Jindřich Nečas

О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 283–298

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100410

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ДИРИХЛЕ

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 19/V 1959 г.)

В настоящей работе доказывается существование и единственность решения задачи Дирихле для эллиптического оператора второго порядка при условии, что краевое условие интегрируемо с квадратом. Граница области может быть довольно нерегулярной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее эффективных методов решения эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных является вариационный метод. Помимо более старых классических работ К. Фридрихса в настоящее время возник ряд работ, благодаря которым можно считать основную теорию эллиптических уравнений в частных производных в общем законченной, конечно, с теми ограничениями, которые связаны с методом, основанном на ограниченности интеграла Дирихле. Из этих работ мы упомянем в особенности работу Ж. Л. Лионса и Ж. Дени [1] и работу Ж. Л. Лионса [2].

Если воспользоваться теоремой Грина и равенством Реллиха, которое мы выведем по методу, предложенному в работе Л. Э. Пэйна и Г. Ф. Вейнбергера [3], то требование ограниченности интеграла Дирихле можно заменить более слабым требованием, чтобы искомое решение было в исследуемой области Ω интегрируемо со второй степенью. Относительно краевого условия мы предполагаем, что оно интегрируемо со второй степенью на границе.

Настоящая работа разделяется, считая и это краткое введение, на шесть частей.

Вторая часть посвящается геометрическим предположениям, кроме того в ней упоминаются или выводятся основные соотношения для пространств Беппо Леви.

В третьей части решаются задачи Дирихле и Пуассона в предположении ограниченного интеграла Дирихле.

В четвертой части выводится неравенство Реллиха, которое важно для пятой части, где решается задача Дирихле без предположения об ограниченности интеграла Дирихле.

Краткая шестая часть содержит заключительные замечания.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Пусть E_n обозначает n-мерное евклидово пространство с координатами $[x_1, x_2, \dots x_n]$. Пусть Ω — ограниченная область. Область будет принадлежать к множеству $\mathfrak{N}$, если будут выполнены следующие предположения:

1. Существует m систем координат в E_n и m функций a_r, $r = 1, 2, \dots m$, так, что каждую точку границы можно записать хотя бы в одной из этих систем координат в виде

$$[x_{r1}, x_{r2}, \dots x_{rn-1}, a_r(x_{r1}, \dots x_{rn-1})] ,$$

что мы будем записывать сокращенно $[X_r, a_r(X_r)]$. Относительно функций a_r мы предполагаем, что они липшицевские в круговой окрестности $|X_r| < \alpha$ с фиксированной константой K.

2. Существует число $\beta \leqq 1$ так, что точки с координатами $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ лежат внутри Ω, а точки с координатами $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ лежат вне $\bar{\Omega}$.

3. Существует последовательность подобластей Ω_k, $k = 1, 2, \dots$ таких, что $\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \subset \dots \subset \Omega$, $\lim\limits_{k\to\infty} \Omega_k = \Omega$. При этом точки границ областей Ω_k можно записать в виде $[X_r, a_{rk}(X_r)]$, где функции a_{rk} являются в окрестности $|X_r| < \alpha$ бесконечно дифференцируемыми, липшицовскими с одной и той же константой K (независимо от k) и

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{|X_r|<\alpha} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}} - \frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2\right] \mathrm{d}X_r = 0 , \quad a_r(X_r) - \beta < a_{rk}(X_r) \leqq a_r(X_r) .$$

Заметим, что предположение 3 выполняется обычно автоматически, если выполнено предположение 1 и 2. Всю разрабатываемую в дальнейшем теорию можно построить и без выполнения предположения 3; однако, тогда нам пришлось бы преодолеть более значительные технические трудности.

Напрашивается гипотеза, что предположение 3 является следствием предположения 1 и 2.

В случае, если $\Omega_1 = \Omega$, мы будем писать $\Omega \in \mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$. Поскольку в дальнейшем не будет оговорено противное, исследуемая область всегда будет принадлежать классу $\mathfrak{N}$.

Пусть теперь $BL(\Omega)$ — линейное пространство вещественных обобщенных функций на Ω, первые производные которых интегрируемы на Ω

с квадратом. (Понятие обобщенной функции, производной обобщенной функции и т. д. см. Л. Шварц [4].) Обозначим, далее, через $L_2(\Omega)$ пространство функций, интегрируемых с квадратом на Ω. Справедлива важная теорема

Теорема 2.1. *Если $u \in BL(\Omega)$, то $u \in L_2(\Omega)$.*

Теорема 2.1 нам говорит, что область Ω из $\mathfrak{N}$ есть область Никодима и является прямым следствием теоремы (1, V) работы Э. Гальярдо [5]. Введем теперь в пространство $BL(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{\Omega} \delta^{ij} u'_i v'_j \,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} uv \,\mathrm{d}\Omega \,, \tag{2.1}$$

где $u'_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. (В последующем изложении производные всегда понимаются в смысле обобщенных функций, суммирование производится по общепринятому способу, δ^{ij} — дельта Кронекера.) Теперь имеет место

Теорема 2.2. *$BL(\Omega)$ со скалярным произведением* (2.1) *есть пространство Гильберта.*

$BL(\Omega)$ со скалярным произведением (2.1) мы будем обозначать, как обычно, через $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Теорема 2.2 непосредственно следует из теоремы (1.II) работы [5]. Обозначим теперь символом $\mathscr{E}(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в Ω, непрерывно продолжаемых со всеми своими производными на $\overline{\Omega}$. Справедлива следующая теорема о „плотности":

Теорема 2.3. $\overline{\mathscr{E}(\Omega)} = W_2^{(1)}(\Omega)$. (Замыкание берётся в норме пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$.)

