Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

О КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НА ПЛОСКОСТИ

ЙОСЕФ КРАЛ (Josef Král), Прага.

(Поступило в редакцию 27/IV 1957 г.)

В этой статье доказываются некоторые утверждения, относящиеся к теоремам Грина и Коши-Гурса.

1. Всюду в этой статье будет E_1 (соотв. E_2) означать множество всех конечных действительных (соотв. комплексных) чисел. Символы x, y (иногда снабженные еще некоторыми индексами) будут всегда означать действительные числа. Мы не различаем комплексное число $x + iy$ от упорядоченной пары $[x, y]$.

Если ε — положительное действительное число и $\emptyset \neq D \subset E_2$, то $\Omega(D, \varepsilon)$— ε — окрестность множества D в E_2; значит, $\mathfrak{z} \in \Omega(D, \varepsilon)$ тогда и только тогда, если существует $z \in D$ так, чтобы было $|\mathfrak{z} - z| < \varepsilon$. Положим еще $\Omega(\emptyset, \varepsilon) = \emptyset$ для всех $\varepsilon > 0$.

Меру Лебега в пространстве E_2 будем обозначать символом μ. Слова ,,почти всюду", ,,измеримое множество" и т. п. относятся иногда к μ, иногда к лебеговской мере в E_1; без дальнейших пояснений всегда видно, как надо их понимать.

Для $A \subset E_2$ мы пишем $A^* = E_2 - A$.

Пусть f — комплексная функция действительного переменного в интервале $\langle a, b\rangle$. Разобъем промежуток $\langle a, b\rangle$ на части, вставив между a и b точки произвольного деления

$$\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} = D$$

и составим сумму $S(D) = \sum\limits_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$. Положим

$$v(a, b, f) = \sup_{D} S(D) .$$

Пусть $V(a, b)$ — множество всех непрерывных комплексных функций f в интервале $\langle a, b\rangle$, для которых имеет место соотношение $v(a, b, f) < +\infty$. Пусть, далее, $V_0(a, b)$ — множество всех функций $f \in V(a, b)$, удовлетворяющих соотношению $f(a) = f(b)$.

Действительную (соотв. мнимую) часть комплексной функции f всюду обозначаем символом f_1 (соотв. f_2).

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — система всех множеств $D \subset E_2$, для которых функция

$$\frac{\mu(\Omega(D, \varepsilon))}{\varepsilon}$$

переменного ε ограничена в интервале $(0,1)$. Обозначим символом $\mathfrak{N}_0$ множество всех частей E_2, граница которых содержится в системе $\mathfrak{M}$. Пусть, далее, $\mathfrak{N}$ — система всех ограниченных множеств из $\mathfrak{N}_0$.

Замечание. Все множества из системы $\mathfrak{M}$ ограничены. Отсюда непосредственно вытекает, что при $A \in \mathfrak{N}_0$ точно одно из множеств A, A^* содержится в системе $\mathfrak{N}$. Система $\mathfrak{M}$ содержит вместе с каждым своим элементом и все его части. Соединение конечного числа множеств из $\mathfrak{M}$ опять принадлежит к системе $\mathfrak{M}$. Так как каждое множество из $\mathfrak{M}$ имеет меру нуль, то все множества из $\mathfrak{N}_0$ измеримы.

3. $f \in V(a, b) \Rightarrow f(\langle a, b\rangle) \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Положим $C = f(\langle a, b\rangle)$ и $v = v(a, b, f)$. Если $\varepsilon \in (0, 1)$, то определим натуральное число n и действительные числа $t_0, \ldots, t_n$ так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$(n-1)\,\varepsilon \leqq v < n\varepsilon\,, \qquad a = t_0 < \ldots < t_n = b\,, \qquad v(t_{i-1}, t_i, f) = \frac{v}{n}$$

$(i = 1, \ldots, n)$. Очевидно $\Omega(C, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=0}^{n} \Omega(f(t_i), 2\varepsilon)$, так что

$\mu(\Omega(C, \varepsilon)) \leqq (n+1)\,.\,4\pi\varepsilon^2 \leqq 4\pi\varepsilon(v + 2\varepsilon)$. Отсюда вытекает

$$\frac{\mu(\Omega(C, \varepsilon))}{\varepsilon} < 4\pi(v+2)\,.$$

4. Если $A \subset E_2$, то положим $A_y = E[x;\, x + iy \in A]$.

5. *Пусть $D \in \mathfrak{M}$. Обозначим символом $q(y)$ число точек множества D_y (если это множество является бесконечным, то полагаем $q(y) = +\infty$). В этих предположениях существует в E_1 интегрируемая функция ψ такая, что соотношение $q(y) \leqq \psi(y)$ удовлетворяется для всех $y \in E_1$.*

Доказательство. Нетрудно обнаружить (см., например, [1], доказательство теоремы 42, стр. 551), что функция $\psi(y) = \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} n\,.\,\psi_n(y)$, где $\psi_n(y)$ — (одномерная) мера множества $\left(\Omega\left(D, \frac{1}{n}\right)\right)_y$, обладает требуемым свойством.

