Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Congruences de droites dans les espaces projectifs à dimension paire

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 274–284

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100302`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

CONGRUENCES DE DROITES DANS LES ESPACES PROJECTIFS A DIMENSION PAIRE

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 19 novembre 1957)

Dans son Mémoire intitulé *L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites* (Bull. Class. Sci. Acad. roy. de Belgique, 5e série, *39* (1953), 481—489) M. BENIAMINO SEGRE étudie une classe spéciale de congruences de droites dans l'espace à plusieurs dimensions. Dans le présent travail, je détermine l'élément linéaire projectif des congruences générales de droites, mais en me bornant au cas des espaces à dimension paire. On établit aussi la signification géométrique de la conservation de cet élément et l'on garantit l'existence des congruences pour lesquelles il est donné d'avance. Une théorie analogue peut être développé même pour le cas des congruences des droites plongées dans des espaces projectifs à dimension impaire, comme le fait voir p. ex. mon travail antérieur *Les congruences de droites dans* S_5 (Spisy přír. fak. Brno, No 382, 1957, 1—14).

1. Je vais considérer une congruence de droites L dans l'espace projectif S_{2n} de dimension $2n$ ($n \geqq 2$), qui peut être décomposée en surfaces développables de deux (et seulement deux) manières. Les points de cette congruence forment alors une variété à trois dimensions V_3 dans S_{2n}. Soit p une droite de la congruence L, alors par k-ème espace osculateur de la congruence L le long de la droite p j'entends l'enveloppe linéaire de tous les k-èmes espace osculateurs de la variété V_3 dans les poits de p. Le premier espace osculateur sera appelé aussi espace tangent.

Supposons que la congruence en question soit engendrée par les droites $[x, y]$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, où $du\,dv = 0$ sont les surfaces développables et x, y sont les foyers, de sorte qu'après une normalisation convenable on obtient

$$x_u = \beta y\,, \quad y_v = \gamma x\,. \tag{1}$$

Le k-ème espace osculateur de la congruence L le long de la droite $p = [x, y]$ est alors déterminé par les points

$$x, y, x_v, y_u, x_{vv}, y_{uu}, \ldots, \frac{\partial^k x}{\partial v^k}, \frac{\partial^k y}{\partial u^k}\,. \tag{2}$$

J'appelle *indice* de la congruence L le plus petit nombre l tel que le l-ème espace osculateur le long de n'importe quelle droite est de dimension $2l - 1$, mais le $(l + 1)$-ème espace osculateur est de dimension plus petite que $2l + 1$. Dans ce Mémoire je me bornerai à l'étude des congruences d'indice n, ce qui est l'*indice maximum* que peut avoir une congruence dans S_{2n}.

La condition de l'indice maximum peut être énoncée d'une autre façon encore. Les points $x = x(u, v)$ forment ou bien une surface focale, ou bien une courbe directrice, la courbe $x = x(\text{const}, v)$ étant alors ou bien une courbe du réseau conjugué de la surface focale, ou bien la courbe directrice elle même. La congruence L a l'indice maximum si et seulement si les $(n - 1)$-èmes espaces osculateurs des courbes $x = x(u_0, v)$ et $y = y(u, v_0)$, pour $v = v_0$ et $u = u_0$ respectivement, sont de dimension $n - 1$ et que ces deux espaces

$$\left[x, x_v, \ldots, \frac{\partial^{n-1}x}{\partial v^{n-1}}\right]_{v=v_0}, \quad \left[y, y_u, \ldots, \frac{\partial^{n-1}y}{\partial u^{n-1}}\right]_{u=u_0}$$

soient linéairement indépendants.

Dans ce qui suit, j'adopte les méthodes de Cartan; je choisis le repère de la façon suivante: soient A_1, A_2 les foyers, soit $S_{2i-1} = [A_1A_2A_3A_4 \ldots A_{2i-1}A_{2i}]$ le $(i - 1)$-ème espace osculateur de la congruence le long de la droite $[A_1A_2]$, $i = 1, \ldots, n$; soit $[S_{2i-1}, A_{2i+1}]$ l'union linéaire de l'espace S_{2i-1} avec l'i-ème espace osculateur de la courbe considérée ci-dessus passant par le point A_1, l'espace $[S_{2i-1}, A_{2i+2}]$ étant défini d'une manière analogue pour la courbe analogue passant par le foyer A_2 $(i = 1, \ldots, n - 1)$; le point A_{2n+1} soit choici d'une façon arbitraire. Les points analytiques A_k peuvent être normalisés d'une telle manière que l'on ait

