Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jiřina

Асимптотическое поведение ветвящихся случайных процессов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 130–153

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100237

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА (Miloslav Jiřina), Прага.

(Поступило в редакцию 11/II 1956 г.)

В статье выводятся теоремы об асимптотическом поведении вырождающихся ветвящихся процессов с частицами нескольких типов и, далее, условия для асимптотического равновесия этих процессов.

1. Введение. В статье [1] Колмогоров доказал, что для вероятности $1 - Q(t)$ вырождения ветвящегося случайного процесса с одним типом частиц и дискретным временем справедливо соотношение $Q(t) \sim KA^t$ при условии $A < 1$, где A — первый факториальный момент. Далее, в статье [2] Яглом доказал при тех же условиях существование предельного распределения для некоторых условных вероятностей. Аналогичные теоремы для случая непрерывного времени доказаны в [3]. В парагр. 4 и 5 настоящей работы указанные теоремы обобщаются на случай нескольких частиц. Условие $A < 1$ заменяется условием $R < 1$, где R означает наибольшее характеристическое число матрицы первых моментов. Случай $R > 1$ мы не рассматриваем, так как он был уже разрешен и для процессов с несколькими частицами Гаррисом в [4]. В парагр. 6 рассмотрим вопрос о существовании асимптотического равновесия ветвящегося случайного процесса.

Квадратные матрицы и столбцевые векторы мы будем в дальнейшем обозначать жирными буквами, как большими, так и малыми (напр. $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$). По тексту будет всегда ясно, о чем идет речь, о матрице или о векторе. В частности $\mathbf{E}$ будет означать диагональную единичную матрицу, $\mathbf{I}$ — квадратную матрицу, все элементы которой равны единице, $\mathbf{J}$ — столбцевой вектор, все элементы которого равны единице, и $\mathbf{O}$ — нулевую матрицу или нулевой вектор. Матрицу, элементы которой суть A_{ij}, будем также обозначать символом $(A_{ij})_{i,j}$ и, более обще, если числа $A_{i_1,\ldots,i_p}$ зависят от индексов i_j ($i_j = 1, 2, \ldots, n$), то при фиксированных индексах $i_1, \ldots, i_{k-1}$, $i_{k+1}, \ldots, i_{l-1}, i_{l+1}, \ldots, i_p$ символ $(A_{i_1,\ldots,i_p})_{i_k,i_l}$ будет означать квадратную матрицу элементов $A_{i_1,\ldots,i_p}$, где i_k есть индекс строки, а i_l — индекс столбца. $\{A_i\}_i$ будет означать столбцевой вектор с элементами A_i и аналогично $\{A_{i_1,\ldots,i_p}\}_{i_k}$ — столбцевой вектор с элементами $A_{i_1,\ldots,i_p}$, причем индексы $i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_p$ фиксированы, а i_k есть индекс строки. Знаки отношений между матрицами или векторами $\leq$, $<$, $\underset{t \to t_1}{\longrightarrow}$ и т. п. будут означать, что указанное отношение имеет место между всеми соответственными элементами. $|\boldsymbol{A}|$ означает матрицу (вектор), составленную из абсолютных величин элементов матрицы (вектора) $\boldsymbol{A}$, тогда как определитель квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначим через $\det \boldsymbol{A}$. Символы $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t$, $\lim\limits_{t \to t_0}$ и т. п. перед матрицами (векторами), элементы которых являются функциями переменного t, будут требовать выполнения указанной операции над каждым элементом. Через $O(g(t))$ будет обозначена также матрица (вектор), все элементы которой суть $O(g(t))$ и аналогично для $o(g(t))$ и $\Omega(g(t))$. Притом соотношение $f(t) = \Omega(g(t))$ будет применяться в смысле $\liminf\limits_{t \to t_0} \dfrac{|f(t)|}{g(t)} > 0$ (а не только $\limsup\limits_{t \to t_0} \dfrac{|f(t)|}{g(t)} > 0$, как это иногда встречается).

Кроме столбцевых векторов, обозначенных жирными буквами, мы будем также пользоваться строчными векторами, обозначенными обыкновенными буквами, напр. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; большей частью они будут означать переменные или индексы. Напр. будем писать $f(x)$ вместо $(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, A^α вместо $A^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ и т. д. В частности, мы будем пользоваться следующими символами:

$$
\begin{array}{ll}
0 = (0, \ldots, 0)\,, & e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)\,, \\
1 = (1, \ldots, 1)\,, & e_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{для } i \neq j\,, \\
 & e_{ii} = (0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)\,, \\
 & \qquad\qquad\quad i\text{-я} \qquad\qquad j\text{-я координата.}
\end{array}
$$

Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, то соотношение $x \leq y$ и здесь будет означать $x_i \leq y_i$ для всех i и аналогично для строгого неравенства. Далее, $|x| = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ и, следовательно, соотношение $|x| \leq 1$ означает, что $|x_i| \leqq 1$ для всех i. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будем писать $\overline{\alpha} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Если $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — комплексная функция n комплексных переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определенная в области $|x| \leq 1$, то через $f^\alpha(x) =$

$= f^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(x)$ обозначим производную $\dfrac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$ по отношению к комплексной области $|x| \leq 1$. Мы подчеркиваем, что допускаются все точки $|x| \leq 1$ (и на границе области определения). При введении этого обозначения предполагается, что величина $f^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(x)$ не зависит от порядка дифференцирования. Это условие будет в дальнейшем всегда выполнено. Символом $\lim\limits_{x \to y} f(x)$ будет обозначен предел в комплексной области $|x| \leq 1$, а символом $(R) \lim\limits_{x \to y} f(x)$ — предел в вещественной области.

В следующих параграфах будем пользоваться некоторыми утверждениями относительно функций нескольких комплексных переменных, обозначенными через 1.1—1.3. Их нетрудно вывести из известных теорем о степенных рядах нескольких комплексных переменных, если предположить, что их коэффициенты неотрицательны.

1.1. *Пусть ряд* $f(x) = \sum a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ *с неотрицательными коэффициентами сходится для* $|x| < 1$. *Тогда для любого* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *будет* $(\mathrm{R}) \lim\limits_{x \to 1} f^{\alpha}(x) = \sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n}$.

1.2. *Пусть* f *определяется как в* 1.1 *и пусть для некоторого* α *будет* $\sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n} < \infty$. *Тогда ясно, что* $f(x)$ *сходится во всей комплексной области* $|x| \leq 1$ *и во всей этой области существует конечная производная*

$$f^{\alpha}(x) = \sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1 - \alpha_1} \ldots x_n^{k_n - \alpha_n}.$$

1.3. *Пусть для всех* $t = 0, 1, \ldots$ *коэффициенты* $a_{k_1, \ldots, k_n}(t) \geq 0$, *ряда* $f_t(x) = \sum a_{k_1, \ldots, k_n}(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ *сходятся в области* $|x| < 1$ *и пусть* $f_t(x) \underset{t}{\rightarrow} f_0(x)$ *равномерно в* $|x| < 1$. *Тогда*

1. *Для каждого вектора* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *имеет место*

$$\sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n}(t) \to \sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n}(0)$$

2. *Если для какого-либо вектора* α *будет* $\sum k_1^{[\alpha_1]} \ldots k_n^{[\alpha_n]} a_{k_1, \ldots, k_n}(0) < \infty$ *то* $f_t^{\alpha}(x) \underset{t}{\rightarrow} f_0^{\alpha}(x)$ *равномерно во всей области* $|x| \leq 1$.

2. Определение ветвящегося случайного процесса. На протяжении всей статьи *ветвящийся случайный процесс с* n *типами частиц* $T_1, \ldots, T_n$ определяется так же, как и в [3] гл. I, § 2. Вместо ,,процесса с n типами частиц“ будем в дальнейшем говорить о *n-мерном процессе*. Во всей статье процесс предполагается однородным. Обозначения также совпадают (за некоторыми исключениями) с обозначениями цитированной статьи [3]. В частности, через $P_{\alpha}^{\beta}(t) = P_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}(t)$ обозначается *вероятность перехода* $\mathcal{P}[\{X(t) = \beta\} | \{X(0) = \alpha\}]$, где $X(t)$ — случайная функция (значениями которой являются n-мерные векторы с неотрицательными целыми координатами), определяемая при помощи соотношения $X(t) = \alpha$, если в момент времени t процесс находится в состоянии α, а $\mathcal{P}[A|B]$ означает условную вероятность события A, обусловленную событием B. Слово „n-мерный" будем большею частью опускать и вместо выражения *ветвящийся случайный процесс* будем писать лишь *в. с. п.* Параметр времени будет пробегать или неотрицательные целые числа ($t = 0, 1, \ldots$) — в таком случае в. с. п. мы назовем в. с. п. *с дискретным временем*, обозначив его через *в. с. п. с д. в.* —, или бесконечный интервал $\langle 0, \infty)$ — тогда в. с. п. мы назовем в. с. п. *с непрерывным временем*, обозначив его через *в. с. п. с н. в.* Во втором из этих случаев мы всегда будем предполагать, что для любого α существуют пределы $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{P_\alpha^\alpha(t) - 1}{t} = p_\alpha^\alpha$ и для любого $\alpha \neq \beta$ существуют пределы $\lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{P_\alpha^\beta(t)}{t} = p_\alpha^\beta$ и что величины p_α^β (т. наз. *интенсивности перехода*) удовлетворяют соотношению $\sum\limits_\beta p_\alpha^\beta = 0$ для всех α. В случае в. с. п. с д. в. все предельные соотношения справедливы для t, пробегающего натуральные числа и возрастающего до ∞, а в случае в. с. п. с н. в. — для t, непрерывно возрастающего до ∞. Следуя работе [3], будем писать $P_i^\alpha(t)$ вместо $P_{e_i}^\alpha(t)$. Кроме *производящих функций*

$$F_i(t, x) = \sum_\alpha P_i^\alpha(t)\, x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{и} \quad f_i(x) = \sum_\alpha p_i^\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

будем пользоваться также более общими

$$F_\alpha(t, x) = \sum_\beta P_\alpha^\beta(t)\, x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}\,. \tag{2.1}$$

Функция $F_\alpha(t, x)$ определяется в комплексной области при помощи соотношения (2.1) и для нее имеет место равенство

$$F_\alpha(t, x) = F_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}(t, x) = \prod_{i=1}^n [F_i(t, x)]^{\alpha_i}\,, \tag{2.2}$$

что можно было бы доказать при помощи соотношения (12) — гл. I в [3]. Однако, справедливость соотношения (2.2) непосредственно следует из того, что случайную переменную $X(t)$ с распределением вероятностей $\mathcal{P}[\,.\,|\{X(t) = \alpha\}]$ можно считать суммой α независимых случайных переменных α_i имеющих, соотв., распределение $\mathcal{P}[\,.\,|\{X(t) = e_i\}]$.