Теорема 2.3 является следствием теоремы (2.I) из работы [5].

Функции из $W_2^{(1)}(\Omega)$ принимают в некотором смысле краевые значения, которые мы будем называть следами. Обозначим символом $L_2(\dot{\Omega})$ пространство функций, интегрируемых с квадратом на границе $\dot{\Omega}$. Понятие следа можно ввести на основании следующей теоремы:

Теорема 2.4. *Существует одно и только одно линейное и непрерывное отображение Z пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ в пространство $L_2(\dot{\Omega})$ такое, что для $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ будет $Z(u) = u$ на границе $\dot{\Omega}$.*

Доказательство. Рассмотрим часть границы Λ_r, представленную в локальных координатах функцией $x_{rn} = a_r(X_r)$. (В течении доказательства индексы r мы опустим.)

Пусть $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. Имеем

$$u(X, a(X)) = u(X, \xi) + \int_{\xi}^{a(X)} \frac{\partial u}{\partial x_n}(X, \eta)\,\mathrm{d}\eta \,,$$

где $a(X) - \beta < \xi < a(X)$. (Смысл β см. п. 2 в определении области типа $\mathfrak{N}$.) Отсюда следует, что

$$(2.2) \qquad u^2(X, a(X)) \leqq 2\left[u^2(X, \xi) + \beta \int\limits_{a(X)-\beta}^{a(X)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_n}(X, \eta)\right]^2 \mathrm{d}\eta\right].$$

Проинтегрировав обе части неравенства (2.2) по ξ в интервале $(a - \beta, a)$, получим

$$(2.3) \qquad \beta u^2(X, a(X)) \leqq 2\left[\int\limits_{a(X)-\beta}^{a(X)} u^2(X, \xi)\,\mathrm{d}\xi + \beta^2 \int\limits_{a(X)-\beta}^{a(X)} \left[\frac{\partial u}{\partial x_n}(X, \eta)\right]^2 \mathrm{d}\eta\right].$$

Помножим теперь обе стороны неравенства (2.3) на выражение $\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\partial a}{\partial x_i}(X)\right]^2}$ и проинтегрируем по множеству $|X| < \alpha$. Таким образом мы получим

$$(2.4) \qquad \beta \int\limits_{A} u^2\,\mathrm{d}S \leqq 2\sqrt{1 + (n-1)K^2}\left[\int\limits_{\Omega'} u^2\,\mathrm{d}\Omega + \beta^2 \int\limits_{\Omega'} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 d\Omega\right].$$

Здесь Ω' — часть области Ω: $|X| < \alpha$, $a(X) - \beta < x_n < a(X)$. Из (2.4) нетрудно вывести неравенство

$$\int\limits_{A} u^2\,\mathrm{d}S \leqq \frac{2}{\beta}\sqrt{1 + (n-1)K^2}\,\|u\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}.$$

Так как $\sum\limits_{r=1}^{m} A_r = \dot{\Omega}$, имеем

$$(2.5) \qquad \|u\|_{L_2(\dot{\Omega})} \leqq C\|u\|_{W_2^{(1)}(\Omega)}.$$

Здесь C — фиксированная константа.

Дадим теперь определение $Z(u) = u$ для $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. Пусть $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Существует $u_k \to u$ в $W_2^{(1)}(\Omega)$ так, что $u_k \in \mathscr{E}(\Omega)$. Из неравенства (2.5) следует, что u_k — последовательность Коши в $L_2(\dot{\Omega})$. Пусть $Z(u) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $L_2(\dot{\Omega})$. Ясно, что определенное таким образом отображение удовлетворяет, ввиду (2.5), требованиям теоремы 2.4 и что оно единственно. Доказательство закончено.

Пусть теперь $\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство функций бесконечно дифференцируемых и с носителем в Ω. Пусть $W_{2,0}^{(1)}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$. Замыкание берётся в норме пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть, с другой стороны, $V(\Omega)$ есть пространство тех функций u из $W_2^{(1)}(\Omega)$, следы которых равны нулю. Справедлива важная

Теорема 2.5. $V(\Omega) = W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$.

Доказательство. Прежде всего очевидно, что $W_{2,0}^{(1)}(\Omega) \subset V(\Omega)$. Обозначим через U_r области $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$. Пусть, далее, U — такая область, что $U \subset \bar{U} \subset \Omega$ и $\sum_{r=1}^{m} U_r + U \supset \bar{\Omega}$. Теперь существуют бесконечно дифференцируемые неотрицательные функции φ_r, соотв. φ, с носителями в U_r, соотв. в U, для которых $\sum_{r=1}^{m} \varphi_r + \varphi = 1$ в $\bar{\Omega}$. Пусть теперь $u \in V(\Omega)$. Пусть по определению u вне Ω равно нулю. Положим $u_r = u\varphi_r$, $v = u\varphi$. Очевидно, u_r и v лежат в $V(\Omega)$. Пусть теперь $u_r^l \in \mathscr{E}(\Omega)$ таковы, что $\lim_{l\to\infty} u_r^l = u_r$ в $W_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть ψ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. На области Ω_k имеет место равенство

$$\int_{\Omega_k} u_r^l \frac{\partial \psi}{\partial x_{ri}} \, \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega_k} \frac{\partial u_r^l}{\partial x_{ri}} \psi \, \mathrm{d}\Omega - \int_{\dot{\Omega}_k} u_r^l \psi \cos(x_{ri}, \nu) \, \mathrm{d}S\,, \tag{2.6}$$

