Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Quelques problèmes de la géométrie différentielle affine et projective des correspondances entre les surfaces

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 177–189

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100191

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

QUELQUES PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE AFFINE ET PROJECTIVE DES CORRESPONDANCES ENTRE LES SURFACES

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 12 juillet 1955.)

Dans la première partie du travail l'auteur étudie les problèmes d'existence de certains types de correspondances entre deux surfaces dans les espaces affines à trois dimensions. Ces correspondances sont définies par des conditions imposées aux transformations linéarisantes relatives à elles et remplissent ainsi la grande lacune qui existe entre les déformations affines du premier et du second ordres.

Dans la second partie on pose quelques problèmes de la géometrie différentielle projective et affine.

La théorie des correspondances entre les espaces projectifs créée pendant les dernières années par M. E. ČECH a beaucoup d'importance même pour l'étude des correspondances entre les variétés et l'on conçoit la nécessité de revoir la théorie d'une variété du point de vue de la théorie des correspondances. A l'aide des transformations linéarisantes on a rempli la grande lacune qui existait entre les déformations du n-ième et du $(n + 1)$-ième ordre en y insérant toute une gamme de correspondances à nuances plus subtiles. Il est nécessaire d'étudier les transformations linéarisantes des correspondances entre les variétés en relation avec les espaces distingués qu'on peut attacher à la variété (espace tangent ou osculateur, tangente asymptotique etc.) à un de ses points.

Cette affirmation est documentée dans la première partie du présent travail à l'aide de la théorie des correspondances entre deux surfaces dans l'espace affin à trois dimensions. Les problèmes de déformations affines des surfaces du premier ou du second ordre sont banaux dans le sens que chaque correspondance est une déformation affine de premier ordre, il n'existe cependant pas de deux surfaces affinement différentes qui soient en déformation affine d'ordre 2. En introduisant certains types de correspondances qui occupent une place intermédiaire entre ces déformations et en résolvant leurs problèmes d'existence je veux montrer que la théorie des correspondances des surfaces dans A_3 est loin d'être épuisée.

Je ne m'efforçais pas à donner une revue complète de tous les types possibles de correspondances etc. Il me paraît plus important d'énoncer quelques problèmes qu'on peut formuler sans difficultés et qu'il faut résoudre dans une théorie systématique des correspondances. C'est donc la seconde partie du travail qui est plus importante.

Je tiens à remercier M. Čech de toutes ses instigations qu'il m'a données soit directement, soit indirectement. Je crois qu'il ne serait pas tout-à-fait correct de s'efforcer à donner ici la mesure exacte dans laquelle il participe aux problèmes suivants (une exception forment les espaces normalisés étudiés uniquemont par lui). Peut être pourrais-je exprimer la grande estime que j'ai pour son oeuvre plutôt en soulignant le caractère stimulant de ses travaux et du contact personnel avec lui.

I

1. Je vais considérer une surface (A) dans l'espace affine à trois dimensions. A chaque point de cette surface je fais correspondre un repère consistant dans le point lui-même et dans trois vecteurs I_1, I_2, I_3, linéairement indépendants Si je choisis les points $A + I_1$, $A + I_2$ dans le plan tangent les équations différentielles de la surface seront

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 , \\ \mathrm{d}I_1 &= \omega_{11} I_1 + \omega_{12} I_2 + \omega_{13} I_3 , \\ \mathrm{d}I_2 &= \omega_{21} I_1 + \omega_{22} I_2 + \omega_{23} I_3 , \\ \mathrm{d}I_3 &= \omega_{31} I_1 + \omega_{32} I_2 + \omega_{33} I_3 \end{aligned} \tag{1}$$

avec les conditions d'integrabilité

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega_i] &= [\omega_j \omega_{ji}] , \\ [\mathrm{d}\omega_{ik}] &= [\omega_{ij} \omega_{jk}] . \end{aligned} \tag{2}$$

Donc

$$\omega_3 = 0 \tag{3}$$

d'où j'obtiens par différentiation extérieure

$$[\omega_1 \omega_{13}] = [\omega_2 \omega_{23}] = 0 , \tag{4}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 , \\ \omega_{23} &= \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 . \end{aligned} \tag{5}$$