$$[A_1A_2 \ldots A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}] = 1 \tag{3}$$

et que les équations fondamentales

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_1A_3\,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 \qquad\qquad + \omega_2A_4\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{d}A_{2i-1} &= \sum_{j=1}^{2i} \omega_{2i-1,j}A_j + \omega_1A_{2i+1}\,, \\
\mathrm{d}A_{2i} &= \sum_{j=1}^{2i} \omega_{2i,j}A_j \qquad\qquad + \omega_2A_{2i+2}\,, \\
&\qquad (i = 2\,, \ldots, n - 1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathrm{d}A_{2n-1} &= \sum_{j=1}^{2n+1} \omega_{2n-1,j}A_j\,, \\
\mathrm{d}A_{2n} &= \sum_{j=1}^{2n+1} \omega_{2n,j}A_j\,, \\
\mathrm{d}A_{2n+1} &= \sum_{j=1}^{2n+1} \omega_{2n+1,j}A_j
\end{aligned} \tag{4}$$

aient lieu.

Pour le point de départ des considérations suivantes nous prenons donc les équations

$$\omega_{2j-1,2j+2} = \omega_{2j,2j+1} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{5}$$

$$\omega_{2j-1,s} = \omega_{2j,s} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1; s = 2j+3, \ldots, 2n+1), \tag{6}$$

$$\omega_{2j-1,2j+1} = \omega_1, \quad \omega_{2j,2j+2} = \omega_2 \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

où je pose

$$\omega_1 = \omega_{13}, \quad \omega_2 = \omega_{23}. \tag{8}$$

Les conditions d'intégrabilité des équations (4) peuvent être écrites d'une manière générale sous la forme

$$[d\omega_{ij}] = [\omega_{ik}\omega_{kj}], \tag{9}$$

par une différentiation de (3) j'obtiens

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \omega_{ii} = 0. \tag{10}$$

Il faut encore trouver les conséquences différentielles des équations (5)—(7). On a

$$[d\omega_{2j-1,2j+2}] = \sum_{k=1}^{2j+2} [\omega_{2j-1,k}\omega_{k,2j+2}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1} [\omega_{2j-1,k}\omega_{k,2j+2}], \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{2j+2} [\omega_{2j-1,k}\omega_{k,2j+2}] = \sum_{p=1}^{j+1} [\omega_{2j-1,2p-1}\omega_{2p-1,2j+2}] + \sum_{q=1}^{j+1} [\omega_{2j-1,2q}\omega_{2q,2j+2}], \tag{11a}$$

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{j+1} [\omega_{2j-1,2p-1}\omega_{2p-1,2j+2}] &= \sum_{p=1}^{j-1} [\omega_{2j-1,2p-1}\omega_{2p-1,2j+2}] + \\ &+ [\omega_{2j-1,2j-1}\omega_{2j-1,2j+2}] + [\omega_{2j-1,2j+1}\omega_{2j+1,2j+2}],\end{aligned} \tag{11b}$$

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{j+1} [\omega_{2j-1,2q}\omega_{2q,2j+2}] &= \sum_{q=1}^{j-1} [\omega_{2j-1,2q}\omega_{2q,2j+2}] + \\ &+ [\omega_{2j-1,2j}\omega_{2j,2j+2}] + [\omega_{2j-1,2j+2}\omega_{2j+2,2j+2}],\end{aligned} \tag{11c}$$

$$[d\omega_{2j,2j+1}] = \sum_{k=1}^{2j+2} [\omega_{2j,k}\omega_{k,2j+1}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1} [\omega_{2j,k}\omega_{k,2j+1}], \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{2j+2} [\omega_{2j,k}\omega_{k,2j+1}] = \sum_{p=1}^{j+1} [\omega_{2j,2p-1}\omega_{2p-1,2j+1}] + \sum_{q=1}^{j+1} [\omega_{2j,2q}\omega_{2q,2j+1}], \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{j+1} [\omega_{2j,2p-1}\omega_{2p-1,2j+1}] &= \sum_{p=1}^{j-1} [\omega_{2j,2p-1}\omega_{2p-1,2j+1}] + \\ &+ [\omega_{2j,2j-1}\omega_{2j-1,2j+1}] + [\omega_{2j,2j+1}\omega_{2j+1,2j+1}],\end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{j+1} [\omega_{2j,2q}\omega_{2q,2j+1}] &= \sum_{q=1}^{j-1} [\omega_{2j,2q}\omega_{2q,2j+1}] + \\ &+ [\omega_{2j,2j}\omega_{2j,2j+1}] + [\omega_{2j,2j+2}\omega_{2j+2,2j+1}],\end{aligned} \tag{12c}$$