В дальнейших параграфах выводятся между прочим асимптотические выражения для вероятности вырождения процесса. *Вероятность вырождения* к моменту времени t определяется в [3] и у других авторов как $P_\alpha^0(t)$, а *вероятность вырождения вообще* — как $\lim\limits_{t\to\infty} P_\alpha^0(t)$.

В случае в. с. п. с д. в. понятию „вырождения процесса к моменту t" соответствует событие $V(t) = \bigcap\limits_{\tau=t}^{\infty} N(\tau)$, где $N(t) = \{X(t) = 0\}$, а понятию „вырождения процесса вообще" — событие $V = \bigcup_{t=1}^{\infty} V(t) = \bigcup_{t=1}^{\infty} \bigcap_{\tau=t}^{\infty} N(\tau)$. $V(t)$ и V являются (при известной колмогоровской конструкции поля вероятностей) измеримыми множествами и из того обстоятельства, что мы имеем дело с марковским процессом и что $P_0^0(t) = 1$, легко следует, что их вероятности даны, действительно, выражениями $P_\alpha^0(t)$ и соотв. $\lim_{t\to\infty} P_\alpha^0(t)$. В случае в. с. п. с н. в. рассматриваемые события даны соотношениями $V(t) = \bigcap_{\tau \geq t} N(\tau)$ и $V = \bigcup_{t \geq 0} V(t)$. Эти множества не должны, вообще говоря, принадлежать минимальной σ-алгебре, образованной по способу Колмогорова; если же, однако, предположить, что провесс является сепарабельным в смысле [5], гл. II, § 2, то множества $V(t)$ и V измеримы и их вероятности опять равны $P_\alpha^0(t)$ и $\lim_{t\to\infty} P_\alpha^0(t)$.

3. Факториальные моменты. *Факториальными моментами* будем называть (в согласии с [3]) числа

$$M_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(t) = M_i^\alpha(t) = \sum_\beta \beta_1^{[\alpha_1]} \ldots \beta_n^{[\alpha_n]} P_i^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}(t)$$

Если $M_i^\alpha(t) < \infty$, то согласно 1.2 ,

$$M_i^\alpha(t) = F_i^\alpha(t, 1) \tag{3.1}$$

и согласно 1.1, всегда (и в случае $M_i^\alpha(t) = \infty$)

$$M_i^\alpha(t) = (\mathbf{R}) \lim_{x\to 1} F_i^\alpha(t, x) \,. \tag{3.2}$$

Из этого последнего выражения следует, что $M_i^\alpha(t)$ будет конечным, если $F_i^\alpha(t, x)$ ограничена в области $|x| \leq 1$; этим будем в последствии неоднократно пользоваться.

В случае непрерывного времени будем пользоваться кроме больших факториальных моментов также и *малыми факториальными моментами* $m_i^\alpha = m_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \sum_\beta \beta_1^{[\alpha_1]} \ldots \beta_n^{[\alpha_n]} p_i^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$. Если $m_i^\alpha < \infty$, то опять-таки

$$m_i^\alpha = f_i^\alpha(1) \,. \tag{3.3}$$

Факториальные моменты $M_i^\alpha(t)$ и m_i^α назовем моментами *порядка* h, если $\bar{\alpha} = h$. В случае $h = 1$ будем писать $A_{ij}(t)$ вместо $M_i^{e_j}(t)$ и a_{ij} вместо $m_i^{e_j}$, а в случае $h = 2$ $B_i^{(j,k)}(t)$ вместо $M_i^{e_{jk}}(t)$ и $b_i^{(j,k)}$ вместо $m_i^{e_{jk}}$. Далее будем писать $\mathbf{A}(t) = (A_{ij}(t))_{i,j}$, $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j}$, $\mathbf{B}^{(j,k)}(t) = \{B_i^{(j,k)}(t)\}_i$, $\mathbf{b}^{(j,k)} = \{b_i^{(j,k)}\}_i$, $\mathbf{M}^\alpha(t) = \{M_i^\alpha(t)\}_i$, $\mathbf{m}^\alpha = \{m_i^\alpha\}_i$. Все большие факториальные моменты неотрицательны, в частности неотрицательна и матрица $\mathbf{A}(1)$. Если $\mathbf{A}(1)$ конечна, то по известным теоремам о неотрицательных матрицах существует т. наз. максимальное характеристическое число, которое будем на протяжении всей работы обозначать через R и которое обладает тем свойством, что оно вещественно и неотрицательно и что для всех остальных характеристических чисел R_i матрицы $\mathbf{A}(1)$ имеет место $|R_i| \leq R$. Из числа малых факториальных моментов отрицательных могут быть только моменты a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i, значит, все недиагональные элементы матрицы $\mathbf{a}$ не отрицательны. Матрица $\mathbf{a} + d\mathbf{E}$, где $d = \max_i |a_{ii}|$, тогда неотрицательна; отсюда легко следует, что существует вещественное характеристическое число матрицы $\mathbf{a}$, которое мы будем на протяжении всей статьи называть максимальным характеристическим числом матрицы $\mathbf{a}$ и обозначать через r, такое, что для всех остальных характеристических чисел r_i матрицы $\mathbf{a}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{R}(r_i) < r \,. \tag{3.4}$$

Притом $\mathcal{R}(a)$ означает вещественную часть комплексного числа a.

В дальнейших теоремах будем пользоваться следующими соотношениями: Для любого i (см. [3], теорема 1) $F_i(s + t, x) = F_i(s, F(t, x))$. Дифференцируя (в области $|x| < 1$), получим

$$F_i^{e_k}(s + t, x) = \sum_j F_i^{e_j}(s, F(t, x)) \, F_j^{e_k}(t, x) \,, \tag{3.5}$$

и для $\bar{\alpha} > 1$

$$F_i^{\alpha}(s + t, x) = \sum_j F_i^{e_j}(s, F(t, x)) \, F_j^{\alpha}(t, x) + \Phi_i^{\alpha}(s, t, x) \,, \tag{3.6}$$

где $\Phi_i^{\alpha}(s, t, x)$ — сумма конечного числа слагаемых типа

$$F_i^{\beta}(s, F(t, x)) \, F_{i_1}^{\gamma_1}(t, x) \ldots F_{i_l}^{\gamma_l}(t, x) \,, \tag{3.7}$$

где

$$\bar{\beta} \leq \bar{\alpha} \,, \quad \bar{\gamma}_j < \bar{\alpha} \quad (j = 1, 2, \ldots, l) \,, \quad 2 \leq l \leq \bar{\alpha} \,. \tag{3.8}$$

Применяя предельный переход, согласно (3.2), получим отсюда

$$\mathbf{A}(s + t) = \mathbf{A}(s) \, \mathbf{A}(t) \tag{3.9}$$

и для

$$\bar{\alpha} > 1 \quad \mathbf{M}^{\alpha}(s + t) = \mathbf{A}(s) \, \mathbf{M}^{\alpha}(t) + \mathbf{Z}^{\alpha}(s, t) \,, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{Z}^{\alpha}(s, t)$ — столбцевой вектор, i-я составляющая которого является суммой конечного числа слагаемых вида

$$M_i^{\beta}(s) \, M_{i_1}^{\gamma_1}(t) \ldots M_{i_l}^{\gamma_l}(t) \,, \tag{3.11}$$

где для β, γ_j, l справедливо (3.8). Соотношения (3.9) и (3.10) нужно понимать так, что если конечно значение в одной части, то конечно и в другой.

Следующие два утверждения часто используются в статье [3]:

3.1. *Пусть в в. с. п. с д. в. матрица* $\mathbf{A}(1)$ *конечна. Тогда конечны все* $\mathbf{A}(t)$ $(t = 1, 2, \ldots)$ *и* $\mathbf{A}(t) = [\mathbf{A}(1)]^t$.

3.2. *Пусть в в. с. п. с н. в. матрица* $\mathbf{a}$ *конечна. Тогда конечна и* $\mathbf{A}(t)$ *для всех* t *и* $\mathbf{A}(t) = e^{\mathbf{a}t}$.

Формулы для $\mathbf{A}(t)$ в этих утверждениях следуют из (3.9), откуда нетрудно вывести по методу полной индукции и конечность $\mathbf{A}(t)$ в случае дискретного времени. Конечность $\mathbf{A}(t)$ в случае непрерывного времени не вполне очевидна и метод, использованный в [3] для случая одномерного в. с. п. с н. в. (доказательство Леммы 2), не совсем верен, так как при нем используется замена порядка дифференцирования по t и x. Можно, однако, рассуждать следующим образом: согласно [3], Лемма 1, для всех $|x| \leq 1$

$$\frac{F_i(t, x) - x_i}{t} \xrightarrow[t]{} f_i(x) \tag{3.12}$$

и из доказательства этой леммы ясно, что сходимость равномерна в комплексной области $|x| \leq 1$. Так как для любого t выражение $\frac{F_i(t, x) - x_i}{t}$ является степенным рядом относительно x с неотрицательными коэффициентами (вплоть до одного), следует из 1.3

$$\frac{1}{t}\,[\mathbf{A}(t) - \mathbf{E}] \xrightarrow[t \to 0+]{} \mathbf{a}\,. \tag{3.13}$$

Так как матрица $\mathbf{a}$ конечна, существует t_0 так, что для $t \leq t_0$ конечны и матрицы $\mathbf{A}(t)$. Далее можно рассуждать, как в случае дискретного времени (выбрав подходящее $t \leq t_0$ вместо 1).

