Vlastimil Dlab

Die Endomorphismenringe abelscher Gruppen und die Darstellung von Ringen durch Matrizenringe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 4, 485–523

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100265`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 7 (82) ПРАГА 15. XII. 1957 г., No 4

DIE ENDOMORPHISMENRINGE ABELSCHER GRUPPEN UND DIE DARSTELLUNG VON RINGEN DURCH MATRIZENRINGE

VLASTIMIL DLAB, Praha.

(Eingelangt am 21. Mai 1956.)

Die vorliegende Arbeit entstand in der Absicht eine einheitliche Methode für das Studium des Endomorphismenringes einer beliebigen abelschen Gruppe auszuarbeiten. In dieser Arbeit ist eine Methode beschrieben, die auf der Übertragung der Probleme der Theorie des Endomorphismenringes einer beliebigen abelschen Gruppe auf die Probleme der Theorie einer vollständigen abelschen Gruppe beruht; außerdem wird hier eine Darstellung der Endomorphismenringe vollständiger abelscher Gruppen durch gewisse Matrizenringe entwickelt. Im Grunde genommen ist dadurch das Studium der Endomorphismenringe abelscher Gruppen auf das Studium der Einlagerung einer abelschen Gruppe in einer vollständigen Gruppe überführt. Gleichzeitig ist in der Arbeit eine Darstellung allgemeiner Ringe und der Ringe mit Einselement durch gewisse Ringe von Matrizen, deren Elemente rationale und p_i-adische Zahlen sind, gegeben.

1. Einleitung und vorbereitende Bemerkungen

Die meisten bisherigen Arbeiten über die Theorie der Endomorphismenringe von abelschen Gruppen studieren entweder Endomorphismenringe von speziellen Gruppen oder Endomorphismenringe mit vorgeschriebenen Eigenschaften. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Struktur des Endomorphismenringes einer beliebigen abelschen Gruppe zu beschreiben. Nach einigen einleitenden Bemerkungen überführt der Autor im § 2, Satz 5 die Frage der Struktur des Endomorphismenringes der Gruppe G auf die Frage der Struktur des Endomorphismenringes der vollständigen Abschließung $\overline{G}$ der Gruppe G.[1]) Zu diesem Zweck betrachtet der Autor drei Mengen von Endomorphismen, die im Endomorphismenring eine wichtige Rolle spielen, und auf Grund deren die Überführung des Problems verwirklicht wird. Eine erschöpfende Be-

[1]) Definitionen und Bezeichnungen im weiteren Text.

schreibung des Endomorphismenringes $\mathfrak{N}(\overline{G})$ der vollständigen Abschließung $\overline{G}$ enthält der Satz 9, § 4. Dieser Satz bringt eine isomorphe Darstellung des Ringes $\mathfrak{N}(\overline{G})$ durch den Ring $\mathfrak{O}_v$ der quadratischen Matrizen, deren Elemente rationale und p_i-adische Zahlen sind (wobei $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ immer Primzahlen bedeuten). Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf ein wichtiges Ergebnis des Paragraphen 3, nämlich auf den Satz 6, der eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kiškina ist (siehe Satz 2 in [6])[2]). Während sich Z. M. Kiškina beim Studium der Endomorphismenringe der direkten Summe von Gruppen auf endliche direkte Summen beschränkte, verallgemeinert der Autor ihr Ergebnis auf unendliche direkte Summen, und zwar durch die Einführung eines neuen Begriffes, des Pseudodurchschnittes. Der letzte kurze Paragraph 5 ist den Anwendungen der erreichten Ergebnisse auf die Theorie der allgemeinen Ringe und der Ringe mit Einselement gewidmet. Die Beschreibung dieser Ringe wird mit den Sätzen 11, 12, 13 und 14 durchgeführt.

In der ganzen Arbeit verstehen wir unter einer Gruppe eine additiv geschriebene abelsche Gruppe. Gruppen werden überall mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben $g, h, x, \ldots$ bezeichnet; die übrigen kleinen lateinischen Buchstaben bedeuten ganze Zahlen, p und q speziell Primzahlen. Die Ordnung des Elements g bezeichnen wir mit dem Symbol $O(g)$; die Gruppe, deren alle Elemente endliche (bzw. unendliche) Ordnungen haben, nennen wir eine *periodische* (bzw. *torsionsfreie*) Gruppe. Die Gruppe, die durch $g, h, \ldots, A, B, \ldots$ erzeugt wird, wo $g, h, \ldots$ Elemente und $A, B, \ldots$ Mengen sind, bezeichnen wir mit dem Symbol $\{g, h, \ldots, A, B, \ldots\}$.[3]) Die unendliche zyklische Gruppe werden wir mit $G(\infty)$ bezeichnen, die zyklische Gruppe der Ordnung n (wo n eine natürliche Zahl ist) mit $G(n)$, speziell die p-primäre zyklische Gruppe der Ordnung p^k für natürliches k mit $G(p^k)$; mit dem Symbol $G(p^\infty)$ bezeichnen wir weiterhin die Prüfersche Gruppe vom Typ p^∞ (d. h. die additive Gruppe derjenigen rationalen Zahlen, deren Nenner eine Potenz der Primzahl p ist, modulo 1) und mit dem Symbol R bezeichnen wir noch die Gruppe vom Typ R^+ (d. h. die additive Gruppe der rationalen Zahlen). $G + H$ bzw. $\sum'_{\delta \in \Delta} G_\delta$ bedeutet die direkte Summe der Gruppen G und H bzw. $G_\delta (\delta \in \Delta)$, G/H die Faktorgruppe G modulo H.

Eine Gruppe G heißt *vollständig* (man sagt auch algebraisch abgeschlossen), wenn in ihr die Gleichung $n \,.\, x = g$ für jedes $g \in G$ und für jede natürliche Zahl n lösbar ist. Es ist bekannt,[4]) daß jede vollständige Gruppe G die direkte Summe von Gruppen vom Typ p^∞ für verschiedene Primzahlen p und von Gruppen vom Typ R^+ ist. Jede Gruppe G können wir in eine vollständige

[2]) Die Zahl in der Klammer ist ein Hinweis auf das Literaturverzeichnis.

[3]) Einige der Mengen $A, B, \ldots$ können allerdings auch Gruppen sein.

[4]) Siehe § 23 in [9].

Gruppe $G^\circ \supseteq G$ einbetten. Es existiert eine minimale vollständige Untergruppe dieser Gruppe G°, die die Gruppe G enthält, und die bis auf solche Isomorphismen, die eine Fortsetzung des identischen Automorphismus der Gruppe G sind,[5]) eindeutig bestimmt ist. Wir nennen sie die *vollständige Abschließung* (anders auch algebraische Abschließung) der Gruppe G und bezeichnen sie mit $\bar{G}$.[6])

Eine Menge $(g_\iota)_{\iota\in I}$ von Elementen $g_\iota \in G$ $(\iota \in I)$ nennen wir *linear unabhängig*, wenn aus jeder Relation $k_1 . g_{\iota_1} + k_2 . g_{\iota_2} + \ldots + k_n . g_{\iota_n} = 0$ für ganze $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ folgt; anderfalls sprechen wir von linear abhängigen Elementen. Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Definition finiten Charakters, sodaß man von einem maximalen linear unabhängigen System der Gruppe G sprechen kann. Seine Mächtigkeit nennen wir den *Rang der Gruppe G*, und bezeichnen ihn $\mathrm{r}(G)$; er ist ein Invariant dieser Gruppe.

Eine Menge $(g_\iota)_{\iota\in I}$ von Null verschiedener Elemente $g_\iota \in G$ $(\iota \in I)$ nennen wir *D-unabhängig*, wenn die Beziehung $k_1 . g_{\iota_1} + k_2 . g_{\iota_2} + \ldots + k_n . g_{\iota_n} = 0$ für ganze $k_1, k_2, \ldots, k_n$, nur für $k_i . g_{\iota_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ richtig ist. Es ist klar, in welchem Sinne wir von Elementen, die an einer Menge D-unabhängig (bzw. D-abhängig) sind, sowie auch von einer D-abhängigen Menge u. ä. sprechen. Der finite Charakter dieser Definition zieht die Existenz eines D-Systems (d. h. eines maximalen D-unabhängigen Systems) der Gruppe G nach sich. Die Mächtigkeit eines *kanonischen D-Systems* $\mathfrak{S}$ der nichttrivialen Gruppe G, d. h. eines solchen D-Systems, in dem die Ordnung eines jeden Elementes entweder unendlich oder eine Primzahlpotenz ist, ist ein Invariant der Gruppe G und wir nennen sie den *D-Rang* $\mathrm{r}_D(G)$ *der Gruppe G*; für die triviale Gruppe G definieren wir $\mathrm{r}_D(G) = 0$. Hier ist die Menge aller Elemente unendlicher Ordnung aus dem kanonischen D-System $\mathfrak{S}$ ein maximales linear unabhängiges System der Gruppe G und die Menge aller Elemente aus $\mathfrak{S}$, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl p ist, ist ein D-System der p-primären Komponente $P_{(p)}$ der maximalen periodischen Untergruppe P der Gruppe G. Für die torsionsfreie Gruppe G ist offenbar $\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G)$ und für jede nichttriviale Gruppe G ist $\mathrm{r}_D(G) > 0$. Man sieht auch leicht ein, daß der D-Rang der Gruppen $G(\infty)$, $G(p^k)$, $G(p^\infty)$ und R gleich Eins ist und daß für die direkte Summe $G = \sum'_{\delta\in\Delta} G_\delta$

$$\mathrm{r}_D(G) = \sum_{\delta\in\Delta} \mathrm{r}_D(G_\delta)$$

ist.[7])

[5]) D. h. Es gilt für solche Isomorphismen φ für alle $g \in G : g\varphi = g$.

[6]) Die Gruppe $\bar{G}$ ist bis auf einen Isomorphismus von der Wahl der vollständigen Gruppe G° unabhängig. Siehe [2], [7] und § 23 in [9].

[7]) Die Eigenschaften des D-Ranges siehe in [3]. In dieser Arbeit [3] ist $\mathrm{r}_D(G)$ auf folgende Weise definiert: Falls die nichttriviale Gruppe p-primär ist, hat jedes D-System dieselbe Mächtigkeit; wir nennen sie den D-Rang $\mathrm{r}_D(G)$ der Gruppe G. Für die triviale Gruppe

Die Untergruppe $H \subseteq G$ heißt eine *Servanzuntergruppe in G*, wenn jede in G lösbare Gleichung

$$n \,.\, x = h \quad \text{für } h \in H \text{ und natürliches } n\,,$$

wenigstens eine Lösung schon in H hat. In einer torsionsfreien Gruppe G ist, wie wir wissen, die Untergruppe H eine Servanzuntergruppe dann und nur dann, wenn G/H auch torsionsfrei ist. Wir wissen weiter, daß mit Elementen, die in der Servanzuntergruppe H der torsionsfreien Gruppe G liegen, dort auch alle von ihnen D-abhängigen Elemente der Gruppe G liegen.[8])

Wenn wir in die Menge $\mathfrak{K}(G, A)$ aller homomorphen Abbildungen (kürzer Homomorphismen) $\varkappa$ der Gruppe G in die Gruppe A die Operation der Addition auf Grund der Definition

$$g(\varkappa_1 + \varkappa_2) = g\varkappa_1 + g\varkappa_2\,, \quad g \in G\,, \quad \varkappa_1 \in \mathfrak{K}(G, A)\,, \quad \varkappa_2 \in \mathfrak{K}(G, A)\,,$$

einführen, sehen wir sofort, daß $\mathfrak{K}(G, A)$ mit dieser Operation eine additive Gruppe bildet. Sei ϱ ein Homomorphismus von A in die Gruppe B, dann ist das Produkt $\varkappa\varrho$, unter dem wir die Ausführung beider Homomorphismen nacheinander verstehen, ein Homomorphismus der Gruppe G in B. Für die Endomorphismen ε der Gruppe G sind also schon Addition und Multiplikation definiert; die Menge aller Endomorphismen der Gruppe G mit diesen Operationen bildet einen Ring $\mathfrak{R}(G)$ mit Einselement. Die Automorphismen bilden dabei die multiplikative Gruppe der Einheiten dieses Ringes $\mathfrak{R}(G)$ (im Allgemeinen allerdings keine abelsche). Wenn H eine Untergruppe in G und ε ein Endomorphismus in G ist, so sagen wir, daß ε einen Endomorphismus ε' der Untergruppe H *direkt induziert*, wenn die partielle Abbildung der Untergruppe H bei ε schon ein Endomorphismus, nämlich ε' in H ist; ebenso sagen wir, daß ε einen Endomorphismus $\bar{\varepsilon}$ in *G/H homomorph induziert*, wenn die Abbildung der Restklassen in der Gruppe G modulo H, die durch die Abbildung ε bestimmt ist, schon ein Endomorphismus $\bar{\varepsilon}$ in G/H ist.[9]) Weiter sagen wir von einem Endomorphismus ε in G, daß er eine *direkte Fortsetzung* des Endomorphismus ε' der Untergruppe $H \subseteq G$ ist,

---

G definieren wir $\mathrm{r}_D(G) = 0$. Falls G eine beliebige abelsche Gruppe ist, sei $P = \sum_p{}' P_{(p)}$ die (eindeutig bestimmte) direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe P der Gruppe G in p-primäre Komponenten, und wir definieren

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}(G) + \sum_p \mathrm{r}_D(P_{(p)})\,.$$

Die Äquivalenz beider Definitionen ist in der erwähnten Arbeit [3] bewiesen.

[8]) Siehe § 30 in [9].

[9]) Selbstverständlich muß der Endomorphismus ε in beiden Fällen bestimmte Eigenschaften haben (siehe § 2).

falls ε den Endomorphismus ε' in H direkt induziert und daß er eine *homomorphe Fortsetzung* des Endomorphismus $\bar{\varepsilon}$ der Faktorgruppe G/H ist, falls ε den Endomorphismus $\bar{\varepsilon}$ in G/H homomorph induziert.

2. Beziehungen zwischen den Endomorphismenringen der Gruppe G, der freien abelschen Gruppe U_τ und der vollständigen Abschließung $\bar{G}$

Es sei G eine abelsche Gruppe und $\mathfrak{R}(G)$ ihr Endomorphismenring, H eine Untergruppe von G. Wir bilden folgende drei Endomorphismenmengen aus $\mathfrak{R}(G)$:[10])

(I) *Die Menge derjenigen Endomorphismen, die H in sich selbst abbilden (H-Endomorphismen); wir bezeichnen sie $\mathfrak{R}(G; H) \subseteq \mathfrak{R}(G)$.*[11])

(II) *Die Menge derjenigen Endomorphismen, die H auf die Null abbilden (H-Nullendomorphismen); wir bezeichnen sie $\mathfrak{M}(G, H)$.*

(III) *Die Menge derjenigen Endomorphismen, die G in H abbilden (G/H-Nullendomorphismen); wir bezeichnen sie $\mathfrak{N}(G, H)$.*

Von diesen drei Mengen können wir folgenden Satz aussprechen, dessen Beweis sich als trivial erübrigt (es wird vorausgesetzt, daß $0 \neq H \neq G$).

Satz 1. *Die Menge $\mathfrak{R}(G; H)$ ist ein Unterring mit Einselement im Ringe $\mathfrak{R}(G)$. $\mathfrak{M}(G, H)$ (bzw. $\mathfrak{N}(G, H)$) ist ein Unterring ohne Einselement*[12]) *der Ringe $\mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{R}(G; H)$, der in $\mathfrak{R}(G)$ ein rechtes (bzw. linkes) und in $\mathfrak{R}(G; H)$ ein zweiseitiges Ideal ist. Der Durchschnitt $\mathfrak{S}(G, H) = \mathfrak{M}(G, H) \cap \mathfrak{N}(G, H)$, d. h. die Menge aller der Endomorphismen ε, für die $H\varepsilon = 0$ und $G\varepsilon \subseteq H$ ist, ist ein Unterring ohne Einselement in $\mathfrak{R}(G; H)$ und in $\mathfrak{R}(G)$ und ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{R}(G; H)$, $\mathfrak{M}(G, H)$ und $\mathfrak{N}(G, H)$; dabei ist das Produkt zweier beliebiger Elemente aus $\mathfrak{S}(G, H)$ gleich dem Nullendomorphismus $\mathbf{0}$.*[13])

Betrachten wir noch kurz die trivialen Fälle $H = 0$ und $H = G$:
Für $H = 0$ ist $\mathfrak{R}(G; H) = \mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{M}(G, H) = \mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{N}(G, H) = (\mathbf{0})$, $\mathfrak{S}(G, H) = (\mathbf{0})$; für $H = G$ ist $\mathfrak{R}(G; H) = \mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{M}(G, H) = (\mathbf{0})$, $\mathfrak{N}(G, H) = \mathfrak{R}(G)$ und $\mathfrak{S}(G, H) = (\mathbf{0})$.

[10]) Ähnliche Endomorphismenmengen untersuchen K. Shoda [13], R. Baer [1] und M. Shiffman [11].

[11]) Ähnlich bezeichnen wir $\mathfrak{R}(G; A, B, \ldots)$ die Menge der Endomorphismen aus $\mathfrak{R}(G)$, die die Untergruppen $A, B, \ldots$ in sich selbst abbilden. Es ist speziell $\mathfrak{R}(G; G) = \mathfrak{R}(G)$.

[12]) Der Unterring $\mathfrak{M}(G, H)$ (bzw. $\mathfrak{N}(G, H)$) enthält nicht das Einselement des Ringes $\mathfrak{R}(G)$, kann aber selbst ein Ring mit Einselement sein, wie man am einfachen Beispiel der Gruppe, die die direkte Summe von zwei zyklischen Gruppen verschiedener Primzahlordnung ist, sieht. Dabei nehmen wir für H einen der direkten Summanden.

[13]) Allerdings können wir für spezielle Fälle der Gruppe G (also auch $\mathfrak{R}(G)$) von $\mathfrak{R}(G; H)$, $\mathfrak{M}(G, H)$, $\mathfrak{N}(G, H)$ und $\mathfrak{S}(G, H)$ mehr aussagen.

