Czechoslovak Mathematical Journal

Ivo Babuška

Об алгорифме Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 328–343

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100308

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ОБ АЛГОРИФМЕ ШВАРЦА В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška), Прага

(Поступило в редакцию 13/V 1957 г.)

В работе доказана сходимость алгорифма Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики и показана его функционально-аналитическая сущность. Кроме того, приведены некоторые новые сходящиеся алгорифмы шварцовского типа.

Введение

Почти сто лет тому назад К. Г. А. Шварц построил алгорифм для решения задачи Дирихле на областях, которые представляют собой объединение двух или нескольких областей более простого типа, причем на каждой из этих областей умеем задачу Дирихле решать.

Алгорифм, выведенный Шварцом, состоит в следующих приемах: пусть, например, нам надо решить задачу Дирихле на области Ω, которая представляет собой объединение двух кругов с непустым пересечением. Если символами K_i, γ_i $(i = 1, 2)$ обозначить соответственно эти круги и их границы, то будет $\Omega = K_1 \cup K_2$. Обозначим еще через γ_1', соотв. через γ_2', ту часть границы γ_1, соотв. γ_2, которая находится внутри K_2, соотв. K_1. Пусть на границе Γ области Ω задано непрерывное краевое условие. На γ_1' определим произвольное краевое условие так, чтобы на γ_1 возникло непрерывное краевое условие. Решение задачи Дирихле на K_1 с такими краевыми условиями определит на γ_2' краевое условие для дальнейшего решение на K_2. Последним решением будет определено новое краевое условие на γ_1 для решения проблемы на K_1 и т. д. Шварц доказал, что построенная таким образом последовательность решений задач Дирихле для K_1 и K_2 сходится к искомому решению.

Важно, что таким способом можно при помощи решений на более простых областях получить решение на области более сложной. Это имеет большое значение не только для теоретических рассуждений, например, для вопросов существования, но также и для численного решения. Часто, то есть, случается, что этот алгорифм является сравнительно простым, сходимость не бывает слишком медленной, и описанный способ решения является по существу единственным преодолимым путем к нахождению численного решения.

Сам Шварц, и затем целый ряд авторов изучали этот алгорифм. В доказательстве всегда играла существенную роль теорема о максимуме. Наконец, предположения, гарантирующие сходимость алгорифма Шварца, оказались выраженными в пяти условиях (см., напр. [1]), которые выполнены, например, в случае эллиптических уравнений второго порядка.

В случае уравнений высшего порядка (например, в случае бигармонической проблемы) теорема о максимуме не имеет места. Поэтому алгорифм Шварца необходимо изучать другими способами. Одним из них является применение т. наз. прямых методов (вариационных). Так поступил С. Л. Соболев [2]. Подобные методы применяет и С. Г. Михлин [3], [4], который изучает определенный класс эллиптических самосопряженных задач. Вопросы, связанные с алгорифмом Шварца, изучал также М. Прагер [5]. С применением метода проекторов встречаемся у Д. Моргенштерна [6]. В [7] и [8] И. Бабушка затрагивает некоторые результаты, о которых будет речь ниже.

Другой путь к изучению алгорифма Шварца состоит в применении интегральных уравнений (см. [9]).

Все авторы занимаются изучением лишь специальных задач; это в особенности касается краевых условий.

Алгорифм Шварца является в сущности вполне естественным. Если умеем легко решить проблему для всех краевых условий на областях специального вида (в приведенном выше примере знаем решение на круговой области), то путем постепенных поправок получим искомое решение.

Постепенные поправки можно проводить различными способами. Так, например, умеем довольно легко решить бигармоническую задачу на прямоугольнике, если на его двух противолежащих сторонах в качестве краевых условий заданы значения искомой функции и ее второй производной в направлении нормали. Воспользовавшись этим, можем теперь решить бигармоническую задачу на прямоугольнике, если в качестве краевых условий заданы на всей границе значения искомой функции и ее первой производной в направлении нормали. (См. Бабушка [7], [8], [10].) Эту задачу решаем постепенно таким образом, что на двух противоположных сторонах прямоугольника выполняем краевые условия только приближенно, подставляя вместо первых производных вторые, и постепенно исправляем возникающие погрешности. И в этом случае можем, как увидим в дальнейшем, говорить об алгорифме шварцовского типа.

Можем предполагать, что указанными ниже приемами можно будет доказывать сходимость широкого класса алгорифмов этого типа.

1. О некоторых теоремах функционального анализа

В этом отделе докажем некоторые теоремы, которые представляют собой функционально-аналитическую основу алгорифмов шварцовского типа.

Теорема 1. *Пусть H — пространство Гильберта (полное), H_i, $i = 1, 2$, — его подпространства. Обозначим через P_i, $i = 1, 2$, оператор проектирования на H_i, а через P — проекционный оператор на $H_1 \cap H_2$. Тогда* $(P_2P_1)^n \to P$.[1])

Доказательство. Сначала напомним некоторые известные свойства операторов проектирования:

1. Проектор P является идемпотентным, т. е. $P^2 = P$.

2. Проектор P является симметрическим оператором, т. е. $(Px, y) = (x, Py)$.

3. Норма оператора равна единице, т. е. $\|P\| = 1$.

Теперь введем вспомогательный оператор $C = P_1P_2P_1$ и легко проверим, что он обладает следующими свойствами.

1. Оператор C^m, $m = 1, 2, \ldots$ является симметрическим оператором.

2. Оператор C является неотрицательным, т. е. для любого $x \in H$, $(Cx, x) \geqq 0$.

3. $\|C\| \leqq 1$.

4. Оператор C^m, $(m = 1, 2, \ldots)$ является неотрицательным, и $\|C^m\| \leqq 1$.