3.3. *Пусть в в. с. п. с д. в. для некоторого $h > 1$ все $\mathbf{M}^\alpha(1)$ с $\bar{\alpha} = h$ конечны. Тогда конечны $\mathbf{M}^\alpha(t)$ для всех t и всех α с $\bar{\alpha} \leq h$ и*

$$\mathbf{M}^\alpha(t) = \sum_{\tau=1}^{t} \mathbf{A}(t-\tau)\, \mathbf{Z}^\alpha(\tau - 1)\,. \tag{3.14}$$

Притом $\mathbf{Z}^\alpha(0) = \mathbf{M}^\alpha(1)$, и для $t \geq 1$ $\mathbf{Z}^\alpha(t)$ является столбцевым вектором, i-ю составляющую которого образует сумма конечного числа слагаемых вида

$$M_i^\beta(1)\, M_{i_1}^{\gamma_1}(t) \ldots M_{i_l}^{\gamma_l}(t) \tag{3.15}$$

где для h, γ_j, l имеет место (3.8).

Доказательство: Подставляя $s = 1$ в (3.10), получим $\mathbf{M}^\alpha(t+1) = \mathbf{A}(1)\, \mathbf{M}^\alpha(t) + \mathbf{Z}^\alpha(t)$, и при помощи этого соотношения можно доказать конечность $\mathbf{M}^\alpha(t)$ и (3,14) методом полной индукции по t.

3.4. *Пусть в в. с. п. с н. в. для какого-либо $h > 1$ каждый вектор $\mathbf{m}^\alpha$ с $\bar{\alpha} = h$ будет конечным. Тогда конечны $\mathbf{M}^\alpha(t)$ для всех t и для всех $\bar{\alpha} \leq h$ и*

$$\mathbf{M}^\alpha(t) = \int_0^t e^{\mathbf{a}(t-\tau)} \mathbf{z}^\alpha(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{3.16}$$

Притом $\mathbf{z}^\alpha(t)$ — столбцевой вектор, i-ю составляющую которого образует сумма конечного числа слагаемых вида

$$m_i^\beta M_{i_1}^{\gamma_1}(t) \ldots M_{i_l}^{\gamma_l}(t) \tag{3.17}$$

где для h, γ_j, l имеет место (3.8).

Доказательство. Очевидно, конечны все $\mathbf{m}^\alpha$ с $\bar{\alpha} \leq h$, значит, в частности и $\mathbf{a}$. Подобно тому, как и при доказательстве 3.2, получим из (3.12) и 1.3

$$\frac{1}{t}\,\mathbf{M}^\alpha(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{m}^\alpha\,, \tag{3.18}$$

откуда и здесь вытекает конечность $\mathbf{M}^\alpha(t)$ для всех t. Из соотношения (3.10) следует $\frac{1}{s}\,[\mathbf{M}^\alpha(t+s) - \mathbf{M}^\alpha(t)] = \frac{1}{s}\,[\mathbf{A}(s) - \mathbf{E}]\,\mathbf{M}^\alpha(t) + \frac{1}{s}\,\mathbf{Z}^\alpha(s,t)$ и отсюда при помощи (3.18) — дифференциальное уравнение $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{M}^\alpha(t) = \mathbf{a}\mathbf{M}^\alpha(t) + \mathbf{z}^\alpha(t)$. Решая это уравнение при начальном условии $\mathbf{M}^\alpha(0) = \mathbf{O}$, получим (3.16).

Следующие два утверждения содержат асимптотические оценки факториальных моментов.

3.5. *Пусть в в. с. п. с д. в. для некоторого* $h \geq 1$ *все* $\mathbf{M}^\alpha(1)$ *с* $\bar{\alpha} = h$ *конечны. Далее, пусть* $0 < R < 1$ *и* $\mathbf{A}(t) = O(R^t)$. *Тогда для всех* α *с* $\bar{\alpha} \leq h$ *будет* $\mathbf{M}^\alpha(t) = O(R^t)$.

Доказательство можно провести путем индукции по h, так как если имеется α с $\bar{\alpha} = h > 1$ и если справедливо утверждение 3.5 для $h - 1$, то для вектора $\mathbf{Z}^\alpha(t)$ в (3.14), ввиду (3.15) и (3.8), будет $\mathbf{Z}^\alpha(t) = O(R^{2t})$, а значит и $\mathbf{A}(t-\tau)\,\mathbf{Z}^\alpha(\tau - 1) = O(R^{t+\tau-1})$. Согласно (3.14), получим $\mathbf{M}^\alpha(t) = O(R^{t-1}\sum_{\tau=0}^{t-1} R^\tau) = O(R^t)$.

3.6. *Пусть в в. с. п. с н. в. для некоторого* $h \geq 1$ *все* $\mathbf{m}^\alpha$ *с* $\bar{\alpha} = h$ *конечны. Далее, пусть* $r < 0$ *и* $\mathbf{A}(t) = O(e^{rt})$. *Тогда для всех* $\bar{\alpha} \leq h$ *будет* $\mathbf{M}^\alpha(t) = O(e^{rt})$.

Доказательство можно провести подобным же образом, как и у предыдущей теоремы, но используя 3.4 вместо 3.3.

4. Асимптотические соотношения для ветвящихся случайных процессов с дискретным временем. В настоящем параграфе предполагается, что дан в. с. п. с д. в. и что все факториальные моменты первого и второго порядка конечны. Максимальное характеристическое число матрицы $\mathbf{A}(1)$ обозначим и здесь через R. Далее, будем писать $\mathbf{D} = R^{-1}\mathbf{A}(1)$, $Q_i(t) = 1 - P_i^0(t)$, $\mathbf{Q}(t) = \{Q_i(t)\}_i$, $\mathbf{F}(t,x) = \{F_i(t,x)\}_i$, $H_i(t,x) = F_i(t,x) - 1$, $\mathbf{H}(t,x) = \{H_i(t,x)\}_i$ и $P_i^{*\alpha}(t) = \mathcal{P}[\{X(t) = \alpha\}|\{X(0) = e_i\} \cap \{X(t) \neq 0\}]$, т. е. $P_i^{*\alpha}(i) = \frac{P_i^\alpha(t)}{Q_i(t)}$ для $\alpha \neq 0$, $P_i^{*0}(t) = 0$. $Q_i(t)$ есть вероятность того, что процесс с начальным состоянием e_i не выродится к моменту времени t, а $P_i^{*\alpha}(t)$ — условная вероятность того, что этот процесс будет к моменту t в состоянии α, если предположить, что он за это время не выродился. Факториальные моменты этого условного распределения будем обозначать через $A_{ij}^*(t)$, $B_i^{*(j,k)}(t)$, $M_i^{*\alpha}(t)$, а производящую функцию через $F_i^{*\alpha}(t)$. Для всех предельных соотношений с $t \to \infty$ в настоящем параграфе подразумевается, что t пробегает натуральные числа, возрастая до ∞.

По теореме Тейлора для функций комплексного переменного можно написать, ввиду (3.1) и теоремы 1 в [3], для всех целых неотрицательных t и τ и для комплексных $|x| \leq 1$

$$H_i(t+\tau, x) = F_i(t, F(\tau, x)) - F_i(t, 1) = \sum_j A_{ij}(t)\, H_j(\tau, x) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \tilde{B}_i^{(j,k)}(t, \tau, x)\, H_j(\tau, x)\, H_k(\tau, x)\,, \tag{4.1}$$

где

$$|\tilde{B}_i^{(j,k)}(t, \tau, x)| \leq B_i^{(i,k)}(t) \tag{4.2}$$

для всех τ и $|x| \leq 1$. Положим

$$G_{ik}(t, \tau, x) = \frac{1}{2} \sum_j \tilde{B}_i^{(j,k)}(t, \tau, x)\, H_j(\tau, x) \tag{4.3}$$

и $\mathbf{G}(t, \tau, x) = (G_{ik}(t, \tau, x))_{i,k}$. Соотношение (4.1) можно тогда переписать в виде

$$\mathbf{H}(t+\tau, x) = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{G}(t, \tau, x)]\, \mathbf{H}(\tau, x)\,. \tag{4.4}$$

Для вещественных $x \geq 0$ будут, конечно, все $\tilde{B}_i^{(j,k)}(t, \tau, x) \geq 0$ и, следовательно, из (4.1) следует (в частности для $\tau = 0$ и $x = 0$)

$$\mathbf{Q}(t) \leq \mathbf{A}(t)\,.\, \mathbf{J} \tag{4.5}$$

и далее

$$|\mathbf{H}(t, x)| \leq 2\mathbf{Q}(t) \leq 2\mathbf{A}(t)\,.\,\mathbf{J}\,. \tag{4.6}$$

4.1. Вспомогательное утверждение. *Пусть $0 < R < 1$ и пусть последовательность матриц $\mathbf{D}^t$ ограничена. Тогда матрица $R^{-(t+\tau)}\, \mathbf{G}(t, \tau, x)$ равномерно ограничена для всех t, τ и $|x| \leq 1$.*

Доказательство. Условие теоремы может быть записано в виде $\mathbf{A}(t) = O(R^t)$, значит, согласно 3.5, будет $B_i^{(j,k)}(t) = O(R^t)$. Согласно (4.6), будет $|H_i(\tau, x)| = O(R^\tau)$ равномерно в области $|x| \leq 1$ и, согласно (4.2) и (4.3), получим тогда $|G_{ik}(t, \tau, x)| \leq \frac{1}{2} \sum_j B_i^{(j,k)}(t)\,.\,|H_j(\tau, x)| = O(R^{t+\tau})$ равномерно в области $|x| \leq 1$.