Jetzt wollen wir einen Satz ableiten, der die Grundlage unserer weiteren Ausführungen ist. Jeder H-Endomorphismus induziert natürlich direkt einen Endomorphismus in H. Also die Endomorphismen aus $\mathfrak{R}(G; H)$ induzieren in H bestimmte Endomorphismen, die einen Unterring $\mathfrak{U}(G, H) \subseteq \mathfrak{R}(H)$ bilden. Ebenso induziert jeder H-Endomorphismus homomorph einen Endomorphismus in G/H. Es genügt, wenn wir jedem $\varepsilon \in \mathfrak{R}(G; H)$ den Endomorphismus ε^* in G/H zuordnen, der die Restklasse $g + H$ auf die Restklasse $g\varepsilon + H$ abbildet (die Auswahl des Repräsentanten ist unwesentlich, da ja für g' anstatt g, $g - g' \in H$ und daher auch $(g - g')\,\varepsilon \in H$ ist). Die Endomorphismen aus $\mathfrak{R}(G; H)$ induzieren also homomorph gewisse Endomorphismen in G/H; da wir uns leicht davon überzeugen, daß die definierte Zuordnung ein Homomorphismus des Ringes $\mathfrak{R}(G; H)$ in $\mathfrak{R}(G/H)$ ist, bilden diese Endomorphismen einen Unterring in $\mathfrak{R}(G/H) : \mathfrak{B}(G, H) \subseteq \mathfrak{R}(G/H)$.

Aus diesen Betrachtungen und dem Satze von den homomorphen Abbildungen der Ringe folgt dann schon leicht der

Satz 2. *Sei G eine abelsche Gruppe und H ihre Untergruppe $H \subseteq G$. Jeder Endomorphismus ε aus $\mathfrak{R}(G; H)$ erzeugt einen Endomorphismus ε' der Gruppe H und einen Endomorphismus ε^* der Gruppe G/H. Dabei sind die Abbildungen $\varepsilon \to \varepsilon'$ und $\varepsilon \to \varepsilon^*$ Homomorphismen, und es ist*

$$\mathfrak{U}(G, H) \cong \mathfrak{R}(G; H)/\mathfrak{M}(G, H)\,, \quad \mathfrak{B}(G, H) \cong \mathfrak{R}(G; H)/\mathfrak{N}(G, N)\,.$$

Es sei eine *freie abelsche Gruppe* vom Typ τ gegeben

$$U_\tau = \sum_{0 \leqq \alpha < \tau}' G_\alpha(\infty)\,, \quad G_\alpha(\infty) = \{u_\alpha\}\,, \quad 0 \leqq \alpha < \tau\,.$$

Jeder Endomorphismus ε_1 der Gruppe U_τ ist durch die Bilder der Erzeugenden u_α ersichtlich eindeutig bestimmt:

$$u_\alpha \varepsilon_1 = v_\alpha\,, \quad 0 \leqq \alpha < \tau\,.$$

Wenn wir auf der anderen Seite beliebige Elemente v_α, $0 \leqq \alpha < \tau$, in U_τ wählen und definieren für das Element $w \in U_\tau$, $w = \sum_{i=1}^{n} t_1 \,.\, u_{\alpha_i}$, wo t_i ganze Zahlen bedeuten,

$$w\varepsilon_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i \,.\, u_{\alpha_i}\Big)\, \varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{n} t_i \,.\, v_{\alpha_i}\,,$$

so ist ε_2 ersichtlich ein Endomorphismus.

Wenn nun

$$u_\alpha \varepsilon = k_{\alpha_1} \,.\, u_1 + k_{\alpha_2} \,.\, u_2 + \ldots + k_{\alpha\beta} \,.\, u_\beta + \ldots \qquad (0 \leqq \alpha < \tau,\, 0 \leqq \beta < \tau)$$

gesetzt wird, wo die Summe auf der rechten Seite nur formal unendlich ist (denn es sind nur endlich viele $k_{\alpha\beta} \neq 0$), dann ist die Abbildung $\varepsilon \to (k_{\alpha\beta})$ ein Isomorphismus des Endomorphismenringes $\mathfrak{R}(U_\tau)$ auf den Ring der quadratischen Matrizen ganzer Zahlen $(k_{\alpha\beta})$ vom Grade τ, deren jede Zeile nur endlich viele von Null verschiedene Elemente enthält.[14]) Wenn nämlich $\eta \rightarrow (l_{\alpha\beta})$ ist, dann stellen wir fest, daß $\varepsilon + \eta \rightarrow (k_{\alpha\beta}) + (l_{\alpha\beta})$ und durch Summation einer formal unendlichen Reihe

$$u_\alpha \varepsilon \eta = \sum_{0 \leqq \nu < \tau} k_{\alpha\nu} \sum_{0 \leqq \mu < \tau} l_{\nu\mu} \, . \, u_\mu = \sum_{0 \leqq \mu < \tau} u_\mu \sum_{0 \leqq \nu < \tau} k_{\alpha\nu} l_{\nu\mu} = \sum_{0 \leqq \mu < \tau} s_{\alpha\mu} \, . \, u_\mu$$

erhalten wir, daß $\varepsilon\eta \rightarrow (k_{\alpha\beta}) \, . \, l_{(\alpha\beta)}$ ist. Daraus und aus der Bemerkung über die Endomorphismen der Gruppe U_τ, die dieser Erwägung vorausgeht, folgt dann schon die gesamte Behauptung.[15])

Sei nun $\mathfrak{G} = (g_0, g_1, \ldots, g_\alpha, \ldots)$, $\alpha < \tau$, ein System von Erzeugenden der Gruppe G; dann ist die Abbildung

$$k_1 \, . \, u_{\alpha_1} + k_2 \, . \, u_{\alpha_2} + \ldots + k_n \, . \, u_{\alpha_n} \rightarrow k_1 \, . \, g_{\alpha_1} + k_2 \, . \, g_{\alpha_2} + \ldots + k_n \, . \, g_{\alpha_n}$$

der Gruppe U_τ auf G, wie wir wissen, ein Homomorphismus; also

$$G \cong U_\tau / N \, . \tag{1}$$

Mit Hilfe des Satzes 2 beweisen wir nun den folgenden Satz.

Satz 3. *Es sei G eine abelsche Gruppe; also $G \cong U_\tau/N$, wo U_τ eine freie abelsche Gruppe ist. Dann ist der Endomorphismenring der Gruppe G isomorph mit dem Restklassenring, der durch den Unterring $\mathfrak{R}(U_\tau; N)$ aller N-Endomorphismen der Gruppe U_τ nach dem Ideal $\mathfrak{N}(U_\tau, N)$ aller U_τ/N-Nullendomorphismen erzeugt ist:*

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(U_\tau; N) / \mathfrak{N}(U_\tau, N) \, .$$

Beweis. Es sei ε ein beliebiger Endomorphismus der Gruppe G; setzen wir ε homomorph zum Endomorphismus ε^* der Gruppe U_τ so fort: Wenn für geeignete $k_i^{(\alpha)}$

$$g_\alpha \varepsilon = \sum_{i=1}^{n_\alpha} k_i^{(\alpha)} \, . \, g_{\nu_i}^{(\alpha)} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha < \tau$$

ist, so setzen wir

$$u_\alpha \varepsilon^* = \sum_{i=1}^{n_\alpha} k_i^{(\alpha)} \, . \, u_{\nu_i}^{(\alpha)} \text{ bei } 0 \leqq \alpha < \tau \, .$$

Nach der Bemerkung über die Endomorphismen der Gruppe U_τ ist ε^* ein Endomorphismus, und wenn man sich erinnert, daß (1) ein Isomorphismus mit der Zuordnung $g_\alpha \longleftrightarrow u_\alpha + N$ ist, so sieht man leicht ein, daß ε^* eine

---

[14]) Damit haben wir das Multiplizieren der Matrizen garantiert (im gewöhnlichen Sinne). Für die endliche Ordnungszahl τ handelt es sich allerdings um den Ring aller Matrizen über dem Integritätsbereich der ganzen Zahlen. Das assoziative und distributive Gesetz für den Ring dieser Matrizen folgt ersichtlich direkt aus dem assoziativen und distributiven Gesetz für die Endomorphismen.

[15]) Diese Behauptung ist allerdings eine einfache Folge des Satzes 7 im § 3.

homomorphe Fortsetzung von ε ist.[16]) Alle solche Endomorphismen in U_τ, die wir als homomorphe Fortsetzungen der Endomorphismen aus $\mathfrak{R}(G)$ erhalten können, bilden in $\mathfrak{R}(U_\tau)$ ersichtlich einen Unterring mit Einselement $\mathfrak{R}'(U_\tau) \subseteq \mathfrak{R}(U_\tau)$; man sieht ein, daß das gerade die Endomorphismen in U_τ sind, die hier N-Endomorphismen sind, also $\mathfrak{R}'(U_\tau) = \mathfrak{R}(U_\tau; N)$. Wenn man jetzt den Satz 2 anwendet, ist der Rest trivial.

Bemerkung 1. Ein entsprechender Satz gilt allerdings nicht für eine beliebige Gruppe T, für die $G \cong T/N$ ist. Schon für den Fall, daß T eine direkte Summe von endlichen zyklischen Gruppen ist, können wir nicht jeden Endomorphismus der Gruppe G homomorph auf T fortsetzen:

Es sei $T = G(p^n) + G(p^{n+m}) = \{a_1\} + \{a_2\}$, wo p eine Primzahl und n, m natürliche Zahlen, $m \leqq n$, sind. N sei die zyklische Gruppe $\{p^k \,.\, a_2\}$, k natürlich mit $m \leqq k \leqq n$; demzufolge also

$$T/N \cong G = G(p^n) + G(p^k) = \{g_1\} + \{g_2\}\,.$$

Sicher ist es nicht möglich, den Endomorphismus ε der Gruppe G, der durch die Beziehungen $g_1\varepsilon = g_2$, $g_2\,\varepsilon = g_2$ definiert ist, homomorph auf T fortzusetzen. Im Isomorphismus $T/N \cong G$ wird nämlich dem Element $g_1 \in G$ die Restklasse aller Elemente von der Form $a_1 + rp^k \,.\, a_2$ aus A $(r = 0, 1, \ldots$ $\ldots, p^{n+m-k} - 1)$ und dem Element $g_2 \in G$ die Restklasse aller Elemente der Form $(1 + rp^k) \,.\, a_2$ aus A $(r = 0, 1, \ldots, p^{n+m-k} - 1)$ zugeordnet. Während alle Elemente der ersten Restklasse der Ordnung p^n sind, sind alle Elemente der zweiten Restklasse der Ordnung p^{n+m}, und eine Fortsetzung des Endomorphismus ε ist daher unmöglich.

Es folgt daraus unter Anderem, daß man aus der Kenntnis des Endomorphismenringes einer Gruppe heraus noch nicht den Endomorphismenring ihrer Faktorgruppe beschreiben kann. Wenn $G \cong T/N$ ist, so ist allgemein

$$\mathfrak{B}(T, N) \cong \mathfrak{R}(T; N)/\mathfrak{N}(T, N)$$

ein eigentlicher Unterring des Endomorphismenringes $\mathfrak{R}(G)$.

Bemerkung 2. Den Satz 3 kann man auch leicht auf den Fall der Gruppe E mit der endlichen Anzahl n von Erzeugenden anwenden. Ohne Schwierigkeit bestimmt man den Isomorphismus $E \cong U_n/N$, den Ring $\mathfrak{R}(U_n; N)$ und das zweiseitige Ideal $\mathfrak{N}(U_n, N)$, sodaß wir einen Isomorphismus zwischen dem Ring $\mathfrak{R}(E)$ und einem gewissen Matrizenring erhalten (vergl. § 23 in [8]). Insbesondere erhalten wir für eine endliche abelsche Gruppe das Ergebnis von K. Shoda [12].

[16]) Denselben Endomorphismus ε kann man allerdings im Allgemeinen in verschiedene Endomorphismen ε^* der Gruppe U_τ, und zwar durch andere Ausdrücke der Bilder $g_\alpha\varepsilon$ in G, homomorph fortsetzen.

Bei unseren weiteren Betrachtungen wenden wir nun den Satz von der Einbettung einer Gruppe G in eine vollständige Gruppe $G^\circ \supseteq G$ und besonders in die vollständige Abschließung $\overline{G}$, $\overline{G} \supseteq G$, an. Zunächst beweisen wir einige Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$\hat{G}$ sei eine beliebige vollständige Gruppe, $\hat{G} \supseteq G$. Dann ist die vollständige Abschließung $\overline{G}$ der Gruppe G eine Untergruppe der Gruppe aller Lösungen der Gleichungen*

$$n \cdot x = g, \text{ wobei } n \text{ natürlich und } g \in G\,, \tag{2}$$

in der Gruppe $\hat{G}$. Falls $\hat{G}$ torsionfrei ist, ist $\overline{G}$ gerade die Gruppe aller solcher Lösungen.[17])

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist ersichtlich. Für den Fall, daß $\hat{G}$ torsionsfrei ist, ist jede Lösung der Gleichung (2) in der Gruppe $\hat{G}$ eindeutig bestimmt; hieraus folgt auch der zweite Teil der Behauptung.

Wir fügen noch diese Bemerkung bei:

Bemerkung 3. Man kann den Hilfssatz 1 noch in dem Sinne verstärken, daß die vollständige Abschließung $\overline{G}$ der Gruppe G eine Untergruppe in $\hat{G}$ ist, deren Elemente einige Lösungen der Gleichungen

$$n \cdot x = g\,, \quad n \text{ natürlich}, \; g \in G, \; g \neq 0\,,$$

sind.[18]) Das ist allerdings die Folge des nächsten Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *Wenn $\bar{g} \in \overline{G}$ und $\bar{g} \neq 0$ ist, so existiert ein von Null verschiedenes Vielfaches $n \cdot \bar{g} \in G$, $n \cdot \bar{g} \neq 0$ mit natürlichem n.*

Beweis. Zunächst wollen wir uns klar machen, daß die Negation der Behauptung, die im Hilfssatz 2 enthalten ist, Folgendes bedeutet: Es existiert ein $\bar{g}_1 \in \overline{G}$, sodaß $\{\bar{g}_1\} \cap G = 0$ ist. Bezeichnen wir mit $\overline{G}_1$ eine vollständige Abschließung der Gruppe $G_1 = \{\bar{g}_1\}$ in $\overline{G}$: $\overline{G}_1 \subseteq \overline{G}$. Es ist notwendigerweise $\overline{G}_1 \cap$ $\cap\, G = 0$. Setzen wir das Gegenteil voraus und nehmen wir an, daß es ein g_0 mit $g_0 \in \overline{G}_1 \cap G$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $O(g_0) = \infty$ oder $O(g_0) = p$ ist, wo p eine Primzahl ist. Da dann sicher $\overline{G}_1$ isomorph mit der Gruppe R oder $G(p^\infty)$ ist,[19]) existiert, wie wir aus der Struktur dieser Gruppen wissen, eine natürliche Zahl m so, daß $m \cdot g_0 \in G_1$,

---

[17]) Für periodische Gruppen ist der Hilfssatz allerdings trivial.

[18]) Wir behaupten hier weder, daß $\overline{G}$ die Menge aller solcher Lösungen ist, noch, daß alle solche Lösungen eine Untergruppe in $\hat{G}$ bilden.

[19]) $\overline{G}_1$ ist mit R oder $G(p^\infty)$ isomorph, je nach dem ob $O(g_0) = \infty$ oder $O(g_0) = p$ ist; man überzeugt sich davon direkt durch die Konstruktion eines entsprechenden Systems von Erzeugenden dieser Gruppen.

$m \,.\, g_0 \neq 0$ ist.[20]) Da aber $m \,.\, g_0 \in G$ ist, bekommen wir einen Widerspruch mit der Voraussetzung $G \cap G_1 = 0$. Wir haben also im Ganzen $\overline{G}_1 \subset \overline{G}$, $G \subset \overline{G}$, $\overline{G}_1 \cap G = 0$, wobei $\overline{G}_1$ (als vollständige Untergruppe) ein direkter Summand der Gruppe $\overline{G}$ ist. Ich behaupte nun, es existiert eine Untergruppe $\overline{H} \subset \overline{G}$, daß $\overline{G} = \overline{G}_1 + \overline{H}$, $G \subseteq \overline{H}$ ist. Wir bezeichnen die maximale Untergruppe in $\overline{G}$, die G enthält und mit $\overline{G}_1$ nur die Null gemeinsam hat, mit dem Symbol $\overline{\overline{H}}$. Es ist dann $\overline{G} \supseteq \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}}$. Es gilt nun auch noch die umgekehrte Inklusion:

Es sei $g \in \overline{G}$, g non $\in \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}}$. Aus der Maximalität von $\overline{\overline{H}}$ folgt notwendig, daß $p \,.\, g \in \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}}$, d. h. $p \,.\, g = g_1 + h$ für $g_1 \in \overline{G}_1$ und $h \in \overline{\overline{H}}$ ist, wobei man ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen kann, daß p eine Primzahl ist. Da die Gleichung $p \,.\, x = g_1$ in $\overline{G}_1$ die Lösung g_1' hat, erhalten wir

$$p \,.\, (g - g_1') = h \in \overline{\overline{H}}, \quad g - g_1' \in \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}} \,.$$

Notwendigerweise ist also für jedes mit p teilerfremdes k

$$h' = k \,.\, (g - g_1') \text{ non} \in \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}},$$

denn anders bekämen wir durch eine geeignete lineare Kombination der Elemente h und h'

$$g - g_1' \in \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}} \,.$$

Offenbar wäre dann allerdings

$$\overline{G}_1 \cap \{g - g_1', \overline{\overline{H}}\} = 0 \,,$$

was mit der Maximalität der Untergruppe $\overline{\overline{H}}$ im Widerspruch steht. Es ist also $\overline{G} = \overline{G}_1 + \overline{\overline{H}}$ bei $\overline{G}_1 \neq 0$ und $\overline{\overline{H}} \supseteq G$; damit haben wir das Ergebnis, das im Widerspruch mit der Behauptung steht, daß $\overline{G}$ die vollständige Abschließung von G ist, und der Hilfssatz 2 ist hiermit bewiesen.

