf{D}^2\Big[\int_0^T x(t)\, \mathrm{d}\Psi(t)\Big], \tag{5.52}$$

это эквивалентно утверждению, что $\Phi(t)$ — наилучшая весовая функция; как уже было сказано, $\Phi(t)$ не убывает, а из теоремы 5.4 следует, что не существует никаких других наилучших весовых функций. Действительно, лучшая линейная оценка представляет собой одну определенную точку гильбертова пространства, и как таковая, согласно теореме 5.4, не может быть представлена при помощи двух различных весовых функций.

§ 6. Линейная оценка дисперсии

Дисперсия стационарного случайного процесса $x(t)$ является средней процесса

$$[x(t) - \mathsf{E}\, x(t)]^2 \,. \tag{6.1}$$

Если процесс $x(t)$ есть гауссов процесс[4]), то справедливо следующее соотношение между его корреляционной функцией и корреляционной функцией процесса (6.1):

Теорема 6.1. *Если корреляционная функция $R(\tau)$ гауссова стационарного процесса $x(t)$ является выпуклой, то будет выпуклой тоже корреляционная функция $Q(\tau)$ процесса* (6.1), *точнее*

$$Q(\tau) = R^2(\tau)\,. \tag{6.2}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из следующего известного свойства двумерного нормального распределения:

$$\frac{1}{2\pi(1 - R^2(\tau))^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 v^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2 - 2R(\tau)uv + v^2}{1 - R^2(\tau)}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1 + 2R^2(\tau).$$

Пример. В важном частном случае, когда $R(\tau) = e^{-a\tau}$, следовательно получим $Q(\tau) = e^{-2a\tau}$, так что наилучшая линейная оценка дисперсии будет по аналогу с уравнением (4.11) равна

$$s^2 = \frac{1}{1 + aT}\,\{\tfrac{1}{2}[x(0) - m]^2 + \tfrac{1}{2}[x(T) - m]^2 + a\int_0^T [x(t) - m]^2\,\mathrm{d}t\}\,, \tag{6.3}$$

где $m = \mathsf{E}\, x(t)$. Ее дисперсия, согласно (4.12), будет равна

$$\mathsf{D}^2 s^2 = \frac{2\sigma^2}{1 + aT}\,. \tag{6.4}$$

§ 7. Линейная оценка фунции распределения

Значение функции распределения $G(h)$ стационарного процесса $x(t)$ в точке h равно средней процесса $\chi(t)$, определенного следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= 1\,, \quad \text{если } x(t) < h\,, \\ &= 0\,, \quad \text{в противном случае.} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Если процесс $x(t)$ есть гауссов процесс, то справедливо следующее соотношение между его корреляционной функцией и корреляционной функцией процесса (7.1):

[4]) Стационарный процесс называем гауссовым процессом, если векторы $\{x(t_1), \ldots, \ldots, x(t_n)\}$ имеют нормальное распределение.

Теорема 7.1. *Если корреляционная функция $R(\tau)$ гауссова стационарного случайного процесса $x(t)$ удовлетворяет соотношению $R(\tau) \geqq 0$, то корреляционная функция $Q(\tau)$ стационарного процесса случайного $\chi(t)$, определенного уравнениями* (7.1), *удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqq Q(\tau) \leqq R(\tau) . \tag{7.2}$$

Доказательство. Не умаляя общности, можем предположить, что $\mathsf{E}x(t) = 0$ и $\mathsf{E}x^2(t) = 1$, так что

$$G(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{v^2}{2}} \,\mathrm{d}v . \tag{7.3}$$

Положим

$$B(\tau) = \mathsf{E}\chi(t)\,\chi(t-\tau) = \frac{1}{2\pi(1-R^2(\tau))^{1/2}} \int_{-\infty}^{h}\int_{-\infty}^{h} e^{-\frac{1}{2}\frac{u^2-2R(\tau)uv+v^2}{1-R^2(\tau)}} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{h}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R^2(\tau))}} \int_{\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}\frac{(v-R(\tau)u)^2}{1-R^2(\tau)}} \,\mathrm{d}v\right] \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}u , \tag{7.4}$$

или же пользуясь (7.3),

$$B(\tau) = 2\int_{-\infty}^{h} G\left(u\sqrt{\frac{1-R(\tau)}{1+R(\tau)}}\right) \mathrm{d}G(u) . \tag{7.5}$$

Так как

$$1 - R(\tau) < \sqrt{\frac{1-R(\tau)}{1+R(\tau)}} ,$$

а так как функция $G(z)$ является при $z \leqq 0$ выпуклой, то для $u \leqq 0$ справедливы следующие неравенства:

$$G\left(u\sqrt{\frac{1-R(\tau)}{1+R(\tau)}}\right) \leqq G(u[1-R(\tau)]) \leqq [1-R(\tau)]\,G(u) + R(\tau)\,G(0) .$$

Отсюда, подставляя в (7.5), получаем для $h \leqq 0$

$$\begin{aligned} B(\tau) &\leqq 2\int_{-\infty}^{h}([1-R(\tau)]\,G(u) + R(\tau)\,G(0))\,\mathrm{d}G(u) = \\ &= [1-R(\tau)]\,G^2(h) + R(\tau)\,G(h) , \end{aligned} \tag{7.6}$$

или же

$$Q(\tau) = \frac{B(\tau)-G^2(h)}{G(h)(1-G(h))} \leqq \frac{[1-R(\tau)]\,G^2(h) + R(\tau)\,G(h) - G^2(h)}{G(h)(1-G(h))} = R(\tau) . \tag{7.7}$$

с другой стороны, для $h \leqq 0$ также будет

$$B(\tau) \geqq 2 \int_{-\infty}^{h} G(u)\,\mathrm{d}G(u) = G^2(h)\,,$$

откуда следует

$$Q(\tau) \geqq 0\,. \tag{7.8}$$

Неравенства (7.7) и (7.8) дают (7.2) при $h \leqq 0$. Если же $h > 0$, то достаточно вспомнить, что процесс $\chi(t|h)$ и процесс $1 - k(t|-h)$ имеют одно и то же распределение, следовательно, и одну и ту же корреляционную функцию.

Summary

LINEAR ESTIMATION OF THE MEAN VALUE OF A STATIONARY RANDOM PROCESS WITH CONVEX CORRELATION FUNCTION

JAROSLAV HÁJEK, Praha.

(Received June 30, 1955.)

The main results are derived by means of the special spectral representation (3.2) of a (downward) convex correlation function. In the theorem 5.1 is given the lower bound for variance of a linear estimate of the mean value of a stationary random process with convex correlation function. In the theorem 5.2 asserts, that the usual estimate (5.14) is asymptotically efficient in the sense of the definition 5.1. In the theorem 5.5 is shown, that to each convex correlation function exists one and only one weighting function $\Phi(\lambda)$ which offers the best liner estimate in the form (4.1); $\Phi(\lambda)$ is nondecreasing.