5. $D_m = E - C^m$, $(m = 1, 2, \ldots)$ является неотрицательным и симметрическим оператором.[2])

6. D_m и C^n, m, $n = 1, 2, \ldots$ являются перестановочными операторами.

7. Оператор $B_{m,n} = D_mC^n, m, n = 1, 2, \ldots$ является неотрицательным оператором.

Свойства 1—6 оператора C очевидны. Утверждение 7 вытекает из 1, 2, 4, 5, 6 и из известной теоремы функционального анализа о произведении неотрицательных перестановочных операторов (см., напр., [12], стр. 257).

Пусть теперь $x \in H$, $x_m = C^mx$; докажем, что x_m образуют сходящуюся последовательность. Обозначим $\beta_m = (C^mx, x) = (x_m, x)$, $m = 1, 2, \ldots$ Последовательность $\beta_m, m = 1, 2, \ldots$ представляет собой в силу свойства 4 последовательность неотрицательных чисел. Докажем еще, что она не

---

[1]) $T_n \to T$ означает, что для любого $x \in H$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_nx = Tx$.

Теорему 1 доказал другим способом, основанным на спектральном анализе, Н. Винер [11].

[2]) E означает тождественный оператор.

возрастает. Действительно, согласно свойствам 6 и 7 оператора C для $m < n$ имеем

$$\beta_m - \beta_n = ((C^m - C^n)\, x, x) = (C^m(E - C^{n-m})\, x, x) = (C^m D_{n-m} x, x) \geqq 0\,.$$

Итак, мы имеем дело с ограниченной снизу невозрастающей последовательностью; следовательно, существует $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n \geqq 0$. Далее будет

$$\|C^m x - C^n x\|^2 = ((C^m - C^n)\, x\,, \quad (C^m - C^n)\, x) =$$
$$= (C^{2m}x, x) - 2(C^{m+n}x, x) + (C^{2n}x, x) = \beta_{2m} - 2\beta_{m+n} + \beta_{2n}\,.$$

Потому что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta$, последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ является фундаментальной последовательностью, и потому что H — полное пространство, существует $x = \lim x_n$. Далее, справедливы равенства $Cx_0 = C \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Cx_n = x_0$; поэтому $x_0 = Cx_0 = P_1P_2P_1x_0 = P_1P_1P_2P_1x_0 = P_1x_0$, следовательно, $x_0 \in H_1$ и $P_1P_2x_0 = x_0$. Однако необходимо будет $x_0 \in H_2$. В противном случае было бы $\|P_2x_0\| < \|x_0\|$, и, следовательно, ввиду того, что $\|P_1\| = 1$, было бы также $\|P_1P_2x\| < \|x_0\|$. Итак, $x_0 \in H_1 \cap H_2$. Последовательность операторов C^m, $m = 1, 2, \ldots$ сходится к некоторому оператору B (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} C^m \to B$), который отображает H на $H_1 \cap H_2$. Также легко проверим, что B является линейным симметрическим идемпотентным оператором; следовательно, он является проектором P на $H_1 \cap H_2$. Этим доказано наше утверждение, потому что $(P_2P_1)^{n+1} = P_2C^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Из теоремы 1 сразу же получаем

Следствие теоремы 1. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любого $x \in H$ было $\lim\limits_{n\to\infty} (P_2P_1)^n x = 0$, следующее: $H_1 \cap H_2 = 0$.*

Замечание 1. Мы доказали теорему 1 для двух подпространств H_i, $i = 1, 2$. Совершенно одинаково можно было бы доказать сходимость оператора $(P_1P_2P_3 \ldots P_mP_{m-1} \ldots P_2P_1)^n$, где P_i — проекторы на H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Теперь дадим иную формулировку теоремы 1, которая нам впоследствии понадобится.

Теорема 2. *Пусть H — полное пространство Гильберта и H_i, $i = 1, 2$ — его подпространства. Пусть P — проектор на ортогональное поплонение по отношению к $H_1 + H_2$. Пусть $x_0 \in H$; построим последовательность $x_{2k} = x_{2k-1} + v_{2k}$ ($k = 1, 2, \ldots$) где элемент $v_{2k} \in H_2$ представляет собой $\min\limits_{v \in H_2} \|x_{2k-1} + v\|$.*

Пусть, далее, $x_{2k+1} = x_{2k} + v_{2k+1}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), где $v_{2k+1} \in H_1$ представляет собой $\min\limits_{v \in H_1} \|x_{2k} + v\|$. Тогда $x_k \to y$, $y = Px_0$.

Доказательство. Прежде всего очевидно, что существует только одно единственное v_k, $k = 1, 2, \ldots$ Если мы через $\tilde{H}_i$ обозначим ортогональные пополнения пространства H_i $(i = 1, 2)$ а через P_i — проекторы на $\tilde{H}_i$ $(i = 1, 2)$, то, очевидно, будет $x_{2k+1} = P_1 x_{2k}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $x_{2x} = P_2 x_{2x-1}$, $(k = 1, 2)$. Теперь наше утверждение уже вытекает из теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекает также непосредственно

Следствие теоремы 2. *Для того, чтобы последовательность x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, определенная по алгорифму теоремы 2, сходилась к нулю для любого $x_0 \in H$, необходимо и достаточно, чтобы $H_1 + H_2 = H$.*

Замечание 1. Прием, описанный в теореме 2, можем понимать как обобщение итерационного метода Зейделя для решения системы двух линейных уравнений.

