Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Rektorys

Die Lösung der ersten Randwertproblems „im Ganzen“ für eine nichtlineare parabolische Gleichung mit der Netzmethode

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 1, 69–103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100498

DIE LÖSUNG DES ERSTEN RANDWERTPROBLEMS „IM GANZEN“ FÜR EINE NICHTLINEARE PARABOLISCHE GLEICHUNG MIT DER NETZMETHODE

KAREL REKTORYS, Praha

(Eingegangen am 17. Mai 1960)

Das erste Kapitel behandelt Fragen welche mit der Problematik dieser Arbeit zusammenhängen. Im zweiten Kapitel ist mit Hilfe der Netzmethode die Lösung des ersten Randwertproblems einer quasilinearen Gleichung für ein beliebiges Zeitintervall durchgeführt, zuerst für glatte, dann für unstetige Randbedingungen. Im dritten Kapitel ist das Problem einer allgemeineren Gleichung (Gleichung (1) aus Kap. I) auf das Problem einer quasilinearen Gleichung zurückgeführt.

I. PROBLEMSTELLUNG, ÜBERSICHT DER ERGEBNISSE

Die Theorie der nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen steht in letzter Zeit im Brennpunkt des Interesses vieler Autoren. Zu den klassischen Arbeiten von M. GEVREY [1], [2] (Anwendung der Fundamentallösung) und von E. ROTHE [9] (Zurückführung auf eine Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen) reihen sich neue Arbeiten von O. A. LADYŽENSKAJA [5], T. D. VENTZEL [10], O. A. OLEJNIK [6], [7], V. A. ILJIN [3] und andere. Diese Arbeiten lösen grösstenteils das Cauchysche Problem oder die erste Randwertaufgabe (wenn die Werte der Funktion u am Rande gegeben sind) für eine quasilineare Gleichung. Die Netzmethode wurde für den Beweis der Existenz der Lösung „im Ganzen“ (für ein beliebiges Zeitintervall) wegen der bekannten Schwierigkeiten verlassen. Die Existenzbeweise sind grösstenteils mit Hilfe schrittweiser Approximationen (z. B. [7]), der Methode von Rothe (Zurückführung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen) und der Methode des Fixpunktes durchgeführt.

Die Aufgabe dieser Arbeit ist die Existenz der Lösung des ersten Randwertproblems für eine nichtlineare Gleichung von der Form

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t, u)\,u + E(x, t, u)$$

für nichtstetige Randbedingungen zu beweisen. Der Beweis wird mit Hilfe der

Netzmethode geführt. Die Netzmethode wurde aus mehreren Gründen zur Beweisführung gewählt: Erstens ist der Existenzbeweis mit Hilfe der Netzmethode für das Problem „im Ganzen" an und für sich ein interessantes Problem, zweitens kann die Beweismethode auch zur Lösung verschiedener anderer Probleme aus dem Gebiete der nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen, z. B. zur Lösung der gemischten Randwertaufgabe, vor allem aber des Problems mit einer Integralbedingung, wie sie beim Studium der Wärmeleitung in Betonmassiven vorkommen, verwendet werden. (Siehe den Artikel: „Lösung der gemischten Randwertaufgabe und des Problems mit einer Integralbedingung „im Ganzen" für eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung mit der Netzmethode", welcher in der folgenden Nummer dieser Zeitschrift erscheinen wird.) Drittens ermöglicht die bewiesene Konvergenz der Netzmethode diese Methode zur praktischen Berechnung technischer Probleme anzuwenden.

Der eigentliche Konvergenzbeweis ist im Kapitel II für eine quasilineare Gleichung durchgeführt. Im Kapitel III wird gezeigt, mit welchem Kunstgriff wir die nichtlineare Differentialgleichung (1) auf eine quasilineare Gleichung umformen können. Zuerst wird der Beweis für genügend glatte Randbedingungen, dann für unstetige Randbedingungen gebracht. Es ist gelungen, auch im Falle unstetiger Randbedingungen die Voraussetzungen, welche in der Literatur die Koeffizienten der Gleichung erfüllen sollen, schwächer zu machen.

Wie schon gesagt, wird im Kapitel III gezeigt, wie wir das Problem für die nichtlineare Gleichung (1) auf das Problem einer quasilinearen Gleichung überführen. Es ist interessant zu beobachten, dass dies nicht der Fall ist (siehe Kap. III), wenn in dieser Gleichung noch die dritte Potenz des Gliedes $\partial u/\partial x$ vorkommt.

Anmerkung. Das Problem ist für einen rechteckigen Bereich gelöst (den Rand des betrachteten Gebietes bilden mit den Koordinaten parallel laufende Geraden). Offensichtlich bilden krumme Randteile keine Schwierigkeiten, insofern sie genügend glatt sind, denn mit Hilfe einer einfachen Transformation kann man das Problem auf ein Problem im rechteckigen Bereich überführen.

II. DIE LÖSUNG DER ERSTEN RANDWERTAUFGABE FÜR EINE QUASILINEARE GLEICHUNG MIT DER NETZMETHODE

Es sei die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t, u)\, u + D(x, t, u)$$

(vgl. Anmerkung 2 und 3 im Kap. III) mit den Randbedingungen

$$(2)\quad u(x, 0) = f(x)\,, \quad u(0, t) = g(t)\,, \quad u(1, t) = h(t)\,, \quad 0 \leqq x \leqq 1\,, \quad 0 \leqq t \leqq \tau$$

gegeben. Wir bezeichnen

$$(3)\qquad Q = (0; 1) \times (0, \tau\rangle\,, \quad \bar{Q} = \langle 0; 1\rangle \times \langle 0; \tau\rangle\,.$$