Eine Folge des Hilfssatzes 2 ist der nächste

Hilfssatz 3. *Der D-Rang (bzw. der Rang) der Gruppe G ist dem D-Rang (bzw. dem Rang) der vollständigen Abschließung dieser Gruppe gleich:*

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{r}_D(\overline{G}) \ (bzw.\ \mathrm{r}(G) = \mathrm{r}(\overline{G})).$$

Beweis. Wenn nämlich $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$ ein kanonisches D-System der Gruppe G ist, dann ist $\mathfrak{G}$ auch ein kanonisches D-System der Gruppe $\overline{G} \supseteq G$. Setzen wir voraus, dies wäre nicht so, d. h. es existiere ein Element $\overline{g} \in \overline{G}$ an $\mathfrak{G}$ D-unabhängig. Laut Hilfssatz 2 existiert ein natürliches n so, daß $n \,.\, \overline{g} \neq 0$ mit $n \,.\, \overline{g} \in G$ ist. Aus der Maximalität des D-Systems $\mathfrak{G}$ folgt dann die Gleichheit

$$0 \neq kn \,.\, \overline{g} = k_1 \,.\, g_{\iota_1} + k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + k_n \,.\, g_{\iota_n}$$

[20]) Die Gruppen R und $G(p^\infty)$ sind Gruppen vom D-Rang 1, d. h. jedes Paar ihrer nichttrivialen Untergruppen hat einen nichttrivialen Durchschnitt. R und $G(p^\infty)$ sind offenbar sogar die einzigen maximalen Gruppen vom D-Rang 1, d. h. jede Gruppe, die eine eigentliche mit R oder $G(p^\infty)$ isomorphe Untergruppe enthält, hat einen D-Rang, der größer als 1 ist.

für passend gewählte Elemente $g_{\iota_i} \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Diese Gleichheit steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung der Existenz eines an $\mathfrak{G}$ D-unabhängigen Elementes $\bar{g}$. Im Hinblick auf die Gleichheit

$$\mathrm{r}_D(G) = \mathrm{m}(\mathfrak{G}) = \mathrm{r}_D(\bar{G})^{21)}$$

ist der Beweis des ersten Teiles des Hilfssatzes 3 beendet.

Da gleichzeitig die Menge aller Elemente unendlichen Ordnung aus $\mathfrak{G}$ ein maximales linear unabhängiges System der Gruppe G ist, ist hiermit auch der zweite Teil des Hilfssatzes bewiesen.

Bemerkung 4. Es sei $P = \sum_{i=1}^{\infty}{}' P_{(p_i)}$, wo $p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots$ alle Primzahlen sind, die direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe P der Gruppe G in die p_i-primären Komponenten $P_{(p_i)}$. Wenn man sich ins Bewußtsein ruft, daß die Menge aller Elemente unendlicher Ordnung im kanonischen D-System $\mathfrak{G}$ ein maximales linear unabhängiges System der Gruppe G ist und daß die Menge aller Elemente, deren Ordnungen Potenzen ein und derselben Primzahl p_i sind, im kanonischen D-System $\mathfrak{G}$ ein D-System der Untergruppe $P_{(p_i)}$ ist, so sieht man auf Grund des Beweises des Hilfssatzes 3 sofort, daß die vollständige Abschließung $\bar{G}$ der Gruppe G bis auf einen Isomorphismus durch das System der Invarianten

$$\mathrm{r}(G),\ \mathrm{r}_D(P_{(p_1)}),\ \mathrm{r}_D(P_{(p_2)}),\ \ldots,\ \mathrm{r}_D(P_{(p_i)}),\ \ldots$$

bestimmt ist. $\mathrm{r}(G)$ bedeutet nämlich die Mächtigkeit der Menge der direkten Summanden vom Typus R^+ und $\mathrm{r}_D(P_{(p_i)})$ die Mächtigkeit der Menge der direkten Summanden vom Typus p_i^{∞} in der direkten Zerlegung der vollständigen Abschließung $\bar{G}$ in unzerlegbare Untergruppen.

Aus dieser Bemerkung gehen dann unmittelbar die folgenden Behauptungen über die vollständigen Abschließungen hervor, die wir im letzten Absatz dieser Arbeit brauchen werden.

Hilfssatz 4. *P sei die maximale periodische Untergruppe der Gruppe G und $P = \sum_{p}{}' P_{(p)}$ die direkte Zerlegung der Gruppe P in p-primäre Komponenten $P_{(p)}$. Es sei weiter $P' = \sum_{p}{}' P'_{(p)}$ die direkte Zerlegung der maximalen periodischen Untergruppe P' der vollständigen Abschließung $\bar{G}$ der Gruppe G in p-primäre Komponenten $P'_{(p)}$. Dann ist bis auf einen Isomorphismus $\bar{P}_{(p)} = P'_{(p)}$ und also auch $\mathrm{r}_D(P_{(p)}) = \mathrm{r}_D(P'_{(p)})$ für jede beliebige Primzahl p.*

Hilfssatz 5. *Für $G = \sum_{\delta \in \Delta}{}' G_\delta$ ist $\bar{G} = \sum_{\delta \in \Delta}{}' \bar{G}_\delta$.*

Beweis. Zum Beweis genügt es zu bedenken, daß die mengenmäßige Vereinigung $\mathfrak{G}$ der kanonischen D-Systeme $\mathfrak{G}_\delta$ der Gruppe $G_\delta (\delta \in \Delta)$ ein kanonisches D-System der Gruppe G ist.

[21]) Das Symbol $m(\mathfrak{A})$ bedeutet die Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{A}$.

Trivial ist auch der

Hilfssatz 6. *Die vollständige Abschließung der torsionsfreien (bzw. periodischen) Gruppe G ist eine torsionsfreie (bzw. periodische) Gruppe.*[22])

Kehren wir nun zur Untersuchung der gegebenen Gruppe $G \cong U_\tau/N$ zurück. Die vollständige Abschließung der Gruppe U_τ ist allerdings nach Hilfssatz 3 (oder nach den Hilfssätzen 5 und 6) die Gruppe

$$\overline{U}_\tau = R_\tau^\circ = \sum_{0 \leqq \alpha < \tau}' R_\alpha ,$$

nämlich die direkte Summe von Gruppen des Typus R^+.

Falls wir von der Gruppe $G \cong U_\tau/N$ ausgegangen sind, so bilden wir jetzt die Gruppe $G^\circ = R_\tau^\circ/N$, die (als homomorphes Bild einer vollständigen Gruppe) vollständig ist und die im Sinne des Isomorphismus die Gruppe G enthält: $G \subset G^\circ = R_\tau^\circ/N$.

Bemerkung 5. Die Gruppe R_τ°/N ist allerdings selbst im Allgemeinen keine vollständige Abschließung der Gruppe G: Betrachten wir die zyklische Gruppe $G(p)$, dann ist

$$U_1 = \{u_1\} , \quad R_1^\circ = R , \quad G(p) \subset R/\{p \,.\, u_1\} ,$$

was eine abzählbare direkte Summe von Gruppen des Typus p_i^∞ im Bezug auf alle Primzahlen p_i ist, während die vollständige Abschließung $\overline{G}$ der Gruppe G die Gruppe $G(p^\infty)$ ist.

Jeder Endomorphismus ε der Gruppe U_τ kann leicht direkt in R_τ° fortgesetzt werden:

Für $g_\beta \in R_\beta$ (bei $0 \leqq \beta < \tau$) existiert notwendigerweise ein natürliches n, für das $n \,.\, g_\beta \in \{u_\beta\}$ ist. Weiterhin gilt $(n \,.\, g_\beta)\, \varepsilon = g' \in U_\tau$; wenn wir $g_\beta \varepsilon^* = g''$ setzen, wo g'' die eindeutige Lösung der Gleichung $n \,.\, x = g'$ in R_τ° ist, bekommen wir, wie man sich leicht überzeugen kann, den Endomorphismus ε^* der Gruppe R_τ°, der die eindeutige direkte Fortsetzung des Endomorphismus ε der Gruppe U_τ ist. Wir erhalten also das Ergebnis

$$\mathfrak{R}(U_\tau) \subseteq \mathfrak{R}(R_\tau^\circ) \,.$$ [23])

Was die Untersuchung der Beziehung zwischen $\mathfrak{R}(G^\circ)$ und $\mathfrak{R}(G) \cong$ $\cong \mathfrak{R}(U_\tau; N)/\mathfrak{N}(U_\tau, N)$ betrifft, so gehen wir hier folgendermaßen vor: Es ist

$$G \cong U_\tau/N \subset R_\tau^\circ/N \,.$$

---

[22]) Die vollständige Abschließung einer torsionsfreien Gruppe G können wir leicht direkt konstruieren: Wenn wir in der Menge M aller Paare (n, g), wo n natürlich und $g \in G$ ist, auf geeignete Weise den Gleichheitsbegriff und die Additionsoperation definieren, so überzeugen wir uns auf Grund des Hilfssatzes 1 leicht von der Gleichheit $M = \overline{G}$. (Siehe z. B. § 38 in [8].)

[23]) Jedermann sieht leicht ein, daß der Endomorphismenring der Gruppe R_τ° mit dem Ring der quadratischen Matrizen des Grades τ, deren Elemente rationale Zahlen sind und in deren Zeilen je höchstens endlich viele von Null verschiedene Elemente liegen, isomorph ist (siehe auch Satz 7 im § 3), d. h. unter anderem $\mathfrak{R}(U_\tau) \subset \mathfrak{R}(R_\tau^\circ)$.

Diejenigen Endomorphismen ε der Gruppe U_τ, für die $N\varepsilon \subseteq N$ ist, bilden nach der direkten Fortsetzung ε^* in die Gruppe R_τ° einen Unterring des Endomorphismenringes $\mathfrak{R}(R_\tau^\circ) : \mathfrak{R}'(R_\tau^\circ) \subset \mathfrak{R}(R_\tau^\circ)$; dabei bleibt die Eigenschaft

$$N\varepsilon^* \subseteq N \tag{3}$$

offenbar erhalten.

Bemerkung 6. Allerdings sind allgemein mit diesen Endomorphismen noch nicht alle Endomorphismen $\eta^* \in \mathfrak{R}(R_\tau^\circ)$ mit der Eigenschaft (3) erschöpft; betrachten wir z. B. die freie abelsche Gruppe $U_2 = \{u_0\} + \{u_1\}$ und ihre Untergruppe $N = \{4 . u_0\} + \{2 . u_1\}$; es ist $R_2^0 = R_0 + R_1$. Der Endomorphismus der Gruppe N, der $4 . u_0 \to 2 . u_1$ und $2 . u_1 \to 0$ abbildet, kann dann offenbar (eindeutig) direkt in R_2^0 fortgesetzt werden, nicht so allerdings in U_2.

Jeder Endomorphismus $\varepsilon^* \in \mathfrak{R}'(R_\tau^\circ)$ hat auch die Eigenschaft

$$U_\tau\varepsilon^* \subseteq U_\tau\,. \tag{4}$$

Selbstverständlich gehört umgekehrt jeder Endomorphismus aus R_τ° mit den Eigenschaften (3) und (4) zu $\mathfrak{R}'(R_\tau^\circ)$; also $\mathfrak{R}'(R_\tau^\circ) = \mathfrak{R}(R_\tau^\circ; U_\tau, N)$.

Nun kann jetzt ohne Schwierigkeiten der folgende Satz bewiesen werden.

Satz 4. *Für den Endomorphismenring der abelschen Gruppe G gilt*

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(G^\circ; G)/\mathfrak{M}(G^\circ, G)\,.$$[24]

Beweis. Infolge von (3) induziert jeder Endomorphismus aus $\mathfrak{R}(R_\tau^\circ; U_\tau, N)$ homomorph einen Endomorphismus in $R_\tau^\circ/N = G^\circ$, wobei infolge von (4) durch diese Endomorphismen auch Endomorphismen in $U_\tau/N \cong G \subset G^\circ$ homomorph induziert werden, und zwar sogar alle Endomorphismen dieser Gruppe, was aus der ganzen vorangehenden Untersuchung folgt. Wenn wir nun noch den Satz 2 anwenden, ist der ganze Beweis des Satzes 4 fertig.

Untersuchen wir jetzt die Beziehung zwischen den Endomorphismenringen der Gruppen G und $\bar{G}$. Es ist $G^\circ = \bar{G} + H$, $G \subseteq \bar{G}$, und wir wissen schon, daß für einen beliebigen Endomorphismus ε der Gruppe G ein Endomorphismus ε° der Gruppe G° existiert, der in G den Endomorphismus ε direkt induziert.

Bemerkung 7. Wenn G° torsionsfrei ist, so sieht man auf Grund des Hilfssatzes 1 leicht ein, daß die konstruierte Gruppe G° eine vollständige Abschließung der Gruppe G und daher

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(\bar{G}; G)/\mathfrak{M}(\bar{G}, G) \tag{5}$$

ist. Auf der anderen Seite aber ist zu sehen, daß für eine torsionsfreie Gruppe G noch nicht $G^\circ = R_\tau^\circ/N$ auch torsionsfrei sein muß.

Die Beziehung (5) hat allerdings allgemeine Gültigkeit; das ist das Hauptergebnis des § 2 und der Inhalt des folgenden Satzes.

[24]) Die Behauptung $\mathfrak{R}(G) = \mathfrak{U}(G^\circ, G)$ ist damit äquivalent.

Satz 5. *Der Endomorphismenring der Gruppe G ist isomorph mit dem Restklassenring des Ringes $\mathfrak{R}(\overline{G}; G)$ aller G-Endomorphismen der vollständigen Abschließung $\overline{G}$ nach dem Ideal $\mathfrak{M}(\overline{G}, G)$, das aus all jenen Endomorphismen ε' besteht, für die $G\varepsilon' = 0$ ist. Wenn speziell G torsionsfrei ist, dann ist $\mathfrak{M}(G, G) = (0)$.*

Beweis. Die Existenz eines Unterringes von Endomorphismen in $\mathfrak{R}(G^\circ)$, dessen Elemente alle Endomorphismen in $G \subset G^\circ$ direkt induzieren, ist nach dem Satz 4 gesichert.[25]) Wir konstruieren nun zu jedem Endomorphismus ε° aus diesem Unterring von $\mathfrak{R}(G^\circ; G)$ einen Endomorphismus ε^* in $\overline{G} \subseteq G^\circ$, der auf G mit ε° zusammenfällt. Es sei also $\varepsilon^0 \in \mathfrak{R}(G^\circ; G)$ gegeben. Da $G^\circ = \overline{G} + H$ ist, so ist für jedes Element $\overline{g} \in \overline{G}$

$$\overline{g}\varepsilon^\circ = \overline{g}_1 + h_1 \text{ für } \overline{g}_1 \in \overline{G} \text{ und } h_1 \in H.$$

Definieren wir die Abbildung ε^* in $\overline{G}$: $\overline{g}\varepsilon^* = \overline{g}_1$. Dann ist ε^* offenbar ein Endomorphismus; dabei ist für $g \in G$ notwendig

$$g\varepsilon^* = g\varepsilon^\circ \in G \subseteq \overline{G}\,.$$

Damit haben wir erwiesen, daß der Unterring $\mathfrak{R}(\overline{G}; G) \subseteq \mathfrak{R}(\overline{G})$ solche Endomorphismen enthält, die in G alle Endomorphismen direkt induzieren. Es genügt nun den Satz 2 anzuwenden. Da jede andere vollständige Abschließung der Gruppe G mit $\overline{G}$ durch den Isomorphismus φ verbunden ist, der eine direkte Fortsetzung des identischen Automorphismus auf G ist, so gilt die Behauptung des Satzes für jede beliebige vollständige Abschließung der Gruppe G.[26])

Der Zusatz im Satz 5 ist aus der folgenden Erwägung ersichtlich: Sei $\overline{g}$ ein beliebiges Element von $\overline{G}$, es existiert dann ein natürliches n so, daß $n\,.\,\overline{g} = g$ mit $g \in G$. Falls jetzt ε' ein solcher Endomorphismus in $\overline{G}$ ist, daß $g\varepsilon' = 0$ für jedes Element $g \in G$ ist, dann ist

$$(n\,.\,\overline{g})\,\varepsilon' = n\,.\,(\overline{g}\varepsilon') = 0\,,$$

was in einer torsionsfreien Gruppe nicht anders als durch $\overline{g}\varepsilon' = 0$ möglich ist. Wenn also G torsionsfrei ist, so ist dann jeder G-Nullendomorphismus in $\overline{G}$ der Nullendomorphismus. Hiermit ist der Satz 5 bewiesen.

Bemerkung 8. Ein einfaches Beispiel beweist, daß der Zusatz im allgemeinen nicht für Gruppen gilt, die nicht torsionsfrei sind: Die Gruppe $G(p^\infty)$ ist die vollständige Abschließung der Gruppe $G(p^n)$ und hier entspricht, wie man leicht sieht, einem und demselben Endomorphismus in $G(p^n)$ eine ganze Klasse von Endomorphismen der Gruppe $G(p^\infty)$. Genauer gesagt: Jeder Endomorphismus in $G(p^\infty)$ induziert direkt einen Endomorphismus in $G(p^n)$, also

$$\mathfrak{R}(G(p^n)) \cong \mathfrak{R}(G(p^\infty))/\mathfrak{M}\,,$$

[25]) Wie wissen also, daß $\mathfrak{U}(G^\circ, G) = \mathfrak{R}(G)$ ist (siehe Satz 4), und wollen zeigen, daß auch $\mathfrak{U}(\overline{G}, G) = \mathfrak{R}(G)$ ist.

[26]) D. h. nicht nur für diejenige vollständige Abschließung von G, die eine Untergruppe von G° ist.

wo $\mathfrak{R}(G(p^\infty))$ mit dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen und $\mathfrak{M}$ mit dem Ideal in diesem Ring isomorph ist, das durch die p-adischen Zahlen erzeugt ist, in deren Darstellung durch unendliche Folgen sich an den n ersten Stellen Nullen befinden.[27])

Bemerkung 9. Der Satz 5 ist in dem Sinne definitiv, daß man weder für periodische noch torsionsfreie Gruppen behaupten kann, daß $\mathfrak{R}(\overline{G}; G) = \mathfrak{R}(\overline{G})$.

Wenn G torsionsfrei ist, dann zeigt uns das Beispiel der unendlichen zyklischen Gruppe $G = \{1\}$ in der additiven Gruppe R der rationalen Zahlen, daß in $\overline{G} = R$ Endomorphismen existieren, die keine G-Endomorphismen sind (z. B. der Endomorphismus ε, der durch die Beziehung $1\varepsilon = \frac{1}{2}$ bestimmt ist).