Замечание 2. Если только H будет конечномерным пространством, то все перечисленные операторы будут, конечно, сходиться не только по точкам, но и по норме, т. е. равномерно. Если H имеет бесконечно много измерений, возникает затруднение в том, что угол между подпространствами H_1 и H_2 может быть равным нулю. В том случае, когда этот угол отличен от нуля, можно легко получить более сильный результат, а именно, что операторы сходятся по норме.

2. Об алгорифме Шварца для объединения и пересечения двух областей

В этом отделе докажем алгорифм Шварца для объединения и пересечения двух областей, а именно для т. наз. регулярных задач.

Определение: 1. *Пусть $\Omega \subset E_m$ — ограниченная область, представляющая собой сумму конечного числа звездообразных областей. Пусть ее граница состоит только из $(m - 1)$-мерных многообразий и пусть эта граница является простой в смысле С. Л. Соболева (см. [13], стр. 91).*[3]

2. *Существует линеал M — мы будем называть его фундаментальным линеалом — функций, обладающих всеми непрерывными производными вплоть до порядка $2l$, определенных на Ω и удовлетворяющих заданным однородным нулевым краевым условиям; этот линеал является плотным в пространстве Гильберта L_2 функций с интегрируемым квадратом.*

3. *Пусть A — линейный самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2l$ на M, отображающий M в L_2.*

4. *Пусть существуют положительные постоянные C и c так, что для любого $u \in M$*

$$C\|u\|^2_{W_2^{(l)}} \geqq (Au, u) \geqq c\|u\|^2_{W_2^{(l)}} \,,$$

[3]) С. Л. Соболев называет границу простой, если она, приближенно говоря, состоит из конечного числа достаточно гладких частей.

где $\|u\|_{W_2^{(l)}}$ *означает норму в пространстве* $W_2^{(l)}$, *причем символом* $W_2^{(l)}$ *обозначено пространство всех функций, l-тые обобщенные производные которых интегрируемы с квадратом, и с соответствующей нормой* (*см.* [3] *и* [13]).

5. *Пусть* H_A — *пополнение линеала* M *со скалярным произведением* $[u, v] = (Au, v)$.[4])

6. *На линеале всех функций из* L_2 *на* Ω *определим норму соотношением*

$$\|v\|_{\mathfrak{P}} = \sup_{u \in M} \left| \frac{(v, u)}{\|u\|} \right| .$$

Пусть $\mathfrak{P}$ —*пополнение этого линеала по отношению к введенной норме. Пусть, наконец,* $f \in \mathfrak{P}$.[5])

Задачу найти функцию φ, *которая является решением уравнения* $A\varphi = f$, $f \in \mathfrak{P}$ *с соответствующими однородными нулевыми краевыми условиями на* Ω (*которым удовлетворяют все функции* $u \in M$), *называем задачей регулярного типа, если существует в точности одно решение* $\varphi \in H_A$ *поставленной задачи, да еще такое, что оно минимализирует функционал*

$$\|u\|^2 - 2(f, u) \quad \text{на} \quad H_A .$$

К определению 1 сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. Оператор A является на M положительно определенным. Действительно, из теорем вложения С. Л. Соболева (см. [13]) следует, что $\|u\|_{L_2} \leqq k\|u\|_{W_2^{(l)}}$. Далее, $(Au, u) \geqq c\|u\|^2_{W_2^{(l)}}$. Поэтому $(Au, u) \geqq \frac{c}{k^2} \|u\|^2_{L_2}$.

Замечание 2. Из замечания 1 видно, что все элементы H_A содержатся также в L_2; следовательно, элементами H_A служат только функции из L_2.

Замечание 3. Линеал $\mathfrak{P}$ содержит все функции $f \in L_2$. Действительно, $(u, f) \leqq \|u\|_{L_2}\|f\|_{L_2} \leqq \frac{k}{c} \|f\|_{L_2} \|u\|$.

Замечание 4. Очевидно, что как только $v \in H_A$, то $Av \in \mathfrak{P}$.

Замечание 5. Пространство $\mathfrak{P}$ изучал также Й. Л. Лион [14]. Так, например, в случае оператора Лапласа пространство $\mathfrak{P}$ состоит из линейных комбинаций первых производных от функций с интегрируемым квадратом (в смысле обобщенных функций (распределений) Шварца).

Замечание 6. Регулярная задача определена своим фундаментальным линеалом и оператором A, обладающим соответствующими требуемыми свойствами и отображающим M в L_2.

Замечание 7. Приведем некоторые примеры задач регулярного типа.

---

[4]) Скалярное произведение в L_2 будем обозначать символом (u, v), а в H_A — символом $[u, v]$. Далее будем обозначать $\|u\|^2 = [u, u]$ и $\|u\|^2_{L_2} = (u, u)$.

[5]) Свойства нормы выполняются очевидно. — Введенная норма действительно имеет смысл для всех функций из L_2 (см. замечание 3).

Определим оператор A следующим образом:

$$Au(x) = -\sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{i,k}(x)\ \frac{\partial u}{\partial x_k}\right),$$

Пусть $A_{i,k}$ ($A_{ik} = A_{k,i}$) имеют непрерывные производные на $\overline{\Omega}$ и пусть, кроме того, для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

$$\sum_{i,k}^{n} A_{i,k} t_i t_k \geqq \mu_0 \sum_{i=1}^{m} t_i^2\,, \quad \mu_0 > 0\,.$$

Пусть краевыми условиями служат однородные нулевые условия Дирихле, т. е. пусть на границе заданы нулевые значения искомой функции. Линеал M образован всеми функциями, равными тождественно нулю в некоторой окрестности границы (см. [3], стр. 119) и имеющими $2l$ непрерывных производных. В линеале $\mathfrak{P}$ будут также находиться обобщенные функции вида Au, где $u \in W_2^{(1)}$. Точнее говоря: если $u_n \to u$, $v_n \to u$ в $W_2^{(1)}$ и если u_n и v_n имеют все непрерывные производные второго порядка, то $f_n = Au_n \to f$, $g_n = Av_n \to f$ в $\mathfrak{P}$, так что можем писать $f = Au$. (Сравни с замеч. 5; о выполнении краевых условий и дифференциального уравнения см. [3], стр. 149—157.)