4.2. *Пусть $0 < R < 1$ и пусть последовательность матриц $\mathbf{D}^t$ сходится к конечной матрице. Тогда для любого i $R^{-t}F[_i(t, x) - 1]$ равномерно сходится в комплексной области $|x| \leq 1$ к конечной функции $\chi_i(x)$. В частности, для $x = 1$ имеем*

$$\frac{Q_i(t)}{R^t} \xrightarrow[t \to \infty]{} K_i = -\chi_i(0) \geq 0\,.$$

Доказательство. Используя соотношение (4.4), получим для целых неотрицательных τ_0, τ_1, τ_2

$$R^{-(\tau_0+\tau_1)}\mathbf{H}(\tau_0+\tau_1, x) - R^{-(\tau_0+\tau_2)}\mathbf{H}(\tau_0+\tau_2, x) =$$
$$= [\mathbf{D}^{\tau_1} + R^{\tau_0}R^{-(\tau_0+\tau_1)}\mathbf{G}(\tau_1, \tau_0, x) - \mathbf{D}^{\tau_2} - R^{\tau_0}R^{-(\tau_0+\tau_2)}\mathbf{G}(\tau_2, \tau_0, x)] \,.\, R^{\tau_0}\mathbf{H}(\tau_0, x) \,.$$

Последовательность $\mathbf{D}^t$, очевидно, ограничена, поэтому, согласно 4.1 и (4.6), существуют постоянные k_1, k_2 так, что для всех t, τ, x будет

$$R^{-(t+\tau)}|\mathbf{G}(t, \tau, x)| \leq k_1\mathbf{I}\,, \quad R^{-t}|\mathbf{H}(t, x)| \leq k_2\mathbf{J}\,.$$

Итак, для всех $\tau_0, \tau_1, \tau_2, x$ будет $R^{-(\tau_0+\tau_1)}\mathbf{H}(\tau_0+\tau_1, x) - R^{-(\tau_0+\tau_2)}\mathbf{H}(\tau_0+\tau_2, x)| \leq$ $\leq [|\mathbf{D}^{\tau_1} - \mathbf{D}^{\tau_2}| + R^{\tau_0}\{R^{-(\tau_0+\tau_1)}|\ \mathbf{G}(\tau_1, \tau_0, x)| + R^{-(\tau_0+\tau_2)}|\ \mathbf{G}(\tau_2, \tau_0, x)|\}]\,.$ $.\,R^{-\tau_0}\,|\mathbf{H}(\tau_0, x)| \leq [|\mathbf{D}^{\tau_1} - \mathbf{D}^{\tau_2}| + R^{\tau_0}\,.\,2k_1\mathbf{I}]\,.\,k_2\mathbf{J}$. Так как последовательность $\mathbf{D}^t$ сходится, то для данного $\varepsilon > 0$ можно подобрать T так, что для $\tau_1, \tau_2 > T$ будет $|\mathbf{D}^{\tau_1} - \mathbf{D}^{\tau_2}| < \varepsilon\, I$. Далее, выберем фиксированное τ_0 так, чтобы $R^{\tau_0} < \varepsilon$. Тогда для $t_1, t_2 > T + \tau_0$ будет $|R^{-t_1}\mathbf{H}(t_1, x) - R^{-t_2}\mathbf{H}(t_2, x)| <$ $< \varepsilon(1 + 2k_1)\, k_2\mathbf{I}\,\mathbf{J}$. Отсюда следует, что последовательность $R^{-t}\mathbf{H}(t, x)$ является равномерно сходящейся в себе и, следовательно, существуют пределы $\chi_i(x)$ в смысле равномерной сходимости.

Замечание. Предположение о сходимости $\mathbf{D}^t$ равносильно предположению о том, что R является простым корнем минимального многочлена матрицы $\mathbf{A}(1)$ и что не существует характеристических чисел R_i матрицы $\mathbf{A}(1)$ таких, что $|R_i| = R$ и $R_i \neq R$.

Следующая главная теорема является обобщением уже упомянутых теорем Колмогорова и Яглома. Соотношение (4.7) дает нам больше, чем вторая часть утверждения 4.2, так как здесь $K_i > 0$ и, следовательно, в точности $Q_i(t) \sim K_iR^t$. Согласно соотношениям (4.8) и (4.9), для $P_i^{*\alpha}(t)$ существует предельное распределение.

4.3. Главная теорема. *Пусть $\mathbf{A}(1)$ — неразложимая примитивная матрица и пусть $R < 1$. Тогда существуют конечные пределы*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Q_i(t)}{R_t} = K_i\,, \quad 0 < K_i < \infty \ \text{для всех}\ i, \tag{4.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_i^{*\alpha}(t) = P_i^{*\alpha} \ \text{для всех}\ i \ \text{и}\ \alpha. \tag{4.8}$$

Притом

$$\sum_\alpha P_i^{*\alpha} = 1\,, \tag{4.9}$$

и если $F_i^*(x)$ — производящая функция вероятностей $P_i^{*\alpha}$ и A_{ij}^*, $B_i^{*(jk)}$, $M_i^{*\alpha}$ — соответствующие факториальные моменты, то имеют место соотношения

$$F_i^*(F(1, x)) = RF_i^*(x) + 1 - R\,, \quad A_{ik}^* = \frac{\mu_i\nu_k}{K_i}\,,$$

где μ_i и ν_k — составляющие правого и левого собственных векторов матрицы $\mathbf{A}(1)$, *соответствующих характеристическому числу* R *и таких, что* $\sum_j \mu_j \nu_j = 1$. *Далее, если все моменты* $M_i^{\alpha}(1)$ *с* $\bar{\alpha} = h$ *конечны, то конечны и все* $M_i^{*\alpha}$ *с* $\bar{\alpha} \leq h$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что для всех i и t будет

$$Q_i(t) > 0\,. \tag{4.10}$$

Действительно, если бы для каких-нибудь i и t было $Q_i(t) = 0$, то для всех $\alpha \neq 0$ было бы $P_i^{\alpha}(t) = 0$ и, следовательно, $A_{ij}(t) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Но тогда матрица $\mathbf{A}(t) = [\mathbf{A}(1)]^t$ была бы разложимой, что противоречит предположению что $\mathbf{A}(1)$ примитивна.

Так как $\mathbf{A}(1)$ примитивна, то и $\mathbf{D}$ примитивна с максимальным характеристическим числом 1, следовательно, последовательность $\mathbf{D}^t$ сходится к положительной матрице $\bar{\mathbf{D}} = (\bar{D}_{ij})_{i,j} > \mathbf{O}$ (см. напр. [6], док. теор. 8, гл. XIII, § 5). Если $d = \min\limits_{i,j} \bar{D}_{ij}$, то, очевидно, $d > 0$ и существует T так, что для $t > T$ будет $\mathbf{D}^t > \frac{d}{2}\mathbf{I}$. Так как условия 4.1 выполнены, существует t_0 так, что $R^{-t}|\mathbf{G}(t, t_0, \alpha)| \leq \frac{d}{4}\mathbf{I}$ для всех t и x. В частности, для $x = 0$ и $t > T$ будет $\mathbf{D}^t + R^{-t}\mathbf{G}(t, t_0, 0) > \frac{d}{4}\mathbf{I}$. Подставляя $x = 0$ в (4.4), получим

$$R^{-(t+t_0)}\mathbf{Q}(t + t_0) = [\mathbf{D}^t + R^{-t}\mathbf{G}(t, t_0, 0)]\, R^{-t_0}\mathbf{Q}(t_0)\,. \tag{4.11}$$

Итак, для $t > T$ будет $R^{-(t+t_0)}\mathbf{Q}(t + t_0) > \dfrac{dn \min\limits_i Q_i(t)}{4R^{t_0}}\mathbf{J} > \mathbf{O}$, ибо, согласно (4.10), $\mathbf{Q}(t_0) > \mathbf{O}$. Отсюда следует, что все пределы K_i в (4.7), которые, согласно 4.2, существуют, положительны.

Далее имеем $F_i^*(t, x) = \dfrac{F_i(t, x) - P_i^0(t)}{Q_i(t)} = 1 + \dfrac{F_i(t, x) - 1}{R^t} \cdot \dfrac{R^t}{Q_i(t)}$ и, следовательно, согласно 4.2 и (4.7), $F_i^*(t, x) \underset{t}{\to} 1 + \dfrac{\chi_i(x)}{K_i}$ равномерно в области $|x| \leq 1$. По известным теоремам теории функций нескольких комплексных переменных $F_i^*(x)$ является аналитической в области $|x| < 1$, т. е. существуют коэффициенты $P_i^{*\alpha}$ так, что $F_i^*(x) = \sum\limits_{\alpha} P_i^{*\alpha} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и имеет место (4.8). Отсюда следует, что $P_i^{*\alpha}$ неотрицательны, а из 1.3 далее соотношение (4.9).

Функциональное уравнение для $F_i^*(x)$ можно вывести подобным же образом, как и в одномерном случае (см. напр. [3], § 7, доказ. теор. 5). Согласно 1.3, имеем далее $A_{ij}^* = \lim\limits_{t\to\infty} A_{ij}^*(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{A_{ij}(t)}{R^t} \cdot \dfrac{R^t}{Q_i(t)} = \dfrac{\bar{D}_{ij}}{K_i}$ и из соотношения $\bar{\bar{\mathbf{D}}}\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}}$ нетрудно вывести, что $\bar{\mathbf{D}}_{ij} = \mu_i \nu_j$. Точно так же, согласно 1.3, имеем $M_i^{*\alpha} = \lim_{t\to\infty} M_i^{*\alpha}(t) = \frac{1}{K_i} \lim_{t\to\infty} \frac{M_i^\alpha(t)}{R^t}$, откуда при помощи 3.5 следует утверждение о конечности $M_i^{*\alpha}$.

Из теоремы 4.3 можно вывести аналогичное утверждение относительно вероятностей $P_\alpha^\beta(t)$. С этой целью положим $Q_\alpha(t) = 1 - P_\alpha^0(t)$, $P_\alpha^{*\beta}(t) = \frac{P_\alpha^\beta(t)}{Q_\alpha(t)}$, если $\beta \neq 0$ и $P_\alpha^{*\alpha}(t) = 0$, причем $F_\alpha^*(t, x)$ означает производящую функцию вероятностей $P_\alpha^{*\beta}(t)$.

4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3, *далее, пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. *Пусть* i_k $(k = 1, \ldots, s)$ — *те индексы, для которых* $\alpha_{i_k} \neq 0$. *Тогда существуют пределы* $\lim_{t\to\infty} \frac{Q_\alpha(t)}{R^t} = K_\alpha = \sum_{k=1}^{s} K_{i_k} > 0$, $\lim_{t\to\infty} P_\alpha^{*\beta}(t) = P_\alpha^{*\beta}$. *Притом* $\sum_\beta P_\alpha^{*\beta} = 1$, *и если* $F_\alpha^*(x)$ — *их производящая функция, то*

$$F_\alpha^*(x) = \frac{\sum_{k=1}^{s} K_{i_k} F_{i_k}^*(x)}{K_\alpha}.$$

Доказательство. Положим $H_\alpha(t, x) = F_\alpha(t, x) - 1$. Согласно 2.1, имеем $F_\alpha(t, x) = [F_1(t, x)]^{\alpha_1} \ldots [F_n(t, s)]^{\alpha_n}$, откуда $H_\alpha(t, x) = [H_1(t, x) + 1]^{\alpha_1} \ldots \ldots [H_n(t, x) + 1]^{\alpha_n} - 1 = \sum_{k=1}^{s} H_{i_k}(t, x) + Z(t, x)$, где $Z(t,x)$ — сумма произведений хотя бы двух множителей $H_i(t, x) \,.\, H_j(t, x)$. Так как $\mathbf{D}^t$ ограничена, будет, согласно (4.6), $Z(t, x) = O(R^{2t})$ равномерно в области $|x| \leq 1$. Итак, $\frac{Z(t, x)}{R^t} \to 0$ равномерно в $|x| \leq 1$, откуда, согласно 4.2, $\frac{H_\alpha(t, x)}{R^t} \to \chi_{i_1}(x) + \ldots + \chi_{i_s}(x) = \chi_\alpha(x)$ равномерно в $|x| \leq 1$. Отсюда уже нетрудно получить утверждение теоремы при помощи 4.2 и 4.3.

