Czechoslovak Mathematical Journal

Václav Alda

Изометрические преобразования семейства гиперповерхностей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 195–211

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100193

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕМЕЙСТВА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 5/VII 1955 г.)

В работе иследуются соответствия между двумя n-мерными евклидовыми пространствами, преобразующие изометрическим образом каждую гиперповерхность данного однопараметрического семейства и ортогональные траектории этого семейства гиперповерхностей опять в ортогональные траектории преобразованного семейства.

Э. Картан в своей работе [1] решал вопрос о том, какие (n — 1)-мерные многообразия n-мерного евклидова пространства допускают нетривиальное изометрическое преобразование и какой вид имеет это преобразование. Пусть теперь дано пространство, разложенное на однопараметрическое семейство гиперповерхностей. Наиболее общее преобразование пространства, изометрически преобразующее каждую поверхность данного семейства, можно получить так: для каждого значения параметра выберем изометрическое преобразование соответствующей гиперповерхности; это однопараметрическое семейство преобразований и образует искомое преобразование пространства.

В настоящей работе исследуются соответствия между двумя n-мерными пространствами, которые кроме того, что преобразуют изометрически каждую гиперповерхность данного однопараметрического семейства, воспроизводят еще и ортогональные траектории этого семейства гиперповерхностей.

Математическим аппаратом служит теория аггрегатов Пфаффа, изложенная напр. в [2] или [3].

1. Точку общего положения в евклидовом n-мерном пространстве обозначим через A, само же пространство — через (A). Пусть, далее, дано отображение $\boldsymbol{T}$ этого пространства в другое n-мерное евклидово пространство. Точку, соответствующую точке A, обозначим через B, а все пространство через (B). Пусть в пространстве (A) дано однопараметрическое семейство $\mathfrak{S}$ гиперповерхностей Σ. Мы предполагаем, что якобиан соответствия не равен нулю и что через каждую точку проходит в точности одна гиперповерхность (по крайней мере в рассматриваемой нами части пространства). Пусть далее $n \geq 3$.

В точке A возьмем n взаимно перпендикулярных единичных векторов $I_1, \ldots, I_n$. Тогда имеем

$$\mathrm{d}A = \omega_1 I_1 + \ldots + \omega_n I_n ,$$

$$\mathrm{d}I_i = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} I_k , \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

причем

$$\omega_{ik} = -\omega_{ki} , \quad \omega_i' = \sum_{k=1}^{n} [\omega_k \omega_{ki}] , \quad \omega_{ik}' = \sum_{j=1}^{n} [\omega_{ij}\omega_{jk}] .$$

Аналогично, в точке B возьмем n взаимно перпендикулярных единичных векторов $J_1, \ldots, J_n$. Опять будет

$$\mathrm{d}B = \tau_1 J_1 + \ldots + \tau_n J_n ,$$

$$\mathrm{d}J_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_{ik} J_k ,$$

причем

$$\tau_{ik} = -\tau_{ki} , \quad \tau_i' = \sum_{k=1}^{n} [\tau_k \tau_{ki}] , \quad \tau_{ik}' = \sum_{j=1}^{n} [\tau_{ij}\tau_{jk}] .$$

Формы ω_i суть формы от дифференциалов параметров, определяющих положение точки A в пространстве. То же самое можно сказать и относительно форм τ_i и точки B. Ввиду существования преобразования $\boldsymbol{T}$ формы τ_i являются линейными комбинациями форм ω_i.

Подберем теперь векторы $I_1, \ldots, I_{n-1}$ так, чтобы они лежали в касательной гиперплоскости поверхности Σ, проходящей через точку A. Преобразование $\boldsymbol{T}$ переводит каждую поверхность Σ в поверхность Σ' пространства (B). Векторы $J_1, \ldots, J_{n-1}$ подберем так, чтобы они лежали в касательной гиперплоскости поверхности Σ', проходящей через точку B. Условие изометрического преобразования поверхности Σ выражается в виде уравнения

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \ldots + \tau_{n-1}^2 ,$$

поскольку $\omega_n = 0$.

Ортогональным преобразованием векторов $J_1, \ldots, J_{n-1}$ можно достигнуть того, чтобы

$$\tau_1 = \omega_1, \tau_2 = \omega_2, \ldots, \tau_{n-1} = \omega_{n-1} \pmod{\omega_n} . \tag{1}$$

Условие ортогональности вектора I_n к поверхности Σ выражается уравнениями

$$\omega_{ni} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\omega_k , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 , \tag{2}$$

где $p_{ik} = p_{ki}$ (условия интегрируемости) для $1 \leq i,\ k \leq n-1$.

2. Уравнения (1) имеют, следовательно, вид

$$\tau_1 = \omega_1 + c_1\omega_n, \tau_2 = \omega_2 + c_2\omega_n, \ldots, \tau_n = \omega_n + c_n\omega_n = c\omega_n, \quad c > 0 . \quad (1')$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы соответствие **T** не было тождественным преобразованием наших двух пространств, является неравенство нулю хоть одного из c_i: $c_i \neq 0$.

Условие преобразования ортогональных траекторий семейства $\mathfrak{S}$ гиперповерхностей Σ в ортогональные же траектории семейства $\mathfrak{S}'$ гиперповерхностей Σ' имеет вид:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$$

и, следовательно, (исключая тождественное преобразование), $c = 1 + c_n \neq \neq 1$.

3. Найдем внешние производные уравнений (1'). Мы получим

$$\sum_{k=1}^{n} [\omega_k, \tau_{ki} - \omega_{ki} - c_i\omega_{kn}] + [\omega_n, dc_i + \sum_{k=1}^{n} c_k\tau_{ki}] = 0 \quad (3)$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Помножим эти уравнения на форму ω_n. В силу уравнений (2), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} [\omega_k, \tau_{ki} - \omega_{ki}, \omega_n] = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Для $i = 1, 2, \ldots$, согласно лемме Картана, будет, следовательно,

$$\tau_{ki} - \omega_{ki} = \sum_{j=1}^{n-1} p_{ikj}\omega_j \quad (\mathrm{mod}\ \omega_n) ,$$

где $p_{ikj} = p_{ijk}$.