Lemma 1. *Es gelte für alle* $(x, t) \in \bar{Q}$, $u \in (-\infty; \infty)$ *(siehe Anmerkung* 1)

$$A(x, t, u) > 0\,, \quad C(x, t, u) \leqq \gamma_1\,, \quad |D(x, t, u)| \leqq \delta\,. \tag{4}$$

Weiter seien f, g, h stetige Funktionen im Intervall $\langle 0; 1\rangle$ *resp.* $\langle 0, \tau\rangle$,

$$f(0) = g(0)\,, \quad f(1) = h(0)\,, \quad |f(x)| \leqq K\,, \quad |g(t)| \leqq K\,, \quad |h(t)| \leqq K\,. \tag{5}$$

Wir bezeichnen $\max(\delta, K) = M$, $\max(\gamma_1 + 1; 0) = \varepsilon$. *Dann gilt*

$$|u(x, t)| \leqq M e^{\varepsilon\tau}\,, \tag{6}$$

wenn eine auf $\bar{Q}$ *stetige Lösung* $u(x, t)$ *des Problems* (1), (2) *existiert.*

Beweis. Wir setzen $u = e^{\varepsilon t} z$. Die Gleichung (1) geht hiermit (nach Division durch $e^{\varepsilon t}$) in Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} - A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (C - \varepsilon)\, z + D e^{-\varepsilon\tau} \tag{7}$$

über. Die Funktion z ist auf $\bar{Q}$ stetig und erreicht daher in irgendeinem Punkte $(x_0; t_0) \in \bar{Q}$ ihr Maximum. Liegt nun dieser Punkt $(x_0; t_0)$ am Rande $t = 0$ resp. $x = 0$ resp. $x = 1$, dann kann, mit Rücksicht auf (5) und auf die angewendete Substitution $u = e^{\varepsilon t} z$, $z(x_0; t_0) > K$ nicht gelten. Es sei also $(x_0; t_0) \in Q$. Dann ist die linke Seite der Gleichung (7) nicht negativ und $z(x_0, t_0) > \delta$ kann nicht gelten, denn es ist $C - \varepsilon \leqq -1$ und die rechte Seite der Gleichung (7) wäre negativ. Es muss also $z(x_0, t_0) \leqq M$ sein.

Auf gleiche Weise beweist man, dass im Punkte (x_1, t_1), in welchem die Funktion z ein Minimum auf $\bar{Q}$ hat, $z(x_1, t_1) \geqq -M$ gelten muss. Es ist daher $|z(x, t)| \leqq M$ auf $\bar{Q}$ und aus der angewendeten Substitution folgt sofort die Beziehung (6).

Anmerkung 1. Offensichtlich müssen wir in den Voraussetzungen für u nicht das ganze Intervall $(-\infty, \infty)$ in Betracht nehmen.

Satz 1. (Glatte Randbedingungen.) *Es seien die Voraussetzungen von Lemma* 1 *erfüllt. Es seien im Bereich*

$$\bar{R} = \bar{Q} \times \langle -(M + a)\, e^{\varepsilon\tau}, (M + a)\, e^{\varepsilon\tau}\rangle\,, \tag{8}$$

wobei a eine beliebig kleine (feste) positive Zahl ist, die Funktionen

$$A,\ A_x,\ A_t,\ A_u,\ A_{xx},\ A_{xu},\ A_{tx},\ A_{tu},\ A_{uu} \tag{9}$$

stetig, wobei die vier letzten Funktionen der Lipschitzschen Bedingung in Bezug auf x und u genügen. Die Funktionen B, C, D mögen die gleichen Voraussetzungen erfüllen. Die Funktion $f(x)$ *habe weiter im Intervall* $\langle 0; 1\rangle$ *drei stetige Ableitungen, wobei die dritte im Intervall* $\langle 0; 1\rangle$ *der Lipschitzschen Bedingung genügt. Uber die Funktionen* $g(t)$, $h(t)$ *wollen wir voraussetzen, dass sie auf dem Intervall* $\langle 0; \tau\rangle$ *zwei stetige Ableitungen haben. Es gelte ausserdem*

$$\begin{aligned} g'(0) &= A[0; 0; f(0)]\, f''(0) + B[0; 0; f(0)]\, f'(0) + C[0; 0; f(0)]\, f(0) + \\ &\quad + D[0; 0; f(0)]\,, \\ h'(0) &= A[1; 0; f(1)]\, f''(1) + B[1; 0; f(1)]\, f'(1) + C[1; 0; f(1)]\, f(1) + \\ &\quad + D[1; 0; f(1)]\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Dann existiert nur eine mitsamt ihren Ableitungen u_x, u_{xx}, u_t auf $\bar{Q}$ stetige Lösung $u(x, t)$ des Problems (1), (2). (Vgl. auch Anmerkung 6).

Anmerkung 2. Nach Lemma 1 gilt für $u(x, t)$ auf $\bar{Q}$ die Ungleichung (6).

Beweis. A. *Die Eindeutigkeit der Lösung.* Wir haben zwei Lösungen u_1, u_2 mit den gewünschten Eigenschaften. Die Differentialgleichung (1) schreiben wir in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B\frac{\partial u}{\partial x} - Cu - D \equiv F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_t) = 0 . \tag{11}$$