где ν — внутренняя нормаль на границе $\dot{\Omega}_k$. Предельным переходом для $k \to \infty$, учитывая свойство 3) области Ω, и далее предельным переходом для $l \to \infty$ мы получим из (2.6), используя равенство $Z(u_r) = 0$,

$$\int_{\Omega} u_r \frac{\partial \psi}{\partial x_{ri}} \, \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial u_r}{\partial x_{ri}} \psi \, \mathrm{d}\Omega\,. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что первые производные функции u_r, равной нулю вне Ω, интегрируемы с квадратом в E_n.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Функцию u_r сдвинем в направлении оси x_{rn} внутрь области Ω на отрезок λ. Эту сдвинутую функцию мы обозначим через $u_{r\lambda}$. Теперь по тоереме 2 монографии С. Л. Соболева [6] будет

$$\|u_{r\lambda} - u_r\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

если λ достаточно мало.

Пусть, далее,

$$u_{r\lambda h}(X) = \frac{1}{\varkappa h^n} \int_{\Omega} \omega(X - Y, h)\, u_{r\lambda}(Y) \, \mathrm{d}\Omega\,,$$

где на этот раз $X = [x_1, x_2, \dots x_n]$,

$$\omega(X) = \begin{cases} \exp \dfrac{|X|^2}{|X|^2 - h^2} & \text{для} \quad |X| < h \\ 0 & \text{для} \quad |X| \geqq h\,, \end{cases}$$

$$\varkappa = \int_{|X|<1} \exp \frac{|X|^2}{|X|^2 - h^2} \, \mathrm{d}X\,.$$

Если h достаточно мало, то $u_{r\lambda h} \in \mathscr{D}(\Omega)$ и будет $\|u_{r\lambda} - u_{r\lambda h}\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Итак, $u_r \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$. К функции v можно применить тот же ход рассуждений, как к $u_{r\lambda}$. Так как $u = \sum_{r=1}^{m} u_r + v$, теорема 2.5 этим доказана.

Обозначим символом $W(\dot{\Omega})$ простанство следов.

Теорема 2.6. $\overline{W(\dot{\Omega})} = L_2(\dot{\Omega})$. (Замыкание берётся в норме пространства $L_2(\dot{\Omega})$.)

Доказательство. Пусть $g \in L_2(\dot{\Omega})$. Обозначим опять $X = [x_1, x_2, \dots x_n]$. Положим $g_r(X) = g(X)\varphi_r(X_r, a_r(X_r))$. Теперь существует бесконечно дифференцируемая функция $\psi(X_r)$, носитель которой находится в окрестности $|X_r| < \alpha$, и такая, что интеграл

$$\int\limits_{|X_r|<\alpha} (g_r - \psi)^2 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r$$

произвольно мал. Отсюда видно, что след функции $\psi(X_r)\varphi_r(X)$, лежащей в $W_2^{(1)}(\Omega)$, с любой точностью аппроксимирует функцию g_r в $L_2(\dot{\Omega})$. Так как $g = \sum_{r=1}^{m} g_r$, этим доказательство и закончено.

Обозначим $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega) = W_2^{(1)}(\Omega)/C$, где C — пространство констант. (Итак, $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство классов функций, где нулем является C.) Введем в $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ скалярное произведение вида

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int\limits_{\Omega} \delta^{ij} u'_i v'_i \,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{2.8}$$

Тогда справедлива

Теорема 2.7. $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$ *со скалярным произведением* (2.8) *является пространством Гильберта.*

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы 1.1 работы [1].

3. ОГРАНИЧЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

Пусть Du — эллиптический самосопряженный оператор второго порядка

$$Du = -(a^{ij}u'_j)'_i + cu \tag{3.1}$$

где коэффициенты a^{ij} и их перыве производные непрерывны на $\bar{\Omega}$, c непрерывен на $\bar{\Omega}$. Далее имеем $c \geqq 0$, $a^{ij} = a^{ji}$. Мы предполагаем существование положительной константы d так, что $a^{ij}\xi_i\xi_i \geqq d\delta^{ij}\xi_i\xi_i$ для любого вектора из E_n.

Теорема 3.1. *Пусть $c \neq 0$. Тогда скалярное произведение* (2.1) *эквивалентно скалярному произведению*

$$(3.2) \qquad (u,v)_D = \int_\Omega a^{ij} u'_i v'_j \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega cuv \, \mathrm{d}\Omega$$

в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Пусть $c = 0$. Тогда скалярное произведение (2.8) *эквивалентно скалярному произведению* (3.2) *в пространстве* $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Доказательство. Вторая часть теоремы 3.1 очевидна и вытекает из эллиптичности оператора. Докажем, что пространство $W_2^{(1)}(\Omega)$ со скалярным произведением (3.2) является пространством Гильбетра. Итак, речь идет о доказательстве полноты.