6. Пусть $A \subset E_2$, $y \in E_1$. Определим в E_1 функцию $s_y(x) = s_y(A, x)$ переменного x следующим образом: Если существует $\delta > 0$ так, чтобы удовлетворялись соотношения $(x - \delta, x) \subset A_y$ вместе с $(x, x + \delta) \subset (A^*)_y$ [соотв. $(x - \delta, x) \subset (A^*)_y$ вместе с $(x, x + \delta) \subset A_y$], то полагаем $s_y(x) = 1$ [соотв. $s_y(x) = -1$]. Для всех остальных значений $x \in E_1$ положим $s_y(x) = 0$.

Замечание. Из приведенного определения непосредственно вытекает, что $s_y(A^*, x) = - s_y(A, x)$. Если D — граница множества A, то

$$E[x; s_y(A, x) \neq 0] \subset D_y .$$

В том случае, когда $A \in \mathfrak{N}_0$, нетрудно обнаружить при помощи § 5, что множество D_y является конечным для почти всех $y \in E_1$. Тогда тоже множество $E[x; s_y(A, x) \neq 0]$ конечно для почти всех y.

7. *Пусть α — непрерывная функция на границе множества $A \in \mathfrak{N}_0$. Определим в E_1 функцию ${}^1\alpha(y) = {}^1\alpha(A, y)$ равенством*

$${}^1\alpha(y) = \sum_x s_y(A, x) \,.\, \alpha(x, y) ;$$

в сумму в правой части этого равенства входят те члены $s_y(A, x)\, \alpha(x, y)$, для которых $s_y(A, x) \neq 0$ (по предыдущему замечанию множество таких членов конечно для почти всех y, так что функция ${}^1\alpha(y)$ определена для почти всех y).

Тогда функция ${}^1\alpha(y)$ интегрируема.

Доказательство. По предыдущему замечанию ${}^1\alpha(A, y) = - {}^1\alpha(A^*, y)$. Поэтому мы вправе предположить (см. тоже замечание к § 2), что $A \in \mathfrak{N}$. Пусть D — граница множества A. Определим функцию ψ как в § 5 и положим $K = E[y; \psi(y) < + \infty]$. Множество $E_1 - K$ имеет меру нуль.

Пусть сначала $\beta(x, y)$ — полином переменных x, y. Покажем, что для $y \in K$ имеют место соотношения

$$|{}^1\beta(A, y)| \leqq \psi(y) \,.\, \max_{\mathfrak{z} \in D} |\beta(\mathfrak{z})| , \tag{1}$$

$${}^1\beta(A, y) = \int_{A_y} \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x}\, \mathrm{d}x . \tag{2}$$

Пусть $y \in K$, $D_y = \{x_1 < \ldots < x_m\}$ $(0 \leqq m \leqq \psi(y))$. Очевидно,

$|{}^1\beta(A, y)| = |\sum_{j=1}^{m} s_y(A, x_j)\, \beta(x_j, y)| \leqq m \max_{\mathfrak{z} \in D} |\beta(\mathfrak{z})| \leqq \psi(y) \max_{\mathfrak{z} \in D} |\beta(\mathfrak{z})|$, чем доказано соотношение (1). Пусть теперь

$$x_{j_1} < \ldots < x_{j_k} \quad (k \text{ — целое } \geqq 0)$$

— все точки множества D_y, в которых функция $s_y(x) = s_y(A, x)$ отлична от нуля. Если $i \leqq j_1$ или $i > j_k$, то $(x_{i-1}, x_i) \subset (A^*)_y$ $(i = 1, \ldots, m + 1)$.[1]) Да-

[1]) Мы пишем $x_0 = - \infty$, $x_{m+1} = + \infty$.

лее легко видеть, что $(x_{i-1}, x_i) \subset A_y$ [соотв. $(x_{i-1}, x_i) \subset (A^*)_y$], если $j_{r-1} < i \leqq j_r$, где r — четное [соотв. нечетное] число, $1 < r \leqq k$. Следовательно, $s_y(x_{j_r}) = (-1)^r$ $(r = 1, \ldots, k)$, k — четное и

$$\int_{A_y} \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} \,\mathrm{d}x = \beta(x_{j_2}, y) - \beta(x_{j_1}, y) + \ldots + \beta(x_{j_k}, y) -$$

$$- \beta(x_{j_{k-1}}, y) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^r . \beta(x_{j_r}, y) = \sum_x s_y(x) . \beta(x, y) = {}^1\beta(A, y).$$

Этим доказано равенство (2).

Так как A — ограниченное измеримое множество, то существует (конечный) интеграл $\int_A \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} \,\mathrm{d}\mu$. Пользуясь равенством (2) и теоремой Фубини, мы видим, что функция ${}^1\beta(A, y)$ интегрируема.

Пусть теперь α — непрерывная функция на множестве D. Определим последовательность полиномов $\beta_1, \beta_2, \ldots$, которая на D равномерно сходится к функции α. Если $C > 0$ достаточно велико, то $\max_{\mathfrak{z} \in D} |\beta_n(\mathfrak{z})| \leqq C$ $(n = 1, 2, \ldots)$; используя неравенство (1), получаем

$$|{}^1\beta_n(A, y)| \leqq C\psi(y) , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как ${}^1\beta_n(A, y) \to {}^1\alpha(A, y)$ $(n \to \infty)$ для почти всех y, то по известной теореме о пределном переходе под знаком интеграла функция ${}^1\alpha(A, y)$ интегрируема.