Так как с другой стороны $p_{ikj} = - p_{kij}$, получим

$$p_{ikj} = 0$$

и, следовательно,

$$\tau_{ki} - \omega_{ki} = \alpha_{ki}\omega_n , \quad i, k = 1, 2, \ldots, n - 1 , \quad (4)$$

в то время, как для $i = n$ получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} [\omega_k, \tau_{kn} - c\omega_{kn}] + [\omega_n, dc_n + \sum_{k=1}^{n} c_k\tau_{kn}] = 0 . \quad (3n)$$

Теперь нетрудно вывести (см. [1]), что если хоть три формы ω_{ni} линейно независимы $\mathrm{mod}\ \omega_n$, то и

$$\tau_{ni} - \omega_{ni} = \alpha_{ni}\omega_n . \quad (5)$$

4. Уравнение (4) было выведено в предположении (2) (т. е. что уравнение $\omega_n = 0$ вполне интегрируемо). Откажемся от этого условия и присовокупим вместо этого к уравнениям

$$\tau_i = \omega_i + c_i\omega_n , \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (6)$$

уравнения (4) и (5), т. е.

$$\tau_{ik} = \omega_{ik} + \alpha_{ik}\omega_n\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

и условие, что дано направление вектора I_n в каждой точке, т. е.

$$\omega_{ni} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\omega_k\,. \tag{8}$$

Покажем следующее: *если соответствие T не является тождественным, то обязательно будет $p_{ik} = p_{ki}$ и все соответствие можно получить, как огибающую однопараметрического семейства ортогональных перобразований.*

Продифференцируем уравнение (6). Тогда получим для $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} [\tau_\lambda \tau_{\lambda i}] = \sum_{\lambda=1}^{n} [\omega_\lambda \omega_{\lambda i}] + [dc_i\omega_n] + c_i \sum_{\lambda=1}^{n} [\omega_\lambda \omega_{\lambda n}]\,.$$

Подставляя уравнения (7) и (8), получаем

$$\sum_{\lambda=1}^{n} [\omega_n, c_\lambda\omega_{\lambda i} - \alpha_{\lambda i}\omega_\lambda + dc_i] + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{n} c_i p_{\lambda\varrho}[\omega_\lambda\omega_\varrho] = 0\,.$$

Ввиду того, что формы $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейно независимы, должно быть

$$c_i(p_{\lambda\varrho} - p_{\varrho\lambda}) = 0$$

для $\lambda, \varrho = 1, 2, \ldots, n-1$.

Если хоть одно c_i отлично от нуля, то обязательно будет $p_{\lambda\varrho} = p_{\varrho\lambda}$.

Введем далее преобразование $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}A = B,\ \boldsymbol{P}I_i = J_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Из этих уравнений следует

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}\,.\,A = \omega_n(c_1J_1 + \ldots + c_nJ_n)\,,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}\,.\,I_i = \omega_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}J_k\,.$$

Если $\omega_n = 0$, то $\mathrm{d}\boldsymbol{P} = 0$, чем и доказано все утверждение.

5. Пусть, начиная с этого момента, соответствие $\boldsymbol{T}$ удовлетворяет обоим условиям, т. е. осуществляет изометрическое преобразование гиперповерхностей Σ и переводит их ортогональные траектории в ортогональные же траектории в пространстве (B). Итак, имеют место уравнения

$$\tau_1 = \omega_1, \ldots, \tau_{n-1} = \omega_{n-1}, \tau_n = c\omega_n,\ c \neq 0, 1\,, \tag{9}$$

и условия их интегрируемости (в уравнениях (3) положим $c_i = 0$)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} [\omega_k, \tau_{ki} - \omega_{ki}] + [\omega_n, c\tau_{ni} - \omega_{ni}] = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ &\sum_{k=1}^{n} [\omega_k, \tau_{kn} - c\omega_{kn}] + [\omega_n, dc] = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Следствием этих уравнений является, как мы знаем, соотношение

$$\tau_{ik} - \omega_{ik} = \alpha_{ik}\omega_n\,, \quad i, k = 1, \ldots, n-1\,.$$

Согласно последнему из уравнений (10), можно положить

$$\tau_{ni} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}\omega_k\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

где $q_{ik} = q_{ki}$ для $i, k = 1, \ldots, n-1$.

Теперь

$$c\tau_{ni} - \omega_{ni} = \sum_{r=1}^{n} (cq_{ir} - p_{ir})\,\omega_r$$

и, следовательно,

$$\tau_{ki} - \omega_{ki} = (cq_{ik} - p_{ik})\,\omega_n\,, \quad k = 1, \ldots, n-1\,.$$

Так как $\tau_{ki} - \omega_{ki} = -(\tau_{ik} - \omega_{ik})$ и $q_{ik} = q_{ki}$, $p_{ik} = p_{ki}$, то мы получаем

$$\tau_{ki} - \omega_{ki} = 0\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{11}$$

в отличие от уравнений (4).

Из этого следует

$$cq_{ik} = p_{ik}$$

и, следовательно,

$$c\tau_{ni} - \omega_{ni} = \alpha_i\omega_n\,. \tag{12}$$

Дифференцируя уравнение (11) получим

$$[\tau_{ni}\tau_{nk}] - [\omega_{ni}\omega_{nk}] = 0\,. \tag{13}$$

Подстановка, ввиду (12), дает

$$[\omega_{ni} + \alpha_i\omega_n, \omega_{nk} + \alpha_k\omega_n] - c^2[\omega_{ni}\omega_{nk}] = 0\,. \tag{14}$$

Из этих уравнений следует путем умножения на форму ω_n

$$[\omega_{ni}, \omega_{nk}, \omega_n] = 0\,,$$

если предположить, что $c^2 - 1 \neq 0$. Отбрасывая этот случай, дающий нам ортогональное преобразование пространства (A) на пространство (B), мы видим из последнего уравнения, что не более, чем одна из форм ω_{ni} является линейно независимой $\operatorname{mod}\,\omega_n$. Итак, могут наступить лишь два случая:

а) все ω_{ni} являются кратными ω_n,

б) одна форма ω_{ni} (напр. ω_{n1}) линейно независима от ω_n, а все остальные являются линейными комбинациями этой формы и ω_n.