Par le même procédé j'obtiens encore

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}\alpha + \alpha(\omega_{33} - 2\omega_{11}) - 2\beta\omega_{12}\omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}\beta + \beta(\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{22}) - \alpha\omega_{21} - \gamma\omega_{12}\omega_2] = 0, \\ &[\mathrm{d}\beta + \beta(\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{22}) - \alpha\omega_{21} - \gamma\omega_{12}\omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}\gamma + \gamma(\omega_{33} - 2\omega_{22}) - 2\beta\omega_{21}\omega_2] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\delta\alpha &= \alpha(2e_{11} - e_{33}) + 2\beta e_{12}\,,\\ \delta\beta &= \beta(e_{11} + e_{22} - e_{33}) + \alpha e_{21} + \gamma e_{12}\,,\\ \delta\gamma &= \gamma(2e_{22} - e_{33}) + 2\beta e_{21}\,.\end{aligned} \tag{7}$$

Sur la surface (A) on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2A = (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\omega_{11} + \omega_2\omega_{21} + \omega_3\omega_{31})\, I_1 + \\ + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_1\omega_{12} + \omega_2\omega_{22} + \omega_3\omega_{32})\, I_2 + \\ +(\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})\, I_3\,.\end{aligned}$$

L'équation différentielle des courbes asymptotiques de la surface (A) sera

$$\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = \alpha\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \gamma\omega_2^2 = 0\,. \tag{8}$$

Si je me borne aux surfaces non développables je peux en vertu de (7) choisir

$$\alpha = \gamma = 0,\ \beta = 1 \tag{9}$$

de façon que (5) devient

$$\omega_{13} = \omega_2,\ \omega_{23} = \omega_1\,. \tag{10}$$

Par différentiation extérieure j'obtiens

$$\begin{aligned}&[\omega_{12}\omega_1] + \tfrac{1}{2}[\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] = 0\,,\\ &\tfrac{1}{2}[\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\omega_1] + [\omega_{21}\omega_2] = 0\end{aligned} \tag{11}$$

d'où

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= A_1\omega_1 + A_2\omega_2\,,\\ \tfrac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) &= A_2\omega_1 + A_3\omega_2\,,\\ \omega_{21} &= A_3\omega_1 + A_4\omega_2\,.\end{aligned} \tag{12}$$

2. Soient maintenant données la surface (A) et une autre surface (B) par les équations

$$\begin{aligned}\mathrm{d}B &= \Omega_1 J_1 + \Omega_2 J_2\,,\\ \mathrm{d}J_i &= \Omega_{ij} J_j\end{aligned} \tag{13}$$

avec les conditions d'intégrabilité évidentes. Pour la surface (B) j'ai des relations analogues aux relations (3), (5) et (10):

$$\Omega_3 = 0\,, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{13} &= \bar{\alpha}\Omega_1 + \bar{\beta}\Omega_2\,,\\ \Omega_{23} &= \bar{\beta}\Omega_1 + \bar{\gamma}\Omega_2\,,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\Omega_{13} = \Omega_2,\ \Omega_{23} = \Omega_1\,, \tag{15'}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= \bar{A}_1\Omega_1 + \bar{A}_2\Omega_2\,,\\ \tfrac{1}{2}(\Omega_{11} + \Omega_{22} - \Omega_{33}) &= \bar{A}_2\Omega_1 + \bar{A}_3\Omega_2\,,\\ \Omega_{21} &= \bar{A}_3\Omega_1 + \bar{A}_4\Omega_2\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Je suppose *qu'il soit donné entre les surfaces* (A) *et* (B) *une correspondance* C:

$$\Omega_1 = \omega_1,\ \Omega_2 = \omega_2 \tag{17}$$

et que les repères des deux surfaces soient choisis de telle sorte que l'affinité $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}A = B,\ \mathbf{T}I_i = J_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

soit une *affinité tangente* de façon que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}A &= B\,, \\ \mathbf{T}\,\mathrm{d}A &= \mathrm{d}B\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Pour abréger j'introduis la notation

$$\tau_i = \omega_i - \Omega_i,\ \tau_{ij} = \omega_{ij} - \Omega_{ij}\,. \tag{20}$$

Pour l'affinité (14) j'ai

$$\mathbf{T}\,\mathrm{d}^2A = \mathrm{d}^2B + L \tag{21}$$

où

$$L = \Phi_1 J_1 + \Phi_2 J_2 + \Phi_3 J_3 \tag{22}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tau_{11}\omega_1 + \tau_{21}\omega_2\,, \\ \Phi_2 &= \tau_{12}\omega_1 + \tau_{22}\omega_2\,, \\ \Phi_3 &= \tau_{13}\omega_1 + \tau_{23}\omega_2 \end{aligned} \tag{23}$$

comme il est facile de vérifier par un calcul direct.