Отметим еще [см. равенство (2)], что

$$\int_{E_1} {}^1\alpha(A, y) \,\mathrm{d}y = \lim_{n \to \infty} \int_A \frac{\partial \beta_n(x, y)}{\partial x} \,\mathrm{d}\mu .$$

8. Если $A \in \mathfrak{N}_0$ и α — непрерывная функция на границе D множества A, то положим

$$P_1(A, \alpha) = \int_{E_1} {}^1\alpha(A, y) \,\mathrm{d}y .$$

Замечание. Если $A \in \mathfrak{N}$, то (как видно из доказательства утверждения 7) имеет место равенство

$$P_1(A, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \int_A \frac{\partial \beta_n(x, y)}{\partial x} \,\mathrm{d}\mu ,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — последовательность полиномов, которая на множестве D равномерно сходится к функции α. Отсюда и из определения 13 в [1] (стр. 529) видно, что символ $P_1(A, \alpha)$ имеет здесь то же значение, как в [1] (для $A \in \mathfrak{N}$; см. тоже [1], определение 3 на стр. 523 и теорему 42 на стр. 551).

9. В § 15 мы займемся отношением функционала P_1 к криволинейным интегралам. Напомним раньше некоторые известные теорѐмы и определения.

Пусть $f = f_1 + if_2 \in V(a, b)$, α — непрерывная функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$.

Положим

$$\int\limits_f \alpha \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \alpha(f(t)) \, \mathrm{d}f_1(t) \,, \quad \int\limits_f \alpha \, \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \alpha(f(t)) \, \mathrm{d}f_2(t) \,.$$

Если $g = g_1 + ig_2$ — непрерывная комплексная функция на множестве $f(\langle a, b\rangle)$, то полагаем

$$\int\limits_f g \, \mathrm{d}\mathfrak{z} = \int\limits_f g_1 \, \mathrm{d}x - g_2 \, \mathrm{d}y + i(\int\limits_f g_2 \, \mathrm{d}x + g_1 \, \mathrm{d}y) \,.^{2)}$$

10. *Пусть* $f \in V_0(a, b)$, $C = f(\langle a, b\rangle)$. *Определим на множестве* C^* *функцию* ind_f *равенством*

$$\mathrm{ind}_f \, z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_f \frac{1}{\mathfrak{z} - z} \, \mathrm{d}\mathfrak{z} \,.$$

Тогда функция ind_f *принимает лишь целочисленные значения и остается постоянной на каждой компоненте множества* C^*. *Если* $|z|$ *достаточно велико, то* $\mathrm{ind}_f \, z = 0$.

Доказательство. См. [2], § 4.

11. Пусть φ — действительная функция в интервале $\langle a, b\rangle$. Определим в $\langle a, b\rangle$ функцию η_φ следующим образом: Если $a < t < b$ и φ возрастает [соотв. убывает] в точке t, то полагаем $\eta_\varphi(t) = 1$ [соотв. $\eta_\varphi(t) = -1$]. Для всех остальных значений $t \in \langle a, b\rangle$ положим $\eta_\varphi(t) = 0$.

12. *Пусть* $f^k \in V_0(a_k, b_k)$[3]) *для* $k = 1, \ldots, m$,

$$C = \bigcup_{k=1}^{m} f^k(\langle a_k, b_k\rangle) \,. \tag{3}$$

Определим на множестве C^* *функцию* ω *равенством*

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{ind}_{f^k} \, z \,. \tag{4}$$

Пусть $x_1 < x_2$, $z_j = x_j + iy \in C^*$ $(j = 1, 2)$.

Положим $\eta_k = \eta_{f_2^k}$[4]), $J = E[\mathfrak{z}; \mathfrak{z} = x + iy, \; x_1 \leqq x \leqq x_2]$ *и предположим, что* $\eta_k(t) \neq 0$ *для всех* $t \in (f^k)^{-1}(J)$ $(k = 1, \ldots, m)$.

---

[2]) Мы пишем $\int\limits_f g_2 \, \mathrm{d}x + g_1 \, \mathrm{d}y$ вместо $\int\limits_f g_2 \, \mathrm{d}x + \int\limits_f g_1 \, \mathrm{d}y$ и т. п.

[3]) Мы пишем индексы сверху, так как индексами снизу пользуемся для обозначения действителной и мнимой части функции; значит, $f^k = f_1^k + if_2^k$.

[4]) См. § 11, где положим f_2^k вместо φ.

Тогда множества $(f^k)^{-1}(J)$ *конечны* $(k = 1, \ldots, m)$ *и имеет место равенство*

$$\omega(z_1) - \omega(z_2) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{f^k(t) \in J} \eta_k(t) .$$

Доказательство. Это утверждение является непосредственным следствием теоремы 7 из [2]. Досточно подставить в формулу (19) f^k вместо f, η_k вместо η_ψ и сложить полученные равенства.

13. *Пусть* φ — *непрерывная функция в интервале* $\langle a, b\rangle$. *Обозначим символом* $N(y)$ *число точек множества* $\varphi^{-1}(y)$ (*если это множество бесконечно, то полагаем* $N(y) = +\infty$).