Замечание 8. Приведем еще другой пример регулярной задачи. Оператор A будет тот же, что в предыдущем замечании. Краевые условия зададим (смешанными) в следующем виде

$$\left\{\sigma(x) \sum_{i,\,k} A_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) + \sigma_2(x)\, u\right\}_s = 0\,, \tag{a}$$

где S — граница области Ω, ν — внешняя нормаль в S, $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ — неотрицательные кусочно-непрерывные функции, определенные на S и удовлетворяющее соотношению $\sigma_1(x) + \sigma_2(x) > a > 0$.

Фундаментальный линеал в этом случае содержит все функции, которые, включая первые частные производные, являются непрерывными и могут быть продолжены на S, причем здесь выполняют краевое условие (a).

Дальнейшим примером могут служить полигармонические операторы и т. д.

Замечание 9. Регулярная задача — это неоднородная задача с однородными краевыми условиями. Однако можно эту задачу свести к однородной задаче с неоднородными краевыми условиями. Так, например, решая задачу Дирихле для уравнения Лапласа с неоднородными краевыми условиями, будем предполагать, что существует функция $\psi \in W_2^{(1)}$, удовлетворяющая на границе заданным условиям. Затем будем решать задачу

$$\Delta u = \Psi$$

с заданными нулевыми краевыми условиями на границе. При этом $\Psi = \Delta\psi$. Эту задачу можно решить минимализацией квадратичного функционала, если учесть, что $\Psi \in \mathfrak{P}$ (см. замечание 4). Искомое решение задачи Дирихле тогда будет $v = -u + \psi$. Функция v является гармонической, и выполнение краевых условий надо понимать в среднем (см. [3]). В общем в этой задаче встречаемся с теми же проблемами, как при решении задач с неоднородными краевыми условиями.

Замечание 10. Решение задачи по определению 1 (см. также зам. 9) можем рассматривать, как обобщение решения классических задач. Во всех конкретных случаях, как только существуют классическое и обобщенное решения для одинаковых краевых условий и одной и той же правой части, эти решения равны между собой.

Замечание 11. Определение 1 охватывает и случаи, когда, приближенно говоря, имеем дело с равномерно эллиптическими операторами (см. замечание 7). Это ограничение является излишне стеснительным. Метод, который здесь приводится, может быть, опять-таки приближенно говоря, использован всегда, когда надо произвести минимализацию квадратичного функционала описанного типа. А это можно, например, и в случае некоторых вырождающихся на границе оператора (см., напр., [15]).

Теперь докажем сходимость алгорифма Шварца для объединения двух областей.

Теорема 3. *Пусть Ω_1, Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ — области, удовлетворяющие тем же условиям, как в определении 1. Пусть на Ω определена регулярная задача $Aw = \chi$, $\chi \in \mathfrak{P}$, порядка $2l$ (см. определение 1). Обозначим $\Omega_2' = \Omega_1 - \Omega_2$, $\Omega_1' = \Omega_2 - \Omega_1$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$. Далее, пусть M — фундаментальный линеал, соответствующий данной задаче и пусть w_0 — решение этой задачи. Пусть $M_1 \subset M$, $i = 1, 2$ — линеал всех функций из M, которые тождественно равны нулю на Ω_i', $i = 1, 2$; пусть, наконец, $H_A^{M_i}$, $i = 1, 2$, означает замыкание M_i в H_A. Теперь построим следующую последовательность:*

$$u_0 = 0\,, \quad u_{2k} = u_{2k-1} + v_{2k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где $v_{2k} \in H_A^{M_2}$ минимализирует квадратичный функционал

$$\|u_{2k-1} + v\|^2 - 2(\chi, u_{2k-1} + v) \quad \text{на } H_A^{M_2}\,.$$

Далее еще $u_{2k+1} = u_{2k} + v_{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, где $v_{2k+1} \in H_A^{M_1}$ минимализирует функционал $\|u_{2k} + v\|^2 - 2(\chi, u_{2k} + v)$ на $H_A^{M_1}$. Тогда $u_k \to w_0$.

Доказательство. I. Легдо можно доказать, что $H_A^{M_1} + H_A^{M_2} = H_A$.

II. По условию теоремы (u, χ) является ограниченным функционалом в H_A. Следовательно, существует $w \in H_A$ так, что $(u, \chi) = [u, w]$. Но так как можем написать

$$[u, u]^2 - 2(\chi, u) = \|u - w\|^2 - \|w\|^2\,,$$

будет по определению 1 $w = w_0$ (w_0 есть решение данной задачи). Поэтому минимализация функционала

$$\|u\|^2 - 2(\chi, u) \quad \text{на } H_A$$

равносильна минимализации функционала

$$\|u - w_0\|^2 \quad \text{на } H_A .$$

В таком случае функции v_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$, соотв. v_{2k+1}, $k = 0, 1, \ldots$ минимализируют квадратичные функционалы

$$\|u_{2k-1} + v - w_0\|^2 \quad \text{на } H_A^{M_2}, \text{ соотв. } u_{2k} \| + v - w_0\|^2 \quad \text{на } H_A^{M_1} .$$

Теперь введем обозначение $y_i = u_i - w_0$ [$i = 0, 1, 2, \ldots$]. Легко можно обнаружить, что имеем дело с тем же алгорифмом, как в теореме 2, т. е. $y_i = x_i$. Учитывая I, видим, что $y_i \to 0$, $u_1 \to w_0$ и, следовательно, что требовалось доказать.