La transformation $\mathfrak{L}$ pour laquelle

$$\{\mathfrak{L}(\omega_1 J_1 + \omega_2 J_2)\} = \{\Phi_1 J_1 + \Phi_2 J_2 + \Phi_3 J_3\} \tag{24}$$

où $\{J\}$ désigne la direction déterminée par le vecteur J, sera appelée *transformation $\mathbf{T}$-linéarisante* de la correspondance (17) relative à l'affinité tangente (18). La direction $\{\mathfrak{L}J\}$ sera appelée direction $\mathbf{T}$-linéarisante de la direction tangente $\{J\}$. La signification géométrique de la transformation ainsi introduite est bien connu pour les correspondances entre les espaces entiers, on peut cependant la transmettre directement au cas consideré.

A chaque direction tangente à la surface (B) correspond une *direction $\mathbf{T}$-linéarisante* (qui n'est pas située, en général, dans le plan tangent) jouissant des propriétés suivantes — γ étant une courbe située sur la surface (B) passant par le point B et telle que $KC^{-1}B = B$—

1° Si la direction $\mathbf{T}$-linéarisante de la direction tangente $\{J\}$ de la courbe γ au point B ne coïncide pas avec $\{J\}$ et qu'elle ne soit pas indéterminée, alors la projection des courbes γ et $KC^{-1}\gamma$ dans la direction $\{\mathfrak{L}J\}$ a un contact analytique de second ordre.

2° Si la direction $\{\mathfrak{L}J\} \neq \{0\}$ coïncide avec la direction $\{J\}$ tangente à la courbe γ au point B et que γ y ait une inflexion, alors $KC^{-1}\gamma$ en a une également; mais toujours les courbes γ et $KC^{-1}\gamma$ n'ont pas de contact affine de second ordre et il n'existe pas de direction telle que les projections des courbes γ et $KC^{-1}\gamma$ dans cette direction aient un contact affine de second ordre. Une telle direction $\{J\}$ sera appelée *$\mathbf{T}$-caractéristique.*

3° Si $\{\mathfrak{L}J\} = \{0\}$ alors les courbes γ et $KC^{-1}\gamma$ ont un contact affine d'ordre deux — une telle direction sera appelée *$\mathbf{T}$-principale.*

Maintenant il est possible de chercher les correspondances entre les surfaces (A) et (B) dont la transformation **T**-linéarisante a certaines propriétés, c'est-à-dire, comme il n'existe pas d'affinité tangente unique, je cherche de telles correspondances entre les surfaces pour lesquelles il existe une affinité tangente dont la transformation linéarisante jouit de certaines propriétés (données d'avance). Les conditions naturelles et en même temps les plus simples imposées aux transformations linéarisantes sont celles exigeant qu'aux directions asymptotiques correspondent relativement à la transformation linéarisante certaines directions données. Dans la suite j'étudierai les questions d'existence de quelques-uns de tels types de correspondances.

3. La condition la plus simple imposée à une correspondance entre deux surfaces (A) et (B) est que pour une affinité tangente convenablement choisie *les directions linéarisantes de toutes les directions tangentes soient elles-mêmes tangentes*. Je suppose les surfaces (A) et (B) données de façon que (3), (10), (12), (14), (15) valent; la correspondance cherchée sera alors donnée, en vertu de (23), par les équations (17) et par

$$\tau_{13} = 0, \ \tau_{23} = 0 . \tag{25}$$

Cela avec (10) implique (15′) de sorte que la correspondance est asymptotique. On voit facilement que la condition considérée est équivalente à la condition de *correspondance asymptotique* entre les deux surfaces.