Тогда имеет место равенство

$$v(a, b, \varphi) = \int_{E_1} N(y)\, \mathrm{d}y .$$

Доказательство. Это известная теорема С. Банаха (S. Banach). См., напр., [3], гл. IX, теорема (6.4) на стр. 280.

Замечание. Функцию N называют индикатрисой Банаха для функции φ.

14. *Пусть* F, φ — *непрерывные функции в интервале* $\langle a, b\rangle$. *Предположим, что функция* φ *имеет ограниченное изменение в* $\langle a, b\rangle$. *Тогда для почти всех* $y \in E_1$ *множество* $\varphi^{-1}(y)$ *конечно и имеет место соотношение*

$$\eta_\varphi(t) \neq 0 \quad \text{для} \quad t \in \varphi^{-1}(y) .$$

Кроме того выполняется равенство

$$\int_a^b F(t)\, \mathrm{d}\varphi(t) = \int_{E_1} \Big(\sum_{\varphi(t)=y} F(t)\, \eta_\varphi(t)\Big)\, \mathrm{d}y .$$

Доказательство. Это утверждение является частным случаем теоремы из статьи [4] (см. стр. 93, соотношения (0) и (3)).

15. *Пусть* $f^k \in V_0(a_k, b_k)$ *для* $k = 1, \ldots, m$. *Определим множество* C *соотношением* (3) *и функцию* ω *равенством* (4). *Пусть* α — *непрерывная функция на множестве* C. *Положим еще*

$$U_l = E[z;\, z \in C^*,\, \omega(z) \geqq l] .$$

Тогда $U_l \in \mathfrak{N}_0$ *для всех целых* l, *и*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} \alpha\, \mathrm{d}y = \sum_{l=-\infty}^{\infty} P_1(U_l, \alpha) . \tag{5}$$

Доказательство. Так как граница множества U_l является, очевидно, частью множества C, то по теореме 3 (см. тоже замечание к § 2) $U_l \in \mathfrak{N}_0$ для всех l. Пусть N_k — индикатриса Банаха для функции f_2^k, $\psi = \sum_{k=1}^{m} N_k$. Легко видеть (см. §§ 13, 14, где напишем f_2^k вместо φ и $\langle a_k, b_k\rangle$ вместо $\langle a, b\rangle$), что существует множество $M \subset E_1$ меры нуль такое, что для $y \in E_1 - M$ выполняются соотношения

$$\psi(y) < +\infty\,,$$

$$\eta_k(t) \neq 0^{5)} \quad \text{для } t \in (f_2^k)^{-1}(y)\,, \quad k = 1, \ldots, m\,. \tag{6}$$

Закрепим $y \in E_1 - M$ и покажем, что имеют место соотношения

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left|{}^1\alpha(U_l, y)\right| \leqq \psi(y) \max_{\mathfrak{z} \in C} |\alpha(\mathfrak{z})|\,, \tag{7}$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^1\alpha(U_l, y) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{f_2^k(t)=y} \alpha(f^k(t))\,\eta_k(t)\,. \tag{8}$$

Число точек множества $C_y = \bigcup_{k=1}^{m} f_1^k((f_2^k)^{-1}(y))$ не больше чем $\sum_{k=1}^{m} N_k(y) = \psi(y)$. Пусть

$$C_y = \{u_1 < \ldots < u_n\} \quad (n \text{ целое, } 0 \leqq n \leqq \psi(y))\,.$$

Положим еще $u_0 = -\infty$, $u_{n+1} = +\infty$ и обозначим символом I_j значение функции $\omega(x + iy)$ для $u_j < x < u_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n$ (см. § 10).

Пусть теперь $1 \leqq j \leqq n$. Из (6) и из теоремы 12 нетрудно вывести равенство (пишем $\mathfrak{z}_j = u_j + iy$)

$$I_{j-1} - I_j = \sum_{k=1}^{m} \sum_{f^k(t)=\mathfrak{z}_j} \eta_k(t)\,. \tag{9}$$

Если l — целое, $l > \max(I_{j-1}, I_j)$ или $l \leqq \min(I_{j-1}, I_j)$, то $s_y(U_l, u_j) = 0$. В случае $I_j < l \leqq I_{j-1}$ [соотв. $I_{j-1} < l \leqq I_j$] получим $s_y(U_l, u_j) = 1$ [соотв. $s_y(U_l, u_j) = -1$]. Итак,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} s_y(U_l, u_j) = I_{j-1} - I_j\,, \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} |s_y(U_l, u_j)| = |I_{j-1} - I_j|\,.$$

Полагая $c = \max_{\mathfrak{z} \in C} |\alpha(\mathfrak{z})|$, получаем отсюда при помощи равенства (9)

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{\infty} |{}^1\alpha(U_l, y)| &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{n} s_y(U_l, u_j)\,\alpha(\mathfrak{z}_j)\Big| \leqq \\
&\leqq c\,.\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |s_y(U_l, u_j)| = c\,.\sum_{j=1}^{n} |I_{j-1} - I_j| = \\
&= c\,.\sum_{j=1}^{n} \Big|\sum_{k=1}^{m} \sum_{f^k(t)=\mathfrak{z}_j} \eta_k(t)\Big| \leqq c\,.\sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{f^k(t)=\mathfrak{z}_j} |\eta_k(t)|\Big) = \\
&= c\,.\sum_{k=1}^{m} \sum_{f_2^k(t)=y} |\eta_k(t)| \leqq c\,.\sum_{k=1}^{m} N_k(y) = c\,.\,\psi(y)\,,
\end{aligned}$$

[5]) Функция η_k имеет здесь то же значение, как в § 12.