Пусть u_l — последовательность Коши. Из теоремы 2.7 следует существование $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ так, что

$$\lim_{l \to \infty} \int_\Omega a^{ij}(u'_{li} - u'_i)(u'_{lj} - u'_j) \, \mathrm{d}\Omega = 0 \, .$$

Так как Ω — область Никодима, то по теореме 5.3 из [1] имеет место неравенство

$$\inf_c \|v - c\|_{L_2(\Omega)} \leqq M \|v\|_{\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)}$$

для $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$. c — постоянные, M — фиксированная постоянная. Следовательно, существуют постоянные c_l так, что $u_l - c_l \to u$ в $W_1^{(2)}(\Omega)$. Пусть теперь Ω_ε — та часть области Ω, где $c \geqq \varepsilon > 0$ (ε достаточно мало). Последовательность u_l есть последовательность типа Коши в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, значит постоянные c_l сходятся к постоянной k. Если положить $u^* = u + k$ то $u^l \to u^*$ в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$, чем и доказывается наше утверждение.

Теперь, однако, тождественное отображение пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ на пространство $W_2^{(1)}(\Omega)$ со скалярным произведением (3.2) непрерывно, следовательно, по теореме об изоморфизме (см. Бурбаки [6], стр. 34) топологии в этих двух пространствах эквивалентны. Этим и закончено доказательство.

Пусть $g \in W(\dot{\Omega})$. Проблемой Дирихле мы будем называть задачу: найти функцию $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$, такую, что имеет место $Du = 0$ в смысле обобщенных функций, т. е. $(u, \varphi)_D = 0$ для каждого $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, кроме того, $Z(u) = g$ на $\dot{\Omega}$.

Теорема 3.2. *Существует единственное решение проблемы Дирихле.*

Доказательство. Пусть, напр., $c \neq 0$. Пусть $W(\Omega)$ — ортогональное дополнение пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$, полученное при помощи скалярного произведения (3.2). Пусть $u_1 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ такова, что $Z(u_1) = g$. Имеем $u_1 = u + v$, где $u \in W(\Omega)$ и $v \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$. Так как $\mathscr{D}(\Omega) \subset W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$, функция u является решением нашей проблемы Дирихле.

Пусть, с другой стороны, u — решение проблемы Дирихле для $g = 0$. Так как $V(\Omega) = W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$, следует отсюда, что $u = 0$.

Если $c = 0$, то вместо пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ надо рассматривать пространство $\tilde{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Подробности хода доказательства мы предоставляем в этом случае читателю. Этим доказательство теоремы 3.2 закончено.

В дальнейшем важное значение будет иметь теорема ,,об устойчивости":

Теорема 3.3. *Пусть* $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ *и пусть* u_k *— решения задачи Дирихле на областях* Ω_k *такие, что* $Z(u_k) = Z(v)$ *на* $\dot{\Omega}_k$. *Дополним* u_k *вне* Ω_k *нулем. Пусть* u *— решение задачи Дирихле такое, что* $Z(u) = Z(v)$ *на* $\dot{\Omega}$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ *в* $L_2(\Omega)$. (Ω_k *см. п. 3 определения области типа* $\mathfrak{N}$.)

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4.3 работы [8] или же его нетрудно получить видоизменением доказательства теоремы 4.6 из [1].

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Проблемой Пуассона мы будем называть задачу: найти функцию $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ такую, что $Dv = f$ в смысле обобщенных функций, т. е.

$$(f, \varphi)_{L_2(\Omega)} = (v, \varphi)_D \tag{3.3}$$

для любого $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, и $Z(v) = 0$ на $\dot{\Omega}$.

Теорема 3.4. *Существует одно и только одно решение проблемы Пуассона.*

Доказательство. Из (3.3) получаем

$$(f, u)_{L_2(\Omega)} = (v, u)_D \tag{3.4}$$

для $u \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$. Так как в пространстве $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ топология, данная скалярным произведением (3.2) во всяком случае ($c = 0$, $c \neq 0$) эквивалентна топологии в $W_2^{(1)}(\Omega)$ (см., напр., [1]), то решение v однозначно определяется как линейный функционал в пространстве $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ уравнением (3.4). Доказательство теоремы 3.4 закончено.

Обозначим теперь символом $W_p^{(1)}(\Omega)$, $p \geqq 2$, подпространство тех функций f из $W_2^{(1)}(\Omega)$, производные которых f_i', $i = 1, 2, \ldots, n$ интегрируемы с p-й степенью.

Обозначим далее символом $W_p^{(2)}$, $p \geqq 2$ подпространство тех функций f из $W_p^{(1)}(\Omega)$, производные которых f_i', $i = 1, 2, \ldots n$ принадлежат к $W_p^{(1)}(\Omega)$.

Для нас имеет большое значение теорема о решениях проблемы Пуассона, являющаяся частным случаем теоремы 2.4 из работы А. И. Кошелева [11]:

Теорема 3.5. *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{M}$. *Пусть* $f \in L_p(\Omega)$, $p \geqq 2$. *В упомянутых предположениях относительно коэффициентов эллиптического оператора* Du, *решение проблемы Пуассона* $Dv = f$, $Z(v) = 0$ *лежит в пространстве* $W_p^{(2)}(\Omega)$, *причем*

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L_p(\Omega)} \leqq C(\Omega)\, \|f\|_{L_p(\Omega)},$$

где $C(\Omega)$ *— постоянная, зависящая только от области.*

Приведем еще теорему ,,об устойчивости" для проблемы Пуассона.