4. Je demande maintenant que pour une affinité tangente **T** convenable *une des directions asymptotiques soit **T**-caractéristique*. Je suppose la surface (A) donnée de façon que (3), (10) et (12) valent. Le système déterminant les surfaces (B) qui sont en correspondance citée avec (A) est donné par (14), (17) et

$$\tau_{11} = 0, \ \tau_{12} = 0, \ \tau_{13} = 0 \tag{26}$$

d'où

$$\begin{aligned} [\omega_1\omega_2] + [\omega_2\Omega_{23}] &= 0 , \\ [\omega_2\tau_{21}] &= 0 , \\ [\omega_2\tau_{22}] &= 0 , \\ [(A_1\omega_1 + A_2\omega_2)\, \tau_{21}] + [\omega_2\tau_{31}] &= 0 , \\ [(A_1\omega_1 + A_2\omega_2)\, \tau_{22}] + [\omega_2\tau_{32}] &= 0 , \\ [(A_1\omega_1 + A_2\omega_2)(\omega_1 - \Omega_{23})] + [\omega_2\tau_{33}] &= 0 . \end{aligned} \tag{27}$$

Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes $\Omega_{23}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33}$ est

$$\begin{vmatrix} \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1\omega_1 + A_2\omega_2 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1\omega_1 + A_2\omega_2 & 0 & \omega_2 & 0 \\ - A_1\omega_1 - A_2\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{vmatrix} = \omega_2^6 . \tag{28}$$

Le système fermé (14) + (17) + (26) + (27) est en involution et *les surfaces qui correspondent à la surface donnée par la correspondance considérée dépendent de six fonctions d'une variable.* La correspondance est demiasymptotique, les caractéristiques sont les asymptotiques de la famille transformée en asymptotiques.

5. Je pose la condition que *la correspondance entre les deux surfaces soit asymptotique et que pour une affinité tangente convenable la direction linéarisante de la direction asymptotique $\{J_1\}$ coïncide avec l'autre direction asymptotique $\{J_2\}$.* Je suppose la surface (A) donnée par (3), (10), (12), les surfaces (B) qui sont en correspondance considérée sont données par le système (14), (17), (25) avec la condition

$$\tau_{11} = 0 . \tag{29}$$

Par différentiation extérieure j'obtiens

$$\begin{aligned} [\omega_2(A_3\omega_1 - \Omega_{21})] &= 0 , \\ [\omega_1(A_2\omega_2 - \Omega_{12})] + [\omega_2\tau_{22}] &= 0 , \\ [\omega_1(A_2\omega_2 - \Omega_{12})] - [\omega_2\tau_{33}] &= 0 , \\ [\omega_1(\tau_{33} - \tau_{22})] - [\omega_2(A_3\omega_1 - \Omega_{21})] &= 0 , \\ (A_1A_4 - A_2A_3)[\omega_1\omega_2] - [\Omega_{12}\Omega_{21}] + [\omega_2\tau_{31}] &= 0 . \end{aligned} \tag{30}$$

Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes Ω_{21}, Ω_{12}, τ_{22}, τ_{33}, τ_{31} est

$$\begin{vmatrix} \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & \omega_2 & 0 \\ \omega_2 & 0 & -\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ -\Omega_{12} & \Omega_{21} & 0 & 0 & \omega_2 \end{vmatrix} = -2\omega_1^2\omega_2^3 . \tag{31}$$

Le système fermé (14) + (17) + (25) + (29) + (30) est en involution et *les surfaces qui sont en correspondance en question avec la surface donnée dépendent de cinq fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont les courbes asymptotiques.

6. Je demande que *la correspondance entre les deux surfaces soit asymptotique et que pour une affinité tangente convenable la direction asymptotique $\{J_1\}$ soit caractéristique.* Je suppose comme d'habitude la surface (A) donnée par (3),(10) et (12). Les surfaces (B) en correspondance de type consideré sont données par le système (14), (17), (25) et par

$$\tau_{12} = 0 . \tag{32}$$

Ce système devient fermé lorsqu'on y ajoute les équations

$$\begin{aligned} [\omega_1\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{21}] &= 0 , \\ [\omega_2\tau_{22}] &= 0 , \\ [\omega_2(\tau_{33} - \tau_{11})] &= 0 , \\ [\omega_1(\tau_{33} - \tau_{22})] - [\omega_2\tau_{21}] &= 0 , \\ [(A\omega_1 + A_2\omega_2)(\tau_{22} - \tau_{11})] + [\omega_2\tau_{32}] &= 0 . \end{aligned} \tag{33}$$

Le déterminant de la matrice polaire est égal à $-2\omega_1\omega_2^4$. Le système (14) + + (17) + (25) + (32) + (33) est en involution de sorte que *les surfaces qui sont en correspondance considérée avec la surface donnée dépendent de cinq fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont les courbes asymptotiques.