$$[\mathrm{d}\omega_{2j-1,s}] = \sum_{k=1}^{2j}[\omega_{2j-1,k}\omega_{ks}] + [\omega_{2j-1,2j+1}\omega_{2j+1,s}] + \\ + [\omega_{2j-1,2j+2}\omega_{2j+2,s}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1}[\omega_{2j-1,k}\omega_{ks}]\,, \tag{13}$$

$$[\mathrm{d}\omega_{2j,s}] = \sum_{k=1}^{2j}[\omega_{2j,k}\omega_{ks}] + [\omega_{2j,2j+1}\omega_{2j+1,s}] + \\ + [\omega_{2j,2j+2}\omega_{2j+2,s}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1}[\omega_{2j,k}\omega_{ks}]\,, \tag{14}$$

$$[\mathrm{d}\omega_{2j-1,2j+1}] = \sum_{k=1}^{2j-2}[\omega_{2j-1,k}\omega_{k,2j+1}] + [\omega_{2j-1,2j-1}\omega_{2j+1,2j+1}] + [\omega_{2j-1,2j}\omega_{2j,2j+1}] + \\ + [\omega_{2j-1,2j+1}\omega_{2j+1,2j+1}] + [\omega_{2j-1,2j+2}\omega_{2j+2,2j+1}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1}[\omega_{2j-1,k}\omega_{k,2j+1}]\,, \tag{15}$$

$$[\mathrm{d}\omega_{2j,2j+2}] = \sum_{k=1}^{2j-2}[\omega_{2j,k}\omega_{k,2j+2}] + [\omega_{2j,2j-1}\omega_{2j-1,2j+2}] + [\omega_{2j,2j}\omega_{2j,2j+2}] + \\ + [\omega_{2j,2j+1}\omega_{2j+1,2j+2}] + [\omega_{2j,2j+2}\omega_{2j+2,2j+2}] + \sum_{k=2j+3}^{2n+1}[\omega_{2j,k}\omega_{k,2j+2}]\,. \tag{16}$$

Ici les équations (11) et (12) sont prises pour $j = 1, \ldots, n-1$; les équations (13) et (14) pour $j = 1, \ldots, n-1$; $s = 2j+3, \ldots, 2n+1$, et enfin (15) et (16) pour $j = 2, \ldots, n-1$. Il est possible de simplifier encore les équations comme suit:

(11): la seconde somme s'annule en vertu de (6),

(11b): la première somme s'annule en vertu de (6), car on a $\omega_{2p-1,2j+2} = 0$ pour $p = 1, \ldots, j-1$, le second terme s'annule en raison de (5),

(11c): d'après (6) on a $\omega_{2q,2j+2} = 0$ pour $q = 1, \ldots, j-1$, la première somme s'annule; le troisième terme s'annule en raison de (5),

(12): la seconde somme s'annule, car on a d'après (6) $\omega_{2j,k} = 0$ pour $k = 2j+3, \ldots, 2n+1$,

(12b): on a $\omega_{2p-1,2j+1} = 0$ pour $p = 1, \ldots, j-1$; dans le troisème terme on ensuite $\omega_{2j,2j+1} = 0$ en raison de (5),

(12c): d'après (6) on a $\omega_{2q,2j+1} = 0$ pour $q = 1, \ldots, j-1$ et $\omega_{2j,2j+1} = 0$ en vertu de (5),

(13): d'après (6) on a $\omega_{ks} = 0$ dans la première somme pour $k = 1, \ldots, 2j$; $s = 2j+3, \ldots, 2n+1$, dans la suivante on a $\omega_{2j-1,k} = 0$ pour $j = 1, \ldots, n-1$; $k = 2j+3, \ldots, 2n+1$, le troisième terme s'annule en raison de (5),

(14): les deux sommes s'annulent comme dans le cas précédent, le second terme s'annule en vertu de (5),

(15) et (16): les deux sommes s'annulent en vertu de (6), le troisième et le cinquième terme dans (15) et le second et le quatrième terme dans (16) s'annulent en raison de (5).