Für die periodische Gruppe G betrachten wir dieses Beispiel:

$$G = G_1(p) + G_2(p^2) = \{g_1\} + \{g_2\}\,;$$

laut Hilfssatz 5 ist $\overline{G} = G_1(p^\infty) + G_2(p^\infty)$.

Sei $g_1, g_1^*, g_2^*, \ldots$ mit $O(g_1) = p$, $p \,.\, g_1^* = g_1$, $p \,.\, g_2^* = g_1^*, \ldots$ ein System von Erzeugenden der Gruppe $G_1(p^\infty)$ und $p \,.\, g_2$, g_2, $h_2^*, h_3^*, \ldots$ mit $O(g_2) = p^2$, $p \,.\, h_2^* = g_2$, $p \,.\, h_3^* = h_2^*, \ldots$ ein System von Erzeugenden der Gruppe $G_2(p^\infty)$. Dann ist der durch die Zuordnungen

$$p \,.\, g_2 \to g_1\,, \quad g_2 \to g_1^*\,, \quad h_i^* \to g_i^* \quad \text{für } i \geqq 2,\ G_1 \to 0$$

entstandene Endomorphismus in $\overline{G}$ sicher kein G-Endomorphismus.

3. Der Endomorphismenring einer direkten Summe von Gruppen

G sei eine abelsche Gruppe, $(K_\delta)_{\delta \in \Delta}$ ein System ihrer Untergruppen, Δ irgendeine Indexmenge. Wir definieren und bezeichnen mit $D = \bigcap\limits_{\delta \in \Delta}^{G} K_\delta$ die Menge derjenigen Elemente $g \in G$, für die die Inzidenz $g \in K_\delta$ bis auf eine endliche Anzahl für alle $\delta \in \Delta$ erfüllt ist.

Da offenbar die Summe $g_1 + g_2$ zweier Elemente $g_1 \in D$ und $g_2 \in D$, das inverse Element zu $g \in D$ und 0 in D liegt, ist D eine Untergruppe von G. *Diese Untergruppe D nennen wir den Pseudodurchschnitt der Untergruppen K_δ in der Gruppe G.*

In unseren weiteren Betrachtungen brauchen wir solche Systeme $(K_\delta)_{\delta \in \Delta}$, für die

$$\bigcap_{\delta \in \Delta}^{G} K_\delta = G \tag{6}$$

ist. (6) ist sicher immer dann erfüllt, wenn Δ eine endliche Mächtigkeit hat. Von der Existenz unendlicher Systeme eigentlicher Untergruppen mit der

[27]) Diese Darstellung des Endomorphismenringes der Gruppe $G(p^\infty)$ siehe in [9], § 21.

Eigenschaft (6) können wir uns leicht am Beispiel der additiven Gruppe der rationalen Zahlen R überzeugen; es genügt, für jede Primzahl p mit dem Symbol K_p die Untergruppe der Gruppe R der Zahlen, deren Nenner mit p teilerfremd sind, zu bezeichnen. Da jede rationale Zahl in der Form r/s mit $(r, s) = 1$, $s \geqq 0$, $s = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$ bei $e_i \geqq 1$ $(i = 1, 2, \dots, t)$, geschrieben werden kann, liegt die Zahl r/s in allen Untergruppen K_q, für die $q \neq p_1, p_2, \dots, p_t$ ist, d. h. $\overset{R}{\bigcap_{p}} K_p = R$.

Bemerkung 10. Ein allgemeineres Ergebnis erhalten wir aus der Bemerkung, daß jede abelsche Gruppe G, die die Vereinigung einer wachsenden Folge eigentlicher Untergruppen ist, ein unendliches System $(K_\delta)_{\delta \in \Delta}$ von eigentlichen Untergruppen K_δ mit der Eigenschaft (6) besitzt.[28] Anderseits überlegt man sich leicht, daß die Gruppe $G(\infty)$ ein solches unendliches System nicht besitzt.

Wir führen hier noch zwei Hilfssätze an, die uns im nächsten Paragraphen 4 helfen werden.

Hilfssatz 7. *Wenn* $\overset{G}{\bigcap_{\delta \in \Delta}} K_\delta = G$ *und* $\Delta_1 \subseteq \Delta$ *ist, so ist auch* $\overset{G}{\bigcap_{\delta \in \Delta_1}} K_\delta = G$.

Beweis. Der Beweis ist aus der Definition des Pseudodurchschnittes ersichtlich.

Hilfssatz 8. *Wenn* $\overset{G}{\bigcap_{\substack{\delta \in \Delta_\lambda \\ \lambda \in \Lambda}}} K_\delta = G$ *und* $\Delta_{\lambda_1} \cap \Delta_{\lambda_2} = \emptyset$ *für* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *ist, dann ist auch* $\overset{G}{\bigcap_{\lambda \in \Lambda}} (\bigcap_{\delta \in \Delta_\lambda} K_\delta) = G$.

Beweis. Es sei $g \in G$. Wenn $\overset{G}{\bigcap_{\substack{\delta \in \Delta_\lambda \\ \lambda \in \Lambda}}} K_\delta = G$ ist, so ist g non $\in K_\delta$ für höchstens endlich viele Indizes δ und daher auch g non $\in \bigcap_{\delta \in \Delta_\lambda} K_\delta$, nur für endlich viele Indizes λ, d. h. es ist $\overset{G}{\bigcap_{\lambda \in \Lambda}} (\bigcap_{\delta \in \Delta_\lambda} K_\delta) = G$.

Wir leiten weiter noch einen Hilfssatz über homomorphe Abbildungen ab.

Hilfssatz 9. *Es seien die abelschen Gruppen H und $G = \sum_{0 \leqq \alpha < \tau}' G_\alpha$ gegeben. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(H, G_\alpha)$ die additive Gruppe aller Homomorphismen $\varkappa_\alpha$ der Gruppe H in G_α (für $0 \leqq \alpha < \tau$), $\mathfrak{K}(H, G)$ die Gruppe aller Homomorphismen $\varkappa$ der Gruppe H in G.*[29] *Weiter bezeichnen wir mit A die Menge aller solchen transfiniten Folgen*[30])

$$\bar{\varkappa} = (\varkappa_0, \varkappa_1, \dots, \varkappa_\alpha, \dots) \text{ für } \alpha < \tau \text{ und } \varkappa_\alpha \in \mathfrak{K}(H, G_\alpha)\,, \tag{7}$$

[28]) Hieraus folgt insbesondere, daß jede vollständige Gruppe diese Eigenschaft hat.

[29]) Im Sinne der Definition im einleitenden § 1.

[30]) D. h. im Allgemeinen transfinit; für endliches τ sind natürlich endliche Folgen gemeint.

für die die Kerne $K_\alpha \subseteq H$ der Homomorphismen $\varkappa_\alpha$ bei $0 \leqq \alpha < \tau$ die Beziehung

$$\overset{H}{\bigcap_{0\leqq\alpha<\tau}} K_\alpha = H \tag{8}$$

erfüllen. Wenn wir nun in A die Addition komponentenweise definieren, so erhalten wir eine abelsche Gruppe. Es ist dann

$$\mathfrak{K}(H, G) \cong \mathsf{A} ,$$

wobei dem Element $\bar{\varkappa}$ von A die homomorphe Abbildung $\varkappa$ der Gruppe H in G entspricht, deren Kern

$$K = \bigcap_{0\leqq\alpha<\tau} K_\alpha \tag{9}$$

ist.[31])

Beweis. Zunächst beweisen wir, daß A in Hinsicht auf die definierte Operation eine abelsche Gruppe ist. Es sei also

$$\bar{\varkappa}^1 = (\varkappa_0^1, \varkappa_1^1, \ldots, \varkappa_\alpha^1, \ldots) \text{ für } \alpha < \tau \text{ und } \varkappa_\alpha^1 \in \mathfrak{K}(H, G_\alpha) ,$$
$$\bar{\varkappa}^2 = (\varkappa_0^2, \varkappa_1^2, \ldots, \varkappa_\alpha^2, \ldots) \text{ für } \alpha < \tau \text{ und } \varkappa_\alpha^2 \in \mathfrak{K}(H, G_\alpha) ,$$
$$\bar{\varkappa}^1 + \bar{\varkappa}^2 = (\varkappa_0^1 + \varkappa_0^2, \varkappa_1^1 + \varkappa_1^2, \ldots, \varkappa_\alpha^1 + \varkappa_\alpha^2, \ldots) \text{ bei } \alpha < \tau ;$$

erstens ist $\varkappa_\alpha^1 + \varkappa_\alpha^2$ wieder ein Homomorphismus der Gruppe H in G_α für $0 \leqq \alpha < \tau$ und die Operation ist kommutativ. Es ist nur noch notwendig die Eigenschaft (8) von den Kernen dieser Homomorphismen zu beweisen.

Untersuchen wir also zunächst den Kern des Homomorphismus $\varkappa_\alpha^1 + \varkappa_\alpha^2$ bei $\alpha < \tau$ und bezeichnen wir ihn mit L_α. Für $l \in L_\alpha$ ist $l(\varkappa_\alpha^1 + \varkappa_\alpha^2) = l\varkappa_\alpha^1 + l\varkappa_\alpha^2 = 0$. Wenn nun $l \in K_\alpha^1$ und $l \in K_\alpha^2$ ist, so ist auch $l \in L_\alpha$. Wir haben also

$$K_\alpha^1 \cap K_\alpha^2 \subseteq L_\alpha .$$

Da aber nach Hilfssatz 8

$$\overset{H}{\bigcap_{0\leqq\alpha<\tau}} (K_\alpha^1 \cap K_\alpha^2) = H ,$$

so ist desto eher

$$\overset{H}{\bigcap_{0\leqq\alpha<\tau}} L_\alpha = H .$$

Wir ordnen weiter dem Homomorphismus $\varkappa$ der Gruppe H in G die Folge (7) auf folgende Weise zu:

Für $h \in H$ ist $h\varkappa = \sum_{0\leqq\alpha<\tau} g_\alpha$, wo $g_\alpha \in G_\alpha$ und $g_\alpha \neq 0$ nur für endlich viele Indizes α ist; $\varkappa_\alpha$ sei die homomorphe Abbildung der Gruppe H in G_α, die durch die Beziehung $h\varkappa_\alpha = g_\alpha$ für $0 \leqq \alpha < \tau$ definiert ist. Den Kern des Homomorphismus $\varkappa_\alpha$ bezeichnen wir mit $K_\alpha \subseteq H$. Weil das homomorphe Bild eines jeden Element aus H in der direkten Summe endlich vieler Gruppen G_α liegt,

[31]) Der Kern bestimmt den Homomorphismus im Allgemeinen allerdings nicht.

wir überzeugen uns leicht von der Gültigkeit der Beziehung (8). Auf dieselbe Weise wird umgekehrt der Folge (7) unter der Bedingung (8) ein Homomorphismus $\varkappa$ der Gruppe H in G zugeordnet:

Wenn $h \in H$ ist, dann ist $h\varkappa = \sum_{0 \leqq \alpha < \tau} h\varkappa_\alpha$, wobei diese Summe infolge von (8) offenbar endlich ist.

Die Eineindeutigkeit der Abbildung ist damit bewiesen. Um den Isomorphismus $\mathfrak{K}(H, G) \simeq \mathsf{A}$ zu beweisen müssen wir zeigen, daß die Summe zweier Homomorphismen der Summe der entsprechenden transfiniten Folgen zugeordnet ist; das geht aber sofort aus der Art und Weise der Definition der Additionsoperation in A hervor. Zum Schluß beweisen wir noch die Behauptung vom Kern K des Homomorphismus $\varkappa$. Für $h \in K$ ist $h\varkappa = 0$, d. h. $h \in K_\alpha$ für $0 \leqq \alpha < \tau$. Ebenso gilt umgekehrt $\bigcap_{0 \leqq \alpha < \tau} K_\alpha \subseteq K$, im Ganzen also (9), und damit ist der ganze Hilfssatz 9 bewiesen.

Es sei nun $G = \sum'_{0 \leqq \alpha < \tau} G_\alpha$. Betrachten wir die Menge $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ der quadratischen Matrizen $(\varkappa_{\alpha\beta})$ des Grades τ, wo $\varkappa_{\alpha\beta}$ Homomorphismen der Gruppen G_α in die Gruppen G_β bedeuten (für $\alpha = \beta$ handelt es sich also offenbar um einen Endomorphismus der Gruppe G_α), für deren Kerne $K_{\alpha\beta} \subseteq G_\alpha$ bei festem α die Beziehung

$$\overset{G_\alpha}{\bigcap_{0 \leqq \beta < \tau}} K_{\alpha\beta} = G_\alpha \tag{10}$$

besteht. Die Addition der Matrizen definieren wir auf die gewöhnliche Weise; offenbar liegt nach Hilfssatz 9 die Summe zweier solcher Matrizen in $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$. Unter dem Produkt zweier Matrizen $(\overset{1}{\varkappa}_{\alpha\beta}) \in \overline{\mathfrak{D}}_\tau$ und $(\overset{2}{\varkappa}_{\alpha\beta}) \in \overline{\mathfrak{D}}_\tau$ werden wir diejenige Matrix $(\varkappa_{\alpha\beta})$ verstehen, in der

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \sum_{0 \leqq \gamma < \tau} \overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma} \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta}$$

ist; infolge von (10) hat diese unendliche Summe Sinn, denn es handelt sich um den Homomorphismus der Gruppe G_α in G_β, der durch die Beziehung

$$g_\alpha \varkappa_{\alpha\beta} = \sum_{0 \leqq \gamma < \tau} g_\alpha \overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma} \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta}$$

definiert ist, während hier die Summe nur formal unendlich ist. Von der Zugehörigkeit des Produktes $(\varkappa_{\alpha\beta}) = (\overset{1}{\varkappa}_{\alpha\beta})(\overset{2}{\varkappa}_{\alpha\beta})$ zu $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ überzeugen wir uns durch die folgende Betrachtung:

Bezeichnen wir nacheinander mit

$$K^1_{\alpha\gamma} \subseteq G_\alpha\,, \quad K^2_{\gamma\beta} \subseteq G_\beta \quad \text{und} \quad K_{\alpha\beta} \subseteq G_\alpha$$

die Kerne der Homomorphismen

$$\overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma}(0 \leqq \gamma < \tau)\,, \quad \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta}(0 \leqq \gamma < \tau, 0 \leqq \beta < \tau) \quad \text{und} \quad \varkappa_{\alpha\beta}(0 \leqq \beta < \tau)\,.$$

Wegen

$$\bigcap_{0 \leq \gamma < \tau}^{G_\alpha} K^1_{\alpha\gamma} = G_\alpha$$

ist für ein beliebiges Element $g_\alpha \in G_\alpha$

$$g_\alpha \varkappa_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{k} h_{\gamma_i} \varkappa^2_{\gamma_i\beta} ,$$

wobei $h_{\gamma_i} = g_\alpha \varkappa^1_{\alpha\gamma_i}$ und $0 = g_\alpha \varkappa^1_{\alpha\gamma}$ für $\gamma \neq \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ ist. Infolge von

$$\bigcap_{0 \leq \beta < \tau}^{G_{\gamma_i}} K^2_{\gamma_i\beta} = G_{\gamma_i}$$

ist $h_{\gamma_i} \varkappa^2_{\gamma_i\beta} \neq 0$ nur für $\beta = \beta^i_1, \beta^i_2, \ldots, \beta^i_{n_i}$ bei $i = 1, 2, \ldots, k$. Im Ganzen ist also nur für endlich viele Indizes β das homomorphe Bild des Elementes $g_\alpha \in G_\alpha$ von Null verschieden, und es ist also

$$\bigcap_{0 \leq \beta < \tau}^{G_\alpha} K_{\alpha\beta} = G_\alpha .$$ [32]

Jetzt können wir schon einen wichtigen Satz aussprechen.

Satz 6. *Sei* $G = \sum'_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha$. *Dann ist die oben definierte Menge* $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ *mit der angeführten Definition der Addition und der Multiplikation ein Ring und es ist*

$$\mathfrak{R}(G) \cong \bar{\mathfrak{D}}_\tau .$$

Beweis. Jedem Endomorphismus der Gruppe G, $\varepsilon \in \mathfrak{R}(G)$, ordnen wir auf die folgende Weise die Matrix $(\varkappa_{\alpha\beta}) \in \bar{\mathfrak{D}}_\tau$ zu: Für

$$g_\alpha \in G_\alpha , \quad g_\alpha \, \varepsilon = \sum_{0 \leq \beta < \tau} h_\beta \quad \text{bei} \quad h_\beta \in G_\beta \tag{11}$$

setzen wir $g_\alpha \varkappa_{\alpha\beta} = h_\beta$; $\varkappa_{\alpha\beta}$ ist sicher eine homomorphe Abbildung der Gruppe G_α in G_β, während die Bedingung (10) erfüllt ist, den die Summe (11) ist nur formal unendlich.

Umgekehrt entspricht in dieser Zuordnung jeder Matrix $(\varkappa_{\alpha\beta}) \in \bar{\mathfrak{D}}_\tau$ ein Endomorphismus der Gruppe G; es genügt, wie man leicht einsieht, für $g \in G$, $g = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} g_\alpha$ bei $g_\alpha \in G_\alpha$, $g\varepsilon = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} g_\alpha \varkappa_{\alpha\beta}$ zu setzen, wobei infolge der Bedingung (10) die Summe nur formal unendlich ist.

Aus dem Hilfssatz 9 folgt weiter, daß der Summe der Endomorphismen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ in $\mathfrak{R}(G)$ bei dieser Zuordnung die Summe der Matrizen $(\varkappa^1_{\alpha\beta}) + (\varkappa^2_{\alpha\beta})$ in $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ entspricht. Es erübrigt sich nun dasselbe vom Produkt der Endomorphismen in $\mathfrak{R}(G)$ und der Matrizen in $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ zu erweisen. Das folgt allerdings aus der nachstehenden formalen Berechnung:

---

[32]) Offenbar ist das von Null verschiedene homomorphe Bild des Elementes g_α in höchstens $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ direkten Summanden der Gruppe G enthalten.