Следующие примеры показывают, что теорема 4.3 не обязательно справедлива, если $\mathbf{A}(1)$ — неразложимая импримитивная матрица. В первом из них сходится $R^{-t}\mathbf{Q}(t)$, но не сходятся все $P_i^{*\alpha}(t)$, во втором же не сходится даже $R^{-t}\mathbf{Q}(t)$.

Пример 1. Пусть $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $p + q = 1$ и пусть двумерный в. с. п. с д. в. определен основными производящими функциями

$$F_1(1, x_1, x_2) = p + qx_2\,, \quad F_2(1, x_1, x_2) = p + qx_1\,.$$

Очевидно, $\mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$ неразложима и $R = q$, значит, $R < 1$. Из рекуррентных соотношений

$$F_1(t, x_1, x_2) = p + qF_2(t - 1, x_1, x_2)\,, \quad F_2(t, x_1, x_2) = p + qF_1(t - 1, x_1, x_2) \tag{4.12}$$

получим $1 - F_1(2t, x_1, x_2) = q^{2t}(1 - x_1)$, $1 - F_1(2t + 1, x_1, x_2) = q^{2t+1}(1 - x_2)$ и аналогично для $i = 2$. Отсюда $Q_i(t) = q^t$ для всех t, следовательно, $\frac{Q_i(t)}{R^t} = 1$ сходится. Далее, из (4.12) следует $P_1^{(1,0)}(2t) = q^{2t}$, $P_1^{(1,0)}(2t + 1) = 0$, $P_1^{*(1,0)}(2t) = 1$, $P_1^{*(1,0)}(2t + 1) = 0$ и, следовательно, не имеет места (4.8) в 4.3.

Пример 2. Пусть $0 < p < \frac{1}{2}$ и пусть двумерный в. с. п. с д. в. определен основными производящими функциями $F_1(1, x_1, x_2) = 1 - p + px_2^2$, $F_2(1, x_1, x_2) = x_1$. Матрица $\mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ неразложима и $R = \sqrt{2p}$, $R < 1$. При помощи рекуррентных соотношений $F_1(t, x_1, x_2) = 1 - p + pF_2^2(t - 1, x_1, x_2)$, $F_2(t, x_1, x_2) = F_1(t - 1, x_1, x_2)$ получим $1 - F_1(t, x_1, x_2) = p(1 - F_1(t - 2, x_1, x_2))(1 + F_1(t - 2, x_1, x_2))$, откуда $Q_1(t) = pQ_1(t - 2) \cdot (2 - Q_1(t - 2))$. Очевидно, $Q_1(0) = 1$, $Q_1(1) = p$, $Q_1(2) = p$ и для $t > 1$ $Q_1(2t) = p^t \prod_{\tau=1}^{t-1} (2 - Q_1(2\tau))$, $Q_1(2t - 1) = Q_1(2t)$. Тогда $R^{-2t}Q_1(2t) = \prod_{\tau-1}^{t-1}\left(1 - \frac{Q_1(2\tau)}{2}\right)$. Согласно (4.5), имеем $Q_1(2t) \leq A_{11}(2t) + A_{12}(2t) = 2^t p^t$. Так как $2p < 1$, ряд $\sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{Q_1(2\tau)}{2}$, а значит и произведение $\prod_{\tau=1}^{\infty}\left(1 - \frac{Q_1(2\tau)}{2}\right)$, сходится. Отсюда далее следует, что $R^{-2t}Q_1(2t)$ сходится к конечному положительному пределу K. Однако, $R^{-(2t-1)}Q_1(2t - 1) = R^{-2t}Q_1(2t) \cdot R \to RK \neq K$, следовательно, $R^{-t}Q_1(t)$ не сходится.

Как видно из этого второго примера, в случае неразложимой импримитивной матрицы $\mathbf{A}(1)$ выражение $R^{-t}\mathbf{Q}(t)$ не обязательно сходится. Несмотря на это $\mathbf{Q}(t)$ стремится к нулю так же быстро, как и R^t, как показывает следующее утверждение. (Символ Ω был определен в параграфе 1.)

4.5. *Пусть матрица* $\mathbf{A}(1)$ *неразложима и* $R < 1$. *Тогда* $\mathbf{Q}(t) = O(R^t) = \Omega(R^t)$.

Доказательство. Пусть индекс импримитивности матрицы $\mathbf{A}(1)$ равен h. (См. напр. [6], гл. XIII, § 6.) Можно предположить (см. [6], гл. XIII, § 2, теор. 2), что координаты векторов, определяющих состояние случайного процесса, занумерованы так, что матрицу $\mathbf{A}(1)$ можно записать в виде

$$\mathbf{A}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{A}_1, & ., & . & ., & \mathbf{O} \\ ., & \mathbf{O}, & \mathbf{A}_2, & . & ., & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O}, & ., & ., & . & \mathbf{O}, & \mathbf{A}_{h-1} \\ \mathbf{A}_h, & \mathbf{O} & ., & . & ., & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

где на диагонали помещаются квадратные нулевые матрицы; пусть i-я из них будет размеров $n_i \times n_i$ ($i = 1, \dots, h$, $\sum n_i = n$). При этих числах

n_i будем говорить, что произвольная квадратная матрица $\boldsymbol{U}$ размеров $n \times n$ есть матрица типа s ($s = 0, 1, \ldots, h-1$), если $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_{ij})_{i,j}$, где $\boldsymbol{U}_{ij}$ — матричные блоки такие, что диагональные блоки $\boldsymbol{U}_{ii}$ суть квадратные матрицы размеров $n_i \times n_i$ и где ненулевыми могут быть самое большее блоки $\boldsymbol{U}_{1,s+1}, \boldsymbol{U}_{2,s+2}, \ldots, \boldsymbol{U}_{h-s,h}, \boldsymbol{U}_{h-s+1,1}, \ldots, \boldsymbol{U}_{hs}$ (вообще говоря, не квадратные). Эти блоки мы будем в дальнейшем называть исключительными блоками типа s. Матрица типа 0, очевидно, будет квазидиагональной, т. е. только блоки $\boldsymbol{U}_{ii}$ могут быть ненулевыми. Такую квазидиагональную матрицу будем в дальнейшем записывать также в виде $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_{11}, \ldots, \ldots, \boldsymbol{U}_{hh}]$. Очевидно, при данных n_i и h существуют матрицы, которые нельзя отнести к какому-либо типу. Однако, если ненулевую матрицу можно отнести к какому-либо типу, то он определяется однозначно. Индекс импримитивности матрицы $\boldsymbol{D}$ равен h и ее максимальное характеристическое число есть 1. Предполагая, что матрица $\boldsymbol{A}(1)$ имеет вид (4.13), т. е. что она типа 1, мы видим, что и матрица $\boldsymbol{D}$ будет типа 1 и, вообще, $\boldsymbol{D}^t$ будет типа $t \bmod h$. В частности, $\boldsymbol{D}^h$ принадлежит типу 0, т. е. является квазидиагональной, $\boldsymbol{D}^h = [\boldsymbol{D}_1, \ldots, \boldsymbol{D}_h]$, где $\boldsymbol{D}_i$ — неразложимые примитивные матрицы (размеров $n_i \times n_i$), которые имеют одно и то же максимальное характеристическое число 1, $i = 1, \ldots, h$ (см. напр. [6], гл. XIII, § 5, следствие 2).

Для каждого t каждая строка матрицы $\boldsymbol{D}^t$ должна содержать хоть один ненулевой элемент, ибо в противном случае матрица $\boldsymbol{D}^{ht} = [\boldsymbol{D}_1^t, \ldots, \boldsymbol{D}_h^t]$ содержала бы также по крайней мере одну нулевую строку, что невозможно, так как $\boldsymbol{D}_i^t$ — неразложимые примитивные матрицы ([6], гл. XIII, § 6, следствие 1). Так как $\boldsymbol{D}_i$ примитивны с максимальными характеристическими числами 1, то существуют (как и при доказательстве 4.3) положительные матрицы $\overline{\boldsymbol{D}}_i$ такие, что $\boldsymbol{D}_i^t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\boldsymbol{D}}_i$. Тогда $\boldsymbol{D}^{ht} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\boldsymbol{D}} = [\overline{\boldsymbol{D}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{D}}_h]$ и вообще

$$\boldsymbol{D}^{ht+s} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{D}^s\overline{\boldsymbol{D}} \quad (s = 0, 1, \ldots, h-1)\,. \tag{4.14}$$

$\boldsymbol{D}^s\overline{\boldsymbol{D}}$ принадлежит типу s, и так как каждая строка в $\boldsymbol{D}^s$ содержит хоть один положительный элемент, а все диагональные матрицы матрицы $\overline{\boldsymbol{D}}$ положительны, то все исключительные блоки (типа s) в $\boldsymbol{D}^s\overline{\boldsymbol{D}}$ положительны. Пусть d_s — наименьший положительный элемент в $\boldsymbol{D}^s\overline{\boldsymbol{D}}$; положим $d = \min\limits_{0\leq s<h} d_s$; $d > 0$ и из (4.14) следует существование T такого, что для $t > T$ в матрице $\boldsymbol{D}^t$ все элементы исключительных блоков (типа $t \bmod h$) больше $\frac{d}{2}$.