7. Je demande que la correspondance soit asymptotique et que pour une affinité tangente convenable la direction asymptotique $\{J_1\}$ soit principale. Les paires de surfaces en correspondance considerée sont données par le système (3) + (10) + (14) + (17) + (25) + (29) + (32) avec les conséquences differentielles (11) et

$$\begin{aligned} [\omega_2\tau_{21}] &= 0\,, \\ [\omega_2\tau_{22}] &= 0\,, \\ [\omega_2\tau_{33}] &= 0\,, \\ [\omega_1(\tau_{33} - \tau_{22})] - [\omega_2\tau_{21}] &= 0\,, \\ [\omega_{12}\tau_{21}] + [\omega_2\tau_{31}] &= 0\,, \\ [\omega_{12}\tau_{22}] + [\omega_2\tau_{32}] &= 0\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Le déterminant de la matrice polaire est égal à $\omega_1^2\omega_2^6$. Le système est en involution et *la paire de surfaces en correspondance considérée dépend de huit fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont les courbes asymptotiques.

La correspondance en question représente le cas affin de la *demidéformation asymptotique* de M. E. Čech.

8. J'impose la condition que *les deux surfaces soient en correspondance de telle sorte que pour une affinité tangente convenable la direction linéarisante correspondant à l'une des directions asymptotiques soit l'autre direction asymptotique*; soit $\{\mathfrak{L}J_1\} = \{J_2\}$, $\{\mathfrak{L}J_2\} = \{J_1\}$. La surface (A) soit donnée par (3), (10), (12). Les surfaces (B) qui sont avec (A) en correspondance considérée sont données par le système fermé (14) + (17) + (25) + (29) et

$$\tau_{22} = 0\,, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} [\omega_2(A_3\omega_1 - \Omega_{21})] &= 0\,, \\ [\omega_1(A_2\omega_2 - \Omega_{12})] &= 0\,, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} (A_1A_4 - A_2A_3)[\omega_1\omega_2] - [\Omega_{12}\Omega_{21}] + [\omega_2\tau_{31}] &= 0\,, \\ (A_2A_3 - A_1A_4)[\omega_1\omega_2] + [\Omega_{12}\Omega_{21}] + [\omega_1\tau_{32}] &= 0\,, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} [\omega_2\tau_{33}] &= 0\,, \\ [\omega_1\tau_{33}] &= 0\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Or, (38) implique

$$\tau_{33} = 0 \tag{39}$$

d'où par différentiation extérieure

$$[\tau_{31}\omega_2] + [\tau_{32}\omega_1] = 0\,, \qquad [40]$$

mais je reçois le même résultat en additionnant les équation (37). Les surfaces (B) sont donc données par le système fermé (14) + (17) + (25) + (29) +

$+ (35) + (39) + (37_1) + (40)$ qui est en involution et *les surfaces qui sont en correspondance considérée avec la surface donnée dépendent de quatre fonctions d'une variable.* Le déterminant de la matrice polaire égale $\omega_1^2\omega_2^2$ de façon que les caractéristiques sont les courbes asymptotiques.

9. Je vais étudier à présent les correspondances qui satisfont à la condition suivante: *pour une affinité tangente convenablement choisie l'une des directions asymptotiques*, soit $\{J_1\}$, *est caractéristique et représente en même temps la direction linéarisante de l'autre direction asymptotique* $\{J_2\}$.

Les paires de surfaces en correspondance considérée sont données par le système $(3) + (10) + (14) + (17) + (25) + (32) + (35)$ que l'on ferme en y ajoutant (11) et

$$\begin{aligned} [\omega_1\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{21}] &= 0\,, \\ -[\omega_{12}\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{32}] &= 0\,, \\ [\omega_2(\tau_{33} - \tau_{11}] &= 0\,, \\ [\tau_{21}\omega_{12}] + [\omega_1\tau_{32}] &= 0\,, \\ [\omega_1\tau_{33}] + [\tau_{21}\omega_2] &= 0\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes ω_{12}, $\frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33})$, ω_{21}, τ_{11}, τ_{21}, τ_{32}, τ_{33}, est

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ -\tau_{11} & 0 & 0 & -\omega_{12} & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \tau_{21} & 0 & 0 & 0 & -\omega_{12} & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & \omega_1 \end{vmatrix} = 2\omega_1\omega_2^4\Phi_1\,. \tag{42}$$

Le système est en involution et *les paires de surfaces en correspondance considérée dépendent de sept fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont les courbes asymptotiques et le réseau de courbes

$$\Phi_1 = 0\,. \tag{43}$$

La transformation linéarisante (24) s'exprime dans ce cas par

$$\{\mathfrak{L}(\omega_1 J_1 + \omega_2 J_2)\} = \{\Phi_1 J_1\}$$

de façon que les directions (43) sont celles dans lesquelles l'affinité tangente considérée réalise un contact de second ordre.