Für ein beliebiges Element $g \in G$, $g = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} g_\alpha$ bei $g_\alpha \in G_\alpha$ sei

$$g\varepsilon_1 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} g_\alpha \varepsilon_1 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} g_\alpha \overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma} = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} \overset{1}{g}_{\alpha\gamma}$$

und

$$g\varepsilon_2 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} g_\alpha \varepsilon_2 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} g_\alpha \overset{2}{\varkappa}_{\alpha\beta} = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} \overset{2}{g}_{\alpha\beta} ;$$

dann ist

$$g\varepsilon_1\varepsilon_2 = \Big(\sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} \overset{1}{g}_{\alpha\gamma} \Big) \varepsilon_2 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} \overset{1}{g}_{\alpha\gamma} \varepsilon_2 = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} \overset{1}{g}_{\alpha\gamma} \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta} =$$
$$= \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \gamma < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} g_\alpha \overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma} \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta} = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} \sum_{0 \leq \beta < \tau} g_\alpha \Big(\sum_{0 \leq \gamma < \tau} \overset{1}{\varkappa}_{\alpha\gamma} \overset{2}{\varkappa}_{\gamma\beta} \Big) .$$

Daraus und von der Betrachtung, die wir schon vor der Formulierung des Satzes 6 über die Multiplikation in der Menge $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ anstellten, folgt schon, daß $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ ein Ring ist und daß $\mathfrak{R}(G) \cong \bar{\mathfrak{D}}_\tau$ gilt, womit der Beweis des Satzes 6 fertig ist.

Korollar 1. *Wenn jedes homomorphes Bild der Gruppe G_α in G in einer endlichen direkten Summe einiger G_β enthalten ist, so stehen in der α-ten Zeile jeder Matrix $(\varkappa_{\alpha\beta}) \in \bar{\mathfrak{D}}_\tau$ nur endlich viele nichttriviale Homomorphismen.*[33])

Korollar 2. *Satz von* Kiškina *(siehe Satz 2 in* [6]*). Sei $G = \sum_{i=1}^{n}{}' G_i$. Bezeichnen wir $\bar{\mathfrak{D}}_n$ den Ring der quadratischen Matrizen $(\varkappa_{ij})$ des Grades n, wo $\varkappa_{ij}$ bei $i \neq j$ einen Homomorphismus der Gruppe G_i in die Gruppe G_j und $\varkappa_{ii}$ einen Endomorphismus der Gruppe G_i darstellt, mit gewöhnlicher Matrizenaddition und -multiplikation. Es ist dann $\mathfrak{R}(G) \cong \bar{\mathfrak{D}}_n$.*

Aus dem Korollar 1 leiten wir einen weiteren Satz ab.

Satz 7.[34]) *Sei $G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau}{}' G_\alpha$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe, deren jeder direkte Summand G_α den endlichen D-Rang n_α hat. Dann hat der Ring $\bar{\mathfrak{D}}_\tau$ aus Satz 6 die nachstehende Eigenschaft:*

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Wenn } (\varkappa_{\alpha\beta}) \in \bar{\mathfrak{D}}_\tau \textit{ ist, dann ist für jedes festes } \alpha \textit{ nur in endlich vielen} \\ \textit{Fällen } \varkappa_{\alpha\beta} \neq 0.\end{array}\right\} \quad (12)$$

Beweis. Um die Eigenschaft (12) zu beweisen, genügt es nach dem Korollar 1

---

33) Diese Bedingung ist mit der folgenden äquivalent, daß kein unendliches System eigentlicher Untergruppen $K_{\alpha\beta} \subset G_\alpha$ existiert, für das $\bigcap_{\beta}^{G_\alpha} K_{\alpha\beta} = G_\alpha$ und $G_\alpha / K_{\alpha\beta} \cong H_\beta$ bei $H_\beta \subseteq G_\beta$ ist.

34) Aus diesem Satze folgt auch die Aussage über den Endomorphismenring der freien abelschen Gruppe U_τ, die am Anfang des § 2 bewiesen ist. Sie ist außerdem eine Folge der Bemerkung, die am Anfang des § 3 über die unendliche zyklische Gruppe $G(\infty)$ gemacht wurde (Bemerkung 10).

zu zeigen, daß in G_α für $0 \leqq \alpha < \tau$ kein unendliches System eigentlicher Untergruppen $K_{\alpha\delta} \subset G_\alpha$ mit

$$\bigcap_{\delta \in \Delta}^{G_\alpha} K_{\alpha\delta} = G_\alpha , \quad \mathrm{m}(\Delta) \geqq \aleph_0 ,$$

existiert. Nehmen wir an, es existiere ein solches System $(K_{\alpha\delta})_{\delta\in\Delta}$. Vor allem erinnern wir uns, daß es sich um eine homomorphe Abbildung der Gruppe G_α in torsionsfreie Gruppen handelt, d. h., daß die $K_{\alpha\delta}$ bei $\delta \in \Delta$ in G_α Servanzuntergruppen sein müssen. Sei nun

$$g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, \ldots, g_{\alpha_{n_\alpha}} \tag{13}$$

ein D-System der Gruppe G_α. Dann ist g_{α_i} non $\in K_{\alpha\delta}$ nur für die Indizes $\delta = \delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_{k_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$. Also, bis auf endlich viele Indizes δ enthält jede Untergruppe $K_{\alpha\delta}$ die Elemente (13) und auf Grund dessen, daß $K_{\alpha\delta}$ eine Servanzuntergruppe in G_α ist, gilt bis auf endlich viele Indizes $K_{\alpha\delta} = G_\alpha$. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

4. Die Darstellung des Endomorphismenringes einer vollständigen abelschen Gruppe durch einen Matrizenring

C sei eine vollständige abelsche Gruppe; C ist dann die direkte Summe von Gruppen des Typus R^+ oder p^∞ für verschiedene Primzahlen p; $p_1 < p_2 < \ldots$ $\ldots < p_i < \ldots$ seien alle Primzahlen, sodaß

$$C = \sum_{0 \leqq \alpha_{(0)} < \tau_{(0)}}' R_{\alpha_{(0)}} + \sum_{0 \leqq \alpha_{(1)} < \tau_{(1)}}' G_{\alpha_{(1)}}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}}' G_{\alpha_{(i)}}(p_i^\infty) + \ldots \text{[35]} \tag{14}$$

Um zu unseren Zwecken den Satz 6 anwenden zu können, bestimmen wir zunächst die Homomorphismengruppen, welche die einzelnen direkten Summanden der vollständigen abelschen Gruppe (14) in die übrigen direkten Summanden dieser Gruppe abbilden.

R sei eine Gruppe des Typus R^+ und $G(p^\infty)$ eine Gruppe des Typus p^∞ mit den Erzeugenden und definierenden Relationen

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots; O(r_1) = \infty, (n + 1) \cdot r_{n+1} = r_n \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots; O(g_1) = p, p \cdot g_{n+1} = g_n \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Man sieht leicht ein, daß die Homomorphismengruppe der Gruppe $G(p^\infty)$ in die Gruppe $G(q^\infty)$ für $p \neq q$ nur den Nullhomomorphismus enthält; im Falle $p = q$ handelt es sich allerdings um die Endomorphismen der Gruppe $G(p^\infty)$.[36]

---

[35]) Hier können allerdings einige direkte Summanden gleich Null sein, d. h. einige $\tau_{(i)} = 0$.

[36]) Was die Homomorphismengruppe betrifft, so ist sie natürlich isomorph mit der additiven Gruppe des untersuchten Endomorphismenringes.

Hier ist jeder Endomorphismus $\varkappa$ durch die Bilder der Erzeugenden (16) bestimmt, d. h.

$$g_n\varkappa = i_n \,.\, g_n\,, \quad 0 \leqq i_n < p^n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

während man aus den definierenden Relationen die Beziehung

$$i_{n+1} \equiv i_n \pmod{p^n} \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

erhält; durch die Zuordnung

$$\varkappa \longleftrightarrow (i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)\,,$$

bekommen wir so einen Isomorphismus zwischen dem Endomorphismenring der Gruppe $G(p^\infty)$ und dem Ring der unendlichen Folgen ganzer nichtnegativer Zahlen

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)\,, \tag{17}$$

deren Glieder die Bedingungen

$$0 \leqq i_n < p^n \quad \text{und} \quad i_{n+1} \equiv i_n \pmod{p^n} \text{ für } n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

erfüllen und bei denen die Addition und die Multiplikation komponentenweise durchzuführen ist.[37])

Leicht ist die Feststellung der Gruppen homomorpher Abbildungen der Gruppe R in Gruppen desselben Typus R^+. Es handelt sich wiederum um Endomorphismen der Gruppe R, und da jeder Endomorphismus $\varkappa$ durch die Abbildung des Erzeugenden r_1 aus (15) $r_1\varkappa = r$ vollständig bestimmt ist und da weiter (es handelt sich ja um eine Gruppe des D-Ranges 1) $u \,.\, r_1 = v \,.\, r$ für teilerfremde ganze u, v ist, erhalten wir durch die Zuordnung $\varkappa \longleftrightarrow u/v$ einen Isomorphismus des Endomorphismenringes der Gruppe R mit dem Ring der rationalen Zahlen (der dieses Mal ein Körper ist).[37])

Es bleibt also noch die Beschreibung der Gruppe der homomorphen Abbildungen der Gruppe R in $G(p^\infty)$ übrig. Sei $\varkappa \neq \boldsymbol{0}$ ein Homomorphismus der Gruppe R in $G(p^\infty)$. Dann ist entweder $r_1\varkappa = 0$ oder $r_1\varkappa \neq 0$.

Betrachten wir zunächst den Fall $r_1\varkappa = 0$. Vor allem hat $r_1\varkappa = 0$ die Folge, daß, wie man sich leicht überzeugt, $x\varkappa = 0$ ist, wo $x \in R$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$n \,.\, x = r_1 \quad \text{für} \quad (n, p) = 1 \tag{19}$$

ist. Sei weiter $t_\varkappa$ die kleinste natürliche Zahl, für die die Lösung $y \in R$ der Gleichung $t_\varkappa \,.\, y = r_1$ die Eigenschaft $y\varkappa \neq 0$ hat. Es sei $t_\varkappa = t'_\varkappa\, p^{n_\varkappa + 1}$, $(t'_\varkappa, p) = 1$. Dann ist auch $(t'_\varkappa \,.\, y)\, \varkappa \neq 0$, d. h. $t_\varkappa = p^{n_\varkappa + 1}$.

Wir ordnen nun dem Homomorphismus $\varkappa$ diese Zahl $n_\varkappa$ zu; man sieht leicht ein, daß $n_\varkappa \geqq 0$ ist.

---

37) Siehe § 21 in [9].

Wenn der Fall $r_1\varkappa \neq 0$ eintritt, so gehen wir auf entsprechende Weise vor; wir bezeichnen mit $t_\varkappa$ die kleinste natürliche Zahl mir der Eigenschaft

$$(t_\varkappa \,.\, r_1)\,\varkappa = 0\,.^{38)} \tag{20}$$

Dabei ist $t_\varkappa = t'_\varkappa p^{m_\varkappa}$, $(t'_\varkappa, p) = 1$. Infolge von (20) ist ebenfalls $(p^{m_\varkappa} \,.\, r_1)\,\varkappa = 0$, sodaß aus der Voraussetzung $r_1\varkappa \neq 0$ und der Wahl von $t_\varkappa$

$$t_\varkappa = p^{m_\varkappa} \text{ mit } m_\varkappa \geqq 1$$

folgt. In diesem Falle ordnen wir dem Homomorphismus $\varkappa$ die ganze Zahl $n_\varkappa = -\,m_\varkappa$ zu; also $n_\varkappa \leqq -\,1$.[39]

Wir definieren nun die Abbildung $\bar{\varkappa}$ der Gruppe R in $G(p^\infty)$ mit Hilfe des Erzeugendensystems (16) folgendermaßen:

In dem Falle, in dem $r_1\varkappa = 0$ (bzw. $r_1\varkappa \neq 0$) ist, setzen wir

$$y\bar{\varkappa} = g_1 \text{ (bzw. } (p^{m_\varkappa - 1} \,.\, r_1)\,\bar{\varkappa} = g_1)\,;$$

weiter setzen wir für die eindeutig bestimmte Lösung r der Gleichung $p^{l-1} \,.\, r = y$ (bzw. $p^{l-1} \,.\, r = p^{m_\varkappa - 1} \,.\, r_1$), $r\bar{\varkappa} = g_l$, wo $l = 2, 3, \ldots$ und für $r \in K_\varkappa$ setzen wir $r\bar{\varkappa} = 0$.

Man überzeugt sich leicht davon, daß es sich hier um einen Homomorphismus der Gruppe R in die Gruppe $G(p^\infty)$ handelt. Hier besteht gleichzeitig für $r \in R$

$$\text{entweder } r\varkappa = 0 \text{ und } r\bar{\varkappa} = 0 \text{ oder } r\varkappa \neq 0 \text{ und } r\bar{\varkappa} \neq 0. \tag{21}$$

Bezeichnen wir mit ε diejenige Abbildung der Gruppe $G(p^\infty)$ in sich selbst, die dem Element $r\bar{\varkappa} \in G(p^\infty)$ das Element $r\varkappa \in G(p^\infty)$ zuordnet, d. h. $(r\bar{\varkappa})\,\varepsilon = r\varkappa$.[40]

Wenn r_1 und r_2 beliebige Elemente aus R sind, dann ist allerdings

$$(r_1 + r_2\,\bar{\varkappa})\varepsilon = [(r_1 + r_2)\,\bar{\varkappa}]\,\varepsilon = (r_1 + r_2)\,\varkappa = r_1\varkappa + r_2\varkappa\,,$$

sodaß ε — hinsichtlich (21) — ein Automorphismus der Gruppe $G(p^\infty)$ ist. Im Isomorphismus zwischen dem Endomorphismenring der Gruppe $G(p^\infty)$ und dem Ring der unendlichen Folgen (17) mit den Bedingungen (18) entsprechen allerdings den Automorphismen diejenigen Folgen, bei denen

$$i_1 \neq 0 \quad \text{ist.} \tag{22}$$

---

[38]) Ein solches $t_\varkappa$ existiert allerdings auf Grund der Periodizität der Gruppe $G(p^\infty)$.

[39]) Auf diese Weise ist der Kern $K_\varkappa$ des Homomorphismus $\varkappa$ (und allerdings auch das homomorphe Bild) bereits eindeutig bestimmt. Im Falle $r_1\varkappa = 0$ ist dieser Kern offensichtlich durch das Element $p \,.\, y \in R$ und alle Lösungen der Gleichungen (19), im Falle $r_1\varkappa \neq 0$ durch das Element $p^{m_\varkappa} \,.\, r_1$ und alle Lösungen der Gleichungen $n \,.\, x = p^{m_\varkappa} \,.\, r_1$ bei $(n, p) = 1$ erzeugt.

[40]) Diese Abbildung ist infolge der Identität der Kerne der Homomorphismen $\varkappa$ und $\bar{\varkappa}$ allerdings eindeutig definiert: Wenn $r_1\bar{\varkappa} = r_2\bar{\varkappa}$ ist, dann ist $r_1 - r_2 \in K_\varkappa$ und also auch $r_1\varkappa = r_2\varkappa$.

Auf diese Weise haben wir jedem Homomorphismus $\varkappa \neq \boldsymbol{0}$ der Gruppe R in $G(p^\infty)$ eindeutig das Paar

$$(n_\varkappa, \pi_\varkappa)^{41)} \tag{23}$$

zugeordnet, wo $n_\varkappa$ eine ganze Zahl und $\pi_\varkappa$ eine unendliche Folge (17) mit den Bedingungen (18) und (22) ist; mit anderen Worten haben wir jedem Homomorphismus $\varkappa \neq \boldsymbol{0}$ eine Folge zugeordnet, die entweder, für $n_\varkappa \geqq 0$, von der Form

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots)\ , \tag{24}$$

wo $j_n = 0$ für $n = 1, 2, \ldots, n_\varkappa$ und $j_n = p^{n_\varkappa} . i_{n-n_\varkappa}$ für $n = n_\varkappa + 1, n_\varkappa + 2, \ldots,$ sodaß offenbar $j_{n+1} \equiv j_n \pmod{p^n}$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $0 < j_n < p^n$ für $n = n_\varkappa + 1, n_\varkappa + 2, \ldots$ ist, oder, für $n_\varkappa < 0$ von der Form

$$(j_{n_\varkappa+1}, j_{n_\varkappa+2}, \ldots, j_0, j_1, \ldots, j_n, \ldots) \tag{25}$$

ist, wo für $n = n_\varkappa + 1, n_\varkappa + 2, \ldots, 0, 1, \ldots$ $j_n = p^{n_\varkappa} . i_{n-n_\varkappa}$ ist, sodaß offenbar $j_{n+1} \equiv j_n \pmod{p^n}$[42] und $0 < j_n < p^n$ ist.

Umgekehrt kann sich jeder ohne Schwierigkeit davon überzeugen, daß eine beliebige Folge der Form (24) oder (25) mit den dazugehörenden Bedingungen für ihre Glieder bei der oben definierten Zuordnung einem bestimmten vom Nullhomomorphismus verschiedenen Homomorphismus der Gruppe R in $G(p^\infty)$ entspricht.

Zuletzt ordnen wir noch dem Nullhomomorphismus $\boldsymbol{0}$ die Folge

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots) \ \text{ mit } j_n = 0 \text{ für } n = 1, 2, \ldots \text{ zu .} \tag{26}$$

Es ist nun nicht mehr schwer sich davon zu überzeugen, daß der Summe zweier Homomorphismen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, denen in der oben definierten Zuordnung Folgen der Form (24) oder (25) entsprechen, in dieser Zuordnung ebenfalls die komponentenweise durchgeführte Summe dieser Folgen entspricht, während die Rolle der Null die Nullfolge (26) übernimmt[43]). Die Menge aller Folgen der Form (24) und (25) bildet also bei der komponentenweisen Addition eine abelsche Gruppe P.

---

[41]) D. h. das Paar (23) ist eindeutig durch die Wahl der Erzeugenden (15) und (16) bestimmt.

[42]) Hier verstehen wir die Kongruenz mod p^n für $n < 0$ auf die gewöhnliche Weise: $u \equiv v \pmod{p^n}$ bedeutet, daß $u - v = t\,p^n$ gilt, wo t eine ganze Zahl ist.