Par la differentiation extérieure de (5) on obtient

$$
\begin{gathered}
[\omega_2\omega_{2j-1,2j}] + [\omega_{2j+1,2j+2}\omega_1] = 0\,,\\
[\omega_1\omega_{2j,2j-1}] + [\omega_{2j+2,2j+1}\omega_2] = 0\,,\\
(j = 1, \ldots, n-1)\,.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

D'après le lemme de Cartan on a donc

$$
\begin{array}{ll}
\omega_{12} = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1\,, & \omega_{21} = \beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2\,,\\
\omega_{34} = \alpha_2\omega_2 - \alpha_3\omega_1\,, & \omega_{43} = \beta_2\omega_1 - \beta_3\omega_2\,,\\
\omega_{56} = \alpha_3\omega_2 - \alpha_4\omega_1\,, & \omega_{65} = \beta_3\omega_1 - \beta_4\omega_2\,,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{2n-3,2n-2} = \alpha_{n-1}\omega_2 - \alpha_n\omega_1\,, & \omega_{2n-2,2n-3} = \beta_{n-1}\omega_1 - \beta_n\omega_2\,,\\
\omega_{2n-1,2n} = \alpha_n\omega_2 + \alpha_{n+1}\omega_1\,, & \omega_{2n,2n-1} = \beta_n\omega_1 + \beta_{n+1}\omega_2\,.
\end{array}
\tag{18}
$$

La différentiation extérieure de (6) nous donne

$$
\begin{gathered}
[\omega_1\omega_{2j+1,s}] = [\omega_2\omega_{2j+2,s}] = 0\\
(j = 1, \ldots, n-1;\ s = 2j+3, \ldots, 2n+1)\,.
\end{gathered}
$$

Or si l'on a $j = 1, \ldots, n-2$, on trouve de (5)—(7) que

$$
\begin{gathered}
\omega_{2j+1,2j+3} = \omega_1,\ \ \omega_{2j+1,2j+4} = 0,\ \ \omega_{2j+1,2j+5} = \ldots = \omega_{2j+1,2n+1} = 0\,,\\
\omega_{2j+2,2j+3} = 0,\ \ \omega_{2j+2,2j+4} = \omega_2,\ \ \omega_{2j+2,2j+5} = \ldots = \omega_{2j+2,2n+1} = 0
\end{gathered}
$$

de sorte que les équations précédentes sont vérifiées. Pour $j = n-1$ on obtient $s = 2n+1$ et les conditions d'intégrabilité des équations (7) se réduisent a

$$
[\omega_1\omega_{2n-1,2n+1}] = [\omega_2\omega_{2n,2n+1}] = 0\,;
\tag{19}
$$

le lemme de Cartan donne alors

$$
\omega_{2n-1,2n+1} = \gamma_1\omega_1\,,\quad \omega_{2n,2n+1} = \gamma_2\omega_2\,.
\tag{20}
$$

En différentiant extérieurement les équations (7) on obtient pour $j = 2, \ldots, \ldots, n-1$

$$
\begin{gathered}
[\omega_1(\omega_{2j+1,2j+1} - \omega_{2j-1,2j-1} + \omega_{11} - \omega_{33})] =\\
= [\omega_2(\omega_{2j+2,2j+2} - \omega_{2j,2j} + \omega_{22} - \omega_{44})] = 0
\end{gathered}
\tag{21}
$$

et

$$
\begin{gathered}
\omega_{2j+1,2j+1} - \omega_{2j-1,2j-1} + \omega_{11} - \omega_{33} = {}^1\varepsilon_{j-1}\omega_1\,,\\
\omega_{2j+2,2j+2} - \omega_{2j,2j} + \omega_{22} - \omega_{44} = {}^2\varepsilon_{j-1}\omega_2\,.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Le congruence L dans S_{2n} est donc déterminée par le système fermé (5)—(7), (17), (19), (21).

2. Je procède à une spécialisation ultérieure du repère. Les conditions d'intégrabilité des équations (18) sont

$$[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}})] - [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2\overline{\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{11}} - \omega_{32})] = 0\,,$$

$$[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_j + \alpha_j\overline{\omega_{2j,2j} - \omega_{2j-1,2j-1} + \omega_{22} - \omega_{44}} - \omega_{2j-1,2j-2})] -$$
$$- [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_{j+1} + \alpha_{j+1}\overline{\omega_{2j,2j} - \omega_{2j-1,2j-1} + \omega_{11} - \omega_{33}} - \omega_{2j-1,2j})] = 0$$
$$(j = 2, \ldots, n-1)\,,$$