чем доказано соотношение (7). Аналогично

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^1\alpha(U_l, y)^{6)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} s_y(U_l, u_j)\,\alpha(\mathfrak{z}_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} s_y(U_l, u_j) \Big)\,\alpha(\mathfrak{z}_j) = \sum_{j=1}^{n} (I_{j-1} - I_j)\,\alpha(\mathfrak{z}_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{f^k(t)=\mathfrak{z}_j} \alpha(f^k(t))\,\eta_k(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{f_2^k(t)=y} \alpha(f^k(t))\,\eta_k(t)\,,$$

чем завершается доказательство равенства (8). Из соотношения (7) видно, что ряд в левой части равенства (8) можно интегрировать почленно в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Пользуясь при этом теоремой 14 (где полагаем $F = \alpha(f^k)$, $\varphi = f_2^k$), получаем

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} P_1(U_l, \alpha) = \sum_{k=1}^{m} \int_{E_1} \Big(\sum_{f_2^k(t)=y} \alpha(f^k(t))\,\eta_k(t) \Big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{a_k}^{b_k} \alpha(f^k(t))\,\mathrm{d}f_2^k(t)\,.$$

Замечание. Очень невыгодно, что в формуле (5) появляются тоже неограниченные множества (именно, множества U_l для $l \leqq 0$). Это неприятное обстоятельство устранено следующей теоремой:

16. *Пусть символы f^k ($k = 1, \ldots, m$), C, ω и α имеют то же значение, как в предыдущей теореме. Положим еще*

$$G_p = E[z;\, z \in C^*,\, \omega(z) = p]\,. \tag{10}$$

Тогда $G_p \in \mathfrak{N}$ для всех целых $p \neq 0$ и

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} \alpha\,\mathrm{d}y = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} (P_1(G_p, \alpha) - P_1(G_{-p}, \alpha)) \Big)\,. \tag{11}$$

Доказательство. Для целого $p \neq 0$ множество G_p ограничено, и его граница содержится, очевидно, в множестве C, так что $G_p \in \mathfrak{N}$. Определим функцию ψ и множество M тем самым образом, как в доказательстве теоремы 15 (M — множество меры нуль, ψ — интегрируемая функция, принимающая лишь конечные значения на дополнении множества M). Закрепим $y \in E_1 - M$ и целое l и покажем, что имеют место соотношения

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left|{}^1\alpha(G_p, y)\right| \leqq 2\psi(y) \max_{\mathfrak{z} \in C} |\alpha(\mathfrak{z})|\,, \tag{12}$$

$$\sum_{p \geqq l} {}^1\alpha(G_p, y) = {}^1\alpha(U_l, y)\,, \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^1\alpha(G_p, y) = 0\,. \tag{13}$$

---

[6]) Отметим, что в этой сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Если $l \leqq \min_{0 \leqq j \leqq n} \{I_j\}$ или $l > \max_{0 \leqq j \leqq n} \{I_j\}$, то $s_y(U_l, u_j) = 0$ для $j = 1, \ldots, n$, так что ${}^1\alpha(U_l, y) = 0$.

Пусть $C_y = \{u_1 < \ldots < u_n\}$ (n — целое, $0 \leqq n \leqq \psi(y)$), и пусть символы I_j ($j = 0, \ldots, n$) имеют то же самое значение, как в доказательстве теоремы 15. Заметым сначала, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |s_y(G_p, u_j)| \leqq 2 ,$$

$$\sum_{p \geqq l} s_y(G_p, u_j) = s_y(U_l, u_j) , \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} s_y(G_p, u_j) = 0 \tag{14}$$

для $j = 1, \ldots, n$. Полагая $c = \max_{\mathfrak{z} \in C} |\alpha(\mathfrak{z})|$, получаем отсюда

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |{}^1\alpha(G_p, y)| = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{n} s_y(G_p, u_j)\, \alpha(u_j + iy) \Big| \leqq$$

$$\leqq c \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=-\infty}^{\infty} |s_y(G_p, u_j)| \leqq 2cn \leqq 2c\psi(y) ,$$

чем доказано неравенство (12). Дальше (см. (14))

$$\sum_{p \geqq l} {}^1\alpha(G_p, y) = \sum_{p \geqq l} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_y(G_p, u_j)\, \alpha(u_j + iy) \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{p \geqq l} s_y(G_p, u_j) \Big)\, \alpha(u_j + iy) = \sum_{j=1}^{n} s_y(U_l, u_j)\, \alpha(u_j + iy) = {}^1\alpha(U_l, y) .$$

Подобным образом доказывается второе равенство из (13). Из (12) видно, что ряды в (13) можно интегрировать почленно. Таким образом получаем соотношения

$$\sum_{p \geqq l} P_1(G_p, \alpha) = P_1(U_l, \alpha) , \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} P_1(G_p, \alpha) = 0 .$$

Итак,

$$-\sum_{p < l} P_1(G_p, \alpha) = P_1(U_l, \alpha) ,$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} P_1(U_l, \alpha) = \sum_{l=1}^{\infty} (P_1(U_l, \alpha) + P_1(U_{-l+1}, \alpha)) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} (P_1(G_p, \alpha) - P_1(G_{-p}, \alpha)) \Big) .$$

Отсюда и из (5) вытекает (11).