Die Lösungen u_1, u_2 sind also Lösungen der Gleichungen

$$F(x, t, u_1, u_{1x}, u_{1xx}, u_{1t}) = 0 , \tag{12}$$

$$F(x, t, u_2, u_{2x}, u_{2xx}, u_{2t}) = 0 . \tag{13}$$

Nach den Voraussetzungen über die Funktion F (d. h. über die Funktionen A, B, C, D) und über die Funktionen u_1, u_2 wird der Unterschied $u = u_2 - u_1$ der Gleichung (wir subtrahieren die Gleichung (12) von der Gleichung (13))

$$\frac{\partial F}{\partial u} u + \frac{\partial F}{\partial u_x} u_x + \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} u_{xx} + \frac{\partial F}{\partial u_t} u_t = 0 \tag{14}$$

genügen, wobei wir für einen festen Punkt (x, t) den Wert der Koeffizienten der Gleichung (14) in einem bestimmten Punkt (U, U_x, U_{xx}, U_t) nehmen müssen, dessen Koordinaten nach dem Mittelwertsatz zwischen den Werten $u_1, u_2, u_{1x}, u_{2x}, u_{1xx}, u_{2xx}, u_{1t}, u_{2t}$ liegen. Dabei ist $\partial F/\partial u_t = 1$, $\partial F/\partial u_{xx} = -A(x, t, U)$ und $\partial F/\partial u$ ist beschränkt, denn die Ableitungen der Funktionen A, B, C, D nach u und die Ableitungen der Funktionen u_1, u_2 sind nach Voraussetzung beschränkt.

Die Gleichung (14) ist also wieder eine parabolische Gleichung mit einem beschränkten Koeffizienten beim u und mit dem absoluten Glied gleich Null. Die Randbedingungen sind gleich Null, also ist nach (6)

$$u \equiv 0 . \tag{15}$$

Anmerkung 3. Aus dem Beweis folgt die *stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randbedingungen* in diesem Sinne: Sind u_1, u_2 die Lösungen des Problems (1), (2) mit den oben geforderten Eigenschaften, dann unterscheiden sich u_1 und u_2 sehr wenig, wenn sich die Randbedingungen genügend wenig unterscheiden. Die Funktion z, welche wir durch die Substitution $u = e^{\varepsilon t}z$ eingeführt haben, erreicht ihr Maximum und Minimum auf den Seiten des Rechtecks $\bar{Q}$ und dort sind ihre Werte klein, wenn die Unterschiede der Randbedingungen für u_1 und u_2 klein sind.

Anmerkung 4. Aus der Gleichung (14) folgt wieder mit Hilfe der Substitution $u = e^t z$: Sind u_1, u_2 die Lösungen mit den vorausgesetzten Eigenschaften, welche den Randbedingungen f_1, g_1, h_1 resp. f_2, g_2, h_2 entsprechen, und wenn die Randbedingungen der Funktion u_2 die Randbedingungen der Funktion u_1 majorisieren, d. h. wenn

$$f_2(x) \geqq f_1(x)\,, \quad g_2(t) \geqq g_1(t)\,, \quad h_2(t) \geqq h_1(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \text{ resp. } 0 \leqq t \in \tau$$

gilt, dann ist $u_2(x, t) \geqq u_1(x, t)$ auf $\bar{Q}$. Das Minimum der Funktion z auf $\bar{Q}$ kann nicht negativ sein: am Rande auf Grund der Randbedingungen, auf Q auf Grund der Gleichung für die Funktion z mit negativem Koeffizienten bei z.

B. *Beweis der Existenz der Lösung.* Den Beweis führen wir mit Hilfe der Netzmethode durch. (Soviel mir bekannt ist, wurde die Existenz der Lösung „im Ganzen", d. h. für ein beliebiges Zeitintervall, mit Hilfe der Netzmethode nicht bewiesen.)

Der Hauptgedanke der Netzmethode ist wohl bekannt: Das Rechteck $\bar{Q}$ teilen wir durch ein Netz der mit den Koordinaten gleichlaufenden Parallelen

$$x = h, x = 2h, \ldots, x = Nh = 1, y = l, y = 2l, \ldots, y = \bar{N}l = \tau \tag{16}$$

auf $N \cdot \bar{N}$ gleiche Rechtecke. Die Differentialgleichung (1) ersetzen wir durch eine Differenzengleichung

$$q_{ik} = A_{ik}r_{ik} + B_{ik}p_{ik} + C_{ik}u_{ik} + D_{ik}\,, \tag{17}$$

wobei u_{ik} der Wert der sogenannten Netzfunktion im Knotenpunkt (x_i, t_k) des Netzes ist, welcher der Schnittpunkt der Geraden $x = ih$, $y = kl$ ist und

$$q_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l}\,, \quad p_{ik} = \frac{\Delta u_{ik}}{h} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}\,, \tag{18}$$

$$r_{ik} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} = \frac{\Delta u_{ik} - \Delta u_{i-1,k}}{h^2} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}\,, \tag{19}$$

$$A_{ik} = A(x_i, t_k, u_{ik})$$

usw. ist. Aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ bestimmen wir die Werte u_{i0} in der nullten Netzzeile, $u_{i0} = f(x_i)$. Aus Gleichung (17) folgen dann die Werte u_{i1} in den inneren Knotenpunkten der ersten Netzzeile,

(20)

$$u_{i1} = u_{i0} + l\left(A_{i0}\,\frac{u_{i+1,0} - 2u_{i0} + u_{i-1,0}}{h^2} + B_{i0}\,\frac{u_{i+1,0} - u_{i,0}}{h} + C_{i0}u_{i0} + D_{i0}\right).$$