6. Случай а) представляет частный случай соответствия из п. 4. Однако, в то время, как в п. 4 на соответствие $\boldsymbol{P}$ не накладывалось никаких условий (в чем нетрудно убедиться), здесь мы, ввиду соотношения $c_r = \ldots = c_{n-1} = 0$, в выборе $\boldsymbol{P}$ ограничены.

Так как все ω_{ni} являются краткыми ω_n, то для $\omega_n = 0$ вектор I_n будет фиксированным, и значит, семейство $\mathfrak{S}$ будет однопараметрическим семейством гиперплоскостей. Ввиду уравнений (12), и τ_{ni} будут кратными ω_n и, следовательно, семейство $\mathfrak{S}'$ будет также однопараметрическим семейством гиперплоскостей.

Возьмем в пространстве (A) произвольное однопараметрическое семейство гиперплоскостей и аналогично в пространстве (B). Вектор I_n, соотв. J_n возьмем перпендикулярным к плоскости, проходящей через точку A, соотв. B. Тогда должно быть

$$\omega_{ni} = a_i \omega_n\,, \quad \tau_{ni} = b_i \tau_n\,.$$

Предпишем еще соответствие между этими двумя семействами гиперплоскостей; тогда будет

$$\tau_n = c\omega_n\,.$$

Коэффициенты a_i, b_i, c известны.

Исследуем теперь, можно ли отыскать такое соответствие между пространствами (A), (B), чтобы соответственные гиперплоскости наших двух семейств преобразовывались изометрически и направление нормали в одном пространстве перешло в направление нормали в другом пространстве. Но это равносильно решению системы уравнений

$$\omega_1 = \tau_1,\ \omega_2 = \tau_2,\ \ldots,\ \omega_{n-1} = \tau_{n-1}\,, \tag{15}$$

при надлежащем выборе положения векторов I_1, J_i.

Эта система уравнений не находится в инволюции. Путем продолжения системы получится

$$\tau_{ik} = \omega_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{16}$$

Система уравнений (15) и (16) вполне интегрируема. Ее решение зависит от $n - 1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ постоянных. Эти постоянные определяются заданием пары соответственных точек (на соответственных плоскостях) и выбором векторов $J_1, \ldots, J_{n-1}$, соответствующих векторам $I_1, \ldots, I_{n-1}$ для этой пары точек.

Ортогональная траектория данного семейства гиперплоскостей в пространстве (A) перейдет в ортогональную траекторию данного семейства гиперплоскостей в пространстве (B); этим на соответственных плоскостях определяются пары соответственных точек.

Вместо того, чтобы задавать семейства гиперплоскостей в обоих пространствах и соответствие между ними, можно выбрать в каждом пространстве кривую и затем произвольное соответствие между этими кривыми. В качестве семейств $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ мы тогда возьмем нормальные плоскости к обеим кривым.

Для определения всего соответствия нужно еще определить ортогональное преобразование $\mathbf{P}$, переводящее I_i в J_i (постоянное во всей плоскости).

Возьмем в пространстве (A) фиксированный ортонормированный базис, состоящий из n векторов $K_1, \ldots, K_n$ и в пространстве (B) фиксированный ортонормированный базис, состоящий из n векторов $L_1, \ldots, L_n$. Тогда можно написать

$$I_i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} K_k\,, \quad J_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{\sigma}_{ik} L_k\,,$$

причем матрицы (σ_{ik}), $(\bar{\sigma}_{ki})$ ортогональны. Далее имеем

$$\mathbf{P} K_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik} L_k\,,$$

причем матрица (φ_{ik}) опять ортогональна.

Теперь имеет место

$$\mathrm{d}I_i = \sum \mathrm{d}\sigma_{ik} K_k = \sum_{\varkappa,k} \omega_{i\varkappa} \sigma_{\varkappa k} K_k$$

и, значит,

$$\mathrm{d}\sigma_{ik} = \sum_{\varkappa=1}^{n} \omega_{i\varkappa} \sigma_{\varkappa k}\,, \quad \mathrm{d}\bar{\sigma}_{ik} = \sum_{\varkappa,k}^{n} \tau_{i\varkappa} \bar{\sigma}_{\varkappa k}\,.$$

В частности отсюда получим для $i = n$

$$\omega_{n\lambda} = \sum_k \sigma_{\lambda k}\,\mathrm{d}\sigma_{nk}\,, \quad \tau_{n\lambda} = \sum_k \bar{\sigma}_{\lambda k}\,\mathrm{d}\bar{\sigma}_{nk}\,.$$

Так как $\mathbf{P} I_i = J_i$, то имеет место $\mathbf{P} K_k = \sum_{i,\varrho} \sigma_{ik} \bar{\sigma}_{i\varrho} L_\varrho$ и, значит,

$$\varphi_{k\varrho} = \sum_i \sigma_{ik} \bar{\sigma}_{i\varrho}\,,$$

откуда следует

$$\mathrm{d}\varphi_{k\varrho} = \sum_i \sum_\varkappa \omega_{i\varkappa} \sigma_{\varkappa k} \bar{\sigma}_{i\varrho} + \sum_i \sum_\varkappa \tau_{i\varkappa} \bar{\sigma}_{\varkappa\varrho} \sigma_{ik}\,.$$

Теперь $\sigma_{\varkappa k} \bar{\sigma}_{i\varrho} + \sigma_{ik} \bar{\sigma}_{\varkappa\varrho} = \sigma_{ik} \bar{\sigma}_{\varkappa\varrho} + \sigma_{\varkappa k} \bar{\sigma}_{i\varrho}$, и так как $\omega_{ik} = \tau_{ik}$, то отпадут слагаемые для $1 \leq i$, $\varkappa < n$ и останется

$$\mathrm{d}\varphi_{k\varrho} = -\sum_\alpha \varphi_{\alpha\varrho} \sigma_{nk}\,\mathrm{d}\sigma_{n\alpha} - \sum_\alpha \varphi_{k\alpha} \bar{\sigma}_{n\varrho}\,\mathrm{d}\bar{\sigma}_{n\alpha} + \mathrm{d}(\sigma_{nk} \bar{\sigma}_{n\varrho}) +$$
$$+ \sigma_{nk} \bar{\sigma}_{n\varrho} \sum_\lambda \sigma_{n\lambda}\,\mathrm{d}\sigma_{n\lambda} + \bar{\sigma}_{n\varrho} \sigma_{nk} \sum_\lambda \bar{\sigma}_{n\lambda}\,\mathrm{d}\bar{\sigma}_{n\lambda}\,.$$