10. Je vais considérer une correspondance entre deux surfaces telle que *pour une affinité tangente convenable la direction asymptotique* $\{J_1\}$ *est principale et représente en même temps la direction linéarisante de l'autre direction asymptotique* $\{J_2\}$.

Les paires de surfaces en correspondance considérée sont données par le système $I \equiv (3) + (10) + (14) + (17) + (25) + (29) + (32) + (35)$ d'équations linéaires que l'on ferme à l'aide des équations quadratiques (11) et de

$$\begin{aligned} [\omega_2 \tau_{21}] &= 0 , \\ [\omega_{12} \tau_{21}] + [\omega_2 \tau_{31}] &= 0 , \\ [\omega_2 \tau_{32}] &= 0 , \\ [\omega_2 \tau_{33}] &= 0 , \\ [\tau_{21} \omega_{12}] + [\omega_1 \tau_{32}] &= 0 , \\ [\omega_1 \tau_{33}] &= 0 . \end{aligned} \tag{44}$$

$(44_{6,7})$ implique

$$\tau_{33} = 0 \tag{39}$$

la conséquence différentielle (40) vant, car elle s'ensuit de $(44_{2,5})$ par addition: J'ai donc le système fermé (I) + (39) + (11) + $(44_{1,2,3,5})$ qui est en involution. Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes ω_{12}, $\frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33})$, ω_{21}, τ_{21}, τ_{31}, τ_{32} est

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ -\tau_{21} & 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \tau_{21} & 0 & 0 & -\omega_{12} & 0 & \omega_1 \end{vmatrix} = -\tau_{21}\omega_2^5 . \tag{45}$$

Les paires de surfaces en correspondance considerée dépendent de six fonctions d'une variable. En vertu de

$$\Phi_1 = \tau_{21}\omega_2, \ \Phi_2 = \Phi_3 = 0$$

les caractéristiques sont formées par le réseau des courbes de contact d'ordre plus élevé. Une de ses couches se compose des asymptotiques dont les directions tangentes sont précisément $\{J_1\}$.

11. *Correspondance entre deux surfaces pour laquelle il y a une affinité tangente convenable telle que toutes les deux directions asymptotiques sont principales.* Les paires de surfaces en correspondance de ce genre sont données par le système (3) + (10) + (14) + (17) + (25) + (29) + (32) + (35) et par

$$\tau_{22} = 0 \tag{46}$$

que l'on forme en y ajoutant (11) et

$$\begin{aligned} [\omega_1 \tau_{31}] = 0, \ [\omega_2 \tau_{31}] &= 0 , \\ [\omega_1 \tau_{32}] = 0, \ [\omega_2 \tau_{32}] &= 0 , \\ [\omega_1 \tau_{33}] = 0, \ [\omega_2 \tau_{33}] &= 0 . \end{aligned} \tag{47}$$

On a donc

$$\tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} = 0 \tag{48}$$

et je reçois le résultat bien connu: *deux surfaces qui sont en déformation affine de second ordre se correspondent respectivement par une affinité.*

12. Ici, j'étudie une telle *correspondance pour laquelle il y a, pour une affinité tangente convenable une direction tangente totalement linéarisante.* Je suppose la surface (A) donnée, donc (3), (5). Le système déterminant les surfaces (B) sera (14) + (17) + (25) + (32) + (35); par une différentiation extérieure j'obtiens

$$\begin{aligned} [\omega_1\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{21}] &= 0\,, \\ -[\omega_{12}\tau_{11}] + [(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)\,\tau_{32}] &= 0\,, \\ [\tau_{21}\omega_{12}] + [(\beta\omega_1 + \gamma\omega_2)\,\tau_{32}] &= 0\,, \\ [(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)(\tau_{33} - \tau_{11})] &= 0\,, \\ [(\beta\omega_1 + \gamma\omega_2)\,\tau_{33}] + [\tau_{21}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)] &= 0\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes τ_{11}, τ_{21}, ω_{12}, τ_{32}, τ_{33} sera