[43]) Die Summe hat wieder die Form (24) oder (25). Dabei ist ersichtlich, daß für $n_{\varkappa_1} \neq n_{\varkappa_2}$ das $n_\varkappa$ der Summe das Minimum von $n_{\varkappa_1}$ und $n_{\varkappa_2}$ sein wird, und daß es für $n_{\varkappa_1} = n_{\varkappa_2}$ größer werden kann. Um die Folge formal auf die Form (24) oder (25) zu bringen, braucht man nur die Nullen, welche eventuell am Anfang der Folge stehen, für $n \leqq 0$ wegzulassen und in der so entstandenen Folge auf der n-ten Stelle mod p^n zu rechnen.

Für unsere Zwecke müssen wir noch die Gruppe R in die Gruppe $G(p^\infty)$ als Gruppe mit einem Körper linker Operatoren (nämlich dem Körper der Automorphismen der Gruppe R) und als Gruppe mit einem Ring rechter Operatoren (nämlich dem Endomorphismenring der Gruppe $G(p^\infty)$) untersuchen. Es geht also darum, die Multiplikation unserer Folge von links mit einer rationalen Zahl und von rechts mit einer Folge (17) so zu definieren, damit die nacheinandergenommene Durchführung eines Automorphismus in R, eines Homomorphismus von R in $G(p^\infty)$ und eines Endomorphismus in $G(p^\infty)$ diesen Operationen isomorph entspräche.

Vor allem sieht jedermann leicht ein, daß diese Forderung erfüllt sein wird, wenn wir das Produkt der rationalen Zahl

$$r = p^{m_0}\, r'/s' \text{ mit } (r', p) = 1, (s', p) = 1, (r', s') = 1 \text{ und } s' > 0\,,$$

die einem Automorphismus in R entspricht, mit der Folge der Form (24) oder (25), die aus dem Paar $n_\varkappa$ und $(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$ gewonnen wird und die einem Homomorphismus der Gruppe R in die Gruppe $G(p^\infty)$ entspricht, als diejenige Folge definieren, die wir auf die bekannte Weise aus dem Paar

$$n_0 = n_\varkappa + m_0\,, \quad (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$$

erhalten, wobei k_n die eindeutig bestimmte Lösung der Kongruenz $s'x \equiv \equiv r'i_n \pmod{p^n}$ mit $0 \leqq k_n < p^n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist.

Auf ähnliche Weise stellen wir fest, daß unsere Forderungen durch die folgende Definition des Produktes einer Folge aus P, die irgendeiner homomorphen Abbildung der Gruppe R in die Gruppe $G(p^\infty)$ entspricht, mit einer Folge der Form (17), die irgendeinem Endomorphismus der Gruppe $G(p^\infty)$ entspricht, erfüllt sind: Unter dem Produkt werden wir im Falle, daß die Folge aus P mittels des Paares $n_\varkappa$, $(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$ gebildet ist und daß (17) von der Form $(j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots)$ ist, die Folge verstehen, die auf die bekannte Weise mittels des Paares $n_0 = n_\varkappa + l_0$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ gebildet ist, wo l_0 durch die Beziehungen

$$i_n j_n \equiv 0 \pmod{p^n} \text{ für } n \leqq l_0 \text{ und } i_{l_0+1} j_{l_0+1} \not\equiv 0 \pmod{p^{l_0+1}}\text{[44]}$$

und l_n durch die Beziehung

$$l_n \equiv \frac{i_{l_0+n}\, j_{l_0+n}}{p^{l_0}} \pmod{p^n} \text{ mit } 0 \leqq l_n < p^n$$

definiert ist.

Nun genügt es, sich der Einführung der p-adischen Zahlen mit Hilfe der p-adischen Norm zu erinnern, und die eindeutige Darstellung jeder p-adischen Zahl in der Form der unendlichen Summe

$$\left.\begin{array}{c} t_m p^m + t_{m+1} p^{m+1} + \ldots + t_0 + t_1 p + \ldots + t_n p^n + \ldots\,, \\ \text{wo } t_m \neq 0 \text{ und } 0 \leqq t_n < p \text{ für } n = m, m+1, \ldots \end{array}\right\} \qquad (27)$$

[44]) $j_{l_0+1} \neq 0$, $j_n = 0$ für $n \leqq l_0$ ist offenbar eine äquivalente Bedingung.

war, in Betracht zu ziehen. Dabei ist eine p-adische Zahl gerade dann ganz, wenn $m \geqq 0$ ist.[45])

Wenn wir nun die p-adische Zahl anstatt durch die Reihe (27) durch ihre Partialsummen ausdrücken, so erhalten wir für die ganze p-adische Zahl die Form

$$\Pi = (j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots)\,,$$

wo $j_n = 0$ für $n = 1, 2, \ldots, m$ und $j_n = t_m p^m + t_{m+1} p^{m+1} + \ldots + t_{n-1} p^{n-1}$ für $n = m + 1, m + 2, \ldots$ ist, d. h.

$$j_{n+1} \equiv j_n (\mathrm{mod}\ p^n) \text{ mit } 0 \leqq j_n < p^n \text{ für } n = 1, 2, \ldots,$$

mit anderen Worten eine Folge der Form (17) und (24); auf die gleiche Weise erhalten wir für die nichtganze p-adische Zahl die Form

$$\Pi = (j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_0, j_1, \ldots, j_n, \ldots)\,,$$

wo $j_n = t_m p^m + t_{m+1} p^{m+1} + \ldots + t_{n-1} p^{n-1}$ für $n = m + 1, m + 2, \ldots$ ist, d. h.

$$j_{n+1} \equiv j_n \ (\mathrm{mod}\ p^n) \text{ mit } 0 < j_n < p^n,$$

was eine Folge von der Form (25) bedeutet.

Hier ist es klar, daß jeder Folge der Form (17) oder (24) und (25) auf diese Weise eine bestimmte p-adische Zahl entspricht. Nun erkennt man leicht, daß die von uns definierten Operationen der Addition und der Multiplikation mit der Addition und der Multiplikation der p-adischen Zahlen im gewöhnlichen Sinne zusammenfällt; hier verstehen wir unter dem Produkt einer rationalen mit einer p-adischen Zahl selbstverständlich die p-adische Zahl, die man als Produkt der gegebenen p-adischen Zahl mit derjenigen p-adischen Zahl erhält, die die p-adische Entwicklung der gegebenen rationalen Zahl darstellt.

Das Ergebnis unserer gesamten Betrachtung können wir dann im folgenden Satz formulieren.

Satz 8. *Die Gruppe der homomorphen Abbildungen der Gruppe R in die Gruppe $G(p^\infty)$ mit dem Körper der Automorphismen der Gruppe R als linken Operatorring und mit dem Endomorphismenring der Gruppe $G(p^\infty)$ als rechten Operatorring ist bei der bekannten Definition der Addition und der Multiplikation der Homomorphismen mit der additiven Gruppe P der p-adischen Zahlen mit dem Körper der rationalen Zahlen als linken Operatorring und dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen als rechten Operatorring bei gewöhnlicher Addition und Multiplikation der p-adischen Zahlen isomorph.*

Sei nun C eine vollständige Gruppe der Form (14); wir schreiben jetzt

$$\sum_{0 \leqq \alpha_{(0)} < \tau_{(0)}}' R_{\alpha_{(0)}} = R^\circ \quad \text{und} \quad \sum_{0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}}' G_{\alpha_{(i)}}(p_i^\infty) = G_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots,$$

sodaß

$$C = R^\circ + \sum_{i=1}^{\infty}{}' G_i$$

[45]) Siehe § 74 in [14].

ist. Wir bezeichnen nun für feste α $(0 \leqq \alpha < \tau_{(0)})$ die Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\alpha_{(i)}}$ $(i = 1, 2, \ldots; 0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)})$ der Gruppe R_α in die Gruppe $G_{\alpha_{(i)}}(p_i^\infty)$. Wir wissen schon, daß jedem solchen Homomorphismus ein Element aus der Gruppe $\mathsf{P}_{\alpha\alpha_{(i)}}$ nämlich die p_i-adische Zahl $\Pi_{\alpha\alpha_{(i)}}$ zugeordnet ist, die aus dem Paar der ganzen Zahl $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$ und der Folge $\pi_{\alpha\alpha_{(i)}}$ der Form (17) oder der Nullfolge (26) entspricht. Es seien $K_{\alpha\alpha_{(i)}} \subseteqq R_\alpha$ bei $i = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}$ die Kerne der Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\alpha_{(i)}}$. Wir beweisen folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 10. *Für ein festes* α *mit* $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ ist

$$\overset{R_\alpha}{\bigcap_{\substack{i=1,2,\ldots\\ 0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}}}} K_{\alpha\alpha_{(i)}} = R_\alpha \tag{28}$$

dann und nur dann, wenn in der isomorphen Darstellung der Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\alpha_{(i)}}$ *durch die* p_i*-adischen Zahlen* $\Pi_{\alpha\alpha_{(i)}}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Alle* p_i*-adischen Zahlen sind bis auf endlich viele ganz.*[46])

2. *Wenn man eine natürliche Zahl* m_0 *beliebig wählt, dann haben für ein festes* i *alle ganze* p_i*-adische Zahlen bis auf endlich viele, wenn man sie durch die Form* (24) *darstellt, auf den ersten* m_0 *Stellen Null.*[47])

Beweis. Wir beweisen die geforderten Behauptungen für ganze Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$; die Äquivalenz mit der Behauptung des Satzes ist dann schon trivial.

Zunächst soll (28) gelten. Der Homomorphismus $\varkappa_\alpha$ der Gruppe R_α in die Gruppe $\sum_{i=1}^{\infty}{}' G_i$, der im Sinne des Hilfssatzes 9 aus den Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\alpha_{(i)}}$ bei $i = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}$ entsteht, erzeugt die Homomorphismen $\varkappa_{\alpha i}$ der Gruppe R_α in die Gruppen G_i für $i = 1, 2, \ldots$ Die Kerne dieser Homomorphismen bezeichnen wir mit $K_{\alpha i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Nach dem Hilfssatz 9 ist

$$\bigcap_{0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}} K_{\alpha\alpha_{(i)}} = K_{\alpha i} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=1,2,\ldots} K_{\alpha i} = K_\alpha \neq 0\,, \tag{29}$$

und also nach dem Hilfssatz 8

$$\overset{R_\alpha}{\bigcap_{i=1,2,\ldots}} K_{\alpha i} = R_\alpha\,. \tag{30}$$

Aus (30) folgt, daß für $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$

$$r_1 \in K_{\alpha i} \tag{31}$$

ist. Ferner bedeutet (29), daß $K_{\alpha\alpha_{(i)}} \supseteqq K_{\alpha i} \supseteqq K_\alpha$ für ein festes i und beliebiges $\alpha_{(i)}$ ist. Aus früheren Betrachtungen über Kerne der Homomorphismen einer Gruppe des Typus R^+ in eine Gruppe des Typus p_i^∞ beweisen wir nun schon leicht für ein festes i die gesamte Behauptung. Es genügt sich dessen zu erin-

[46]) D. h. für höchstens endlich viele ganze Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$ ist $n_{\alpha\alpha_{(i)}} < 0$.

[47]) D. h. nur für endlich viele Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$ ist $n_{\alpha\alpha_{(i)}} \leqq m_0$ bei festem i; für ein festes i gibt es also höchstens abzählbar viele von Null verschiedene p_i-adische Zahlen.

nern, daß zwischen je zweien solcher Kerne eine Inklusion besteht, sodaß die Kerne eine durch Inklusion geordnete Kette von Untergruppen bilden. Hierbei folgt aus dem Hilfssatz 7 und aus (28), daß

$$\overline{\bigcap_{0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}}}^{R_\alpha} K_{\alpha\alpha_{(i)}} = R_\alpha$$

ist, sodaß also die Vereinigung dieser Kette die ganze Gruppe R_α ist. Eine solche Kette kann allerdings höchstens abzählbar viele verschiedene Untergruppen erhalten und weiterhin ist es klar, daß sich in ihr keine Untergruppe unendlich oft wiederholen darf. Aus dieser Erwägung und aus (29) geht schon die Behauptung über die Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$ bei festem i hervor. Da aber für $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_k$ laut (31) $n_{\alpha\alpha_{(i)}} \geqq 0$ für alle $\alpha_{(i)}$ ist und da für jedes $i = i_n$ bei $n = 1, 2, \ldots, k$ nur für endlich viele Indizes α_i $n_{\alpha\alpha_{(i)}} < 0$ ist, sind im Ganzen höchstens endlich viele Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}} < 0$ für $i = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq \alpha_{(i)} < \tau_{(i)}$.

Umgekehrt seien nun die Bedingungen des Hilfssatzes 10 an die Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}}$ erfüllt. r sei ein beliebiges Element von R_α. Für $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$ existieren also endlich viele $n_{\alpha\alpha_{(i)}} < 0$. Weiter existieren die ganzen teilerfremden Zahlen $u, v > 0$ so, daß $u \,.\, r_1 = r_0 = v \,.\, r$ für ein geeignetes Element r_0 ist; seien $v = p_{j_1}^{f_1} p_{j_2}^{f_2} \ldots p_{j_l}^{f_l}$ mit f_m für $m = 1, 2, \ldots, l$ natürlich, und $u = p_{j_1}^{e_1} p_{j_2}^{e_2} \ldots$ $\ldots p_{j_l}^{e_l} u'$ mit $(u', p_{j_m}) = 1$ und $e_m \geqq 0$ für $m = 1, 2, \ldots, l$. Ich behaupte nun, daß für alle $\alpha_{(i)}$ mit $i \neq i_n$ bei $n = 1, 2, \ldots, k$ und mit $i \neq j_m$ für $m = 1, 2, \ldots, l$ r in $K_{\alpha\alpha_{(i)}}$ liegt. Vor allem gilt für alle $i \neq i_n$ $(n = 1, 2, \ldots, k)$ $r_1 \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$, also auch $r_0 \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$. Dann allerdings folgt aus der Struktur der Kerne $K_{\alpha\alpha_{(i)}}$ der Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\alpha_{(i)}}$, daß $r \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$ für $i \neq i_n$ bei $n = 1, 2, \ldots, k$ und für $i \neq j_m$ bei $m = 1, 2, \ldots, l$ ist. Für die Indizes $i = i_n$ mit $n = 1, 2, \ldots, k$ und $i \neq j_m$ $(m = 1, 2, \ldots, l)$ ist aber $n_{\alpha\alpha_{(i)}} \geqq 0$ bis auf endlich viele Indizes $\alpha_{(i)}$ und also $r_1 \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$, $r_0 \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$ und $r \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$; ferner existiert für die Indizes $i = j_m$ bei $m = 1, 2, \ldots, l$ zur natürlichen Zahl

$$m_{0t} = \max(1, f_t - e_t + 1) \quad \text{bei} \quad t = 1, 2, \ldots, l$$

immer nur eine endliche Anzahl von Zahlen $n_{\alpha\alpha_{(i)}} < m_{0t}$, d. h. es ist im Ganzen $r \operatorname{non} \in K_{\alpha\alpha_{(i)}}$ nur für endlich viele Indizes $\alpha_{(i)}$ bei $i = 1, 2, \ldots$ und $0 \leqq \alpha_{(i)} <$ $< \tau_{(i)}$; mit anderen Worten: (28) ist erfüllt. Damit ist der ganze Beweis des Hilfssatzes 10 beendet.

Nun bleibt noch ein ähnlicher Hilfssatz über die Homomorphismen der Gruppe $G_\alpha(p^\infty)$ $(0 \leqq \alpha < \tau)$ in die Gruppe $\sum'_{0 \leqq \beta < \tau} G_\beta(p^\infty)$ zu beweisen.

Hilfssatz 11. *$\varkappa_{\alpha\beta}$ sei ein Homomorphismus der Gruppe $G_\alpha(p^\infty)$ $(0 \leqq \alpha < \tau)$ in die Gruppe $G_\beta(p^\infty)$ $(0 \leqq \beta < \tau)$; $K_{\alpha\beta}$ sei der Kern von $\varkappa_{\alpha\beta}$. Dann ist für ein festes α $(0 \leqq \alpha < \tau)$*

$$\overline{\bigcap_{0 \leqq \beta < \tau}}^{G_\alpha} K_{\alpha\beta} = G_\alpha(p^\infty) \tag{32}$$

dann und nur dann, wenn in der isomorphen Darstellung der Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\beta}$ durch ganze p-adische Zahlen $\Pi_{\alpha\beta} = (i_1^{\alpha\beta}, i_2^{\alpha\beta}, \ldots, i_n^{\alpha\beta}, \ldots)$ zu einer beliebigen natürlichen Zahl m_0 alle Zahlen $\Pi_{\alpha\beta}$ bis auf endlich viele die ersten m_0 Komponenten $i_1^{\alpha\beta}, i_2^{\alpha\beta}, \ldots, i_{m_0}^{\alpha\beta}$ gleich Null haben.[48])

Beweis. Setzen wir zuerst (32) voraus und es sei ein natürliches m_0 gegeben. Aus (32) geht hervor, daß die Erzeugende $g_{m_0}^{\alpha} \in G_\alpha(p^\infty)$ nur in endlich vielen Kernen $K_{\alpha\beta}$ (für $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$) nicht enthalten ist, d. h. außer dieser endlichen Anzahl haben alle p-adischen Zahlen $\Pi_{\alpha\beta}$ (für $\beta \neq \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ also) in der Darstellung (24) and den ersten m_0 Stellen Nullen.

Wenn umgekehrt die Voraussetzung über die Form der p-adischen Zahlen $\Pi_{\alpha\beta}$ erfüllt ist, so genügt es zum Beweis von (32) zu zeigen, daß jede Erzeugende $g_n^\alpha \in G_\alpha(p^\infty)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in allen $K_{\alpha\beta}$ für $0 \leqq \beta < \tau$ bis auf endlich viele Indizes β liegt. Das ist allerdings klar.

Und nun können wir schon ein wichtiges Ergebnis aussprechen, das eine Anwendung des Satzes 6 ist und dessen Beweis die in diesem Paragraph enthaltenen Aussagen bilden.

Satz 9. *Sei C eine vollständige Gruppe von der Form* (14). *Dann ist ihr Endomorphismenring $\mathfrak{R}(C)$ mit dem Ring $\mathfrak{O}_\nu$ der quadratischen Matrizen $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ des Grades $\nu = \tau_{(0)} + \tau_{(1)} + \ldots + \tau_{(n)} + \ldots$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation isomorph. Dabei ist*

für $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}, 0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ $c_{\alpha\beta}$ eine rationale Zahl,

für $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}, \tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $c_{\alpha\beta}$ eine p_i-adische Zahl,

für $\tau_{(i-1)} \leqq \alpha < \tau_{(i)}, \tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $c_{\alpha\beta}$ eine ganze p_i-adische Zahl und jedes andere $c_{\alpha\beta}$ gleich Null.