Определение 2. *Пусть символы Ω_1, Ω_2, Ω, M_1, M_2, M означают те же множества, а A — тот же оператор, что в теореме 3. В дальнейшем будем называть присоединенной задачей задачу, фундаментальным линеалом которой является M_i, $i = 1, 2$, а оператор которой $A_i = A$ на M_i.*

Замечание 1. Оператор A имеет на M_i, $i = 1, 2$ все требуемые свойства (см. также замечание 6 к определению 1).

Замечание 2. Дадим пример присоединенной задачи по отношению к оператору и задаче, поставленной в замечании 8 к определению 1. В этом случае для присоединенной задачи на Ω_1 имеем следующие краевые условия:

$$\left\{\sigma(x) \sum A_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) + \sigma_2(x)\, u\right\}_{S \cap S_1} = 0\,, \quad \{u\}_{S_1 - S} = 0\,.$$

При этом мы через S обозначили границу области Ω, а через S_1 границу области Ω_1. Следовательно, на $S_1 - S$ заданы краевые условия Дирихле.

Теорема 4. *Пусть символы Ω_1, Ω_2, Ω, Ω_0, Ω_1', Ω_2', M, M_1, M_2 означают те же области и те же линеалы, как в теореме 3. Пусть на Ω дана регулярная задача порядка $2l$ для оператора A и линеала M (см. определение 1). Пусть w_0 является решением задачи $Aw = \chi \in \mathfrak{P}$. Тогда можно построить следующую последовательность функций: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{2k} = \varphi_{2k-1}$ на Ω_2', $\varphi_{2k} = \varphi_{2k-1} + v_{2k}$ на Ω_2, $k = 1, 2, \ldots$, где v_{2k} является решением присоединенной задачи на Ω_2 с правой частью $\chi - A\varphi_{2k-1} \in \mathfrak{P}$, $\varphi_{2k+1} = \varphi_{2k}$ на Ω_1', $\varphi_{2k+1} = \varphi_{2k} + v_{2k+1}$ на Ω_1, $(k = 0, 1, \ldots)$, где v_{2k+1} является решением присоединенной задачи на Ω_1 с правой частью $\chi - A\varphi_{2k} \in \mathfrak{P}$. Тогда $\varphi_k \to w_0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Прежде всего очевидно, что $A\varphi_k \in \mathfrak{P}$, $k = 1, 2, \ldots$, потому что $\varphi_k \in H_A$ (см. также замечание 4 к опред. 1). Поэтому также $\chi - A\varphi_k \in \mathfrak{P}$, что доказывает, что последовательность φ_k можно построить.

Теперь уже легко докажем, что последовательность функций φ_k, построенная в этой теореме, тождественно равна последовательности u_k из теоремы 3. Это действительно так, потому что функция v_{2k} минимализирует функционал

$$[v, v] - 2(\chi - A\varphi_{2k-1}, v) \quad \text{на} \quad H_A^{M_2}.$$

Всегда можем писать

$$[v, v] - 2(\chi - A\varphi_{2k-1}, v) = [v, v] - 2(\chi, v) + 2[\varphi_{2k-1}, v] =$$
$$= [v + \varphi_{2k-1}, v + \varphi_{2k-1}] - 2(\chi, v + \varphi_{2k-1}) - [\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k-1}] + 2(\chi, \varphi_{2k-1}),$$

откуда следует, что $\varphi_{2k} = u_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Так же докажем, что $\varphi_{2k+1} = u_{2k+1}$. Этим утверждение полностью доказано.

Замечание 1. Алгорифм Шварца для задачи Дирихле, описанный в начале этой работы, является непосредственным следствием теоремы 4. Действительно, предположим, что $\chi = -A\psi$, $\psi \in W_2^{(1)}$. Тогда в случае задачи Дирихле будет $\chi \in \mathfrak{P}$; в таком случае функции $\psi + \varphi_k$ $[k > 0]$ являются на Ω_1', Ω_2', Ω_0 гармоническими функциями, и функция $\psi + \varphi_{2k}$ принимает на границе $S \cap S_2$ те же значения, как функция ψ, а на $S_2 - S$ — те же значения как функция φ_{k-1}. При этом через S обозначена граница области Ω, а через S_2 — граница области Ω_2.

Из теоремы 4 следует сходимость алгорифма Шварца не только для тех краевых условий, которые являются допустимыми в том смысле, что для таких существуют удовлетворяющие им функции $\psi \in W_2^{(1)}$, но также и для краевых условий, когда существуют функции ψ, удовлетворяющие данным краевым условиям и соотношению $A\psi \in \mathfrak{P}$.

Замечание 2. Рассматривая краевые условия Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения, С. Г. Михлин (ср. [3], стр. 159) с помощью вариационного метода доказал сходимость алгорифма Шварца только в L_2, в то время как из наших рассуждений вытекает сходимость и в $W_2^{(1)}$.

Определение 3. *Пусть символы Ω_1, Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, Ω_1', Ω_2', M, M_1, M_2 означают те же области и линеалы, как в теореме 3. Пусть на Ω дана задача регулярного типа для оператора A и для данного краевого однородного нулевого условия. Пусть $M_1^+ \subset M$ и $M_2^+ \subset M$ означают, соответственно, линеалы всех функций, которые в некоторой окрестности множества $H(\Omega_1) \cap \Omega_2$, соотв. $H(\Omega_2) \cap \Omega_1$,[5]) равны тождественно нулю. Пусть, далее, $M_0^+ = M_1^+ \cap M_2^+$. Присоединенной задачей типа $\Omega_1 * \Omega_2$, соотв. $\Omega_2 * \Omega_1$, соотв. $\Omega_1 * \Omega_2 * \Omega_0$ назовем теперь такую задачу, фунда-*

[5]) Символом $H(\Omega_i)$ обозначена граница множества Ω_i.