17. Пусть D — граница множества $A \in \mathfrak{N}$. На системе всех непрерывных функций α на множестве D можно определить функционал $P_2(\alpha) = P_2(A, \alpha)$ так, чтобы имело место равенство

$$P_2(\beta) = \int_A \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial y}\, \mathrm{d}\mu$$

для каждого полинома β и чтобы выполнялось соотношение

$$P_2(\alpha) = \lim_{n\to\infty} P_2(\beta_n)$$

для каждой последовательности полиномов $\beta_1, \beta_2, \ldots$, которая на множестве D равномерно сходится к функции α (см. замечание к § 8).

Тогда в предположениях теоремы 16 имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} \alpha \, \mathrm{d}x = -\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} (P_2(G_p, \alpha) - P_2(G_{-p}, \alpha)) \Big) . \tag{15}$$

Если, далее, $v = [v_1; v_2]$ — непрерывный вектор (т. е. упорядоченная пара непрерывных функций) на множестве D, то положим

$$P(A, v) = P_1(A, v_1) + P_2(A, v_2)\,, \quad P_0(A, v) = P_1(A, v_2) - P_2(A, v_1)\,.$$

Сохраняя обозначения из § 16, имеем для каждого непрерывного вектора $v = [v_1, v_2]$ на множестве C

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} (P_0(G_p, v) - P_0(G_p, v)) \Big) \tag{16}$$

(см. равенства (11), (15)).

Условимся еще в следующей терминологии: Квадратом разумеется двумерный интервал вида $\langle x, x+h \rangle \times \langle y, y+h \rangle$ $(h > 0)$.

Если K — квадрат, то H_K означает либо границу квадрата K, либо комплексную функцию действительного переменного, определяющую простое описание границы квадрата K (в положительном направлении).

Для каждого непрерывного вектора $v = [v_1, v_2]$ на H_K имеем тогда

$$P_0(K, v) = \int_{H_K} v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y\,.$$

18. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма:

Пусть o_p $(p = 1, 2, \ldots)$ — действительные числа. Предположим, что сходятся ряды

$$\sum_{p=1}^{\infty} o_p\,, \quad \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} o_p \Big)\,.$$

Если, кроме того, существует предел $\lim\limits_{r\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{r} p o_p$, то этот предел конечен (значит, ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p o_p$ сходится) и имеет место равенство

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} o_p \Big) = \sum_{p=1}^{\infty} p o_p\,.$$

Доказательство. Положим $b_l = \sum_{p \geqq l} o_p$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Нетрудно проверить, что для каждого натурального числа r выполняется соотношение

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l = \sum_{p=1}^{r-1} p o_p + r b_r + \sum_{l=r+1}^{\infty} b_l \,.$$

Видим, что существует предел $\lim_{r \to +\infty} r b_r$; но этот предел не может быть отличным от нуля. Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение.

19. *Пусть $f^k \in V_0(a_k, b_k)$ для $k = 1, \ldots, m$. Определим множество C соотношением* (3) *и функцию ω (на множестве C^*) равенством* (4). *Положим еще $G = \bigcup_{p \neq 0} G_p$ (p — целые), где G_p определены соотношением* (10).

Пусть γ — функция на множестве G, $v = [v_1, v_2]$ — непрерывный вектор на множестве $G \cup C$. Предположим, что существуют интегралы Лебега $\int_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu$ для $p \neq 0$ и что для каждого квадрата $K \subset G$ выполняется равенство

$$\int_K \gamma \,\mathrm{d}\mu = \int_{H_K} v_1 \,\mathrm{d}x + v_2 \,\mathrm{d}y \,.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} v_1 \,\mathrm{d}x + v_2 \,\mathrm{d}y = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} \Big(\int_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu - \int_{G_{-p}} \gamma \,\mathrm{d}\mu \Big) \Big) \,. \tag{18}$$

Правую часть равенства (18) *можно заменить суммой*

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \Big(\int_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu - \int_{G_{-p}} \gamma \,\mathrm{d}\mu \Big) \,, \tag{19}$$

если ряд (19) *сходится (можем быть, неабсолютно), или интегралом*

$$\int_G \omega\gamma \,\mathrm{d}\mu \,, \tag{20}$$

если этот интеграл существует (в смысле Лебега).

Доказательство. Положим $\tilde{v} = [v_2, -v_1]$. Тогда имеем для каждого квадрата $K \subset G$

$$P(K, \tilde{v}) = P_0(K, v) = \int_K \gamma \,\mathrm{d}\mu \,,$$

так что вектор $\tilde{v}$ и функция γ ассоцированы на G в смысле определения 23 из [1], стр. 537. Отсюда вытекает по теоремам 40 (стр. 550) и 43 (стр. 551) из [1], что для $p \neq 0$ справедливо равенство

$$P_0(G_p, v) = P(G_p, \tilde{v}) = \int_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu \,;$$

этим вместе с (16) доказано (18). Наконец воспользуемся леммой 18, полагая

$$o_p = \int_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu - \int_{G_{-p}} \gamma \,\mathrm{d}\mu \,, \quad p = 1, 2, \ldots$$

(если существует интергал $\int_G \omega\gamma \,\mathrm{d}\mu$, то $\lim_{r \to +\infty} \sum_{p=1}^{r} p o_p = \int_G \omega\gamma \,\mathrm{d}\mu$).