Но последние два слагаемых тоже равны нулю, и мы получаем для $\varphi_{k\varrho}$ следующее дифференциальное уравнение (линейное неоднородное)

$$\mathrm{d}\varphi_{k\varrho} = -\sum_\alpha \varphi_{\alpha\varrho} \sigma_{nk}\,\mathrm{d}\sigma_{n\alpha} - \sum_\alpha \varphi_{k\alpha} \bar{\sigma}_{n\varrho}\,\mathrm{d}\bar{\sigma}_{n\alpha} + \mathrm{d}(\sigma_{nk} \bar{\sigma}_{n\varrho})\,.$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi_{k\varrho} = \sigma_{nk} \bar{\sigma}_{n\varrho}$ является частным решением системы предыдущих уравнений. Как известно, это решение однозначно определяется начальными условиями.

7. Приступим теперь ко второму возможному случаю, а именно, когда ω_{n1} линейно независимо от ω_n. Предположим сначала, что остальные ω_{ni} являются кратными ω_{n1}.

Подбирая положения векторов $I_1, \ldots, I_{n-1}$ в касательной гиперплоскости, мы добьемся того, чтобы

$$\omega_{n2} = \omega_{n3} = \ldots = 0$$

и, значит, $\omega_{n1} = p_{11}\omega_1 + p_1\omega_n$, где $p_{11} \neq 0$.

По уравнению (12), τ_{n1} также является линейно независимым $\mathrm{mod}\, \omega_n$. Далее, по тому же уравнению, $\tau_{n2}, \ldots$ являются кратными ω_n, а по уравнению (13), кратными τ_{n1}. Следовательно, должно быть

$$\tau_{n1} = q_{11}\omega_1 + q_1\omega_n\,, \quad q_{11} \neq 0, \tau_{n2} = \ldots = 0\,.$$

Итак, преобразование определяется уравнениями

$$\tau_1 = \omega_1, \tau_2 = \omega_2, \ldots, \tau_{n-1} = \omega_{n-1}, \tau_n = c\omega_n, \tag{17}$$

$$\tau_{ik} = \omega_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{18}$$

$$\omega_{2n} = \omega_{3n} = \ldots = \tau_{2n} = \ldots = 0\,. \tag{19}$$

Дифференцируя последние уравнения, получим

$$[\omega_{21}\omega_{1n}] = [\tau_{21}\tau_{1n}] = \ldots = 0\,.$$

Согласно уравнениям (18), будет поэтому

$$[\omega_{21}\omega_{1n}] = [\omega_{21}\tau_{1n}] = \ldots = 0\,. \tag{20}$$

Это приводит нас к необходимости различать два случая:

$$1)\ [\omega_{n1}\tau_{n1}] \neq 0\,, \quad 2)\ [\omega_{n1}\tau_{n1}] = 0\,.$$

8. Если $[\omega_{n1}\tau_{n1}] \neq 0$, то по уравнениям (20) будет

$$\omega_{21} = \omega_{31} = \ldots = 0\,.$$

Уравнения движения точек A и B имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_n I_n\,, & \mathrm{d}B &= \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + c\omega_n J_n\,,\\
\mathrm{d}I_1 &= \omega_{1n} I_n\,, & \mathrm{d}J_1 &= \tau_{1n} J_n\,,\\
\mathrm{d}I_i &= \sum_{k=2}^{n-1} \omega_{ik} I_k\,, \quad n > i > 1\,, & \mathrm{d}J_1 &= \sum_{k=2}^{n-2} \omega_{ik} J_k\,, \quad n > i > 2\,,\\
\mathrm{d}I_n &= \omega_{n1} I_1\,, & \mathrm{d}J_n &= \tau_{n1} J_1\,.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что пространство (A) является декартовым произведением двухмерного и $(n-2)$-мерного пространств; обозначим их через (A') и (A''). Аналогично и для пространства (B). Соответствие **T** индуцирует соответствие между (A') и (B') и между (A'') и (B''). Соответствие между (A') и (B') является соответствием с рассматриваемыми нами свойствами (конечно, для $n = 2$), которое зависит от одной функции двух переменных. Соответствие между (A'') и (B'') есть ортогональное преобразование. Наоборот, из таких двух преобразований всегда можно образовать рассматриваемое преобразование.

9. Пусть теперь $[\omega_{n1}\tau_{n1}] = 0$. Тогда по уравнению (12)

$$c\tau_{n1} = \omega_{n1}\,,$$

так как $[\omega_{n1}, \omega_n] \neq 0$.

Уравнения преобразования имеют вид

$$\tau_1 = \omega_1, \ldots, \tau_{n-1} = \omega_{n-1}, \tau_n = c\omega_n\,, \tag{21}$$

$$\tau_{ik} = \omega_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{22}$$

$$\omega_{n1} = c\tau_{n1}\,, \quad \omega_{n2} = \ldots = 0\,, \tag{23}$$

$$\tau_{n1} = q_{11}\omega_1 + q_1\omega_n\,, \quad \tau_{n2} = \ldots = 0\,, \tag{24}$$

где $c(c^2-1)\,q_{11} \neq 0$.

Условия интегрируемости принимают вид:

$$\begin{gathered}[\mathrm{d}c\omega_n] + (c^2-1)[\omega_1, \tau_{1n}] = 0\,,\\ [\mathrm{d}c\tau_{1n}] = 0\,,\\ [\tau_{n1}\omega_{12}] = \ldots = [\tau_{n1}\omega_{1,n-1}] = 0\,,\\ [\mathrm{d}q_{11}\omega_1] + [\mathrm{d}q_1\omega_n] + q_{11}[\omega_2\omega_{21}] + \ldots + q_{11}[\omega_n\omega_{n1}] + q_1[\omega_1\omega_{1n}] = 0\,.\end{gathered} \tag{*}$$

Эта система не находится в инволюции. Из первых двух уравнений следует

$$\frac{\mathrm{d}c}{c^2-1} = \frac{q_1}{q_{11}}\tau_{n1}\,. \tag{25}$$

Дифференцируя эти уравнения, получаем

$$[q_{11}\,\mathrm{d}q_1 - q_1\,\mathrm{d}q_{11}, \tau_{n1}] = 0\,. \tag{**}$$

После этого продолжения система уже находится в инволюции и ее общее решение зависит от n функций одного переменного.