ментальным линеалом которой является M_1^+, соотв. M_2^+, соотв. M_0^+ и оператор которой $A_i = A$ на M_i^+, ($i = 0, 1, 2$).

Замечание 1. Дадим пример присоединенной задачи типа $\Omega_1 * \Omega_2$, типа $\Omega_2 * \Omega_1$ и типа $\Omega_1 * \Omega_2 * \Omega_0$ относительно уравнения $\Delta u = f$ с нулевыми краевыми условиями Дирихле $u = 0$ на границе для случая, когда Ω_1 и Ω_2 — непересекающиеся круги в плоскости. Тогда решение присоединенной задачи типа $\Omega_2 * \Omega_1$ состоит в нахождении функций u_1 и u_2, определенных, соответственно, на Ω_2 и Ω_2' и таких, что $\Delta u_1 = f$ на Ω_2, соотв. $\Delta u_2 = f$ на Ω_2', с условиями $u = 0$ на границе области Ω_2 и Ω_2'.

Аналогично и присоединенная задача типа $\Omega_1 * \Omega_2 * \Omega_0$ сводится к задаче найти функции u_1, u_2, u_0, определенные соответственно на Ω_2', Ω_1', Ω_0, удовлетворяющие уравнению $\Delta u_i = f$, $i = 0, 1, 2$ и равные нулю на границе их областей определения. См. также замечание 1 к определению 2.

Теперь уже докажем сходимость алгорифма Шварца для пересечения двух областей.

Теорема 5. *Пусть символы Ω_1, Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq 0$, Ω_1', Ω_2' означают те же области, как в теореме 3. Пусть на Ω поставлена задача типа $Au = f$, $f \in \mathfrak{P}$ с заданными однородными нулевыми краевыми условиями. Пусть M_0^+, M_1^+, M_2^+ — линеалы присоединенных задач по определению 3, а $H_A^{M_0^+}$, $H_A^{M_1^+}$, $H_A^{M_2^+}$ — их замыкания в H_A. Пусть w_0 — решение присоединенной задачи на $\Omega_1 * \Omega_2 * \Omega_0$ и w_1 — решение присоединенной задачи на $\Omega_1 * \Omega_2$.*

Построим еще следующую последовательность: $u_0 = w_1$, $u_{2k} \in H_A^{M_1^+}$ [$k = 1, 2, \ldots$], u_{2k} минимализирует функционал

$$\|u\|^2 - 2[n_{2k-1}, u] \quad \text{на } H_A^{M_1^+}, \quad u_{2k+1} \in H_A^{M_2^+} \quad [k = 0, 1, 2, \ldots]$$

минимализирует функционал $\|u\|^2 - 2[u_{2k}, u]$ на $H_A^{M_2^+}$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = w_0$.

Доказательство. Через P_1 и P_2 обозначим соответственно проекционный оператор множества H_A на $H_A^{M_1^+}$ и на $H_A^{M_2^+}$. Так как, очевидно, $[u_{2k-1}, u] = [P_1 u_{2k-1}, u]$ для всех $u \in H_A^{M_1^+}$ и так как на $H_A^{M_1^+}$

$$\|u\|^2 - 2[u_{2k-1}, u] = [u - P_1 u_{2k-1}, u - P_1 u_{2k-1}] - [P_1 u_{2k-1}, u_{2k-1}],$$

будет $u_{2k} = P_1 u_{2k-1}$.

Аналогично и $u_{2k+1} = P_2 u_{2k}$. Следовательно, $u_{2k} = (P_1 P_2)^k u_0$. Вследствие этого по теореме 1 будет $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = P_0 u_0$, где P_0 есть проектор на $H^{M_0^+}$.

Теперь докажем, что $P_0 u_0 = w_0$. Действительно, $w_1 = u_0$ по предположению минимализирует функционал $\|u\|^2 - 2(f, u)$ на $H_A^{M_1^+}$. Поэтому на $H_A^{M_1^+}$

$$(f, u) = [w_1, u], \quad u \in H_A^{M_1^+}$$

и, следовательно, ввиду $M_0^+ \subset M_1^+$, $[w_1, u] = (f, u)$ для $u \in H_A^{M_0^+}$. Поэтому также будет

$$(f, u) = [P_0 u, u_0] = [u, P_0 u_0]\,, \quad u \in H_A^{M_0^+}\,.$$

Но в таком случае w_0 минимализирует на $H_A^{M_0^+}$ функционал

$$\|u\|^2 - 2(f, u) = \|u\|^2 - 2[P_0 u_0, u]\,,$$

откуда следует, что $w_0 = P_0 u_0$. Этим теорема полностью доказана.

Замечание 1. В теореме 5 содержится известный алгорифм Шварца для пересечения двух областей. Покажем это на примере задачи Пуасона для уравнения Лапласа. Действительно, анализируя ближе приемы, описанные в теореме 5, легко обнаружим, что дело заключается в следующем: На Ω_1 и Ω_1' найдем решение задачи $\Delta u_0 = f$. Затем на Ω_2 и Ω_2' решим задачу $\Delta u_1 = \Delta u_0$ с однородными краевыми условиями, что практически сводится к решению на Ω_2 и Ω_2' задачи Дирихле $\Delta u_1^* = 0$ для случая, когда на общей части границы области Ω_2 и Ω_2' и границы области Ω, заданы краевые условия $u_1^* = 0$, а на остающихся частях $u_1^* = u_0$. Тогда $u_1 = u_0 - u_1^*$. Аналогично поступаем дальше. Очевидно, что на Ω_1' и Ω_2' мы вовсе не должны решать поставленные задачи в том случае, когда нас интересует только решение на Ω_0.