In den Randpunkten der ersten Zeile ist u_{i1} durch die Randbedingungen $u_{01} = g(t_1)$, $u_{N1} = h(t_1)$ gegeben. Dadurch kennen wir die Werte der Netzfunktion u_{ik} in der ganzen ersten Zeile. Auf gleiche Weise berechnen wir die Werte u_{ik} in der zweiten Zeile usw. Wir bezeichnen

$$\max_{\bar{R}} A(x, t, u) = \alpha\,. \tag{21}$$

Aus Gründen, welche im weiteren klar werden, wählen wir l von h nicht unabhängig, sondern wir wählen bei gegebenem h

$$l = \frac{h^2}{2\alpha + \kappa}\,, \tag{22}$$

wobei κ eine beliebig kleine (feste) positive Zahl ist (welche wir so wählen, dass $\tau/l = \bar{N}$ eine ganze Zahl ist). Das Netz, welches wir durch die Wahl der Zahl N (resp. der Zahl h nach Bedingung (16)) erhalten, bezeichnen wir S_1. Wir bilden nun ein weiteres Netz S_2 so, dass die Anzahl der Teile im Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ doppelt so gross, d. h. $2N$ wird (es ist also $h = 1/(2N)$; wir beobachten, dass nach (22) die Anzahl der Teile, auf welche das Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ aufgeteilt wird, viermal so gross ist). Das Netz, für welches $h = 1/(4N)$ ist, bezeichnen wir S_3, das Netz, für welches $h = 1/(8N)$ ist, bezeichnen wir S_4, usw. Dadurch erhalten wir eine Folge von Netzen

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots \tag{23}$$

Wir betrachten das Netz S_1. Nach der oben angeführten Methode können wir u_{ik} berechnen. Konstruieren wir auf $\bar{Q}$ eine teilweise lineare Funktion

$$u_1(x, t) \tag{24}$$

so, dass sie in den Netzpunkten (x_i, t_k) den Wert u_{ik} annimmt (die Funktion $u_1(x, t)$ ist auf dem Dreieck mit den Eckpunkten (x_i, t_k), (x_i, t_{k+1}), (x_{i+1}, t_{k+1}) resp. (x_i, t_k), (x_{i+1}, t_k), (x_{i+1}, t_{k+1}) linear). Ähnlich konstruieren wir die Funktion $u_2(x, t)$ mit Hilfe des Netzes S_2 usw. Dadurch erhalten wir eine Funktionenfolge

$$u_1(x, t), u_2(x, t), \ldots, u_n(x, t), \ldots \tag{25}$$

Ähnlich können wir auf S_1 eine teilweise lineare Funktion konstruieren, welche der Netzfunktion p_{ik} entspricht. Diese Funktion bezeichnen wir $u_{1x}(x, t)$. Für das Netz S_2 bilden wir auf gleiche Weise die Funktion $u_{2x}(x, t)$ usw., so dass wir eine Folge von Funktionen

$$u_{1x}(x, t), u_{2x}(x, t), \ldots, u_{nx}(x, t), \ldots \tag{26}$$

erhalten. Ähnlich gehen wir bei der Konstruktion der Funktion q_{ik} vor und konstruieren die Funktionen, welche wir

$$u_{1t}(x, t), u_{2t}(x, t), \ldots, u_{nt}(x, t), \ldots \tag{27}$$

bezeichnen usw. Der Grundgedanke der Existenzbeweise mit Hilfe der Netzmethode ist bekannt (siehe z. B. [10]): Wir beweisen, dass die Funktionen (25) auf $\bar{Q}$ (in Bezug auf n) gleichmässig beschränkt sind. Sind nun auch die Funktionen (26), (27) gleichmässig beschränkt, so sind die Funktionen (25) gleich stetig. Nach dem Satz von Arzela kann man aus der Folge (25) eine gleichmässig konvergente Folge herausheben. Ihren Grenzwert bezeichnen wir $U(x, t)$. Bekanntlich ist, wenn ausserdem noch die Funktionenfolgen $u_{nxx}(x, t)$, $u_{nxt}(x, t)$, $u_{ntt}(x, t)$ gleichmässig beschränkt sind, die Funktion $U(x, t)$ die gesuchte Lösung des Problems (1), (2), d. h. $U(x, t) = u(x, t)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt dann, dass die ganze Folge (25) konvergent ist und die Lösung $u(x, t)$ zum Limes hat.

Den Beweis dieser Behauptungen führen wir hier nicht an (vgl. z. B. [10]). Bei nichtlinearen resp. quasilinearen Gleichungen stösst die Netzmethode auf eine grundlegende Schwierigkeit: Die gleichmässige Beschränktheit der Folgen (26), (27) lässt sich unmittelbar nur für ein bestimmtes Zeitintervall $\langle 0; T \rangle$, welches von den Koeffizienten der gegebenen Gleichung und von Randbedingungen abhängt, beweisen, also nicht „im Ganzen", für das ganze Rechteck $\bar{Q}$ (vgl. z. B. die angeführte Arbeit [10]). Im Weiteren wollen wir zeigen, wie wir dieser Schwierigkeit ausweichen.

Unsere Aufgabe ist es die gleichmässige Konvergenz der Folgen $u_n(x, t)$, $u_{nx}(x, t)$, ... „im Ganzen", auf dem ganzen Rechteck $\bar{Q}$, zu beweisen.

Lemma 2. *Bei Erfüllung der Bedingung* (22) (*wir setzten natürlich die Erfüllung der Bedingung des Satzes* 1 *voraus*) *gilt für alle Netze S_n von einem bestimmten Index n_0 beginnend* (*d. h. für alle Netze mit genügend kleinem h*)

$$|u_{ik}| \leqq (M + a)\, e^{\varepsilon\tau}\,. \tag{28}$$

(Die Bezeichnung siehe Lemma 1 und Satz 1. Es ist klar, dass die Netzfunktionen u_{ik} sich mit dem Netz S_n ändern, wir sollten daher ${}^{(n)}u_{ik}$ schreiben. Um die Bezeichnung nicht zu komplizieren, werden wir den Index n nur dort anführen, wo es zu einem Missverständnis kommen könnte.)

Beweis. Anstatt der Netzfunktion u_{ik} führen wir eine unbekannte Netzfunktion v_{ik} durch die Beziehung

$$u_{ik} = e^{\varepsilon t_k} v_{ik} \tag{29}$$

ein (t_k ist der Wert t in der k-ten Netzzeile). Die Beziehung (29) ist offensichtlich eineindeutig.