Дифференцируя, получим $\omega_{n1}' = 0$, и, следовательно, ω_{n1} является полным дифференциалом; обозначим его через $\mathrm{d}\iota$. Из уравнений (*) и (**) следует, что

$$\omega_{12}, \ldots, \omega_{1,n-1}, \mathrm{d}\,\frac{q_1}{q_{11}} = \mathrm{d}\,\frac{p_1}{p_{11}}$$

являются кратными $\mathrm{d}t$.

Положим в уравнениях для сопровождающего репера $\mathrm{d}t = 0$. Таким образом мы получим однопараметрическое семейство поверхностей

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}A = \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_{n-1}I_{n-1} + \omega_n\left(-\frac{p_1}{p_{11}}I_1 + I_n\right),\\ &\mathrm{d}I_1 = 0\,,\\ &\mathrm{d}I_n = 0\,,\\ &\mathrm{d}I_i = \sum_{k=2}^{n-1}\omega_{ik}I_k\,, \quad 2 \leq i \leq n-1\end{aligned}$$

в пространстве (A) и

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}B &= \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_{n-1} J_{n-1} + \omega_n \left(-\frac{p_1}{p_{11}} J_1 + cJ_n \right), \\
\mathrm{d}J_1 &= 0, \\
\mathrm{d}J_n &= 0, \\
\mathrm{d}J_i &= \sum_{k=2}^{n-1} \omega_{ik} J_k, \quad 2 \leq i \leq n-1
\end{aligned}$$

в пространстве (B). Сразу же видно, что это плоскости, нормали которых имеют соответственно вид $I_1 + \frac{p_1}{p_{11}} I_n$, $cJ_1 + \frac{p_1}{p_{11}} J_n$. По уравнению (25) имеем

$$\frac{c\,\mathrm{d}c}{c^2 - 1} = \varrho\,\mathrm{d}t \qquad \left(\varrho = \frac{p_1}{p_{11}} = \frac{q_1}{q_{11}} \right)$$

и, следовательно,

$$c = \sqrt{\exp(2 \int \varrho\,\mathrm{d}t) + 1}, \quad \text{если} \quad c > 1\,.$$

Введем еще аффинное соответствие $\mathbf{K}$, а именно:

$$\mathbf{K}A = B,\ \mathbf{K}I_i = J_i,\ i < n,\ \mathbf{K}I_n = cJ_n\,.$$

Нетрудно убедиться, что если $\mathrm{d}t = 0$, то $\mathrm{d}\mathbf{K} = 0$.

10. Рассмотрим случай $n = 3$. Мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A &= \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3, & \mathrm{d}B &= \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + c\omega_3 J_3, \\
\mathrm{d}I_1 &= \omega_{12} I_2 + \omega_{13} I_3, & \mathrm{d}J_1 &= \omega_{12} J_2 + \frac{\omega_{13}}{c} J_3, \\
\mathrm{d}I_2 &= \omega_{21} I_1, & \mathrm{d}J_2 &= \omega_{21} J_1, \\
\mathrm{d}I_3 &= \omega_{31} I_1, & \mathrm{d}J_3 &= \frac{\omega_{31}}{c} J_1,
\end{aligned}$$

где кроме того $\omega_{12} = P\omega_{31}$.

Отсюда видно, что прямые $A + \lambda I_2$ образуют конгруэнцию, у которой одним семейством развертывающихся поверхностей являются поверхности $\omega_3 = 0$, а другим семейством развертывающихся поверхностей — семейство плоскостей $\omega_{31} = 0$. Притом прямые каждой из этих плоскостей параллельны одна другой.

Пусть, наоборот, дана конгруэнция, у которой одним семейством развертывающихся поверхностей являются плоскости, на которых прямые конгруэнции параллельны одна другой. При надлежащей нормировке сопровождающего репера получим

$$\omega_{12} = k\omega_1 + l\omega_3, \quad \omega_{13} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3, \quad \omega_{23} = \gamma\omega_3\,.$$

Развертывающиеся поверхности даны уравнением $\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_3 \\ \omega_{12} & \omega_{32} \end{vmatrix} = 0$, т. е.

$\omega_3(\gamma\omega_1 + k\omega_1 + l\omega_3) = 0$. Если потребовать, чтобы поверхность $\gamma\omega_1 + k\omega_1 + l\omega_3 = 0$ содержала параллельные прямые конгруэнции, то обязательно будет $\gamma = 0$. Отсюда, конечно, следует $[\omega_{21}\omega_{13}] = 0$. В этих развертывающихся поверхностях будет

$$\mathrm{d}A = \omega_2 I_2 + \left(I_2 - \frac{l}{k} I_1\right)\omega_3 ;$$

в случае плоскости вектор $\frac{l}{k} I_3 + I_1$ будет постоянный. Это нас приводит к соотношению $\left[\mathrm{d}\left(\frac{l}{k}\right), \omega_{12}\right] = 0$.

Присоединим теперь уравнения

$$\tau_1 = \omega_1 , \quad \tau_2 = \omega_2 , \quad \tau_3 = c\omega_3 .$$

При помощи продолжения найдем

$$\tau_{12} = \omega_{12} , \quad \tau_{13} = \frac{\omega_{13}}{c} , \quad \tau_{23} = 0 ,$$

$$\frac{c\,\mathrm{d}c}{c^2 - 1} = \varrho\omega_{31} , \qquad \varrho = \frac{l}{k} .$$

Эта система вполне интегрируема. Решение зависит от выбора начального значения функции c (остальные постоянные определяют лишь положение образа конгруэнции в пространстве (B)).