Замечание. Если $v = [v_1, v_2]$ — непрерывный вектор на множестве $G \subset E_2$, обладающий непрерывными производными $\frac{\partial v_1}{\partial y}$, $\frac{\partial v_2}{\partial x}$ на G, то для каждого квадрата $K \subset G$ выполняется равенство

$$\int_K \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}\mu = \int_{H_K} v_1 \,\mathrm{d}x + v_2 \,\mathrm{d}y \,.$$

Предположения о непрерывности производных $\frac{\partial v_2}{\partial x}$, $\frac{\partial v_1}{\partial y}$ можно различным способом ослабить (см. об этом, напр., [2], § 10).

Покажем еще на примере, что ряд (19) может расходиться. Пусть $q_1, q_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел такая, что $q_1 > 1$ и $q_{n+1} > 4q_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим $c_n = \frac{1}{n^2 q_n}$ $(n = 1,2, \ldots)$ и построим последовательность действительных чисел $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots$ так, чтобы предел $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ был конечным.

Пусть g^n — комплексная функция в интервале $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$, определяющая $(q_n - 1)$-кратное описание границы квадрата $\langle 0, 4c_n \rangle \times \langle 0, 4c_n \rangle$ (в положительном направлении); пусть h^n — комплексная функция в интервале $\langle \beta_n, \alpha_{n+1} \rangle$, определяющая простое описание границы фигуры, ограниченной сбоку прямыми $x = 0$ и $x = 2c_n$, снизу прямой $y = 0$ и сверху графиком функции $y = c_n \left(2 + \cos \left(q_n \pi \frac{x}{c_n}\right)\right)$. Пусть при этом $g^n(\alpha_n) = g^n(\beta_n) = h^n(\beta_n) = h^n(\alpha_{n+1}) = 0$. Обозначим символом f функцию в интервале $\langle \alpha_1, \beta \rangle$, которую получим „составлением" функций $g^1, h^1, g^2, h^2, \ldots$ $(f(\beta) = 0)$. Нетрудно проверить, что $v(\alpha_n, \beta_n, g^n) = (q_n - 1) \,.\, 16c_n < \frac{16}{n^2}$, $v(\beta_n, \alpha_{n+1}, h^n) < 8c_n + 4\pi c_n q_n < \frac{24}{n^2}$. Итак, $f \in V_0(\alpha_1, \beta)$.

Определим в E_2 непрерывную функцию $\alpha(x, y)$, обладающую в $E_2 - \{0\}$ непрерывной производной $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения (для $n = 1, 2, \ldots$):

$$y \leqq 3c_n \Rightarrow \alpha(0, y) = \alpha(2c_n, y) = 0 \,,$$

$$(0 \leqq x \leqq 2c_n,\ c_n \leqq y \leqq 3c_n) \Rightarrow \alpha(x, y) = \frac{1}{n} \sin \left(q_n \pi \frac{x}{c_n}\right)$$

(заметим, что $4c_{n+1} < c_n$).

Положим в условиях теоремы 19 $m = 1$, $f = f^1$, $v(x, y) = [0, \alpha(x, y)]$ и $\gamma = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$.

Тогда имеем для $p = q_1 + \ldots + q_n$

$$\int\limits_{G_p} \gamma \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_0^{2c_n} \frac{1}{n} \sin\left(q_n\pi \,.\, \frac{x}{c_n}\right) \mathrm{d}\left(c_n \cos\left(q_n\pi\,\frac{x}{c_n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_0^{2c_n} \sin^2(\ldots)\,.\,q_n\pi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,c_n q_n \pi = \frac{\pi}{n^3}\,, \quad p\,.\int\limits_{G_p}\gamma\,\mathrm{d}\mu > \frac{q_n}{n^3}\,.$$

Так как $G_{-p} = \emptyset$ (для $p > 0$), то ряд (19) не может сходиться.

20. *Пусть символы f^k, C, G_p и G имеют то же значение, как в теореме* 19.

Пусть g — непрерывная комплексная функция на множестве $G \cup C$, γ — комплексная функция на множестве G такая, что существуют интегралы Лебега $\int\limits_{G_p} \gamma\,\mathrm{d}\mu$ для $p \neq 0$[7]) *и что для каждого квадрата $K \subset G$ выполняется равенство*

$$\int\limits_K \gamma\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{H_K} g\,\mathrm{d}\mathfrak{z}\,.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \int\limits_{f^k} g\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{p \geqq l}\Big(\int\limits_{G_p}\gamma\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{G_{-p}}\gamma\,\mathrm{d}\mu\Big)\Big)\,. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $g = g_1 + ig_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Если $f \in V_0(a, b)$, $f(\langle a, b\rangle) \subset G \cup C$, то

$$\int\limits_f g\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = \int\limits_f w_1^1\,\mathrm{d}x + w_2^1\,\mathrm{d}y + i\Big(\int\limits_f w_1^2\,\mathrm{d}x + i w_2^2\,\mathrm{d}y\Big)\,,$$

где $w^1 = [g_1, -g_2]$, $w^2 = [g_2, g_1]$. В частности,

$$\int\limits_{H_K} g\,\mathrm{d}\mathfrak{z} = P_0(K, w^1) + iP_0(K, w^2) = \int\limits_K \gamma_1\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_K \gamma_2\,\mathrm{d}\mu$$

для каждого квадрата $K \subset G$ (см. § 17).