Jede Matrix von $\mathfrak{O}_\nu$ enthält für ein festes α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ nur endlich viele von Null verschiedene rationale Zahlen und endlich viele nichtganze p_i-adische Zahlen $(i = 1, 2, \ldots)$. Weiter existieren für ein festes α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ und $\tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ fest) und für ein festes α, $\tau_{(0)} \leqq \alpha$ zu jeder natürlichen Zahl m_0 nur endlich viele ganze p_i-adische Zahlen $\Pi_{\alpha\beta}^i$, deren Darstellungen durch die Folgen (24) *an den ersten m_0 Stellen nicht lauter Nullen haben.*

Beweis. Der Beweis folgt offenbar sofort aus den Sätzen 6 und 8 und den Hilfssätzen 10 und 11. Nach dem Satz 6 existiert nämlich ein Isomorphismus des Ringes $\mathfrak{R}(C)$ mit dem Ring der quadratischen Matrizen, deren Elemente die Homomorphismen $\varkappa_{\alpha\beta}$ der einzelnen direkten Summanden der Gruppe C in die übrigen direkten Summanden dieser Gruppe sind; dabei gilt für ein festes α, $0 \leqq \alpha < \nu$, für die Kerne $K_{\alpha\beta}$ dieser Homomorphismen die Beziehung (10) (wo G_α entweder $R_{\alpha_{(0)}}$ oder $G_{\alpha_{(i)}}(p_i^\infty)$ ist). Nach dem Satz 8 bekommen wir die Darstellung dieser Homomorphismen durch rationale und p_i-adische Zahlen

[48]) Übrigens folgt daraus schon, daß für ein festes α höchstens abzählbar viele $\Pi_{\alpha\beta} \neq 0$ sind.

($i = 1, 2, \ldots$); die Hilfssätze 10 und 11 bestimmen weiter die Bedingungen für p_i-adischen Zahlen in den Matrizen $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ des Ringes $\mathfrak{D}_\nu$. Es ist ersichtlich, daß $c_{\alpha\beta} = 0$ für $\tau_{(0)} \leqq \alpha$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ ist. Für $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ kann allerdings $c_{\alpha\beta}$ eine von Null verschiedene rationale Zahl sein; diesen rationalen Zahlen entsprechen diejenigen Homomorphismen der Gruppe R_α in die Gruppe R_β, deren Kerne trivial sind. Da nach (10) $\bigcap\limits_{0 \leqq \beta < \nu}^{R_\alpha} K_{\alpha\beta} = R_\alpha$ für jedes feste α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ ist, so kann für jedes feste α nur eine endliche Anzahl dieser rationalen Zahlen von Null verschieden sein, sonst anders offenbar $\bigcap\limits_{0 \leqq \beta < \nu}^{R_\alpha} K_{\alpha\beta} = 0$ wäre.

Umgekehrt ist ersichtlich, daß jeder Matrix $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ aus $\mathfrak{D}_\nu$ eindeutig ein Endomorphismus der Gruppe C entspricht. Damit ist der ganze Satz 9 bewiesen.

Bemerkung 11. Beachten wir noch die Operationen mit den Matrizen $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$. Das Addieren bereitet keine Schwierigkeiten, beim Multiplizieren allerdings können unendliche Summen p_i-adischer Zahlen vorkommen; auf Grund der beschriebenen Form der Matrizen C sind aber diese Summen höchstens abzählbar und die p_i-adischen Zahlen sind von spezieller Form.

Für von Null verschiedene Elemente $c_{\alpha\beta}$, $\tau_{(0)} \leqq \alpha$ erhalten wir für das Produkt zweier Matrizen

$$\mathsf{C} = \mathsf{A} \,.\, \mathsf{B} \quad \text{mit} \quad \mathsf{A} \in \mathfrak{D}_\nu\,, \quad \mathsf{B} \in \mathfrak{D}_\nu$$

formal den Ausdruck

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} = \sum_{\tau_{(i-1)} \leqq \gamma < \tau_{(i)}} \prod\nolimits_{\alpha\gamma}^i \prod\nolimits_{\gamma\beta}^i \,;$$

da aber die p_i-adischen Zahlen aus derselben Zeile bis auf endlich viele an den ersten m_0 Stellen (m_0 ist eine beliebige natürliche Zahl) lauter Nullen besitzen und da eine p_i-adische Zahl durch Multiplikation mit einer beliebigen ganzen p_i-adischen Zahl diese Eigenschaft nicht verliert, so können wir leicht durch endliche Summation ein beliebiges Glied der Folge von der Form (24) bestimmen, mit der wir die resultierende p_i-adische Zahl darstellen.

Ähnlich verhält sich dies bei den Elementen $c_{\alpha\beta}$ mit $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$. Sie haben formal die Form

$$c_{\alpha\beta} = \sum_\gamma a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} = \sum_{0 \leqq \gamma < \tau_{(0)}} r_{\alpha\gamma} \prod\nolimits_{\gamma\beta}^i + \sum_{\tau_{(i-1)} \leqq \gamma < \tau_{(i)}} \prod\nolimits_{\alpha\gamma}^i \prod\nolimits_{\gamma\beta}^i \,.$$

Die erste Summe ist aber endlich und die zweite berechnen wir auf die gleiche Weise wie im ersten Falle, da $\prod_{\gamma\beta}^i$ eine ganze p_i-adische Zahl ist und daher die Eigenschaften der Zahlen $\prod_{\alpha\gamma}^i$ nicht aufhebt.

Wir geben hier zum Schluß noch zwei besondere Fälle des Satzes 9.

Korollar 3. *Der Endomorphismenring der vollständigen torsionsfreien Gruppe R° des D-Ranges $\mathfrak{m}$ ist mit dem Ring $\mathfrak{D}_\tau$ der quadratischen Matrizen $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$*

des Grades τ isomorph, wo die Mächtigkeit der Ordnungszahl τ $\mathfrak{m}$ ist, $c_{\alpha\beta}$ rationale Zahlen sind und für ein festes α nur endlich viele $c_{\alpha\beta} \neq 0$ sind.

Wenn die Gruppe R° den endlichen D-Rang m hat, dann ist ihr Endomorphismenring $\mathfrak{R}(R^\circ)$ mir dem Ring aller quadratischen m-zeiligen Matrizen über dem Körper der rationalen Zahlen isomorph.

Korollar 4. *Der Endomorphismenring der p-primären vollständigen Gruppe $G = \sum'_{0 \leqq \alpha < \tau} G_\alpha(p^\infty)$ ist mit dem Ring $\mathfrak{D}_\tau$ der quadratischen Matrizen $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ des Grades τ isomorph, wo $c_{\alpha\beta}$ ganze p-adische Zahlen sind, während für ein festes α und ein beliebiges natürliches m_0 in der Darstellung durch Folgen* (24) *alle Folgen bis auf endlich viele an den m_0 ersten Stellen Nullen haben.*

Wenn speziell $\tau = m$ endlich ist, d. h. $G = \sum'_{i=0,1,\dots m-1} G_i(p^\infty)$, dann ist der Endomorphismenring $\mathfrak{R}(G)$ der Gruppe G mit dem Ring aller quadratischen m-zeiligen Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen isomorph.

5. Die Darstellung allgemeiner Ringe durch Matrizenringe

In diesem letzten Paragraphen werden wir die bisherigen Ergebnisse auf die Theorie der allgemeinen Ringe anwenden, insbesondere auf die Ringe mit Einselement. Es ist bekannt, daß jeder Ring $\mathfrak{R}$ ohne Einselement in einen Ring mit Einselement eingebettet werden kann; diese Einbettung kann allgemein auf verschiedene Weisen durchgeführt werden. In unseren weiteren Betrachtungen werden aber die folgenden Einbettungen eine wichtige Rolle spielen:

(I) *Falls die Charakteristik des Ringes $\mathfrak{R}$ ohne Einselement t ist,*[49]) *dann bildet die Menge aller Paare (a, n), wo $a \in \mathfrak{R}$ und n eine ganze Zahl* mod *t ist, einen Ring $\mathfrak{R}_{(t)}$ der Charakteristik t mit Einselement, wenn man Addition und Multiplikation durch die Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} (a_1, n_1) + (a_2, n_2) &= (a_1 + a_2, n_1 + n_2), \\ (a_1, n_1) \,.\, (a_2, n_2) &= (a_1a_2 + n_2 \,.\, a_1 + n_1 \,.\, a_2, n_1n_2)^{50)} \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

definiert. Die Null des Ringes $\mathfrak{R}_{(t)}$ ist das Paar $(0, 0)$ *und das Einselement das Paar* $(0, 1)$, *während die Paare von der Form* $(a, 0)$ *einen mit $\mathfrak{R}$ isomorphen Unterring bilden, also $\mathfrak{R}_{(t)} \supset \mathfrak{R}$.*

---

[49]) Unter der Charakteristik eines allgemeinen Ringes $\mathfrak{R}$ ohne Einselement verstehen wir die kleinste natürliche Zahl k, für die $k \,.\, a = 0$ für alle $a \in \mathfrak{R}$, falls eine solche Zahl existiert. Im entgegengesetzten Fall setzen wir die Charakteristik gleich Null. Siehe Absatz 5 im [10].

[50]) a_1a_2 ist das Produkt der Elemente aus $\mathfrak{R}$, $n_2 \,.\, a_1$ und $n_1 \,.\, a_2$ sind die natürlichen Vielfachen der Elemente $a_1 \in \mathfrak{R}$ und $a_2 \in \mathfrak{R}$.

(II) *Die Menge* $\mathfrak{R}_{(0)}$ *aller Paare* (a, n), *wo* $a \in \mathfrak{R}$ *und* n *nun alle ganzen Zahlen durchläuft, bildet einen Ring der Charakteristik* 0 *mit Einselement* $(0, 1)$, *wenn man in ihr Addition und Multiplikation wieder durch* (33) *definiert.* $\mathfrak{R}_{(0)}$ *enthält im Sinne des Isomorpismus den Ring* $\mathfrak{R}$: $\mathfrak{R}_{(0)} \supset \mathfrak{R}$.

Man sieht auch unmittelbar, daß im Falle der Charakteristik von $\mathfrak{R}$ gleich Null beide Konstruktionen zusammenfallen.[51]) Wir beweisen zunächst folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 12. *Es sei* A *die additive Gruppe des Ringes* $\mathfrak{R}$ *ohne Einselement, dessen Charakteristik* t *endlich ist*: $t = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$, *wo für* $i = 1, 2, \dots, k$ p_i *eine Primzahl und* t_i *eine natürliche Zahl ist. Es sei* $\mathrm{r}_D(A) = \mathfrak{m}$. *Wenn wir nun die additive Gruppe des Ringes* $\mathfrak{R}_{(t)}$ *mit* $A_{(t)}$ *bezeichnen, dann gilt*:

Ist $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl, dann ist* $\mathrm{r}_D(A_{(t)}) = \mathfrak{m}$, *ist* $\mathfrak{m}$ *endlich, dann ist* $\mathrm{r}_D(A_{(t)}) = \mathfrak{m} + k$.[52])

Beweis. Da, wie man sich leicht überzeugt,

$$A_{(t)} = A + G(t)\,, \quad \text{d. h.} \quad A_{(t)} = A + \sum_{i=1}^{k}{}' G(p_i^{t_i})$$

ist, erhalten wir

$$\mathrm{r}_D(A_{(t)}) = \mathrm{r}_D(A) + \mathrm{r}_D(G(t)) = \mathfrak{m} + k\,.$$

Wenn $\mathfrak{m}$ unendlich ist, so ist allerdings $\mathfrak{m} + k = \mathfrak{m}$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

Hilfssatz 13. A *sei die additive Gruppe des Ringes* $\mathfrak{R}$ *ohne Einselement und* $A_{(0)}$ *die additive Gruppe des Ringes* $\mathfrak{R}_{(0)} \supset \mathfrak{R}$. *Weiter sei* $\mathrm{r}_D(A) = \mathfrak{m}$. *Wenn* $\mathfrak{m}$ *eine unendliche Kardinalzahl ist, dann ist* $\mathrm{r}_D(A_{(0)}) = \mathfrak{m}$, *ist* $\mathfrak{m}$ *endlich, so ist* $\mathrm{r}_D(A_{(0)}) = \mathfrak{m} + 1$.[53])

Beweis. Ähnlich wie im Hilfssatz 12 überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der direkten Zerlegung

$$A_{(0)} = A + G(\infty)\,;$$

es ist also

$$\mathrm{r}_D(A_0) = \mathrm{r}_D(A) + \mathrm{r}_D(G(\infty)) = \mathfrak{m} + 1\,.$$

Bei unendlichem $\mathfrak{m}$ ist allerdings $\mathfrak{m} + 1 = \mathfrak{m}$, q. e. d.

Weiter wissen wir, daß jeder Ring mit Einselement mit dem Unterring eines Endomorphismenringes irgendeiner Gruppe G, beispielsweise seiner eigenen additiven Gruppe, isomorph ist.[54]) Im § 4 haben wir aber die Struktur

---

[51]) Siehe [4] und Absatz 18 in [10].

[52]) Es ist allerdings $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A_{(t)}) = 0$.

[53]) Dieselbe Behauptung gilt auch vom Rang der Gruppen A und $A_{(0)}$.

[54]) Siehe Kapitel 4, Absatz 1 in [5]. In diesem Buche ist dieser Unterring noch näher durch die Menge solcher Endomorphismen charakterisiert, die mit jedem Element einer gegebenen Menge von Endomorphismen kommutativ sind.

des Endomorphismenringes einer vollständigen Gruppe beschrieben, sodaß wir auf Grund des Satzes 5 und der Hilfssätze 3, 4 und 6 folgendes Ergebnis erhalten:

Satz 10. *Der Endomorphismenring* $\mathfrak{R}(G)$ *der Gruppe* G *ist isomorph mit dem Restklassenring eines geeigneten Unterringes des im Satz* 9 *beschriebenen Matrizenringes* $\mathfrak{O}_\nu$, *wobei* ν *eine Ordnungszahl ist, deren Mächtigkeit dem D-Rang der Gruppe* G *gleich ist. Dabei ist die Mächtigkeit der Ordnungszahlen* $\tau_{(0)}$ *und* $\tau_{(i)}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *der Reihe nach dem Rang* $\mathrm{r}(G)$ *der Gruppe* G *und den D-Rängen der* p_i*-primären Komponenten* $P_{(p_i)}$ *der maximalen periodischen Untergruppe* P *der Gruppe* G *gleich.*

Wenn G *torsionsfrei ist, dann ist* $\mathfrak{R}(G)$ *(bis auf einen Isomorphismus) ein Unterring von* $\mathfrak{O}_\nu$: $\mathfrak{R}(G) \subseteq \mathfrak{O}_\nu$; *in diesem Falle sind auch die Elemente der Matrizen aus* $\mathfrak{O}_\nu$ *nur rationale Zahlen.*

Jeden Endomorphismenring bekommen wir also durch die Bildung von Unter- und Restklassenringen aus den bekannten Matrizenringen $\mathfrak{O}_\nu$. Die Frage, wie man diese Aussage umkehren könnte, — d. h. die Frage welche Unter- und Restklassenringe es sind, die Endomorphismenringe darstellen, — ist vorläufig ein offenes Problem.

Die Bemerkung, die sich auf die Beziehung zwischen den Ringen mit Einselement und den Endomorphismenringen bezieht, bringt dann mit dem Satz 10 eine Beschreibung der Ringe mit Einselement.

Satz 11. $\mathfrak{R}^1$ *sei ein beliebiger Ring mit Einselement. Dann findet eine der folgenden Möglichkeiten statt:*

(I) $\mathfrak{R}^1$ *ist bis auf einen Isomorphismus ein Unterring des im Satz* 9 *beschriebenen Ringes* $\mathfrak{O}_\nu$, *oder*

(II) *es existiert ein Unterring* $\mathfrak{O}'_\nu \subseteq \mathfrak{O}_\nu$ *und ein nichttriviales zweiseitiges Ideal* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}'_\nu$ *so, daß* $\mathfrak{R}^1$ *bis auf einen Isomorphismus ein Unterring des Restklassenringes* $\mathfrak{O}'_\nu/\mathfrak{M}$ *ist.*

Die Mächtigkeit der Ordnungszahl ν *ist gleich dem D-Rang der additiven Gruppe* A *des Ringes* $\mathfrak{R}^1$ *und die Mächtigkeiten einzelner Ordnungszahlen* $\tau_{(i)}$ *für* $i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *sind der Reihe nach durch den Rang der Gruppe* A *und die D-Ränge der* p_i*-primären Komponenten der maximalen periodischen Untergruppe dieser Gruppe* A *bestimmt.*

Wenn die additive Gruppe des gegebenen Ringes $\mathfrak{R}^1$ *torsionsfrei (bzw. p-primär) ist, dann ist die Form der Matrizen des Ringes* $\mathfrak{O}_\nu$ *durch den Korollar* 3 *(bzw. Korollar* 4*) beschrieben.*

Als unmittelbare Folgen der Sätze 10 und 11 führen wir noch die beiden folgenden wichtigen Sätze an.

Satz 12. *Für einen beliebigen Ring* $\mathfrak{R}^1$ *mit Einselement, dessen additive Gruppe torsionsfrei und vom D-Rang* $\mathfrak{m}$ *ist, gilt bis auf einen Isomorphismus* $\mathfrak{R}^1 \subseteq \mathfrak{O}_\tau$, *wo* *die Mächtigkeit der Ordnungszahl τ gleich* $\mathfrak{m}$ *ist und* $\mathfrak{D}_\tau$ *der im Korollar* 3 *beschriebene Matrizenring ist. Wenn also der Ring mit Einselement eine torsionsfreie additive Gruppe des endlichen D-Ranges m hat, so ist er im Sinne des Isomorphismus ein Unterring des Ringes der quadratischen m-zeiligen Matrizen über dem Körper der rationalen Zahlen.*

Satz 13. $\mathfrak{R}^1$ *sei ein beliebiger Ring mit Einselement, dessen additive Gruppe A den endlichen D-Rang* $\mathrm{r}_D(A) = m$ *hat. Seien*

$$\mathrm{r}(A) = m_0\,, \qquad \mathrm{r}_D(P_{i_j}) = m_j \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

wo P_{i_j} *alle nichttrivialen* p_{i_j}*-primären Komponenten der maximalen periodischen Untergruppe P der Gruppe A sind, d. h.* $m = \sum_{j=0}^{k} m_j$.