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \tau_{11} & \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 & 0 \\ 0 & -\omega_{12} & \tau_{21} & \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 & 0 \\ -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2 & 0 & 0 & 0 & \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ 0 & -\alpha\omega_1 - \beta\omega_2 & 0 & 0 & \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega_{13}(\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23})(\tau_{11}\omega_{23} - \omega_{13}\tau_{21})\,. \tag{50}$$

On voit tout de suite que le système est en involution et que *les surfaces qui sont en correspondance considérée avec la surface donnée dépendent de cinq fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont

1° les asymptotiques;

2° la famille de courbes conjuguée à la famille de courbes donnée par les directions totalement linéarisantes;

3° le Jacobien du réseau des asymptotiques et de celui des courbes d'élévation d'ordre du contact plus élevé.

13. Je considère une *correspondance du type précédant mais où la direction totalement linéarisante est asymptotique*, soit $\{J_1\}$. Les paires de surfaces dans cette correspondance sont données par le système (3) + (10) + (14) + (17) + + (25) + (32) + (35) + (11) et par

$$\begin{aligned} [\omega_1\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{21}] &= 0\,, \\ -[\omega_{12}\tau_{11}] + [\omega_2\tau_{32}] &= 0\,, \\ [\tau_{21}\omega_{12}] + [\omega_1\tau_{32}] &= 0\,, \\ [\omega_2(\tau_{33} - \tau_{11})] &= 0\,, \\ [\omega_1\tau_{32}] + [\tau_{21}\omega_2] &= 0\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Le déterminant de la matrice polaire dont les colonnes correspondent aux formes ω_{12}, $\frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33})$, ω_{21}, τ_{11}, τ_{21}, τ_{32}, τ_{33} est

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \tau_{11} & 0 & 0 & -\omega_{12} & 0 & \omega_2 & 0 \\ \tau_{21} & 0 & 0 & 0 & -\omega_{12} & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & \omega_1 \end{vmatrix} = 2\omega_1\omega_2^4(\omega_1\tau_{11} - \omega_2\tau_{21}) \,. \qquad (52)$$

Les paires de surfaces en correspondance considerée dépendent de sept fonctions d'une variable. Les caractéristiques sont les asymptotiques et leur Jacobien avec le réseau de courbes d'élévation d'ordre du contact.

II

14. La partie précédante avait pour but de faire remarquer que la théorie des transformations linéarisantes de M. Čech des correspondances entre les variétés de deux espaces donne des résultats non-banaux déjà dans le cas le plus simple de surfaces dans un espace affine. Or cette théorie ne donne rien de nouveau dans l'espace projectif à trois dimensions. Il serait donc intéressant de résoudre le

Problème I. *Introduire des transformations, analogues aux transformations linéarisantes, et telles que l'ordre de contact augemente de deux par une projection.*

De là découle le

Problème II. *Appliquer la théorie de ces transformations nouvelles à l'étude d'une seule surface dans S_3 en la considérant comme une transformation de cette surface en une surface dans l'espace S_3^* corrélatif, formée des plans tangents.*

15. Il est important d'établir le degré de généralité de certains types de surfaces etc., mais exprimé en forme de „la variété dépend de n fonctions de m variables" ne contentera sûrement pas le géomètre, car celui-ci désire avoir les n fonctions données d'une manière „géomètrique". Plus exactement: il s'agit du problème de géométrisation des conditions initiales d'un certain problème. Pour les surfaces de types spéciaux dans S_3 dépendant de fonctions d'une variable une clé à ce problème sera la théorie des *bandes* introduites par M. E. Čech dans ses travaux: *Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine* (resp. *projectif*), *Spisy Brno*, N° 28 (1923), resp. N° 46 (1924).