11. Преобразование можно определить еще другим способом. Напишем

$$\mathrm{d}A = \omega_2 I_2 + \frac{\varrho I_1 - I_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} \cdot \frac{\varrho\omega_1 - \omega_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} + \frac{I_1 + \varrho I_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} \cdot \frac{\omega_1 + \varrho\omega_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} =$$

$$= \omega_2 I_2 + \bar{\omega}_1 \bar{I}_1 + \bar{\omega}_3 \bar{I}_3 , \tag{26}$$

$$\mathrm{d}B = \omega_2 J_2 + \frac{\varrho J_1 - cJ_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} \cdot \frac{\varrho\omega_1 - \omega_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} + \frac{J_1 + c\varrho J_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} \cdot \frac{\omega_1 + \varrho\omega_2}{\sqrt{1+\varrho^2}} =$$

$$= \omega_2 J_2 + \frac{\varrho J_1 - cJ_3}{\sqrt{1+\varrho^2}} \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3 \bar{J}_3 . \tag{27}$$

Если положить $\omega_2 = \bar{\omega}_1 = 0$, то точка A и точка B описывают кривую. Притом плоскости $\omega_{31} = 0$ являются нормальными плоскостями в пространстве (A). Определим инварианты этих двух кривых.

Из уравнения (27) видно, что касательным вектором $t_в$ является вектор

$$t_в = \frac{J_1 + c\varrho J_3}{\sqrt{1 + c^2\varrho^2}} , \tag{$28'_в$}$$

а дифференциалом дуги будет

$$\mathrm{d}s_в = \frac{\omega_1 + \varrho\omega_2}{1 + \varrho^2} \cdot \sqrt{1 + c^2\varrho^2} \tag{$28''_в$}$$

[в пространстве (B)]. Точно так же из уравнений (26) для пространства (A) следует

$$t_A = \frac{I_1 + \varrho I_3}{\sqrt{1+\varrho^2}}, \quad \mathrm{d}s_A = \frac{\omega_1 + \varrho\omega_2}{\sqrt{1+\varrho^2}}. \tag{28_A}$$

Вычислив $\mathrm{d}t_B/\mathrm{d}s_B$, получим

$$\begin{aligned} n_B &= \frac{cPk(c)\,J_2 + (-c\varrho J_1 + J_3)\,V(c)}{\sqrt{c^2P^2k^2(c) + k(c)\,.\,V^2(c)}}, \\ \varkappa_B &= \frac{p_{11}k(1)}{ck^2(c)} \sqrt{c^2P^2k^2(c) + V^2(c)\,k(c)}, \end{aligned} \tag{29_B}$$

где n_B — единичный вектор нормали, $\varkappa_B$ — кривизна и

$$k(c) = 1 + c^2\varrho^2, \quad V(c) = \left(-k(c) + \frac{1}{2\varrho}\frac{\mathrm{d}k(c)}{\mathrm{d}t}\right), \quad \omega_{12} = P\,\mathrm{d}t.$$

Дальнейшее дифференцирование дает

$$\begin{aligned} b_B &= \frac{V(c)\,J_2 + cP(c\varrho J_1 - J_3)}{\sqrt{c^2P^2k(c) + V^2(c)}}, \\ \tau_B &= \frac{p_{11}k(1)}{k(c)} \cdot \frac{1}{c^2P^2k(c) + V^2(c)} \left\{V(c)\frac{\mathrm{d}(cPk(c))}{\mathrm{d}t} - \right. \\ &\left. - c\varrho PV^2(c) - cPk(c)\frac{\mathrm{d}V(c)}{\mathrm{d}t} - c^2P^2\varrho k(c) - \frac{1}{2}cPV(c)\frac{\mathrm{d}k(c)}{\mathrm{d}t}\right\}. \end{aligned} \tag{30_B}$$

Если во всех этих выражениях положить $c = 1$ там, где оно встречается в качестве сомножителя (но не в ϱ), то мы получим соответственные векторы и инварианты для пространства (A):

$$\begin{aligned} n_A &= \frac{Pk(1)\,I_2 + (-\varrho I_1 + I_3)\,V(1)}{\sqrt{P^2k^2(1) + k(1)\,V^2(1)}}, \\ \varkappa_A &= \frac{p_{11}}{k(1)} \sqrt{P^2k^2(1) + V^2(1)\,k(1)}, \end{aligned} \tag{29_A}$$

$$\begin{aligned} b_A &= \frac{V(1)\,I_2 + P(\varrho I_1 - I_3)}{\sqrt{P^2k(1) + V^2(1)}}, \\ \tau_A &= \frac{p_{11}}{P^2k(1) + V^2(1)} \left\{V(1)\frac{\mathrm{d}(Pk(1))}{\mathrm{d}t} - P\varrho V^2(1) - Pk(1)\frac{\mathrm{d}V(1)}{\mathrm{d}t} - \right. \\ &\left. - P^2\varrho k(1) - \frac{1}{2}PV(1)\frac{\mathrm{d}k(1)}{\mathrm{d}t}\right\}, \end{aligned} \tag{30_A}$$

где $k(1) = 1 + \varrho^2$, $V(1) = \left(-1 - \varrho^2 + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}\right)$.

Предыдущие формулы позволяют нам определить $I_1, \ldots, J_3$ в виде линейных комбинаций векторов $t_A, \ldots, b_B$.

Пусть теперь даны функции P, p_{11}, c параметра t. Положим кроме того $\frac{c\,\mathrm{d}c}{c^2-1} = \varrho\,\mathrm{d}t$. В пространстве (A), соотв. (B) построим кривую так, чтобы ее инварианты и триэдр Френе определялись формулами (28_A)—(30_A), соотв. (28_B)—(30_B). На этих двух кривых поставим в соответствие друя другу точки, отвечающие одному и тому же значению параметра t. Длг каждого значения параметра t построим аффинное соответствие **K** (см. п. 9). При этом аффинном соответствии найдем образ нормальной плоскости к кривой $A(t)$ (для того же значения параметра t). Это вполне определяет наше соответствие.

Замечание. $\varrho = \operatorname{cotg}\varphi$, где φ — угол, образованный развертывающимися поверхностями первого и второго семейства.