Die Gleichung (17) geht in die Gleichung (wir bezeichnen kurz $A(x_i, t_k, u_{ik}) = A(x_i, t_k, e^{\varepsilon t_k} v_{ik}) = A_{ik}$ usw.)

$$\frac{e^{\varepsilon t_{k+1}} v_{i,k+1} - e^{\varepsilon t_k} v_{ik}}{l} = A_{ik} e^{\varepsilon t_k} \frac{v_{i+1,k} - 2v_{ik} + v_{i-1,k}}{h^2} + \tag{30}$$

$$+ B_{ik} e^{\varepsilon t_k} \frac{v_{i+1,k} - v_{ik}}{h} + C_{ik} e^{\varepsilon t_k} v_{ik} + D_{ik}$$

über.

Es ist offenbar

$$\frac{e^{\varepsilon t_{k+1}} v_{i,k+1} - e^{\varepsilon t_k} v_{ik}}{l} = \frac{e^{\varepsilon t_{k+1}}(v_{i,k+1} - v_{ik}) + v_{ik}\left(e^{\varepsilon t_{k+1}} - e^{\varepsilon t_k}\right)}{l} = \tag{31}$$

$$= e^{\varepsilon t_{k+1}} \frac{v_{i,k+1} - v_{ik}}{l} + v_{ik} \varepsilon e^{\varepsilon \bar{t}_k}\,,$$

wobei $\bar{t}_k$ einen zwischen t_k und t_{k+1} liegenden Wert t bezeichnet. Wir bezeichnen

$$e^{\varepsilon \bar{t}_k} = b e^{\varepsilon t_k}\,, \quad b \geqq 1\,. \tag{32}$$

Durch Einsetzen von (31) in (30) und durch Division der ganzen Gleichung mit $e^{\varepsilon t_k}$ erhalten wir

$$(33)\qquad e^{\varepsilon l}\,\frac{v_{i,k+1}-v_{ik}}{l} = A_{ik}\,\frac{v_{i+1,k}-2v_{ik}+v_{i-1,k}}{h^2} + B_{ik}\,\frac{v_{i+1,k}-v_{ik}}{h} + {}$$
$$+ (C_{ik} - b\varepsilon)\,v_{ik} + D_{ik}e^{-\varepsilon t_k}\,.$$

Wir bezeichnen kurz, vgl. (22),

$$(34)\qquad \frac{1}{2\alpha + \kappa} = c\,.$$

Nach Voraussetzung ist für alle i, k

$$(35)\qquad cA_{ik} \leqq \frac{\alpha}{2\alpha+\kappa} = \frac{1}{2} - d < \frac{1}{2}\,,$$

$$(36)\qquad d > 0\,.$$

Wir multiplizieren die Gleichung (33) mit der Zahl $l = ch^2$. Wir erhalten

$$(37)\qquad e^{\varepsilon l}(v_{i,k+1} - v_{ik}) = cA_{ik}(v_{i+1,k} - 2v_{ik} + v_{i-1,k}) + {}$$
$$+ hcB_{ik}(v_{i+1,k} - v_{ik}) + h^2c[(C_{ik} - b\varepsilon)\,v_{ik} + D_{ik}e^{-\varepsilon t_k}]\,.$$

Die Funktionen A, B, C, D sind nach Voraussetzung stetig auf $\bar{R}$, also auch beschränkt auf $\bar{R}$. Aus der Voraussetzung $A > 0$ folgt ausserdem $A \geqq \alpha_0 > 0$. Wir bezeichnen $\alpha_0 \leqq A \leqq \alpha$, $|B| \leqq \beta$, $|C| \leqq \gamma$, $|D| \leqq \delta$. Wir bezeichnen weiter

$$(38)\qquad 2M(\gamma_1 + \varepsilon e^{l\varepsilon}) + \delta = m$$

und wählen h so klein, dass

$$(39)\qquad h\beta < \alpha_0\,,$$

$$(40)\qquad 2d - hc\beta > 0\,,$$

$$(41)\qquad \frac{cmh^2}{2d - hc\beta} < a$$

ist.

Weiter können wir ohne Verlust der Allgemeinheit voraussetzen, dass $a > 0$ so klein ist, dass $a < M$ gilt. (Der Fall $M = 0$ ist trivial, denn dann ist $u_{ik} \equiv 0$.)

Wir beweisen zuerst die Beschränktheit der Funktion v_{ik} durch die Konstante $M + a$ von oben. Es sei also $|v_{ik}| \leqq M + a$ in allen Punkten der k-ten Zeile. Wir behaupten:

1. Liegt v_{ik} zwischen den Werten M, $M + a$, d. h.

$$(42)\qquad M \leqq v_{ik} \leqq M + a\,,$$

dann ist

$$(43)\qquad v_{i,k+1} \leqq M + a\,.$$

Ist nämlich $v_{ik} \geqq M$, dann ist, weil nach Voraussetzung $C_{ik} - b\varepsilon \leqq -1$ gilt, das Glied in der gebrochenen Klammer das Gleichung (37) nicht positiv, also ist

$$(44) \quad \begin{aligned} e^{\varepsilon l}(v_{i,k+1} - v_{ik}) &\leqq cA_{ik}(v_{i-1,k} - v_{ik}) + (cA_{ik} + chB_{ik})(v_{i+1,k} - v_{ik}) \leqq \\ &\leqq cA_{ik}(M + a - v_{ik}) + (cA_{ik} + chB_{ik})(M + a - v_{ik}) = \\ &= (2cA_{ik} + chB_{ik})(M + a - v_{ik}) \leqq \\ &\leqq (1 - 2d + hc\beta)(M + a - v_{ik}) \leqq M + a - v_{ik} \,. \end{aligned}$$

Weil $e^{\varepsilon l} \geqq 1$ ist, folgt hieraus der geforderte Resultat $v_{i,k+1} \leqq M + a$.