Теорема 3.6. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$ *и пусть* v^k — *решения проблемы Пуассона* $Dv^k = f$ *на* Ω_k, $Z(v^k) = 0$ *на* $\dot{\Omega}_k$. *Тогда независимо от* k *будет*

$$\|v^k\|_{W_2^{(1)}(\Omega_k)} \leqq M\|f\|_{L_2(\Omega_k)}$$

где M — *фиксированная константа.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из равенства (3.4); вывод предоставляем читателю.

В заключение этой части сформулируем и докажем теорему ,,о непрерывности" следов.

Теорема 3.7. *Пусть* $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$. *Обозначим через* $Z_k(u)$ *след функции* u *на* $\dot{\Omega}_k$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{|X_r|<\alpha} [Z_k(u) - Z(u)]^2 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r = 0\,.$$

Доказательство. Предположим, что $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. Имеем

$$Z(u) - Z_k(u) = \int\limits_{a_{rk}}^{a_r} \frac{\partial u}{\partial x_{rn}}\,\mathrm{d}x_{rn}\,.$$

Теперь

$$[Z(u) - Z_k(u)]^2 \leqq \beta \int\limits_{a_{rk}}^{a_r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}\right)^2 \mathrm{d}x_{rn}\,,$$

и отсюда следует, что

$$\int\limits_{|X_r|<\alpha} [Z(u) - Z_k(u)]^2\,\mathrm{d}X_r \leqq \beta \int\limits_{A_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{rn}}\right)^2 \mathrm{d}\Omega\,.$$

(Здесь A_k — множество точек $[X_r, x_{rn}]$, где $|X_r| < \alpha$, $a_{rk}(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r)$.) Однако, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} \mathrm{d}\Omega = 0$, что и доказывает тоерему.

4. РАВЕНСТВО РЕЛЛИХА

Теперь мы будем рассуждать аналогично тому, как Л. Э. Пэйн и Г. Ф. Вейнбергер в работе [3]. Пусть $H = [h^1, h^2, \ldots h^n]$ — вектор непрерывных функций с их первыми производными на $\overline{\Omega}$. Пусть $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ и $\Omega \in \mathfrak{M}$. Пусть $N = [n_1, n_k, \ldots, n_n]$ — вектор внешней нормали. Имеем

$$\begin{aligned}[(h^k a^{ij} - h^i a^{kj} - h^j a^{ik})\, u_i' u_j']_k' - 2h^i u_i'\, D(u) + 2h^i u_i'\, cu = \\ = (h_k^{k\prime} a^{ij} - h_k^{i\prime} a^{kj} - h_k^{j\prime} a^{ik} + h^k a_k^{ij\prime})\, u_i' u_j'\,.\end{aligned}$$

(Напомним обозначение $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f_i'$.)

Применяя теперь теорему Стокса, получим

$$\int\limits_{\dot\Omega}(h^k a^{ij} - h^i a^{kj} - h^j a^{ik})\, u'_i u'_j n_k \,\mathrm{d}S = 2\int\limits_{\Omega} h^i u'_i\, D(u)\,\mathrm{d}\Omega - 2\int\limits_{\Omega} h^i u'_i cu\,\mathrm{d}\Omega +$$

$$(4.1) \qquad + \int\limits_{\Omega}(h_k^{k\prime} a^{ij} - h_k^{i\prime} a^{kj} - h_k^{j\prime} a^{ik} + h^k a_k^{ij\prime})\, u'_i u'_j \,\mathrm{d}\Omega\,.$$

Заметим, что равенство (4.1), имеющее для нас в дальнейшем принципиальное значение, вывел Л. Германдер в [9], а для уравнения Лапласа при условии $h^i = x_i$ еще ранее Ф. Реллих в работе [10].

Производной по внешней конормали мы будем называть выражение $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = a^{ij} u'_i n_j$. Далее,

$$(4.2) \qquad a^{ij} u'_i u'_j a^{kl} n_k n^l - a^{ik} a^{jl} u'_i n_k u'_j n^l = u'_i (a^{ij} u'_j a^{kl} n_k n_l - a^{ik} a^{jl} u'_j n_k n_l)\,.$$

Обозначим $z^i = (a^{ij} u'_j a^{kl} n_k n_l - a^{ik} a^{jl} u'_j n_k n_l)$. Вектор $Z = [z^1, z^2, \dots z^n]$ перпендикулярен к N. Обозначим, далее, $y^k = h^k a^{ij} n_i n_j - h^i n_i a^{kj} n_j$. Вектор $Y = [y^1, \dots y^n]$ опять перпендикулярен к N. Обозначим $\sigma = a^{kl} n_k n_l$. Равенство (4.1) можно теперь переписать в виде

$$(4.3) \qquad \int\limits_{\dot\Omega} \frac{1}{\sigma}\left[- h^i n_i \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 + h^i n_i u'_j z^j - 2 u'_j y^j \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] \mathrm{d}S =$$

$$= 2\int\limits_{\Omega} h^i u'_i\, D(u)\,\mathrm{d}\Omega - 2\int\limits_{\Omega} h^i u'_i cu\,\mathrm{d}\Omega + \int\limits_{\Omega} b^{ij} u'_i u'_j \,\mathrm{d}\Omega\,,$$

где b^{ij} — ограниченные функции на $\bar\Omega$.