Пусть теперь дано фиксированное t и пусть i, k — пара индексов таких, что элемент в матрице типа $t \bmod h$ с этими индексами не входит ни в какой исключительный блок. Тогда для этой пары имеем $A_{ik}(t) = 0$ и, следовательно, $P^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(t) = 0$ для всех векторов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_k > 0$. Тем более будет $B_i^{(jk)}(t) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$, а, следовательно, согласно

(4.2), и $\tilde{B}_i^{(jk)}(t, \tau, 0) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и всех τ. Но тогда и $G_{ik}(t, \tau, 0) = 0$ для всех τ и, значит, матрица $\mathbf{G}(t, \tau, 0)$, если она ненулевая, принадлежит тому же типу, как и $\mathbf{D}^t$ для всех τ.

Согласно 4.1, существует t_0 так, что $R^{-t}|\mathbf{G}(t, t_0, 0)| \leqq \frac{d}{4}\mathbf{I}$ для всех t. Тогда в матрице $\mathbf{D}^t + R^{-t}\mathbf{G}(t, t_0, 0)$ для $t > T$ элементы всех исключительных блоков (типа $t \bmod h$) больше $\frac{d}{4}$. Матрица $\mathbf{A}(t)$, так же как и $\mathbf{D}^t$, не может иметь нулевых строчек и, следовательно, по тем же причинам, как и в начале доказательства теоремы 4.3, будет $\mathbf{Q}(t_0) > \mathbf{O}$. Итак, если обозначить $q = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \frac{Q_i(t_0)}{R^{t_0}}$, то $q > 0$ и из соотношения (4.13) получим для $t > T$ $R^{-(t+t_0)}\mathbf{Q}(t + t_0) > \frac{dq}{4}\mathbf{J} > \mathbf{O}$, следовательно, $\liminf\limits_{t\to\infty} R^{-t}\mathbf{Q}(t) > \mathbf{O}$. Соотношение $\mathbf{Q}(t) = O(R^t)$ непосредственно следует из (4.14) и (4.5).

5. Асимптотические соотношения для ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем. В настоящем параграфе мы выведем теоремы для случая непрерывного времени, аналогичные теоремам парагр. 4. Соответственные утверждения для одномерного случая были выведены Севастьяновым в [3]. Метод, которым мы здесь пользуемся, тот же как и в парагр. 4, и тем самым он значительно отличается от метода, использованного Севастьяновым в одномерном случае. Метод Севастьянова здесь нельзя было использовать, так как в многомерном случае не имеет, например, места аналог следующего утверждения: если $p(t) \leqq q(t)$ для всех $t \geqq 0$ и если $x(t)$ и $y(t)$ — решения дифференциальных уравнений $x'(t) = p(t)\,x(t)$ и $y'(t) = q(t)\,y(t)$ такие, что $x(0) = y(0) = 1$, то $x(t) \leqq y(t)$ для всех $t \geqq 0$.

На протяжении всего парагр. 5 предполагается, что дан в. с. п. с н. в. и что все малые факториальные моменты первого и второго порядка a_{ij} и $b_i^{(j,k)}$ конечны. Максимальное характеристическое число матрицы $\mathbf{a}$ (которое было определено в начале парагр. 3) обозначим опять через r; далее, будем писать $\mathbf{d} = \mathbf{a} - r\mathbf{E}$. Все обозначения, введенные в начале парагр. 4 будут здесь применяться без изменения, однако, параметр t будет пробегать все неотрицательные числа. Соотношения 4.1—4.6 справедливы и здесь, а именно для всех неотрицательных t и τ. Все предельные соотношения в последующих теоремах справедливы для t непрерывно возрастающего до ∞.

5.1. *Пусть $r < 0$ и пусть $e^{\mathbf{d}t}$ сходится к конечной матрице. Тогда для любого i $e^{-rt}[F_i(t, x) - 1]$ сходится равномерно в комплексной области $|x| \leq 1$ к конечной функции $\chi_i(x)$ и, в частности, для $x = 0$ $e^{-rt}Q_i(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} K_i = -\chi_i(0) \geqq 0$.*

Доказательство. Из условия теоремы вытекает $\mathbf{A}(t) = e^{\mathbf{a}t} = O(e^{rt})$, откуда, так же как и при доказательстве теоремы 4.1, и используя теорему

3.6 (вместо 3.5) и вытекающее из нее соотношение $B_i^{(j,k)}(t) = O(e^{rt})$, получаем

$$\mathbf{G}(t, \tau, x) = O(e^{r(t+\tau)}) \text{ равномерно в } |x| \leqq 1\,. \tag{5.1}$$

Дальнейший ход рассуждений тот же, как ход рассуждений при доказательстве теоремы 4.2, с той разницей, что выражения R^t и $\mathbf{D}^t$ нужно заменить выражениями e^{rt} и e^{dt}; кроме того, вместо теоремы 4.1 используется (5.1).

Замечание. Предположение, что e^{dt} сходится к конечной матрице, равносильно следующим двум предположениям:

а) $e^{at} = O(e^{rt})$,

б) r является простым корнем минимального многочлена матрицы $\mathbf{a}$. Достаточным, но не необходимым, условием для выполнения указанного предположения является существование положительного собственного вектора, соответствующего характеристическому числу r матрицы $\mathbf{a}$.

5.2. Главная теорема. *Пусть матрица* $\mathbf{a}$ *неразложима и* $r < 0$. *Тогда существуют конечные пределы*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} Q_i(t) = K_i\,, \quad 0 < K_i < \infty \quad \textit{для всех } i, \tag{5.2}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_i^{*\alpha}(t) = P_i^{*\alpha} \quad \textit{для всех } i \textit{ и } \alpha. \tag{5.3}$$

Притом

$$\sum_{\alpha} P_i^{*\alpha} = 1\,, \tag{5.4}$$

и если $F_i^*(x), A_{ij}^*, B_{ij}^{*(j,k)}, M_i^{*\alpha}$ *имеют тот же смысл, как и в теореме* 4.3, *то*

$$r(F_i^*(x) - 1) \sum_j \frac{\partial F_i^*(x)}{\partial x_j} f_j(x) \quad \textit{и} \quad A_{ij}^* = \frac{\mu_i \nu_j}{K_i}\,, \tag{5.5}$$

где μ_i *и* ν_j — *составляющие правого и левого собственных векторов матрицы* $\mathbf{a}$, *соответствующих характеристическому числу* r *и такие, что* $\sum_j \mu_j \nu_j = 1$.

Далее, если все моменты m^α *с* $\bar{\alpha} = h$ *конечны, то конечны и все* $M_i^{*\alpha}$ *с* $\bar{\alpha} \leq h$.

Доказательство. Для всех i и t опять-таки

$$Q_i(t) > 0 \tag{5.6}$$

Это утверждение справедливо для любого в. с. п. с н. в. (и без предположения конечности моментов первого порядка), и если матрица $\mathbf{a}$ конечна, то его можно доказать аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.3. (Матрица $\mathbf{A}(t)$ не может содержать ни одной нулевой строки, напр., потому, что $\mathbf{A}(t) = e^{at}$ и, следовательно, она регулярна).

Так как $\mathbf{a}$ неразложима, r является простым характеристическим числом матрицы $\mathbf{a}$, откуда, ввиду (3.4), следует при помощи известного соотношения для e^{dt} (напр., [6] гл. V, (75)), что существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} e^{dt} = \overline{\mathbf{D}}$ (для t непрерывно возрастающего до ∞). Для доказательства, что $\overline{\mathbf{D}} > 0$, достаточно ограничиться t, пробегающими натуральные числа, так как матрица $e^{\mathbf{d}}$ является, ввиду неразложимости $\mathbf{a}$ и соотношения (3.4), неотрицательной неразложимой примитивной матрицей и $\overline{\mathbf{D}} = \lim\limits_{t\to\infty} [e^{\mathbf{d}}]^t$ в этом случае положительна по тем же причинам, как и в доказательстве теоремы 4.3.

Соотношения (5.2), (5.3), (5.4) можно тогда получить так же, как и при доказательстве теоремы 4.3, если использовать e^{rt} и e^{dt} вместо R^t и $\mathbf{D}^t$ и (5.6), (5.1), 5.1 вместо (4.10), 4.1, 4.2. Аналогичным образом, как и при доказательстве 4.3, получим из основного соотношения для производящих функций ([3] (21)) соотношение $F_i^*(x) = 1 + [F_i^*(F(t, x)) - 1]\, e^{-rt}$, справедливое для всех t. Дифференцируя по t и подставляя $t = 0$, получим дифференциальное уравнение в частных проозводных (5.5). Утверждение относительно моментов предельного распределения получается и здесь так же, как в 4.3.

Замечание. Для $Q_\alpha(t)$ и $P_\alpha^{*\beta}(t)$, определенных перед теоремой 4.4, и здесь справедливо утверждение, аналогичное теореме 4.4 с e^r вместо R. Доказательство было бы совершенно одинаково.

6. Асимптотическое равновесие ветвящегося случайного процесса. Известно, что при распаде долгоживущего радиоактивного элемента наступает по истечении определенного времени равновесие между продуктами этого распада, т. е. приблизительно одинаковое количество атомов этих элементов возникает из предыдущих и одновременно распадается на дальнейшие. Равновесие обусловлено тем, что уменьшением числа атомов основного долгоживущего элемента можно ввиду малой скорости распада пренебречь и по истечении сравнительно долгого времени. Существование этого равновесия доказывается обычно при условии, что атом каждого элемента данного ряда через некоторое время распадается вполне определенным способом на один атом следующего элемента, причем доказывается, что количества атомов отдельных элементов радиоактивного ряда пропорциональны временам полураспада этих элементов, т. е. обратным величинам постоянных распада (в нашей терминологии по существу, — интенсивности перехода). Притом под словом ,,количество" атомов подразумевается средняя величина этого количества. Так как распад протекает обычно несколько более сложным образом и так как обычно не принимается во внимание распределение вероятностей, целесообразно исследовать распределение в этом равновесном состоянии для в. с. п. общего типа, конечно, при определенных условиях, обеспечивающих существование равновесия.