По теореме 19 имеем

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{f^k} w_1^j\,\mathrm{d}x + w_2^j\,\mathrm{d}y = \sum_{l=1}^{\infty}\Big(\sum_{p\geqq l}\Big(\int\limits_{G_p}\gamma_j\,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{G_p}\gamma_j\,\mathrm{d}\mu\Big)\Big)$$

($j = 1, 2$), откуда непосредственно вытекает наше утверждение.

Замечание. Правую часть равенства (21) можно в соответствующих предположениях заменить выражением (19) или (20).

---

[7]) Если $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, то этим разумеется, что существуют конечные интегралы Лебега $\int\limits_{G_p}\gamma_1\,\mathrm{d}\mu$, $\int\limits_{G_p}\gamma_2\,\mathrm{d}\mu$ и $\int\limits_{G_p}\gamma\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{G_p}\gamma_1\,\mathrm{d}\mu + i\int\limits_{G_p}\gamma_2\,\mathrm{d}\mu$.

Если функция g является аналитической на множестве G, положим $\nu = 0$ (см., напр., [5], гл. II, т. (4.1) на стр. 106) и получим

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{f^k} g \, \mathrm{d}\mathfrak{z} = 0 .$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Mařík:* The surface integral, Чех. мат. журнал, *6 (81)*, 1956, 522—557.
[2] *J. Král* a *J. Mařík:* Der Greensche Satz, Чех. мат. журнал, *7 (82)*, 1957.
[3] *S. Saks:* Theory of the integral, New York.
[4) *Ян Маржик* (Jan Mařík): Преобразование одномерных интегралов, Čas. pro pěst. mat., *82 (1957)*, 93—98.
[5] *S. Saks* i *A. Zygmund:* Funkcje analityczne, Warszawa 1948.

Summary

ON CURVILINEAR INTEGRALS IN THE PLANE

JOSEF KRÁL, Praha.

(Received April 27, 1957).

Let $V(a, b)$ be the system of all complex functions f of the form $f = f_1 + if_2$, where f_j $(j = 1, 2)$ are real continuous functions of bounded variation on $\langle a, b\rangle$. If $f \in V(a, b)$ and if $v = [v_1, v_2]$ is a continuous vector (i. e. a pair of continuous functions) on the set $f(\langle a, b\rangle)$, we put

$$\int_f v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y = \int_a^b v_1(f(t)) \, \mathrm{d}f_1(t) + \int_a^b v_2(f(t)) \, \mathrm{d}f_2(t) .$$

Further we put

$$\int_f g \, \mathrm{d}\mathfrak{z} = \int_f g_1 \, \mathrm{d}x - g_2 \, \mathrm{d}y + i(\int_f g_2 \, \mathrm{d}x + g_1 \, \mathrm{d}y)$$

for each complex continuous function $g = g_1 + ig_2$ on the set $f(\langle a, b\rangle)$.

Let $V_0(a, b)$ be the system of all the functions $f \in V(a, b)$ such that $f(a) = f(b)$. Given a function $f \in V_0(a, b)$ we define

$$\mathrm{ind}_f \, z = \frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{1}{\mathfrak{z} - z} \, \mathrm{d}\mathfrak{z}$$

for each point z of the complement of $f(\langle a, b\rangle)$. If K is a square (i. e. a Cartesian product of two intervals of equal length), then H_K denotes a function of the

system $V_0(a, b)$, which defines parametrically a simple description of the boundary of K (in positive sense).

Theorem. *Let be $f^k \in V_0(a_k, b_k)$, $k = 1, \ldots, m$. We define the set C by means of the relation* (3) *and the function ω (on the complement of C) by means of the relation* (4). *Put*

$$G = E[z;\, \omega(z) \neq 0]\,.$$

Let $v = [v_1, v_2]$ be a continuous vector on the set $G \cup C$ and let γ be a function on G such that the equality

$$\int_K \gamma \, \mathrm{d}\mu = \int_{H_K} v_1 \, \mathrm{d}x + v_2 \, \mathrm{d}y$$

(μ is the Lebesque measure in the plane) holds for each square $K \subset G$. Further suppose that there exist the integrals $\int_{G_p} \gamma \, \mathrm{d}\mu$ for $p \neq 0$, where

$$G_p = E[z;\, z \in E_2 - C,\, \omega(z) = p]\,.$$

Then the relation (18) *is valid. On the right side of* (18) *we can write* (19) *[resp.* (20)*] instead of*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{p \geqq l} \Big(\int_{G_p} \gamma \, \mathrm{d}\mu - \int_{G_{-p}} \gamma \, \mathrm{d}\mu \Big) \Big)$$

assuming that the series (19) *converges [resp. the integral* (20) *exists].*