$$[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_n + \alpha_n\overline{\omega_{2n,2n} - \omega_{2n-1,2n-1} + \omega_{22} - \omega_{44}} - \omega_{2n-1,2n-2})] +$$
$$+ [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}\overline{\omega_{2n,2n} - \omega_{2n-1,2n-1} + \omega_{11} - \omega_{33}} + \gamma_1\omega_{2n+1,2n})] = 0\,,$$

$$[\omega_1(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\overline{2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}})] - [\omega_2(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2\overline{\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{22}} - \omega_{41})] = 0\,,$$

$$[\omega_1(\mathrm{d}\beta_j + \beta_j\overline{\omega_{2j-1,2j-1} - \omega_{2j,2j} + \omega_{11} - \omega_{33}} - \omega_{2j,2j-3})] -$$
$$- [\omega_2(\mathrm{d}\beta_{j+1} + \beta_{j+1}\overline{\omega_{2j-1,2j-1} - \omega_{2j,2j} + \omega_{22} - \omega_{44}} - \omega_{2j+2,2j-1})] = 0$$
$$(j = 2, \ldots, n-1)\,,$$

$$[\omega_1(\mathrm{d}\beta_n + \beta_n\overline{\omega_{2n-1,2n-1} - \omega_{2n,2n} + \omega_{11} - \omega_{33}} - \omega_{2n,2n-3})] +$$
$$+ [\omega_2(\mathrm{d}\beta_{n+1} + \beta_{n+1}\overline{\omega_{2n-1,2n-1} - \omega_{2n,2n} + \omega_{22} - \omega_{44}} + \gamma_2\omega_{2n+1,2n-1})] = 0\,. \tag{23}$$

Il en vient donc pour $j = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \delta\alpha_j &= \alpha_j(e_{2j-1,2j-1} - e_{2j,2j} + e_{44} - e_{22}) + e_{2j-1,2j-2}\,, \\ \delta\beta_j &= \beta_j(e_{2j,2j} - e_{2j-1,2j-1} + e_{33} - e_{11}) + e_{2j,2j-3} \end{aligned} \tag{24}$$

et le repère peut être spécialisé d'une telle sorte que

$$\alpha_j = \beta_j = 0 \quad (j = 2, \ldots, n)\,. \tag{25}$$

Les équations (18) deviennent alors

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{34} = \omega_{56} = \ldots = \omega_{2n-3,2n-2} = 0\,, \quad \omega_{2n-1,2n} = \alpha_{n+1}\omega_1\,, \\ &\omega_{21} = \beta_1\omega_1\,, \quad \omega_{43} = \omega_{65} = \ldots = \omega_{2n-2,2n-3} = 0\,, \quad \omega_{2n,2n-1} = \beta_{n+1}\omega_2 \end{aligned} \tag{26}$$

avec les conditions d'intégrabilité

$$[\omega_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}})] + [\omega_1\omega_{32}] = 0\,,$$
$$[\omega_2\omega_{2j-1,2j-2}] - [\omega_1\omega_{2j-1,2j}] = 0 \quad (j = 2, \ldots, n-1)\,,$$
$$[\omega_2\omega_{2n-1,2n-2}] -$$
$$- [\omega_1(\mathrm{d}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}\overline{\omega_{2n,2n} - \omega_{2n-1,2n-1} + \omega_{11} - \omega_{33}} + \gamma_1\omega_{2n+1,2n})] = 0\,, \tag{27}$$
$$[\omega_1(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\overline{2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}})] + [\omega_2\omega_{41}] = 0\,,$$
$$[\omega_1\omega_{2j,2j-3}] - [\omega_2\omega_{2j+2,2j-1}] = 0 \quad (j = 2, \ldots, n-1)\,,$$
$$[\omega_1\omega_{2n,2n-3}] -$$
$$- [\omega_2(\mathrm{d}\beta_{n+1} + \beta_{n+1}\overline{\omega_{2n-1,2n-1} - \omega_{2n,2n} + \omega_{22} - \omega_{44}} + \gamma_2\omega_{2n+1,2n+1})] = 0\,.$$