Итак, пусть дан $(n + 1)$-мерный в. с. п. с н. в. такой, что все моменты первого и второго порядка конечны. Типы частиц и в соответствии с этим и координаты векторов, определяющих состояния процесса, будем здесь нумеровать (в отличие от предыдущих параграфов), начиная с нуля. Таким образом частицы будут обозначены через $T_0, T_1, \ldots, T_n$, и T_0 будет соответствовать основному долгоживущему элементу. Переменные производящих функций обозначим через $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и будем писать $x = (x_1, \ldots \ldots, x_n)$ (но не $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$) и, следовательно, основные производящие функции интенсивностей перехода будут обозначаться через $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ и также через $f_i(x_0, x)$ и аналогично для больших производящих функций. Этот в. с. п. с н. в., определенный производящими функциями $f_i(x_0, x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, будем в дальнейшем обозначать через $\mathfrak{S}$, а если его начальное состояние будет α, то через $\mathfrak{S}_\alpha$. Кроме P определим для каждого $z > 0$ в. с. п. с н. в. $\mathfrak{S}(z)$ при помощи производящих функций $zf_0(x_0, x) = f_0(x_0, x; z)$, $f_1(x_0, x), \ldots, f_n(x_0, x)$. $\mathfrak{S}(z)$ с начальным состоянием α будет обозначено аналогично через $\mathfrak{S}_\alpha(z)$. Очевидно, $\mathfrak{S}(1) = \mathfrak{S}$. Производящие функции F_α вероятностей перехода процесса $\mathfrak{S}(z)$ будут, вообще, зависеть от z и будут обозначаться через $F_\alpha(t, x_0, x; z)$.

Предположим, что основной процесс $\mathfrak{S}$ находится к моменту времени $t = 0$ в состоянии $N_0e_0 = (N_0, 0, \ldots, 0)$, т. е. имеем $\mathfrak{S}_{N_0e_0}$. Можно ожидать, что равновесного состояния будет достигнуто при стремлении N к бесконечности и одновременно $z \to 0$, причем, конечно, средняя интенсивность распада частицы T_0 должна быть постоянной. Итак, для каждого N подберем число z_N так, чтобы средняя интенсивность распада процесса $\mathfrak{S}_{Ne_0}(z_N)$, т. е. число Nz_Na_{00}, было равно средней интенсивности распада процесса $\mathfrak{S}_{N_0e_0}$, т. е. числу N_0a_{00}. Отсюда следует условие $Nz_N = N_0$. Это предельное распределение будет, конечно, в общем случае зависеть еще от t, однако, если действительно наступит равновесное состояние, то можно ожидать, что при $t \to \infty$ это распределение будет обладать пределом, который и можем считать асимптотическим равновесным распределением. Точнее: мы будем говорить, что для в. с. п. $\mathfrak{S}_{N_0e_0}$ существует *асимптотическое равновесие*, если для $N \to \infty$ (так, что $Nz_N = N_0$) и для $t \to \infty$ для распределения частиц $T_1, \ldots, T_n$ (в процессе $\mathfrak{S}_{Ne_0}(z_N)$) существует предельное распределение. Асимптотическое равновесие будет, очевидно, существовать, если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} (\lim_{N\to\infty} F_{Ne_0}(t, 1, x_1, \ldots, x_n; z_N)) \tag{6.1}$$

равномерно в комплексной области $|x| \leq 1$. Этот предел будет производящей функцией для распределения вероятностей частиц $T_1, \ldots, T_n$ при асимптотическом равновесии. Обозначим эту предельную производящую функцию через $F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$, а ее первые моменты через A_i $(i = 1, \ldots \ldots, n)$ и положим $\mathbf{A} = \{A_i\}_i$. Моменты первого и второго порядка процесса $\mathfrak{S}(z)$ обозначим через $a_{ij}(z)$, $b_i^{(j,k)}(z)$, $A_{ij}(t; z)$, $B_i^{(j,k)}(t; z)$; в частности, для $z = 1$

через a_{ij}, $b_i^{(j,k)}$, $A_{ij}(t)$, $B_i^{(j,k)}(t)$. Далее, будем писать $\bar{\mathbf{a}}(z) = (a_{ij}(z))_{\substack{i,j \\ i=0,1,\ldots,n \\ j=0,1,\ldots,n}}$, $\mathbf{a}(z) = (a_{ij}(z))_{\substack{i,j \\ i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$, $\mathbf{a}(1) = \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_0 = \{a_{0i}\}_{\substack{i \\ i=1,\ldots,n}}$ и через r обозначим максимальное характеристическое число матрицы $\mathbf{a}$ (см. начало парагр. 3).

6.1. *Пусть для $i = 1, \ldots, n$ производящие функции f_i не зависят от x_0 и пусть $r < 0$. Тогда существует асимптотическое равновесие и*

$$F(x) = e^{N_0\int\limits_0^\infty f_0(1, F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x))dt}, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{A} = -N_0(\mathbf{a}')^{-1}\,\mathbf{a}_0 \text{ т. е. } A_i = -N_0 \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \ldots i\text{-я строка}}{\det \mathbf{a}} \tag{6.3}$$

Доказательство. Для $i = 1, \ldots, n$ функции f_i не зависят от x_0, и будем их поэтому записывать в виде $f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Из системы дифференциальных уравнений $\dfrac{\partial F_i(t, x_0, x; z)}{\partial t} = f_i(F_1(t, x_0, x; z), \ldots, F_n(t, x_0, x; z))$ (для $i = 1, \ldots, n$) ([3], (36)) и из начального условия $F_i(0, x_0, x; z) = x_i$ следует, что для $i \geq 1$ F_i не зависят от x_0 и z (что, впрочем, разумеется само собой) и мы будем их поэтому в дальнейшем записывать в виде $F_i(t, x) = F_i(t, x_1, \ldots, x_n)$. Далее, будем писать $F_N(t, x_0, x; z)$ вместо $F_{Ne_0}(t, x_0, x; z)$. Согласно (2.2), имеем $F_N(t, x_0, x; z_N) = [F_0(t, x_0, x; z_N)]^N$ и, дифференцируя по t, получим, используя [3], (36) и соотношения $f_0(x_0, x; z_N) = z_N f_0(x_0, x)$, равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} F_N(t, x_0, x; z_N) = N[F_0]^{N-1}\frac{\partial F_0}{\partial t} = NF_N(t, x_0, x; z_N) \,.\, z_N \frac{f_0(F_0, F_1, \ldots, F_n)}{F_0},$$

откуда, ввиду начального условия $F_N(0, x_0, x; z_N) = x_0^N$, будет в частности для $x_0 = 1$

$$F_N(t, 1, x; z_N) = e^{N_0\int\limits_0^t \frac{f_0(F_0(\tau,1,x;z_N), F_1(\tau,x), \ldots, F_n(\tau,x))}{F_0(\tau,1,x,z_N)}\,d\tau}. \tag{6.4}$$

Согласно (4.1), будет (для $\tau = 0$)

$$F_0(t, 1, x; z_N) = 1 + \sum_{i=0}^n A_{0i}(t; z_N)(x_i - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^n \tilde{B}_0^{(i,j)}(t, x; z_N)(x_i - 1)(x_j - 1), \tag{6,5}$$

где $|\tilde{B}_0^{(i,j)}(t, x; z_N)| \leq B_0^{(i,j)}(t; z_N)$ для всех $|x| \leq 1$. Так как f_i не зависит для $i \geq 1$ от x_0, будет

$$\bar{\mathbf{a}}(z) = \begin{pmatrix} za_{00} & za_{01} \ldots za_{0n} \\ 0 & \\ \vdots & \mathbf{a} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

следовательно, если $(r_1, \ldots, r_n)$ — спектр матрицы $\boldsymbol{a}$, то $(za_{00}, r_1, \ldots, r_n)$ будет спектром матрицы $\bar{\boldsymbol{a}}(z)$. Из соотношения $\boldsymbol{A}(t; z) = e^{\bar{\boldsymbol{a}}(z)t}$ и из вида матрицы $\boldsymbol{a}(0)$ легко следует, что $A_{0i}(t, 0) = \delta_{0i}$. Спектр матрицы $\bar{\boldsymbol{a}}(z)$ непрерывен по z и, следовательно, $\bar{\boldsymbol{A}}(t; z)$ является непрерывной функцией двух переменных t и z. Отсюда следует, что при фиксированном t_1 она равномерно непрерывна в области $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq t \leq t_1$ и, следовательно,

$$A_{0i}(t; z_N) \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} \delta_{0i} \quad \text{равномерно в} \quad 0 \leq t \leq t_1 \,. \tag{6.6}$$

Из равномерной ограниченности $\bar{\boldsymbol{A}}(t; z)$ в $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, t_1\rangle$ и из $b_{0(z)}^{(i,j)} = z \,.\, b_0^{(i,j)}$ следует, ввиду теор. 3.4,

$$B_0^{(i,j)}(t; z_N) \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{равномерно в} \quad 0 \leq t \leq t_1 \,. \tag{6.7}$$

Из (6.5), (6.6), (6.7) тогда следует для данного t_1 $F_0(t, 1, x; z_N) \underset{N \to \infty}{\rightrightarrows} x_0$ равномерно для всех $0 \leq t \leq t_1$ и всех $|x| \leq 1$; следовательно, для данного t, согласно (6.4), будет

$$F_N(t, 1, x; z_N) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} e^{N_0 \int_0^t f_0(1, F_1(\tau, x), \ldots, F_n(\tau, x)) d\tau} \tag{6.8}$$

равномерно в $|x| \leq 1$. Согласно (4.6), имеем далее

$$|F_i(t, x) - 1| \leq 2 \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) \quad \text{для всех} \quad |x| \leq 1 \,. \tag{6.9}$$

Так как $\boldsymbol{A}(t) = e^{\boldsymbol{a}t}$, существует натуральное h такое, что $\boldsymbol{A}(t) = O(e^{rt} h^t)$ $(t \to \infty)$, а так как $r < 0$, будет $\int_0^\infty \boldsymbol{A}(t)\, \mathrm{d}t < \infty$. Из (6.9) тогда следует, что $\int_0^\infty (F_i(t, x) - 1)\, \mathrm{d}t$ является абсолютно сходящимся и притом равномерно, в области $|x| \leq 1$. Далее, имеем

$$f_0(1, F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x)) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{0i}(t, x)(F_i(t, x) - 1), \quad \text{где} \quad |\tilde{a}_{0i}(t, x)| \leq a_{0i} \,,$$

откуда следует, что $\int_0^\infty f_0(1, F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x))\, \mathrm{d}t$ равномерно и абсолютно сходится в комплексной области $|x| \leq 1$. Отсюда и из (6.8) тогда следует (6.2).