Wenn wir den in Satz 9 *beschriebenen Ring der m-zeiligen Matrizen mit* $\tau_{(0)} = m_0$ *und* $\tau_{(i_j)} = m_j$ *für* $j = 1, 2, \ldots, k$ *und mit den übrigen* $\tau_{(i)} = 0$ *mit* $\mathfrak{D}_m$ *bezeichnen, dann existiert ein Unterring* $\mathfrak{D}'_m \subseteq \mathfrak{D}_m$ *und ein zweiseitiges Ideal* $\mathfrak{M}$ *in* $\mathfrak{D}'_m$, *sodaß bis auf einen Isomorphismus* $\mathfrak{R}^1 \subseteq \mathfrak{D}'_m/\mathfrak{M}$ *ist. Wenn speziell die additive Gruppe A des Ringes* $\mathfrak{R}$ *p-primär ist, dann ist* $\mathfrak{D}_m$ *der Ring aller m-zeiligen Matrizen über dem Ring der ganzen p-adischen Zahlen.*

Zum Schluß sprechen wir noch einen Satz aus,[55]) der uns die Beschreibung der allgemeinen Ringe liefert, und der eine Folge der anfangs § 5 gemachten Bemerkung sowie der Hilfssätze 12 und 13 und der Sätze 11, 12 und 13 ist:

Satz 14. $\mathfrak{R}$ *sei ein beliebiger Ring. Dann gilt bis auf einen Isomorphismus entweder,*

(I) *daß* $\mathfrak{R}$ *ein Unterring des im Satze* 9 *beschriebenen Ringes* $\mathfrak{D}_\nu$ *ist, oder*

(II) *daß ein Unterring* $\mathfrak{D}'_\nu \subseteq \mathfrak{D}_\nu$ *und ein nichttriviales zweiseitiges Ideal* $\mathfrak{M}$ *in* $\mathfrak{D}'_\nu$ *so existiert, daß* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}'_\nu/\mathfrak{M}$ *ist.*

Wenn dabei die additive Gruppe A des Ringes $\mathfrak{R}$ *den unendlichen D-Rang* $\mathfrak{m}$ *hat, so ist die Mächtigkeit der Ordnungszahl* ν *gleich* $\mathfrak{m}$. *Wenn insbesondere A torsionsfrei ist, dann gilt im Sinne des Isomorphismus* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}_\nu$, *wo* $\mathfrak{D}_\nu$ *der im Korollar* 3 *beschriebene Matrizenring ist. Wenn die additive Gruppe A des Ringes* $\mathfrak{R}$ *den endlichen D-Rang* $\mathrm{r}_D(A) = m$ *hat, dann gilt für die Ordnungszahl* ν *die Gleichheit* $\nu = m + 1$, *und die Form der Matrizen aus dem Ring* $\mathfrak{D}_{m+1}$ *ist bis auf den folgenden Unterschied im Satz* 13 *beschrieben: Wenn die Charakteristik des Ringes* $\mathfrak{R}$ *eine Potenz der Primzahl* $p_{i_{j_0}}$ *ist, ist entweder* $\tau_{(0)} = m_0 + 1$ *oder* $\tau_{(i_{j_0})} = m_{i_{j_0}} + 1$, *in den übrigen Fällen dann* $\tau_{(0)} = m_0 + 1$.[56])

---

[55]) An dieser Stelle könnten wir eine Reihe entsprechender Sätze formulieren.

[56]) Wenn wir im Falle einer endlichen Charakteristik im Allgemeinen die Darstellung des Ringes $\mathfrak{R}$ durch Matrizen, deren Elemente nur p_i-adische Zahlen sind, aufrechterhalten wollten, würde uns der Grad der Matrizen zu sehr steigen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *R. Baer:* Primary abelian groups and their automorphisms, Amer. J. Math., *59* (1937), 99—117.

[2] *R. Baer:* Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, Bull. Amer. Math. Soc., *46* (1940), 800—806.

[3] *V. Dlab:* D-hodnost Abelovy grupy, Čas. pro pěst. mat., *82* (1957), 314—334.

[4] *J. L. Dorroh:* Concerning adjunctions to algebras, Bull. Amer. Math. Soc., *38* (1932) 85—88.

[5] *N. Jacobson:* The Theorie of Rings, New York 1943.

[6] *З. М. Кишкина:* Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения, Изв. Акад. наук СССР, сер. мат., *9* (1945), 201—232.

[7] *Л. Я. Куликов:* К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. сб. (нов. с.), *16* (1945), 129—162.

[8] *A. G. Kurosch:* Gruppentheorie, Berlin 1953.

[9] *А. Г. Курош:* Теория групп, 2-е изд., Москва 1953.

[10] *N. H. McCoy:* Rings and Ideals, Carus Math. Monographs 7, Baltimore 1948.

[11] *M. Shiffman:* The ring of automorphisms of an abelian group, Duke math. J., *6* (1940), 579—597.

[12] *K. Shoda:* Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, Math. Ann., *100* (1928), 674—686.

[13] *K. Shoda:* Über den Automorphismenring bzw. die Automorphismengruppe einer endlichen Abelschen Gruppe, Proc. Acad. Tokyo, *6* (1930), 9—11.

[14] *B. L. van der Waerden:* Moderne Algebra I., Berlin 1937.

Резюме

КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЛЕЦ ПРИ ПОМОЩИ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага.

(Поступило в редакцию 21/V 1956 г.)

Целью настоящей работы является исследование структуры кольца эндоморфизмов произвольной абелевой группы и применение полученных результатов к общей теории колец. В работе автор последовательно пользуется понятием D-ранга абелевой группы, которое он ввел в [3]. Всякую абелеву группу G можно, как известно, погрузить в минимальную полную абелеву группу $\overline{G}$, которую назовем *полным замыканием группы* G. После вступительных замечаний переносит автор теоремой 5 в § 2 вопрос структуры кольца эндоморфизмов $\mathfrak{R}(G)$ группы G на вопрос структуры кольца эндоморфизмов $\mathfrak{R}(\overline{G})$ полного замыкания $\overline{G}$. Для этой цели автор обращает внимание на три множества эндоморфизмов, определенные группой G и какой-нибудь ее подгруппой $H \subseteq G$:

(I) *на подкольцо* $\mathfrak{R}(G; H)$ *кольца* $\mathfrak{R}(G)$ *тех эндоморфизмов* ε, *для которых* $H\varepsilon \subseteq H$,

(II) *на двусторонний идеал* $\mathfrak{M}(G, H)$ в $\mathfrak{R}(G; H)$ *тех эндоморфизмов* ε, *для которых* $H\varepsilon = 0$ *и*

(III) *на двусторонний идеал* $\mathfrak{N}(G, H)$ в $\mathfrak{R}(G; H)$ *тех эндоморфизмов* ε, *для которых справедливо отношение* $G\varepsilon \subseteq H$.

При помощи конструкции полной группы $G°$, $G° \supseteq \overline{G} \supseteq G$ автор доказывает теорему 5.

Теорема 5. *Кольцо эндоморфизмов* $\mathfrak{R}(G)$ *группы* G *изоморфно фактор-кольцу кольца* $\mathfrak{R}(\overline{G}; G)$ *всех эндоморфизмов* $\bar{\varepsilon}$ *полного замыкания* $\overline{G}$, *для которых* $G\bar{\varepsilon} \subseteq G$, *по идеалу* $\mathfrak{M}(\overline{G}, G)$:

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(\overline{G}; G)/\mathfrak{M}(\overline{G}, G)\,. \tag{5}$$

Если, в частности, G *является группой без кручения, то* $\mathfrak{M}(\overline{G}, G) = (\mathbf{0})$.

Полное описание кольца эндоморфизмов $\mathfrak{R}(\overline{G})$ полного замыкания потом дано теоремой 9 в § 4.

Теорема 9. *Пусть полная абелева группа* C *представлена в виде прямой суммы*

$$C = \sum_{0\leqq\alpha_{(0)}<\tau_{(0)}}{}' R_{\alpha_{(0)}} + \sum_{0\leqq\alpha_{(1)}<\tau_{(1)}}{}' G_{\alpha_{(1)}}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{0\leqq\alpha_{(i)}<\tau_{(i)}}{}' G_{\alpha_{(i)}}(p_i^\infty) + \ldots. \tag{14}$$

Тогда ее кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{R}(C)$ *изоморфно кольцу* $\mathfrak{D}_\nu$ *квадратных матриц* $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ *порядка* $\nu = \tau_{(0)} + \tau_{(1)} + \ldots + \tau_{(n)} + \ldots$, *где для* $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ $c_{\alpha\beta}$ — *рациональное число, для* $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $\tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $c_{\alpha\beta}$ — p_i-*адическое число, для* $\tau_{(i-1)} \leqq \alpha < \tau_{(i)}$, $\tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ $c_{\alpha\beta}$ — *целое* p_i-*адическое число и остальные* $c_{\alpha\beta} = 0$, *с обычными для матриц определениями операций сложения и умножения.*

При этом для фиксированного α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ *среди* $c_{\alpha\beta}$ *находится только конечное число ненулевых рациональных чисел, конечное число нецелых* p_i-*адических чисел* $(i = 1, 2, \ldots)$ *и для* $\tau_{(i-1)} \leqq \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ *фиксированное*), *как и для фиксированного* α, $\tau_{(0)} \leqq \alpha$, *существует для произвольного натурального числа* m_0 *только конечное число целых* p_i-*адических чисел* $\prod^i_{\alpha\beta}$ *таких ,что в их представлении при помощи последовательностей вида*

$$(j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots),\ \ j_{n+1} \equiv j_n (\operatorname{mod} p^n),\ \ 0 \leqq j_n < p^n,\ n = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

некоторый компонент $j_n (n = 1, 2, \ldots, m_0)$ *ненулевой.*

Отсюда легко вытекают следствие 3 и следствие 4.

Следствие 3. *Кольцо эндоморфизмов полной абелевой группы без кручения R° D-ранга $\mathfrak{m}$ изоморфно кольцу $\mathfrak{D}_\tau$ квадратных матриц $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ порядка τ, где $c_{\alpha\beta}$ — рациональные числа, для фиксированного α только конечное число $c_{\alpha\beta} \neq 0$ и мощность порядкового числа τ есть $\mathfrak{m}$.*

Если группа R° конечного D-ранга m, то кольцо $\mathfrak{R}(R^0)$ ее эндоморфизмов изоморфно кольцу всех квадратных матриц порядка m над полем рациональных чисел.

Следствие 4. *Кольцо эндоморфизмов p-примарной абелевой группы*

$$G = \sum_{0 \leqq \alpha < \tau}{}' \, G_\alpha(p^\infty)$$

изоморфно кольцу $\mathfrak{D}_\tau$ квадратных матриц $\mathsf{C} = (c_{\alpha\beta})$ порядка τ, где $c_{\alpha\beta}$ — целые p-адические числа, причем для фиксированного α и любого натурального m_0 имеют все эти p-адические числа, кроме конечного числа, в представлении при помощи последовательностей (24) все компоненты j_n $(n = 1, 2, \ldots, m_0)$ нулевые.

Если, в частности, $\tau = m$ конечно, т. е.

$$G = \sum_{i=0,1,\ldots,m-1}{}' \, G_i(p^\infty) \,,$$

то кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{R}(G)$ группы G изоморфно кольцу всех квадратных матриц порядка m над кольцом целых p-адических чисел.

Доказательство теоремы 9 опирается на важный результат § 3, а именно на теорему 6, которая является обобщением теоремы Кишкины (см. [6]). В то время как З. М. Кишкина ограничивается при изучении кольца эндоморфизмов прямой суммы групп конечной прямой суммой, автор обобщает ее результат введением нового понятия псевдопересечения на бесконечную прямую сумму. *Псевдопересечением* $D = \bigcap\limits_{\delta \in \Delta}^{G} K_\delta$ *системы* $(K_\delta)_{\delta \in \Delta}$ *подгрупп* $K_\delta \subseteq G$ в *группе* G он называет подгруппу $D \subseteq G$, которая состоит из тех элементов группы G, которые, кроме конечного числа индексов δ, лежат во всех подгруппах K_δ. Теорема 6 тогда утверждает:

Теорема 6. *Пусть $G = \sum\limits_{0 \leqq \alpha < \tau}{}' \, G_\alpha$. Если мы обозначим через $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ множество всех квадратных матриц $(\varkappa_{\alpha\beta})$ порядка τ, где $\varkappa_{\alpha\beta}$ — гомоморфизм группы G_α в группу G_β, причем для каждого фиксированного α ядра $K_{\alpha\beta} \subseteq G_\alpha$ гомоморфизмов $\varkappa_{\alpha\beta}$ удовлетворяют отношению*

$$\bigcap_{0 \leqq \beta < \tau}^{G_\alpha} K_{\alpha\beta} = G_\alpha \,, \tag{10}$$

*) Необходимо, конечно, договориться, как понимать возникшие бесконечные суммы. См. стр. 522.

то это множество $\overline{\mathfrak{O}}_\tau$ с обычными для матриц определениями операций сложения и умножения) образует кольцо и $\mathfrak{R}(G) \cong \overline{\mathfrak{O}}_\tau$.*

Последний § 5 посвящен применению результатов теории колец эндоморфизмов к теории общих колец и колец с единицей. Представление этих колец при помощи матричных колец описывают теоремы 11, 12, 13 и 14.

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{R}^1$ — произвольное кольцо с единицей. Тогда имеет место только одна из следующих возможностей:*

(I) *$\mathfrak{R}^1$ с точностью до изоморфизма является подкольцом коьлца $\mathfrak{O}_\nu$, описанного теоремой 9, или*

(II)*существует подкольцо $\mathfrak{O}'_\nu \subseteq \mathfrak{O}_\nu$ и ненулевой идеал $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}'_\nu$ таковы, что $\mathfrak{R}^1$ с точностью до изоморфизма является подкольцом фактор кольца $\mathfrak{O}'_\nu/\mathfrak{M}$.*

Мощность порядкового числа ν равняется при этом D-рангу аддитивной группы A кольца $\mathfrak{R}^1$, и мощности отдельных ординальных чисел $\tau_{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) постепенно определены рангом этой аддитивной группы и D-рангами p_i-примарных компонентов периодической части группы A. Если аддитивная группа данного кольца $\mathfrak{R}^1$ без кручения (или же p-примарная), то вид матриц кольца $\mathfrak{O}_\nu$ описан в следствии 3 (или же в следствии 4).

Теорема 12. *Для произвольного кольца $\mathfrak{R}^1$ с единицей, аддитивная группа которого без кручения D-ранга $\mathfrak{m}$, согласно изоморфизму справедливо отношение $\mathfrak{R}^1 \subseteq \mathfrak{O}_\tau$, где мощность порядкового числа τ есть $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{O}_\tau$ — матричное кольцо, описанное в следствии 3. Итак, если кольцо с единицей имеет аддитивную группу без кручения конечного D-ранга m, то с точностью до изоморфизма является подкольцом кольца квадратных матриц порядка m, элементами которых служат рациональные числа.*

Теорема 13. *Пусть $\mathfrak{R}^1$ — произвольное кольцо с единицей, D-ранг аддитивной группы A которого конечен $\mathrm{r}_D(A) = m$. Пусть $\mathrm{r}(A) = m_0$, $\mathrm{r}_D(P_{i_j}) = m_j$ для $j = 1, 2, \ldots, k$, где P_{i_j} — все нетривиальные p_{i_j}-примарные компоненты периодической части P группы A, т. е. $m = \sum_{j=0}^{k} m_j$.*

Если мы обозначим через $\mathfrak{O}_m$ кольцо m-строчных матриц, описанное теоремой 9, где $\tau_{(0)} = m_0$, $\tau_{(i_j)} = m_j$, для $j = 1, 2, \ldots, k$ и остальные $\tau_{(i)} = 0$, то существуют подкольцо $\mathfrak{O}'_m \subseteq \mathfrak{O}_m$ и двусторонний идеал $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{O}'_m$ так, что с точностью до изоморфизма $\mathfrak{R}^1 \subseteq \mathfrak{O}'_m/\mathfrak{M}$.

Если, в частности, аддитивная группа A кольца $\mathfrak{R}^1$ — p-примарная, то $\mathfrak{O}_m$ является кольцом всех m-строчных матриц над кольцом целых p-адических чисел.

Теорема 14. *Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное кольцо. Тогда с точностью до изоморфизма справедливо утверждение:*

(I) *или* $\mathfrak{R}$ *является подкольцом кольца* $\mathfrak{D}_\nu$, *описанного теоремой* 9,

(II) *или существуют подкольцо* $\mathfrak{D}'_\nu \subseteq \mathfrak{D}_\nu$ *и ненулевой идеал* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{D}'_\nu$ *так, что* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}'_\nu/\mathfrak{M}$.

Если при этом D-ранг $\mathfrak{m}$ *аддитивной группы A кольца* $\mathfrak{R}$ *бесконечен, то мощность порядкового числа* ν *есть* $\mathfrak{m}$. *В частности, если аддитивная группа A без кручения бесконечного D-ранга* $\mathfrak{m}$, *то с точностью до изоморфизма* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}_\nu$, *где* $\mathfrak{D}_\nu$ — *матричное кольцо, описанное в следствии* 3. *Если D-ранг аддитивной группы A кольца* $\mathfrak{R}$ *конечен* $\mathrm{r}_D(A) = m$, *то для порядкового числа* ν *справедливо равенство* $\nu = m + 1$, *и матрицы кольца* $\mathfrak{D}_{m+1}$ *имеют вид, описанный теоремой* 13, *с той лишь разницей, что в случае, когда характеристика кольца* $\mathfrak{R}$ *равна степени простого числа* $p_{i_{j_0}}$, *то или* $\tau_{(0)} = m_0 + 1$, *или* $\tau_{(i_{j_0})} = m_{i_{j_0}} + 1$, *в остальных случаях* $\tau_{(0)} = m_0 + 1$.