Les équations fondamentales de la congruence L dans S_{2n} sont donc (5)—(7), (26), (20) *qui donnent un système fermé avec* (27), (21) *et les conditions d'intégrabilité des équations* (20) *qui sont*

$$\begin{aligned}&[\omega_1(\mathrm{d}\gamma_1 + \gamma_1\overline{\omega_{2n+1,2n+1} - \omega_{2n-1,2n-1} + \omega_{11} - \omega_{33}})] - \gamma_2[\omega_2\omega_{2n-1,2n}] = 0\,,\\ &\gamma_1[\omega_1\omega_{2n,2n-1}] - [\omega_2(\mathrm{d}\gamma_2 + \gamma_2\overline{\omega_{2n+1,2n+1} - \omega_{2n,2n} + \omega_{22} - \omega_{44}})] = 0\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Il s'ensuit des équations quadratiques que

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1 &= \alpha_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22})\,,\\ \delta\beta_1 &= \beta_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11})\,,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\delta\gamma_1 &= \gamma_1(e_{2n-1,2n-1} - e_{2n-1,2n+1} + e_{33} - e_{11})\,,\\ \delta\gamma_2 &= \gamma_2(e_{2n,2n} - e_{2n+1,2n+1} + e_{44} - e_{22})\,,\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\delta\alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}(e_{2n-1,2n-1} - e_{2n,2n} + e_{33} - e_{11}) - \gamma_1 e_{2n+1,2n},\\ \delta\beta_{n+1} &= \beta_{n+1}(e_{2n,2n} - e_{2n-1,2n-1} + e_{44} - e_{22}) - \gamma_2 e_{2n+1,2n-1}\,.\end{aligned} \tag{31}$$

Les relations

$$e_{2j+1,2j+1} - e_{2j-1,2j-1} + e_{11} - e_{33} = e_{2j+2,2j+2} - e_{2j,2j} + e_{22} - e_{44} = 0 \tag{32}$$

qui découlent de (22) pour $j = 2, \ldots, n-1$, seront également utile. On en obtient

$$\begin{aligned}e_{2n-1,2n-1} &= e_{33} + (n-2)(e_{33} - e_{11})\,,\\ e_{2n,2n} &= e_{44} + (n-2)(e_{44} - e_{22})\end{aligned} \tag{33}$$

de sorte qu'il est possible d'écrire les équations (30) sous la forme

$$\begin{aligned}\delta\gamma_1 &= \gamma_1(e_{33} + \overline{n-1}\,.\,\overline{e_{33} - e_{11}} - e_{2n+1,2n+1})\,,\\ \delta\gamma_2 &= \gamma_2(e_{44} + \overline{n-1}\,.\,\overline{e_{44} - e_{22}} - e_{2n+1,2n+1})\,.\end{aligned} \tag{34}$$

Ou trouve enfin très facilement les variations des formes principales:

$$\delta\omega_1 = (e_{11} - e_{33})\,\omega_1\,, \quad \delta\omega_2 = (e_{22} - e_{44})\,\omega_2\,. \tag{35}$$

3. Dans S_{2n}, les droites de la congruence L sont jointes aux repères ponctuelles $A_1, \ldots, A_{2n+1}$, or à chaque droite on peut également faire correspondre un repère d'hyperplan $E_1, \ldots, E_{2n+1}$, où

$$E_r = (-1)^r[A_1 \ldots A_{r-1}A_{r+1} \ldots A_{2n+1}] \quad (r = 1, \ldots, 2n+1)\,. \tag{36}$$

L'hyperplan E_{2n+1} est évidemment le n-ème espace osculateur de la congruence L le long de la droite $[A_1A_2]$, il engendre dans l'espace S^*_{2n}, duel à l'espace S_{2n}, une courbe ou une surface, appelée *dualisation* L^* de la congruence L. Je me borne au cas des congruences L dont la dualisation L^* est une surface. En vertu de

$$\mathrm{d}E_{2n+1} = -\,\omega_{2n+1,2n+1}E_{2n+1} - \gamma_1\omega_1E_{2n-1} - \gamma_2\omega_2E_{2n} \tag{37}$$

on a alors nécessairement

$$\gamma_1\gamma_2 \neq 0 . \tag{38}$$

Dans ce cas est possible, en vertu de (31), une spécialisation ultérieure des repères par laquelle on peut obtenir

$$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} = 0 . \tag{39}$$

On trouve alors par un calcul direct, en partant des équations (29), (34) et (35), que *les formes*

$$\varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2 , \tag{40}$$

$$\varphi_1 = \alpha_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\omega_2^{n+1}}{\omega_1^n} , \qquad \varphi_2 = \beta_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_2^n} \tag{41}$$

sont invariantes; la forme (40) sera appelée *forme ponctuelle,* les forms (41) seront appelées *forme hyperplanaire de première et de seconde espèces* de la congruence considérée. On a, bien entendu,