12. Приступим теперь к последнему случаю, когда две из форм ω_{ni} являются линейно независимыми. Подбирая положения векторов $I_1, \ldots, I_{n-1}$, мы добьемся того, чтобы

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= p_{11}\omega_1 + p_1\omega_n\,, \\ \omega_{n2} &= \qquad\quad p_2\omega_n\,, \quad p_{11}p_2 \neq 0\,. \\ \omega_{n3} &= \ldots = 0\,. \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (12) для форм τ_{ni} вытекает

$$\begin{aligned} \tau_{n1} &= q_{11}\omega_1 + q_1\omega_n\,, \quad cq_{11} = p_{11}\,, \\ \tau_{n2} &= \qquad\quad q_2\omega_n\,, \quad q_2 \neq 0\,, \\ \tau\omega_i &= \qquad\quad q_i\omega_n\,, \quad i > 2 \end{aligned}$$

а из уравнений (13) далее следует $q_i = 0$ для $i > 2$ и $q_2 = cp_2$.

К этому присоединяются уравнения преобразования

$$\omega_1 = \tau_1, \ldots, \omega_{n-1} = \tau_{n-1},\ c\omega_n = \tau_n,\ c(1-c^2) \neq 0$$

и (выведенные выше) следствия из них

$$\tau_{ik} - \omega_{ik} = 0\,, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Выпишем условия интегрируемости:

$$[\mathrm{d}c + (-q_1 + cp_1)\,\omega_1, \omega_n] = 0\,,$$

$$\begin{aligned} &[q_{11}\,\mathrm{d}c + c\,\mathrm{d}q_{11}, \omega_1] + [(\mathrm{d}p_1 - p_2\omega_{12})\,\omega_n] + cq_{11}[\omega_{12}\omega_2] + cq_{11}[\omega_{13}\omega_3] + \ldots \\ &\ldots + cq_{11}[\omega_{1,n-1}\omega_{n-1}] + (c^2q_{11}^2 + p_1^2)[\omega_1\omega_n] + p_1p_2[\omega_1\omega_n] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}p_2\omega_n] - [\omega_{12}\omega_{n-1}] + p_1p_2[\omega_1\omega_n] + p_2^2[\omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{n1}\omega_{13}] + [\omega_{n2}\omega_{23}] = \ldots = [\omega_{n1}\omega_{1,n-1}] + [\omega_{n2}\omega_{2,n-1}] = 0\,, \\ &[(p_2\,\mathrm{d}c + c\,\mathrm{d}p_2)\,\omega_n] - [\omega_{12}\tau_{n1}] + cp_1p_2[\omega_1\omega_n] + cp_2^2[\omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}q_{11}\omega_1] + [\mathrm{d}q_1 - q_2\omega_{12}, \omega_n] + q_{11}[\omega_{12}\omega_2] + q_{11}[\omega_{13}\omega_3] + \ldots + \\ &+ q_{11}[\omega_{1,n-1}, \omega_{n-1}] + (cq_{11}^2 + p_1q_1)[\omega_1\omega_n] + q_1p_2[\omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\tau_{n1}\omega_{13}] + [\tau_{n2}\omega_{23}] = \ldots = [\tau_{n1}\omega_{1,n-1}] + [\tau_{n2}\omega_{2,n-1}] = 0\,. \end{aligned}$$

Так как $\tau_{n1} = \frac{1}{c}\,\omega_{n1} + \frac{cq_1 - p_1}{cp_2}\,\omega_{n2}$, $\tau_{n2} = c\omega_{n2}$, то последние уравнения отпадают.

Система в инволюции и решение зависит от $n - 2$ функций двух переменных.

13. Ограничимся опять случаем $n = 3$. Прямые $A + \lambda I_2$ образуют конгруэнцию. Эта конгруэнция не может быть конгруэнцией общего вида, ибо в противном случае решение системы уравнений предыдущего параграфа должно было бы зависеть по крайней мере от двух функций двух переменных.

Уравнения конгруэнции можно записать в виде

$$\omega_{12} = k\omega_1 + l\omega_3\,, \tag{31}$$

$$\omega_{13} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3\,, \tag{32}$$

$$\omega_{23} = \gamma\omega_3\,. \tag{33}$$

Дифференцируя эти уравнения, получим выражение для $\mathrm{d}k, \ldots$ в виде линейной комбинации форм $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Дальнейшее дифференцирование дает дифференциалы коэффициентов этих выражений опять в виде линейной комбинации $\omega_1, \ldots$ и т. д.

Присоединив уравнения $\tau_1 = \omega_1$, $\tau_2 = \omega_2$, $\tau_3 = c\omega_3$ $(c(1 - c^2) \neq 0)$, получим путем дифференцирования и используя лемму Картана

$$\tau_{12} = \omega_{12}\,, \tag{34}$$

$$\tau_{13} = \frac{\alpha}{c}\,\omega_1 + (C + c\beta)\,\omega_3\,, \tag{35}$$

$$\tau_{23} = E\omega_3 + c\omega_{23}\,, \tag{36}$$

$$\mathrm{d}c = C\omega_1 + E\omega_2 + F\omega_3\,. \tag{37}$$

Дифференцируя уравнение (34), получим $E = 0$. Далее дифференцируем уравнение $\tau_{23} = c\omega_{23}$, в результате чего получаем

$$C = \frac{l\alpha(1 - c^2)}{c(\gamma + k)}\,.$$

При этом мы предполагаем $\gamma + k \neq 0$; если бы $\gamma + k = 0$, то было бы обязательно $l = 0$, что мы исследуем позднее.

Итак, мы имеем систему

$$\tau_1 = \omega_1\,, \quad \tau_2 = \omega_2\,, \quad \tau_3 = c\omega_3\,,$$

$$\tau_{12} = \omega_{12}\,, \quad \tau_{13} = \frac{\alpha}{c}\,\omega_1 + \left(\frac{l\alpha(1 - c^2)}{c(\gamma + k)} + c\beta\right)\omega_3\,, \quad \tau_{23} = c\omega_{23}\,,$$

к которой нужно присоединить два условия интегрируемости. Из них следует

$$2c\,\mathrm{d}c = A_0 + A_1c^2 + A_2c^4 + A_3c^6\,,$$

где $A_0, \ldots$ суть формы от $\omega_1, \ldots$, коэффициенты которых являются функциями $k, l, \alpha, \ldots$ Введем подстановку $c^2 = z$, благодаря которой последнее уравнение примет вид

$$\mathrm{d}z = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 ,$$

откуда путем дифференцирования получаем

$$0 = A_0' + A_1' z + [\mathrm{d}z A_1] + \ldots .$$

Произведя подстановку, мы получим $B_{12}[\omega_1\omega_2] + \ldots = 0$, и, следовательно, $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$. B_{ik} суть функции коэффициентов уравнений конгруэнции и уравнений, получающихся последовательным продолжением, и z. Отсюда мы могли бы, наконец, исключить z, и получить тем самым условия для конгруэнции. Хотя ввиду сложности это и неосуществимо, мы видим, что построение соответствия к найденной таким образом конгруэнции приводит к вполне интегрируемой системе.