Для вещественного $0 \leq x \leq 1$ имеем $\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(1, F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x)) = \sum_{j=1}^{n} f_0^{e_j}(1, F_1, (t, x), \ldots, F_n(t, x)) F_j^{e_i}(t, x) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{0j} A_{ji}(t)$, а так как $\int_0^\infty A_{ji}(t)\, \mathrm{d}t < \infty$, то и интеграл $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(1, F_1, (t, x), \ldots, F_n(t, x))\, \mathrm{d}t$ является равномерно сходящимся в интервале $0 \leq x \leq 1$ и, следовательно, $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^\infty$. Отсюда получаем, что $F^{e_i}(x) = F(x) N_0 \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} f_0(1, F_1(t, x), \ldots, F_n(t, x))\, \mathrm{d}t$ и, подставляя $x = 1$, $\boldsymbol{A} = N_0[\int\limits_0^\infty \boldsymbol{A}'(t)\, \mathrm{d}t]\, \boldsymbol{a}_0$. Так как $\boldsymbol{A}'(t) = e^{\boldsymbol{a}'t}$ и $\boldsymbol{a}$ регулярна, будет $\int\limits_0^\infty \boldsymbol{A}'(t)\, \mathrm{d}t = (\boldsymbol{a}')^{-1}[e^{\boldsymbol{a}t}]_0^\infty = (-\boldsymbol{a}')^{-1}$, откуда следует (6.3).

Замечание. Предположение $r < 0$ в предыдущей теореме означает, что n-мерный в. с. п., определяемый производящими функциями f_i $(i = 1, \ldots, \ldots, n)$, выродится с вероятностью 1. Это предположение вполне естественно, так как нельзя ожидать наступления асимптотического равновесия при увеличении частиц $T_1, \ldots, T_n$. Предположение о том, что f_i $(i \geq 1)$ не зависит от x_0 по всей вероятности несущественно.

В теореме 6.1 выражена производящая функция распределения вероятностей частиц $T_1, \ldots, T_n$ при асимптотическом равновесии через производящие функции F_i. Если предположить, что каждая частица может за бесконечно короткое время превратиться лишь в одну частицу иного рода, т. е. если $p_i^\alpha = 0$ для $\bar{\alpha} > 1$, то это распределение можно непосредственно определить, как это и сделано в следующей теореме. Для простоты будем писать $p_{ij} = p_i^{e_j}$ и $\boldsymbol{p} = (p_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$.

6.2. *Пусть f_0 — линейная форма переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и пусть для $i \geq 1$ f_i — линейная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$. Далее, пусть максимальное характеристическое число матрицы $\boldsymbol{p}$ отрицательно. Тогда существует асимптотическое равновесие и частицы $T_1, \ldots, T_n$ распределены при этом равновесии независимо друг от друга, а именно так, что для частицы T_i имеет место распределение Пуассона со средним значением*

$$A_i = -N_0 \frac{\det \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{01} & \cdots & p_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \ldots i\text{-я строка}}{\det \boldsymbol{p}}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Существование асимптотического равновесия следует из теор. 6.1, так как в этом случае $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}$. Согласно [3], (36), функции $F_i(t, x)$ $(i \geq 1)$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений $\frac{\partial F_i(t, x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n p_{ij} F_j(t, x) + p_i^0$ и, следовательно, ввиду начального условия $F_i(0, x) = x_i$, ясно, что $F_i(t, x)$ должны быть линейными формами переменных $x_1, \ldots, x_n$. Согласно (6.2), тогда будет $F(x) = e^{\sum_{i=1}^n k_i x_i}$, где k_i — постоянные. Отсюда следует, что T_i независимы и подчиняются распределению Пуассона. (6.10) следует из теор. 6.1 и из того, что $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}$, $p_{0i} = a_{0i}$.

Замечание. Возвратимся теперь к исходной схеме естественного радиоактивного распада, предположив для простоты, что возможно лишь превращение $T_i \to T_{i+1}$. При наших обозначениях это значит, что $f_i(x) = p_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i)$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ и $f_n(x) = p_n^0(1 - x_n)$. Введем сокращенную запись: $p_i = p_{i,i+1}$ для $i < n$ и $p_n = p_n^0$. Постоянные p_i означают здесь постоянные распада (скоростные). В этом случае мы получим для средних значений, согласно (6.10), соотношение $A_i = N_0 \dfrac{p_0}{p_i}$, откуда следует $A_1 : A_2 : \ldots : A_n = \dfrac{1}{p_1} : \dfrac{1}{p_2} : \ldots : \dfrac{1}{p_n}$ в соответствии с известным результатом.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Колмогоров:* К решению одной биологической задачи, Изв. НИИ матем. и мех. Томск. инст. *2* (1938), 7—12.

[2] *А. М. Яглом:* Некоторые предельные теоремы ветвящихся случайных процессов, ДАН, Том *56* (1947), 795—798.

[3] *Б. А. Севасьтянов:* Теория ветвящихся случайных процессов, УМН, Том *6* (1951), 47—99.

[4] *T. E. Harris:* Some mathematical models for branching processes, Proceedings of the second Berkeley symposium, 1951.

[5] *J. L. Doob:* Stochastic processes, New York, 1953.

[6] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц, Москва, 1953.

Summary

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF BRANCHING STOCHASTIC PROCESSES

MILOSLAV JIŘINA, Praha.

(Received February 11, 1956.)

The asymptotic behaviour of the onedimensional (i. e. with one type of particles only) branching stochastic processes*) was studied by Kolmogorov [1], Jaglom [2] and Sevastjanov [3]. The generalisation of these results for multidimensional b. s. p. in the case $R > 1$ (where R denotes the largest

*) We shall write in the sequel b. s. p. instead of branching stochastic process.

positive characteristic root of the matrix of the first moments) is due to HARRIS [4]. The section 4 and 5 of the present paper deal with the asymptotic behaviour of the multidimensional b. s. p. in the case $R < 1$. As in the papers cited above only stationary Markov b. s. p. are considered. The main results are contained in the theorem 4.3 (discrete parameter) and in the theorem 5.2 (continuous parameter). In the sequel $P_\alpha^\beta(t)$ will denote the transition probabilities (where the states α, β are n-dimensional vectors with nonnegative integral components) and we shall write $P_i^\beta(t) = P^\beta_{(0,\ldots,1,\ldots 0)}(t)$. Further we shall use the generating functions $F_i(t, x) = \sum_\alpha P_i^\alpha(t)\, x_i^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ and the moments $A_{ij}(t) = \sum_\alpha \alpha_j P_i^\alpha(t)$. The square matrix of $A_{ij}(t)$ will be denoted by $\mathbf{A}(t)$ and the largest positive characteristic root of $\mathbf{A}(1)$ by R. $Q_i(t) = 1 - P_i^0(t)$ means the probability that the process will not vanish in the time t. In the case of continuous parameter p_α^β $(p_i^\beta = p^\beta_{(0,\ldots,1,\ldots 0)})$ will denote the transition intensities and $f_i(x) = \sum_\alpha p_i^\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ its generating function. The square matrix of the moments $a_{ij} = \sum_\alpha \alpha_j p_i^\alpha$ will be denoted by $\mathbf{a}$ and its largest characteristic root by r.

The **theorem 4.3** can be now stated as follows: *Let all first and second moments of the b. s. p. with discrete parameter be finite and let the matrix* $\mathbf{A}(1)$ *be irreducible and primitive with* $R < 1$. *Than there exists (for every* $i = 1, \ldots, n$) *a finite and positive limit* $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{Q_i(t)}{R^t} = K_i$ *and the conditional probability distribution* $P_i^{*\alpha}(t) = \frac{P_i^\alpha(t)}{Q_i(t)}$ *converges to a limit probability distribution. The generating function* $F_i^*(x)$ *of this limit distribution satisfies the functional equation* $F_i^*(F(1, x)) = RF_i^*(x) + 1 - R$ *and for the first moments* A_{ik}^* *of this limit distribution we have* $A_{ik}^* = \frac{\mu_i \nu_k}{K_i}$, *where* μ_i, ν_k *are the components of the right and left eigenvector of* $\mathbf{A}(1)$, *corresponding to* R *and such that* $\sum_j \mu_j \nu_j = 1$.

If the assumption of the primitivity of $\mathbf{A}(1)$ is omitted the theorem 4.3 need not hold, but *we have always* $0 < \liminf\limits_{t\to\infty} \frac{Q_i(t)}{R^t} \le \limsup\limits_{t\to\infty} \frac{Q_i(t)}{R^t} < \infty$, *if* $\mathbf{A}(1)$ *is irreducible and* $R < 1$. (Theorem 4.5.) In the theorem 5.2 we suppose that $\mathbf{a}$ is irreducible and $r < 0$. The assertion is the same as in the theorem 4.3, only R^t is to be replaced by e^{rt} and $F_i^*(x)$ satisfies the partial differential equation $r(F_i^*(x) - 1) = \sum_j \frac{\partial F_i^*(x)}{\partial x_j} f_j(x)$.

In the section 6 we consider the asymptotic equilibrium of particles $T_1, \ldots, \ldots, T_n$ which all are produced by the initial particles T_0 under the condition that the amount N_0 of particles T_0 is great and that the change of T_0 into $T_1, \ldots, T_n$ is slow. The equilibrium of the members of a radioactive series is a special case. We can expect intuitively that the state of equilibrium will be reached if the number N_0 will increase to infinity and the disintegration intensity of T_0 decrease to zero in such a way that the average disintegration intensity will remain constant. There is given a precise formulation of the asymptotic equilibrium, under the assumption that the mutual transformation of the particles $T_0, T_1, \ldots, T_n$ can be described by a b. s. p. with continuous parameter (and with the generating functions $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 0, 1, \ldots, n$). Under further assumptions, that the change of $T_1, \ldots, T_n$ into T_0 is not possible (i. e. $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n) \equiv f_i(x_1, \ldots, x_n)$ does not depend on x_0 for $i = 1, \ldots, n$), and that the largest real characteristic root of $\boldsymbol{a} = (a_{ij})_{i,j} = \left(\frac{\partial f_i(1)}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ is negative there is proved, that the asymptotic equilibrium really exists (Theorem 6.1). The generating function of the probability distribution in the state of equilibrium is given by (6.2) and the first moments of this distribution by (6.3). If in addition the functions $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ are linear forms in x_i, the particles in the state of equilibrium are distributed independently according to the Poisson distribution. (Theorem 6.2.)