Пусть теперь $f \in L_2(\Omega)$ и пусть v^k — решение проблемы Пуассона $\mathrm{D}v^k = f$ на Ω_k и $Z(v_k) = 0$ на $\dot\Omega_k$. Справедлива

Теорема 4.1. *Существует фиксированная константа K, не зависящая от k, так, что*

$$(4.4) \qquad \int\limits_{|X_r| < \alpha} \left(\frac{\partial v^k}{\partial \nu}\right)^2 \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2}\, \mathrm{d}X_r \leqq K \int\limits_{\Omega_k} f^2 \,\mathrm{d}\Omega\,,$$

где в левом интеграле мы положили $x_{rn} = a_{rk}(X_r)$.

Доказательство. Пусть прежде всего H_r — вектор в системе координат $[x_{r1}, \dots x_{rn}]$ с координатами $[0, \dots 0, \varphi_r]$. Положим $H = \sum_{r=1}^{m} H_r$. Пусть N_k — внешняя нормаль к границе $\dot\Omega_k$. Существует число $\gamma > 0$ и k_0 так, что для $k \geqq k_0$ скалярное произведение $N_k H \geqq \gamma$. Действительно, в окрестности U_r имеем

$$H_r N_k = \frac{\varphi_r}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left(\dfrac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2}} \geqq \frac{\varphi_r}{\sqrt{1 + (n-1) K^2}}\,,$$

следовательно, $HN_k \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(n-1)K^2}}$ в некоторой окрестности $\dot{\Omega}$. (Мы будем предполагать, что $k_0 = 1$.)

Пусть теперь функции $f_l \in \mathscr{E}(\Omega)$ таковы, что $\lim\limits_{l\to\infty} f_l = f$ в $L_2(\Omega)$. Пусть v^{kl} — решение проблемы Пуассона на области Ω_k с правой частью f_l. По теореме 3.5 будет $v^{kl} \in W_p^{(2)}(\Omega_k)$, где p — любое число $\geqq 2$. Из теоремы о плотности 2.3 и из теоремы 2.4 следует, что равенство Реллиха (4.3) справедливо и для функции v^{kl}. С другой стороны, функция непрерывна со своими первыми производными на $\overline{\Omega}_k$, как видно из теоремы о вложении С. Л. Соболева (см., напр., теорему 1 из работы [11]).

Итак, $v_i^{kl'} z^i = 0$, $v_i^{kl'} y^i = 0$. Но теперь мы получаем с использованием теоремы 3.6

$$\int\limits_{\dot{\Omega}_k} \left(\frac{\partial v^{kl}}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}S \leqq K \int\limits_{\Omega_k} f_l^2 \,\mathrm{d}\Omega \,. \tag{4.5}$$

(Здесь K — фиксированная константа, не зависящая от k.) В неравенстве (4.5) можно перейти к пределу $l \to \infty$ вследствие теоремы 3.5, чем и доказывается теорема 4.1.

Обозначим теперь символом L_{2r} пространство функций интегрируемых с квадратом в окрестности $|X_r| < \alpha$ и введем в нем скалярное произведение вида

$$(f, g) = \int\limits_{|X_r|<\alpha} fg \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r \,.$$

Справедлива важная

Теорема 4.2. *Функции* $\frac{\partial v^k}{\partial \nu}(X_r, a_{rk}(X_r))$ *сходятся слабо в пространстве* L_{2r} *для* $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть функция ψ (аналогично тому, как в доказательстве теоремы 2.6) есть бесконечно дифференцируемая функция $n-1$ переменных $x_{r1}, \dots x_{rn-1}$, обладающая носителем в окрестности $|X_r| < \alpha$. Функцию ψ можно считать функцией n переменных, не зависящей от x_{rn}. Теперь существует бесконечно дифференцируемая в E_n функция φ, равная 1 на части границы Λ_{rk}, $k \geqq 1$ и такая, что $\varphi\psi$ равна нулю на $\dot{\Omega}_k$ за исключением части границы Λ_{rk}.

Пусть теперь u^k — решение проблемы Дирихле на Ω_k, $Du^k = 0$, $Z(u^k) = \psi\varphi$ на $\dot{\Omega}_k$. Из теоремы Грина следует

$$\int\limits_{\Omega_k} u^k Dv^k \,\mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{|X_r|<\alpha} \psi(X_r) \cdot \frac{\partial v^k}{\partial \nu} \cdot \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r \,. \tag{4.6}$$

По теореме 3.3 существует предел левой, а, значит, и правой части равенства (4.6) для $k \to \infty$. С другой стороны, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{|X_r|<\alpha} \psi(X_r) \frac{\partial v^k}{\partial \nu} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|X_r|<\alpha} \psi(X_r) \frac{\partial v^k}{\partial \nu} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2} \mathrm{d}X_r +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|X_r|<\alpha} \psi(X_r) \frac{\partial v^k}{\partial \nu} \left[\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_r}{\partial x_{ri}}\right)^2} - \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_{ri}}\right)^2}\right] \mathrm{d}X_r .$$

Предел второго интеграла ввиду неравенства (4.4) и наложенного на область Ω условия 3) равен нулю.