$$\varphi = \varphi_1\varphi_2 , \tag{42}$$

l'expression

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\beta_1\gamma_1^2\omega_1^{2n+1} + \alpha_1\gamma_2^2\omega_2^{2n+1}}{\gamma_1\gamma_2\omega_1^n\omega_2^n} \tag{43}$$

sera appelée *élément linéaire projectif de la congruence L.*

Il n'est pas difficile d'établir le degré de généralité des congruences dont l'élément linéaire projectif est donné d'avance. Soit donc donnée une forme arbitraire

$$\Phi = \frac{f(u, v)\, \mathrm{d}u^{2n+1} + g(u, v)\, \mathrm{d}v^{2n+1}}{\mathrm{d}u^n\, \mathrm{d}v^n} . \tag{44}$$

Pour la congruence L ayant (44) pour son élément linéaire projectif on doit avoir

$$\omega_1 = \mathrm{d}u , \quad \omega_2 = \mathrm{d}v , \tag{45}$$

$$\beta_1\gamma_1\gamma_2^{-1} = f , \quad \alpha_1\gamma_2\gamma_1^{-1} = g . \tag{46}$$

Par la différentiation extérieure de (45) il vient

$$[\mathrm{d}u(\omega_{33} - \omega_{11})] = [\mathrm{d}v(\omega_{44} - \omega_{22})] = 0 , \tag{47}$$

$$\omega_{33} - \omega_{11} = r_1\, \mathrm{d}u , \quad \omega_{44} - \omega_{22} = r_2\, \mathrm{d}v . \tag{48}$$

En différentiant extérieurement (46) j'obtiens après un calcul traînant les équations

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2^{-1}(\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1\overline{2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}}) + \mu_2\, \Delta\gamma_1 + \mu_3\, \Delta\gamma_2 = \mu_4\, \mathrm{d}u + \mu_5\, \mathrm{d}v , \\ \gamma_1^{-1}\gamma_2(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}}) + \nu_2\, \Delta\gamma_1 + \nu_3\, \Delta\gamma_2 = \nu_4\, \mathrm{d}u + \nu_5\, \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{49}$$

où

$$\begin{aligned} \varDelta\gamma_1 &= \mathrm{d}\gamma_1 + \gamma_1(\omega_{2n+1,2n+1} - \omega_{2n-1,2n-1} + \omega_{11} - \omega_{33})\,, \\ \varDelta\gamma_2 &= \mathrm{d}\gamma_2 + \gamma_2(\omega_{2n+1,1n+1} - \omega_{2n,2n} + \omega_{22} - \omega_{44})\,. \end{aligned} \tag{50}$$

La différentiation extérieure des équations (49) conduit, bien entendu, à une identité. Les congruences dont l'élément linéaire projectif est (44), sont donc déterminées par les équations (5)—(7), (26), (20), (45), (49) qui donnent un système fermé avec les équations (27), (21), (28), (47); il faut en même temps tenir compte de (39). Je me contente d'affirmer seulement sans démonstration que *les congruences L dans l'espace S_{2n} dont l'élément linéaire projectif est donné d'avance, existent et dépendent de 4n fonctions d'une variable.*

4. Il nous reste à éclaircir la signification géométrique de l'égalité des éléments linéaires projectifs de deux congruences. Soient données deux congruences L et L' en *transformation développable,* les repères correspondants étant spécialisés comme dans les cas précédents. Soit

$$\omega_1 = \omega_1'\,, \quad \omega_2 = \omega_2' \tag{51}$$

la transformation en question.

Je considère la courbe $\varkappa_1\ \omega_2 = 0$ (ou $\varkappa_2\ \omega_1 = 0$) de la surface focale (A_1) (ou (A_2) resp.) passant par le foyer d'une certaine droite donnée $p_0 \in L$ et des courbes analogues $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$ associées à la droite correspondante $p_0' \in L'$; ces courbes étant évidemment des courbes du réseau conjugué de la surface focale, dont les tangentes ne sont pas les droites des congruences considérées.