2. Liegt v_{ik} zwischen den Werten $-(M + a)$, M, d. h. ist

$$(45) \qquad -(M + a) \leqq v_{ik} \leqq M \,,$$

dann ist

$$(46) \qquad v_{i,k+1} \leqq M + a \,.$$

Ähnlich wie in (44) wird

$$(47) \quad \begin{aligned} e^{\varepsilon l}(v_{i,k+1} - v_{ik}) &= cA_{ik}(v_{i-1,k} - v_{ik}) + (cA_{ik} + chB_{ik})(v_{i+1,k} - v_{ik}) + \\ &\quad + h^2c[(C_{ik} - b\varepsilon)\, v_{ik} + D_{ik}e^{-\varepsilon t_k}] \leqq \\ &\leqq (1 - 2d + hc\beta)(M + a - v_{ik}) + h^2cm = \\ &= M + a - v_{ik} - [(2d - hc\beta)(M + a - v_{ik}) - h^2cm] \end{aligned}$$

sein. Nach (45) ist jedoch $v_{ik} \leqq M$, so dass $M + a - v_{ik} \geqq a$ ist und der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer der Ungleichung (47) ist nach Ungleichung (41) nichtnegativ (sogar positiv). Also ist

$$e^{\varepsilon l}(v_{i,k+1} - v_{ik}) \leqq M + a - v_{ik} \,,$$

woraus wieder $v_{i,k+1} \leqq M + a$ folgt.

Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt, dass $v_{i,k+1} \leqq M + a$ ist, wenn für v_{ik}

$$(48) \qquad -(M + a) \leqq v_{ik} \leqq M_i + a$$

gilt.

Die Beschränktheit von unten, d. h. $v_{i,k+1} \geqq -(M + a)$, wenn (48) gilt, wird auf ähnliche Weise bewiesen.

Ist also $|v_{ik}|$ in jedem Punkte der k-ten Zeile durch die Konstante $M + a$ beschränkt, so ist sie durch dieselbe Konstante auch in jedem inneren Punkte der $(k + 1)$-ten Zeile beschränkt. In ihren Randpunkten ist sie durch dieselbe Konstante, auf Grund der Voraussetzungen über die Randwertfunktionen und auf Grund der Substitution (29), beschränkt. Für $k = 0$ folgt aus Voraussetzung (5) $|v_{ik}| \leqq M + a$. Die Behauptung (28) ist dann eine direkte Folge der Beziehung (29).

A n m e r k u n g 5. Den Beweis des Lemmas 2 kann man einfacher durchführen. Die angewendete Methode wird sich erst im weiteren (vgl. Beweis von Lemma 3) als sehr nützlich und grundlegend erweisen. Der Kern der Methode, wie aus dem

Beweis zu ersehen ist, ist sehr einfach und kann ungefähr so ausgedrückt werden: Ist in der parabolischen Gleichung für die Funktion z das absolute Glied für alle genügend grossen positiven z negativ und für alle genügend grossen negativen z positiv, so bleibt für beschränkte Randbedingungen die Netzlösung gleichmässig beschränkt.

Aus Lemma 2 ist die Richtigkeit des Vorganges der Netzmethode offensichtlich: Wenn die Beziehung (22) erfüllt wird, und wenn h genügend klein ist (Voraussetzungen (39), (40), (41)), dann tritt u_{ik} nicht aus dem Intervall $\langle -(M+a)\,e^{\varepsilon\tau}, (M+a)\,.\,e^{\varepsilon\tau}\rangle$ und der Punkt (x_i, t_k, u_{ik}) aus dem Gebiet $\bar{R}$, auf welchem die Funktionen A, B, C, D definiert sind, heraus.

Lemma 3. (Wir setzen immerwährend die Gültigkeit der Vorausetzungen aus Satz 1 und der Beziehung (22) voraus.) *Für alle Netze S_n, von einem bestimmten Index n_1 angefangen, gilt*

$$|p_{ik}| = \left|\frac{\Delta u_{ik}}{h}\right| \leqq P\,,$$

wobei P eine entsprechend gewählte (von den Koeffizienten der Gleichung (1) *und den Randbedingungen abhängige, von n unabhängige) Konstante ist.*

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung (17) nach x. Die bekannte Beziehung für das Differenzieren eines Produktes ist:

$$\frac{\Delta(ab)_i}{h} = \frac{a_{i+1}b_{i+1} - a_i b_i}{h} = a_{i+1}\frac{\Delta b_i}{h} + b_i\frac{\Delta a_i}{h} = a_i\frac{\Delta b_i}{h} + b_{i+1}\frac{\Delta a_i}{h}\,. \tag{49}$$

Ähnlich erhalten wir

$$\frac{\Delta^2(ab)_i}{h^2} = \frac{\Delta(ab)_i - \Delta(ab)_{i-1}}{h^2} =$$

$$= a_{i+1}\frac{\Delta^2 b_i}{h^2} + 2\frac{\Delta a_i}{h}\frac{\Delta b_{i-1}}{h} + b_{i-1}\frac{\Delta^2 a_i}{h^2} = \tag{50}$$

$$= b_{i+1}\frac{\Delta^2 a_i}{h^2} + 2\frac{\Delta a_{i-1}}{h}\frac{\Delta b_i}{h} + a_{i-1}\frac{\Delta^2 b_i}{h^2}\,. \tag{51}$$