M. Čech a considéré des bandes d'éléments de surface, mais ce n'est pas nécessaire. J'eppelle *bande de Darboux* d'une surface non réglée l'ensemble composé d'une courbe non asymptotique de la surface en y ajoutant, à chaque point de la courbe, son plan tangent et les trois tangentes de Darboux. J'appelle *bande asymptotique* d'une surface non développable une courbe non asymptotique de la surface avec, à chaque point de la courbe, son plan tangent et ses deux tangentes asymptotiques. Une bande de Darboux en tant qu'une figure autonome prise séparément de la surface dépend de six fonctions d'une variable, une bande asymptotique dépend de cinq fonctions d'une variable. Ce qui me paraît important, c'est le

Problème III. *Ayons, dans l'espace projectif à trois dimensions, une courbe et par chaque son point trois droites situées dans le plan tangent correspondant. Existe-t-il alors une surface R déformable projectivement et telle qu'une bande donnée d'avance soit sa bande de Darboux?*

Le problème suivant est en rapport avec la théorie affine étudiée dans la première partie. Il s'agit du

Problème IV. *Soient données dans l'espace affine à trois dimensions une surface non développable* (A) *et une courbe gauche par chaque point de laquelle passent deux droites qui ne lui sont pas tangentes tout en étant situées dans un plan tangent qui n'est pas osculateur. Existe-t-il alors une surface* (B) *en demidéformation affine avec* (A) *et ayant une bande donnée d'avance pour sa bande asymptotique?*

16. L'hyperplan à l'infini de l'espace affin A_n est un espace projectif S_{n-1} Les droites à l'infini des plans tangents à une surface π dans A_n forment dans S_{n-1} une congruence des droites. On peut formuler le

Problème V. *Etudier la congruence des droites à l'infini d'une surface dans* A_n *en se servant des travaux tout récents de M. Čech concernant la théorie des congruences des droites dans les espaces projectifs. Etudier en particulier la correspondance entre les congruences des droites à l'infini de plans tangents de deux surfaces qui sont en correspondance.*

En rapport avec le problème précédant M. Čech a formulé le problème que voici.

Problème VI. *Etude des espaces projectifs normalisés.*

Un *espace projectif normalisé* est un espace dans lequel est donnée une *transformation polaire* définie par exemple comme suit: à chaque point de l'espace on fait correspondre un hyperplan ne passant pas par ce point, et cela d'une telle manière que cette correspondance ne diffère qu'en quantités infinitésimales du second ordre d'une polarité par rapport à une hyperquadrique. Si la transformation polaire est constante j'obtiens le cas de l'espace affin, si elle est une polarité par rapport à une hyperquadrique, j'obtiens une géométrie non-euclidienne. Bien importante serait aussi l'etude d'une surface dans l'espace projectif normalisé.

17. Une congruence de droites avec deux surfaces focales différents induit entre elles une correspondance. Dans l'espace projectif à trois dimensions on a étudié en détail les congruences telles que la transformation en question jouit de certaines propriétés: les congruences W, les congruences de Fubini aux lignes de Darboux se correspondant respectivement, les congruences D à surfaces focales en déformation projective de second ordre, étudiées par MM. Čech et Finikov. Il se pose donc ici le

Problème VII. *Etudier, dans l'espace affin A_3, les congruences qui engendrent entre les surfaces focales une transformation d'un certain type spécial.*

Ce qui me paraît cependant plus important c'est le

Problème VIII. *Etudier les homographies ou encore les affinités tangentes d'une correspondance entre les surfaces focales en regardant particulièrement de plus près la question de savoir comment ces homographies (affinités) tangentes transforment la congruence. Etudier à leur tour les transformations linéarisantes de ces homographies (affinités) tangentes.*

LITÉRATURE

E. Čech: Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами I—VIII, Чехословацкий математический журнал, 1952.

V. Alda: Sur les propriétés affines des correspondances analytiques, Časopis pro pěstování matem. a fys., 75, pp. 51—67.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ АФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VII 1955 г.)

Пусть в трехмерном афинном пространстве A_3 дана поверхность π, в A_3' — поверхность π'; пусть между π и π' существует взаимно однозначное соответствие C. Для каждой пары соответственных точек обеих поверхностей существуют касательные аффинные преобразования соответствия C; для каждого касательного аффинного преобразования можно рассматривать соответствующую линеаризирующую трансформацию, которая является непосредственным обобщением линеаризирующей трансформации Чеха для соответствия между целыми проективными пространствами. Требованием существования касательных аффинных соответствий, линеаризирующие трансформации которых обладают наперед заданными свойствами, определяются некоторые соответствия, имеющие, очевидно, место ,,между" аффинными изгибаниями 1-го и 2-го порядка. По методам Картана решаются вопросы о существовании некоторых соответствий.

Вторая часть работы содержит восемь проблем из области проективной и афинной дифференциальной геометрии, касающихся как теории соответствий между поверхностями, так и теории конгруэнций прямых.