J'appelle *homographie fondamentale* de la correspondance (51) l'homographie K existant entre les espaces S_{2n}, S_{2n}' et qui, pour tout couple de droites correspondantes p_0, p_0', réalise un contact géométrique d'ordre $n-1$ des courbes $\varkappa_1$, $\varkappa_1'$ et $\varkappa_2$, $\varkappa_2'$ qui passent par les foyers correspondants des droites p_0 et p_0'. Il s'ensuit aisément de la forme même des équations des congruences L et L' que l'homographie fondamentale K est de la forme

$$\begin{aligned} KA_{2i-1} &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2i-1,2j-1} A_{2j-1}' + \varrho A_{2i-1}'\,, \\ KA_{2i} &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{2i,2j} A_{2j}' + \varrho^{-1} A_{2i}' \quad (i = 1, \ldots, n)\,, \\ KA_{2n+1} &= \sum_{j=1}^{2n+1} \alpha_{2n+1,j} A_j' \end{aligned} \tag{52}$$

où

$$\begin{aligned} KE_{2n+1} &= E_{2n+1}'\,, \\ KE_{2n-1} &= \alpha_{2n+1,2n+1}\varrho^{-1}E_{2n-1}' - \alpha_{2n+1,2n-1}\varrho^{-1}E_{2n+1}'\,, \\ KE_{2n} &= \alpha_{2n+1,2n+1}\varrho E_{2n}' - \alpha_{2n+1,2n}\varrho E_{2n+1}'\,. \end{aligned} \tag{53}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que K réalise un contact de premier ordre des premières surfaces focales (A_1) et (A'_1), ou des secondes surfaces focales (A_2) et (A'_2), ou encore des dualisations (E_{2n+1}) et (E'_{2n+1}) est évidemment

$$KA_1 = \varrho A'_1\,, \quad K\,\mathrm{d}A_1 = (\,.\,)\,A'_1 + \varrho\,\mathrm{d}A'_1 \tag{54}$$

ou resp.

$$KA_2 = \varrho^{-1}A'_2\,, \quad K\,\mathrm{d}A_2 = (.)\,A'_2 + \varrho^{-1}\,\mathrm{d}A'_2 \tag{55}$$

ou encore

$$KE_{2n+1} = E'_{2n+1}\,, \quad K\,\mathrm{d}E_{2n+1} = (.)\,E'_{2n+1} + \mathrm{d}E'_{2n+1}\,. \tag{56}$$

En y substituant on trouve que ces conditions se réduisent à l'existence de ϱ et $\alpha = \alpha_{2n+1,\,2n+1}$ tels que

$$\alpha_1 = \varrho^2\alpha'_1 \tag{57}$$

ou resp.

$$\beta_1 = \varrho^{-2}\beta'_1 \tag{58}$$

ou encore

$$\alpha\gamma_1 = \varrho\gamma'_1\,, \quad \alpha\gamma_2 = \varrho^{-1}\gamma'_2\,. \tag{59}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'homographie fondamentale réalise un contact de premier ordre des i-èmes surfaces focales des congruences L et L' et de leurs dualisations L^* et L'^* est donc l'égalité des formes hyperplanaires d'i-ème espèce: $\varphi_i = \varphi'_i$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'homographie fondamentale réalise un contact de premier ordre des deux surfaces focales des congruences considérées et de leurs dualisations est l'égalité des éléments linéaires projectifs des deux congruences.

Remarque 1. Dans mon travail *Déformation projective des congruences de droites dans S_n* (Czechosloval Math. Journal, *5 (80)* 1955, 546—558) j'ai étudié, dans le cas $n = 2$, la déformation projective de second ordre. Il est aisé de voir que, dans ce cas, la déformation projective d'ordre deux des congruences L et L' est équivalente à l'égalité $\Phi = \Phi'$ de sorte que le théorème d'existence de déformations projectives d'une congruence donnée est alors un cas spécial du théorème d'existence des congruences à Φ donné.

Remarque 2. Comme la dualisation L^* de la congruence L est évidemment une surface *générale* à réseau conjugué dans S_{2n}, *il est possible de regarder la théorie précédente aussi comme une théorie de ces surfaces.*

Резюме

КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

При надлежащем подборе репера в работе ищется инвариантная форма прямолинейной конгруенции общего вида, лежащей в проективном пространстве четной размерности S_{2n}. Этот т. наз. проективный линейный элемент имеет вид (44). Прямолинейные конгруэнции с наперед заданным элементом существуют и зависят от $4n$ функций одного переменного. Дается геометрический смысл равенства двух форм на двух конгруэнциях при помощи дуализации данной конгруэнции прямых, которая является поверхностью с сопряженной сетью в двойственном пространстве S_{2n}^{*}. Теория прямолинейных конгруэнций в пространствах четной размерности равносильна теории поверхностей с сопряженной сетью этих пространств, что придает более важное значение предыдущим результатам.