Итак, мы доказали, что на плотном подмножестве пространства L_{2r} существует конечный предел выражения $\left(\frac{\partial v^k}{\partial \nu}, \psi\right)$ для $k \to \infty$. Это вместе с неравенством (4.4) является достаточным условием существования слабого предела, и теорема 4.2 доказана.

Обозначим этот предел формально через $\frac{\partial v_r}{\partial \nu}$. Положим $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial v_r}{\partial \nu} \varphi_r$. Здесь мы формально приравниваем функцию $\frac{\partial v_r}{\partial \nu}$ нулю вне Λ_r. Имеем $\frac{\partial v}{\partial \nu} \in L_2(\dot{\Omega})$. Из неравенства (4.4) следует, что существует константа N так, что

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{L_2(\dot{\Omega})} \leqq N \|f\|_{L_2(\Omega)} . \tag{4.7}$$

Неравенство (4.7) мы будем называть неравенством Реллиха. Из построения следует, что $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ зависит линейно от функции f. Таким образом мы получили теорему, имеющую основное значение.

Теорема 4.3. (первая основная теорема). *Каждому решению проблемы Пуассона $Dv = f$ на Ω, $Z(v) = 0$ на $\dot{\Omega}$ ($\Omega \in \mathfrak{N}$) можно поставить в соответствие обобщенную производную по внешней конормали, причем это соответствие является линейным непрерывным отображением пространства $L_2(\Omega)$ в $L_2(\dot{\Omega})$. Если $\Omega \in \mathfrak{M}$, то $\frac{\partial v}{\partial \nu} = a^{ij} n_i v_j'$.*

Обощенная производная по конормали удовлетворяет

Теореме 4.4. *Пусть $g \in W(\dot{\Omega})$ и пусть u — решение проблемы Дирихле*

$Du = 0$ на Ω, $Z(u) = g$ на $\dot{\Omega}$. Тогда справедлива „обобщенная", теорема Грина

$$\int\limits_{\Omega} uf \, \mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{\dot{\Omega}} g \frac{\partial v}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S . \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть $u_1 \in W_2^{(1)}(\Omega)$ такая функция, что $Z(u_1) = g$. Пусть u_r^k — решение проблемы Дирихле $Du_r^k = 0$ на Ω_k, $Z(u_r^k) = u_1\varphi_r$ на $\dot{\Omega}_k$. Пусть v^k имеют тот же смысл, как и в теореме 4.2. На Ω_k теперь справедлива теорема Грина

$$\int\limits_{\Omega_k} u_r^k f \, \mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{\dot{\Omega}_k} u_1\varphi_r \frac{\partial v^k}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S . \tag{4.9}$$

Если теперь $k \to \infty$, то левая часть по теореме 3.3 равна в пределе $\int\limits_{\Omega} u_r f \, \mathrm{d}\Omega$. С другой стороны, по теореме 3.7 и по теореме 4.2 предел правой части равен выражению $\int\limits_{\dot{\Omega}} g\varphi_r \frac{\partial v_r}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S$, если иметь в виду, что функция g может быть в норме пространства L_{2r} сколь угодно точно аппроксимирована функцией $\tilde{g}$ из $\mathscr{D}(|X_r| < \alpha)$. Сложением левых и правых частей для $r = 1, 2, \ldots m$ мы получим окончательно (4.8).

5. НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

Пусть $g \in L_2(\dot{\Omega})$. Мы будем говорить, что функция $u \in L_2(\Omega)$ решает обобщенную проблему Дирихле $D(u) = 0$ с краевым усолвием $u = g$ на $\dot{\Omega}$, если каждая последовательность функций $u_l \in W_2^{(1)}(\Omega)$, решающих проблему Дирихле $Du_l = 0$ на Ω, $Z(u_l) = g_l$ на $\dot{\Omega}$ и такая, что $g_l \to g$ в $L_2(\dot{\Omega})$, сходится в $L_2(\Omega)$ к u.

Почти очевидна следующая

Теорема 5.1. *Существует не более одного решения обобщенной проблемы Дирихле.*

Доказательство. Теорема, очевидно, следует из теоремы 2.6. Справедлива также важная.

Теорема 5.2. (вторая основаная теорема). *Существует одно и только одно линейное и непрерывное отображение R пространства $L_2(\dot{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$ такое, что для $g \in W(\dot{\Omega})$ будет $R(g) = u$, где u — решение проблемы Дирихле, соответствующее краевому условию $Z(u) = g$.*

Доказательство. Опять-таки из теоремы 2.6 следует, что существует не более одного отображения R.

Дадим теперь определение R при помощи равенства (4.8). Если написать $\frac{\partial v}{\partial \nu} = T(f)$, то для $g \in L_2(\dot{\Omega})$ будет $-\int\limits_{\dot{\Omega}} gT(f)\,\mathrm{d}S$ линейным функционалом в $L_2(\Omega)$ (мы изменяем f). Пусть u — функция из $L_2(\Omega)$ такая, что $\int\limits_{\Omega} uf\,\mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{\dot{\Omega}} gT(f)\,\mathrm{d}S$. Мы положим $u = R(g)$.

Следующее неравенство будет двойственным неравенству Реллиха:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqq N\|g\|_{L_2(\dot{\Omega})}\,; \tag{5.1}$$

его мы будем называть неравенством Хеллингера-Тёплитца.