Предыдущие рассуждения упрощаются в случае, когда конгруэнция прямых $A + \lambda I_2$ является конгруэнцией нормалей. Ввиду требования полной интегрируемости уравнения $\omega_2 = 0$ должно быть $l = 0$. Итак, мы имеем

$$\omega_{12} = k\omega_1 , \quad \omega_{13} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_3 , \quad \omega_{23} = \gamma\omega_3 \tag{38}$$

и далее

$$\mathrm{d}\alpha = l_1\omega_1 + \alpha k\omega_2 + l_2\omega_3 , \quad \mathrm{d}\beta = (l_2 + k\gamma - \alpha^2 - \beta^2)\,\omega_1 - \beta\gamma\omega_2 + l_3\omega_3 .$$

Присоединив уравнения преобразования

$$\tau_1 = \omega_1 , \quad \tau_2 = \omega_2 , \quad \tau_3 = c\omega_3 , \tag{39}$$

мы получим после продолжения

$$\tau_{12} = \omega_{12}, \quad \tau_{13} = \frac{\alpha}{c}\,\omega_1 + c\beta\omega_3 , \quad \tau_{23} = c\omega_{23} , \tag{40}$$

$$\mathrm{d}c = F\omega_3$$

Условия интегрируемости получаются в результате дифференцирования уравнений $\tau_{13} = \ldots$, $\mathrm{d}c = \ldots$ Из них следует

$$F = \frac{1}{\alpha}\, c(c^2 - 1)\{\alpha^2 - l_2\}$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathrm{d}c}{c(c^2 - 1)} = \frac{\alpha^2 - l_2}{\alpha}\,\omega_3 . \tag{41}$$

Условие интегрируемости имеет вид

$$\left(\frac{\alpha^2 - l_2}{\alpha}\,\omega_3\right)' = 0 . \tag{42}$$

Система уравнений (38), (42) в инволюции, и решение зависит от пяти функций одного переменного. Система же уравнений (39), (41) вполне интегрируема, и решение зависит от семи постоянных.

Отнесем поверхность $\omega_2 = 0$ к главным параметрам u, v. Пусть r — радиус-вектор точки A. Далее, пусть $I_1 = \frac{\partial r}{\partial u} \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|$, $I_3 = \frac{\partial r}{\partial v} \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|$. Тогда $\omega_1 = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right| \mathrm{d}u$, $\omega_3 = \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right| \mathrm{d}v$. Отсюда получаем

$$\mathrm{d}I_1 = \frac{\partial I_1}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \ldots = \ldots + \left\{\left(\frac{\partial I_1}{\partial u}, I_3\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial I_1}{\partial v}, I_3\right)\mathrm{d}v\right\} I_3\,,$$

и поэтому

$$\omega_{13} = \left(\frac{\partial I_1}{\partial u}, I_3\right)\frac{\omega_1}{\left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|} + \left(\frac{\partial I_1}{\partial v}, I_3\right)\frac{\omega_3}{\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|}\,,$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial I_1}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial u}\right|, \quad \beta = \left(\frac{\partial I_2}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|.$$

Далее имеем

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)\mathrm{d}v = \ldots + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)\cdot\frac{\omega_3}{\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|}$$

и, следовательно,

$$l_2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|.$$

Условие интегрируемости (42) имеет вид

$$\left(\frac{\alpha^2 - l_2}{\alpha}\cdot\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|\mathrm{d}v\right)' = 0\,,$$

а это значит, что выражение

$$\frac{\alpha^2 - l_2}{\alpha}\cdot\left|\frac{\partial r}{\partial v}\right|$$

не зависит от переменного u. Это представляет необходимое и достаточное условие для того, чтобы конгруэнция нормалей поверхности $\omega_2 = 0$ допускала рассматриваемое нами преобразование.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *E. Cartan:* La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à n dimensions, Bulletin de Soc. math. de France, *44* (1916), 65—99.

[2] *E. Cartan:* Les systèmes differentiels extérieurs, Paris 1945.

[3] *С. П. Фиников:* Метод внешних форм Картана, Москва 1948.

Résumé

LES TRANSFORMATIONS ISOMÉTRIQUES D'UN SYSTÈME DE HYPERSURFACES

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Reçu le 5 juillet 1955.)

Dans l'espace euclidien à n dimensions soit donné un système $\mathfrak{S}$ à un paramètre de hypersurfaces Σ. Il s'agit de trouver les correspondance de cet espace avec un autre espace euclidien à n dimensions qui transforme chaque hypersurface Σ isométriquement et qui en même temps conservent les trajectories orthogonales de ces hypersurfaces.

Les cas suivants sont possibles.

1. Le système $\mathfrak{N}$ (et en même temps le système correspondat) est un sytème de hyperplans. La correspondance est donnée par une correspondance ponctuelle entre deux courbes, chaque courbe dans un espace, et par un système à un paramètre de correspondances orthogonales; les équations différentielle pour les coefficients de ces correspondance sont données.

2. Tous les deux espaces sont produit cartesien de l'espace à deux dimensions et de l'espace à $(n - 2)$ dimensions. La correspondance entre les espace à $(n - 2)$ dimensions est une correspondance orthogonale fixe et la correspondance entre les espace à deux dimensions est une correspondance dépendante d'une fonction de deux variables.

3. Pour $n = 3$ il s'agit d'une correspondance entre deux congruences ayant la propriété suivante: les surfaces développables d'un système sont les plans où les droites de la congruence sont paralléles. La correspondance est une envelloppe d'un système d'affinité.

4. Pour $n = 3$ la correspondance est aussi une correspondance entre deux congruence spéciales. Pour le cas de la congruence de normales d'une surface on peut exprimer la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la correspondance au moyenne de l'équation de la surface.