3. О некоторых алгорифмах шварцовского типа

В этом отделе укажем дальнейшие возможности применения теоремы 1 к алгорифмам шварцовского типа. Ради простоты ограничимся здесь только некоторыми специальными примерами. Примеров, подобных перечисленным здесь, можно построить целый ряд.

Теорема 6. *Пусть $\Omega \subset E_n$ — область из определения* 1. *Пусть S — граница этой области. Пусть, кроме того, $S_i \subset S$, $i = 1, 2, 3$ — связные взаимно не пересекающиеся части границы такие что $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Пусть на S задана функция, которая интегрируема с квадратом. Пусть A — самосопряженный оператор вида*

$$Au = -\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{i,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right),$$

где $A_{i,k}$ $(A_{i,k} = A_{k,i})$ — коэффициенты, имеющие на Ω непрерывные производные; пусть для производных $t_1, \ldots, t_n$

$$\sum_{i,k=1}^{n} A_{i,k} t_i t_k \geqq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} t_i^2\,, \quad \mu_0 > 0\,.$$

Пусть, наконец, $\varphi \in W_2^{(1)}$ *— решение смешанной задачи* $A\varphi = 0$ *с краевым условием* $\varphi]_{S_1} = 0$ (*на* S_1), $\left[\sum_{i,k=1}^{n} A_{i,k} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \cos(\nu x_i)\right]_{S_2 \cup S_3} = f$ (*на* $S_2 \cup S_3$), *где через* ν *обозначена внешняя нормаль* (*всюду, где она существует*).

Теперь построим следующую последовательность: $\varphi_0 = 0$, φ_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$ *пусть является решением задачи* $A\varphi_{2n} = 0$ *с краевыми условиями* $\varphi_{2n}]_{S_1} = 0$ (*на* S_1), $\varphi_{2n} = \varphi_{2n-1}]_{S_2}$ (*на* S_2) *и*

$$\left[\sum_{i,k=1}^{n} A_{i,k} \frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial x_k} \cos(\nu x_i)\right]_{S_3} = f \quad (\text{на } S_3) .$$

Далее, пусть φ_{2n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$ *является решением задачи* $A\varphi_{2k+1} = 0$ *с краевыми условиями* $\varphi_{2n+1}]_{S_1} = 0$ (*на* S_1), $\varphi_{2n+1} = \varphi_{2n}]_{S_3}$ (*на* S_3) *и*

$$\left[\sum_{i,k} A_{i,k} \frac{\partial\varphi_{2n+1}}{\partial x_k} \cos(\nu x_i)\right]_{S_2} = f \quad (\text{на } S_2) .$$

Тогда $\varphi_n \to \varphi$ (*по норме* $W_2^{(1)}$).

Доказательство. Если через M_0 обозначим линеал всех функций, обладающих всеми производными, равных нулю на S_1 и удовлетворяющих на $S_2 \cup S_3$ однородному условию Неймана, то легко обнаружим, что А является положительно определенным оператором (см. напр., [3]). Далее, ввиду того, что условие Неймана является естественным краевым условием (см. например, [3]), в соответствующем пространстве $H_A^{M_0}$ содержатся все функции из $W_2^{(1)}$, которые равны нулю на S_1.

Далее, искомое решение φ минимализирует на $H_A^{M_0}$ функционал

$$\|u\|^2 - 2(f, u) , \tag{a}$$

где

$$(f, u) = \int_S fu \, \mathrm{d}S \quad \text{и} \quad \|u\|^2 = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} A_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, \mathrm{d}\Omega .$$

Доказательство можно проводить аналогично тому, как оно проведено в [13] при решении задачи Неймана. Пусть, далее, $M_1 \subset M_0$, $M_2 \subset M_0$ означают соответственно линеалы всех достаточно гладких функций, равных нулю на $S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cup S_3$.

Таким же образом, как в первой части доказательства теоремы 3, можно доказать, что $H_A^{M_1} + H_A^{M_2} = H_A^{M_0}$. А теперь пусть будет $u \in H_A^{M_0}$, и пусть w минимализирует функционал

$$\|u + w\|^2 - 2(f, (u + w)) \quad \text{на } H_A^{M_1} \text{ или же на } H_A^{M_2} .$$

Тогда функция $\varphi = u + w$ является решением уравнения $A\varphi = 0$ с краевыми условиями $\varphi = 0$ на S_1, $\varphi = u$ на S_2 или же на S_3,

$$\left[\sum_{i,k} A_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos (\nu x_i)\right]_{S_3 \text{ соотв. } S_2} = f\,.$$

Что эти краевые условия выполняются, можно доказать аналогично как в [13] при решении задачи Нейманна. Равенство на S_3 или же на S_2 имеет здесь место в слабом смысле. Пусть теперь функция w минимализирует функционал (а) на $H_A^{M_0}$. Тогда для любого $u \in H_A^{M_0}$ будет $[u, w] = (f, u)$. Поэтому

$$\|u\|^2 - 2(f, u) = [u - w, u - w] - [w, w]$$

для всех $u \in H_A^{M_0}$. Из этого ясно, что вместо функционала (а) можем рассматривать функционал

$$[u - w\,, \quad u - w]\,. \tag{б}$$

Теперь построим алгорифм $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{2n} = \varphi_{2n-1} + v_{2n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ где v_{2n} минимализирует функционал $\|w - (\varphi_{2n-1} + v)\|$ на $H_A^{M_1}$ и $\varphi_{2n+1} = \varphi_{2n} + v_{2n+1}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$, где v_{2n+1} минимализирует функционал

$$\|w - (\varphi_{2n} + v)\| \quad \text{на } H_A^{M_1}\,.$$

Легко видно, что φ_n образует последовательность, описанную в утверждении теоремы. Кроме того, обозначив $\psi_n = w - \varphi_n$, получим по теореме 2, что $\psi_n \to 0$ в $W_2^{(1)}$. Этим наше утверждение полностью доказано.