Действительно, положив $f = u$, мы получим

$$\int\limits_{\Omega} u^2\,\mathrm{d}\Omega \leqq \Big(\int\limits_{\dot{\Omega}} g^2\,\mathrm{d}S\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\dot{\Omega}} (T(f))^2\,\mathrm{d}S\Big)^{\frac{1}{2}} \leqq N\Big(\int\limits_{\dot{\Omega}} g^2\,\mathrm{d}S\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{\Omega} u^2\,\mathrm{d}\Omega\Big)^{\frac{1}{2}},$$

откуда уже следует неравенство (5.1). Ввиду теоремы 4.4 теорема 5.2 полностью доказана.

Очевидным следствием тоеремы 5.2 является

Теорема 5.3. *Для каждой функции $g \in L_2(\dot{\Omega})$ существует одно и только одно решение обобщенной проблемы Дирихле.*

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что неравенство (5.1) выражает непрерывную зависимость решения от краевых условий.

Далее неравенство (5.1) намечает путь к численному методу, при помощи которого можно найти решение. Достаточно отыскать последовательность решений проблемы Дирихле, для которых соответствующие следы образуют фундаментальное множество в $L_2(\dot{\Omega})$. Мы оставляем в стороне вопрос о регулярности решений и о способе получения краевых условий.

Заметим еще, что без дальнейших предположений относительно области Ω не существует, вообще говоря, отображение R, определенное выше, если пространство $L_2(\dot{\Omega})$ заменить пространством $L_{2-\varepsilon}(\dot{\Omega})$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. В E_2 можно для каждого $\varepsilon > 0$ построить такую область $\Omega \in \mathfrak{N}$, содержащую на границе угловую точку, и последовательность функций $u_k \in W_2^{(1)}(\Omega)$, решающих проблему Дирихле для уравнения Лапласа так, что $\lim\limits_{k\to\infty} Z(u_k) = 0$ в $L_{2-\varepsilon}(\dot{\Omega})$ и $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = \infty$ локально равномерно.

Пространство $L_2(\dot{\Omega})$ содержит непрерывные краевые условия. При этом возникает естественный вопрос, когда решение u, полученное по нашему методу, будет классическим. Функцию u мы будем называть классическим решением проблемы Дирихле, если она непрерывна на $\overline{\Omega}$, обладает на Ω двумя непрерывными производными, удовлетворяет в классическом смысле уравнению и краевому условию.

Подобно тому, как мы доказали теорему 4.4, можно доказать и

Теорему 6.4. *Пусть для любой непрерывной функции g существует одно и только одно классическое решение u проблемы Дирихле. Пусть это решение типа Винера. Тогда $u = Rg$.*

Литература

[1] *J. L. Lions-J. Deny:* Les espaces du type de Beppo Levi. Annales de l'institut Fourier, Tome *V*, 1953—1954, 305—370.

[2] *J. L. Lions:* Sur quelques problèmes aux limites relatifs à des opérateurs différentiels elliptiques. Bulletin de la société mathématique de France, tome *83*, 1955, 225—250.

[3] *L. E. Payne - H. F. Weinberger:* New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations. Pacific Journal of Mathematics, Vol. *8*, N. 3, 1958, 551—573.

[4] *L. Schwartz:* Theorie des distributions. Tome I, II, Paris, Hermann 1950.

[5] *E. Gagliardo:* Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Ricerche di matematica, vol. *VII*, 1958, 102—137.

[6] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград 1950.

[7] *N. Bourbaki:* Espaces vectorielles topologiques, Paris, Hermann 1953.

[8] *I. Babuška:* Stabilita definičních oblastí vzhledem k základním úlohám teorie parciálních diferenciálních rovnic, zejména v souvislosti s teorií pružnosti. I, II. Чехословацкий математический журнал (в печати).

[9] *L. Hörmander:* Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order. Comptes rendus du Douzième Congres des Mathématiciens Scandinaves tenu à Lund, 1953, 105—115.

[10] *F. Rellich:* Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u$ durch ein Randintegral. Math. Z. *46*, 1940, 635—646.

[11] *А. И. Кошелев:* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи матем. наук, т. *XIII*, вып. 4, 1958, 29—86.

Résumé

SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE AVEC INTÉGRALE DE DIRICHLET NON-BORNÉE

JINDŘICH NEČAS, Praha

Dans cet article on montre que, pour des domaines assez généraux (dans E_2 ce sont p. ex. aussi les polygones) on peut associer à chaque solution du problème de Poisson $Dv = f$ où $v = 0$ sur la frontière, $f \in L_2(\Omega)$ et Dv est l'opérateur elliptique du second ordre, une dérivée généralisée par rapport à la conormale $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, qui est de carré sommable sur la frontière.

On a l'inégalité de Rellich

$$\left[\int\limits_{\dot{\Omega}}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}S\right]^{\frac{1}{2}} \leqq N\left[\int\limits_{\Omega} f^2 \,\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Il résulte alors du théorème de Green la validité de l'inégalité duale de Hellinger-Toeplitz pour la solution du problème de Dirichlet $Du = 0$, avec $u = g$ sur la frontière:

$$[\int\limits_{\Omega} u^2 \,\mathrm{d}\Omega]^{\frac{1}{2}} \leqq N\, [\int\limits_{\dot{\Omega}} g^2 \,\mathrm{d}S]^{\frac{1}{2}}.$$

Il s'ensuit de cette inégalité l'existence d'une solution du problème de Dirichlet, la condition aux limites étant de carré sommable sur la frontière.