Durch Differenzieren der Gleichung (17) erhalten wir (vgl. (18), (19)):

$$\frac{p_{i,k+1} - p_{ik}}{l} = A_{i+1,k}\frac{\Delta^2 p_{ik}}{h^2} + \frac{\Delta A_{ik}}{h}\frac{\Delta p_{i-1,k}}{h} + B_{i+1,k}\frac{\Delta p_{ik}}{h} + \left(\frac{\Delta B_{ik}}{h} + C_{i+1,k}\right)p_{ik} + \frac{\Delta C_{ik}}{h}u_{ik} + \frac{\Delta D_{ik}}{h}\,. \tag{52}$$

Offensichtlich führt die Substitution der Form (29) nicht zum Ziel, denn die rechte Seite der Gleichung enthält in Wirklichkeit das Quadrat von p_{ik}, ist also nicht von der Form der Gleichung (17) (vgl. auch Anmerkung 3, Kap. III):

$$(53)\quad \frac{\Delta B_{ik}}{h} = \frac{B(x_{i+1}, t_k, u_{i+1,k}) - B(x_i, t_k, u_{ik})}{h} =$$

$$= \frac{B(x_{i+1}, t_k, u_{i+1,k}) - B(x_i, t_k, u_{i+1,k}) + B(x_i, t_k, u_{i+1,k}) - B(x_i, t_k, u_{ik})}{h} =$$

$$= \frac{\partial B}{\partial x}(x, t_k, u_{i+1,k}) + \frac{\partial B}{\partial u}(x_i, t_k, u)\, p_{ik}\,,$$

wobei x zwischen den Werten x_i, x_{i+1} und u zwischen den Werten u_{ik}, $u_{i+1,k}$ liegt. Aus diesem Grunde wählen wir einen anderen Vorgang.

Wir beweisen zuerst die gleichmässige (in Bezug auf n) Beschränktheit von p_{ik} in den Randpunkten des Definitionsgebietes für p_{ik}, d. h. in den Punkten auf den Geraden $t = 0$, $x = 0$, $x = 1 - h$ (auf den Punkten der Gerade $x = 1$ ist p_{ik} nicht definiert). Auf $t = 0$ ist p_{ik} auf Grund der Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ beschränkt. Wir beweisen die Beschränktheit von p_{ik} in den Punkten der Geraden $x = 0$, $x = 1 - h$, und zwar zuerst auf der Gerade $x = 1 - h$.

Nach Voraussetzung haben die Randwertfunktionen $g(t)$, $h(t)$ auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ eine stetige und daher beschränkte Ableitung. Wir führen mit Hilfe der Gleichung

$$(54)\qquad u = w - \varrho t$$

eine neue unbekannte Funktion w_{ik} ein, wobei ϱ eine solche positive Konstante ist, dass die Randwertfunktionen für w,

$$(55)\qquad \bar{g}(t) = g(t) + \varrho(t)\,, \quad \bar{h}(t) = h(t) + \varrho t\,,$$

eine positive Ableitung haben. Auf Grund der Transformation (54) vergrössert sich die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung um ϱ. Von der Funktion u_{ik} haben wir schon (Lemma 2) bewiesen, dass sie (gleichmässig) beschränkt ist. Weil ϱ eine feste Zahl ist, wird das absolute Glied der rechten Seite in der Gleichung für die Funktion w_{ik},

$$C_{ik}(w_{ik} - \varrho t_k) + D_{ik} + \varrho = C_{ik} u_{ik} + D_{ik} + \varrho\,,$$

beschränkt sein. Wenn wir eine Zahl ω genügend gross wählen, wird für die durch die Gleichung

$$(56)\qquad u = w - \varrho t = z - e^{\omega x} - \varrho t$$

gegebene Funktion z_{ik} das absolute Glied der rechten Seite für genügend kleine h negativ sein:

$$\frac{z_{i,k+1} - z_{ik}}{l} = A_{ik} \frac{\Delta^2 z_{ik}}{h^2} + B_{ik} \frac{\Delta z_{ik}}{h} + C_{ik}(z_{ik} - e^{\omega x_i} - \varrho t_k) +$$
$$+ D_{ik} + \varrho - A_{ik}\omega^2 e^{\omega x_1} - B_{ik}\omega e^{\omega x_2}\,,$$

wobei $x_i < x_2 < x_i + h$, $x_i - h < x_1 < x_i + h$ ist. Weil nun

$$(57)\qquad C_{ik}(z_{ik} - e^{\omega x_i} - \varrho t_k) + D_{ik} + \varrho - A_{ik}\omega^2 e^{\omega x_1} - B_{ik}\omega e^{\omega x_2} < 0$$

ist, kann die Funktion z_{ik} für genügend kleine h in den inneren Punkten der $(k+1)$-ten Zeile keine grösseren Werte annehmen, als das Maximum von z_{ik} in der k-ten Zeile ist (wie sogleich aus der der Ungleichung (44) ähnlichen Ungleichung zu sehen ist; h sei genügend klein, damit die Ungleichungen (39), (40) erfüllt sind). Weil die Funktion $f'(x)$ nach Voraussetzung stetig und beschränkt auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ ist, kann die Zahl ω so gross gewählt werden, damit für $t = 0$

$$z'(x) > 0 \quad \text{also auch} \quad \frac{\Delta z_{i0}}{h} < 0 \tag{58}$$

auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ ist. Durch eine entsprechende Wahl der Zahl ω kann man ausserdem erreichen, dass überall in dem Intervall $\langle 0, \tau\rangle$ $\bar{\bar{h}}(t) > \bar{\bar{g}}(t)$ ist, wobei $\bar{\bar{g}}(t)$, $\bar{\bar{h}}(t)$ Randwertfunktionen der Funktion z sind,

$$\bar{\bar{h}}(t) = \bar{h}(t) + e^{\omega} = h(t) + \varrho t + e^{\omega}\,, \quad \bar{\bar{g}}(t) = \bar{g}(t) + 1 = g(t) + \varrho(t) + 1\,.$$

Wir behaupten nun: Wählen wir ϱ, ω und h so wie gesagt, wird in allen Netzpunkten der x-Koordinate $1 - h$ $\Delta z/h > 0$ sein.