Прием, использованный в теореме 7, может найти широкое применение. Приведем еще одну из многочисленных возможностей.

Будем решать бигармоническую задачу на прямоугольнике $O = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[|x| < a,\ |y| < b]$ для случая, когда на его границе заданы наперед значения искомой функции и ее первой производной в направлении нормали. Пусть S — граница прямоугольника O. Пусть $S = S_1 \cup S_2$, где $S_1 = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[|x| \leqq a,\ |y| = b]$, $S_2 = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[|x| = a,\ |y| \leqq b]$. Пусть краевые условия заданы так, что искомая бигармоническая функция равна нулю, на S_1 $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x)$, а $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$ на S_2. Предположим, что функция f обладает тем свойством, что к ней существует бигармоническая функция $w \in W_2^{(2)}$, выполняющая эти краевые условия. Если имеется последовательность функций из $W_2^{(2)}$, удовлетворяющим краевых условиям

$$u_0 = 0 \text{ на } S,\ \left.\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_{S_1} = f\,,\quad \left.\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]_{S_2} = 0$$

$$u_{2n+1} = 0 \quad \text{на} \quad S, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \left.\frac{\partial^2 u_{2n+1}}{\partial y^2}\right]_{S_1} = 0\,,\quad \left.\frac{\partial u_{2n+1}}{\partial x}\right]_{S_2} = -\left.\frac{\partial u_{2n}}{\partial x}\right]_{S_2}\,,$$

$$u_{2n} = 0 \quad \text{на} \quad S,\ n = 1, 2, \ldots,\ \left.\frac{\partial u_{2n}}{\partial y}\right]_{S_1} = -\left.\frac{\partial u_{2n-1}}{\partial y}\right]_{S_1},\ \left.\frac{\partial^2 u_{2n}}{\partial x^2}\right]_{S_2} = 0\,,$$

то можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} u_i = w \in W_2^{(2)}$ и что w — искомое решение. Сходимость осуществляется в пространстве $W_2^{(2)}$, а вследствие теорем вложения С. Л. Соболева также и в пространстве C.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. В. Канторович, В. И. Крылов:* Приближенные методы высшего анализа. Москва, 1952.

[2] *С. Л. Соболев:* Алгорифм Шварца в теории упругости ДАН СССР т. IV (XIII), (1936), 236—238.

[3] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала. Москва, 1952.

[4] *С. Г. Михлин:* Об алгорифме Шварца. ДАН СССР *77* (1951), 569—571.

[5] *M. Prager:* Schwarzův algoritmus pro polyharmonické funkce. Aplikace matematiky, *3* (1958), 2, 106—114.

[6] *D. Morgenstern:* Begründung des alternierenden Verfahrens durch Orthogonalprojektion. ZAMM, *36* (1956), 7/8,

[7] *И. Бабушка:* О численном решении бигармонической задачи на полуполосе. III-й съезд математиков, Москва, 1956.

[8] *I. Babuška:* Über Schwarzsche Algorithmen in partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik ZAMM, *37* (1957), 7/8, 243—245.

[9] *S. G. Michlin*, Integrální rovnice. Praha 1952.

[10] *I. Babuška, L. Mejzlík:* Výskum možností betonáže vysokých pracovných vrstiev na priehradě Orlík s ohľadom na termické vlastnosti daných zložiek betonu. Praha, Bratislava 1956.

[11] *N. Wiener:* On the Factorisation of Matrices. Comm. Math. Helv. *29*, 1955, 97—111.

[12] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев:* Элементы функционального анализа. Москва, 1951.

[13] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[14] *J. L. Lions:* Problèmes aux limites en théorie des distributions. Acta Math. *94*, (1955), 1—2, 13—153.

[15] *С. Г. Михлин:* О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям. ДАН СССР, т. *91* (1953), 723—726.

Zusammenfassung

ÜBER SCHWARZSCHE ALGORITHMEN IN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

IVO BABUŠKA, Praha

(Eingelangt am 13. Mai 1957)

Diese Arbeit löst die Konvergenzfragen der Schwarzschen Algorithmen. Es wird gezeigt, dass für positiv definite selbstadjungierte Probleme alle Schwarzschen Algorithmen aus folgendem Satz hervorgehen.

Es sei ein vollständiger Hilbertscher Raum H gegeben, H_i, $i = 1, 2$ seien seine Unterräume. Man bezeichne P_i, $i = 1, 2$ die Projektoren auf H_i, P den Projektor auf $H_1 \cap H_2$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} (P_2P_1)^n(x) \to P(x)$ für $x \in H$.

Es wird die Konvergenz der Schwarzschen Algorithmen für die Vereinigung und den Durchschnitt zweier Gebiete und für allgemein positiv definite selbstadjungierte Probleme bewiesen. Weiter werden Algorithmen, die Algorithmen vom Schwarzschen Typ genannt sind, angegeben, und ihre Konvergenz bewiesen. Es handelt sich um solche Algorithmen, bei denen die Randbedingungen nicht genau erfüllt werden, wobei dieser Fehler schrittweise beseitigt wird.