In der nullten Zeile folgt dieser Umstand aus der Beziehung (58). In der ersten Zeile ist $z_{(x=1-h)} < z_{(x=1)}$, denn in der nulten Zeile erreicht $z_{i,0}$ den maximalen Wert im Punkte $x = 1$, also auf Grund dessen, dass $z_{i,k+1} \leqq \max z_{ik}$ ist, wird z_{i1} in keinem inneren Punkte der ersten Zeile grösser als dieser Wert sein; da nun $\bar{\bar{h}}'(t) > 0$ und $\bar{\bar{g}}(t) < \bar{\bar{h}}(t)$ ist, wird z_{i1} wieder für $x = 1$ maximal, so dass

$$\frac{z_{(x=1)} - z_{(x=1-h)}}{h} > 0$$

sein wird usw. Aus (56) folgt dann für $x = 1 - h$, dass

$$\frac{\Delta u}{h} > -\,\omega e^{\omega}$$

gleichmässig für jedes Netz S_n mit genügend kleinem h ist, d. h. von einem bestimmten Index angefangen. Ähnlich wird die gleichmässige Beschränktheit in den Punkten $x = 1 - h$ von oben bewiesen und auf gleiche Weise die gleichmässige Beschränktheit von oben und unten in den Punkten auf der Geraden $x = 0$.

Wir bezeichnen P_0 die Zahl, durch welche p_{ik} für jedes Netz S_n auf $t = 0$, $x = 0$, $x = 1 - h$ beschränkt ist. Es ist also

$$|p_{ik}| \leqq P_0 \tag{59}$$

in den Randpunkten des Definitionsgebietes der Funktion p_{ih} gleichmässig für alle Netze S_n.

Wir beweisen nun die (gleichmässige) Beschränktheit der Funktion p_{ik} in den inneren Punkten. Wir gehen von der Gleichung (52) aus. Wir haben (Lemma 2) bewiesen, dass für alle Netze von einem Netz S_{n_0} angefangen $|u_{ik}| \leqq (M + a)\, e^{\varepsilon\tau} =$ $= H$ ist. Wir führen eine Netzfunktion v_{ik} durch die Beziehung

$$u_{ik} = G(v_{ik}) \tag{60}$$

ein, wobei

$$G(v) = 2H \int_0^v \frac{1 - Ee^{2HFs}}{1 + Ee^{2HFs}}\, ds \tag{61}$$

ist; dabei ist

$$F = \frac{2 \max_{\bar{R}} |A_u|}{\alpha_0} \tag{62}$$

(α_0 ist die untere Grenze für A auf $\bar{R}$) und $E > 0$ wählen wir so klein, dass $1 - Ee^{2HF} > 0$ und

$$2H \int_0^1 \frac{1 - Ee^{2HFs}}{1 + Ee^{2HFs}}\, ds > H\,, \tag{63}$$

$$2H \int_0^{-1} \frac{1 - Ee^{2HFs}}{1 + Ee^{2HFs}}\, ds < -H \tag{63'}$$

ist.

Durch die Gleichung (60) wird jedem $u_{ik} \in \langle -H, H \rangle$ gerade eine Funktion v_{ik} zugeordnet, wobei die Werte von v_{ik} auf Grund der Ungleichungen (63), (63') zwischen den Werten -1 und 1 liegen. Wir stellen leicht fest, dass die Funktion (60) auf dem Intervalle $\langle -1; 1 \rangle$ stetige, daher auch beschränkte Ableitungen beliebiger Ordnung hat und dass

$$G' > 0\,, \quad G'' < 0\,, \quad G''' < 0\,, \tag{64}$$

$$G''' = FG'G'' \tag{65}$$

gilt. Setzen wir nun (60) in (52) ein, so erhalten wir

$$\frac{G_{i+1,k+1} - G_{i,k+1} - G_{i+1,k} + G_{ik}}{hl} = A_{i+1,k} \frac{\Delta^3 G_{ih}}{h^3} + \frac{\Delta A_{ik}}{h} \frac{\Delta^2 G_{ik}}{h^2} + \tag{66}$$
$$+ B_{i+1,k} \frac{\Delta^2 G_{i+1,k}}{h^2} + \left(\frac{\Delta B_{ik}}{h} + C_{i+1,k} \right) \frac{\Delta G_{ik}}{h} + \frac{\Delta C_{ik}}{h} G_{ik} + \frac{\Delta D_{ik}}{h}\,.$$

Wir stellen leicht fest, dass

$$\Delta G_{ik} = G_{i+1,k} - G_{ik} = G' \,\Delta v_{ik}\,, \tag{67}$$

$$\Delta^2 G_{ik} = G_{i+1,k} - 2G_{ik} + G_{i-1,k} = G' \,\Delta^2 v_{ik} + G'' (\Delta v_{ik})^2\,, \tag{68}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 G_{ih} &= G_{i+2,k} - 3G_{i+1,k} + 3G_{ik} - G_{i-1,k} = \\ &= G' \,\Delta^3 v_{ik} + 3G'' \,\Delta^2 v_{ik} \,\Delta v_{ik} + G''' (\Delta v_{ik})^3 \end{aligned} \tag{69}$$

usw. ist, wobei die Ableitungen $G'(v)$, $G''(v)$, $G'''(v)$ nach dem Mittelwertsatz in zweckmässig gewählten Punkten ausgewertet werden müssen. Ähnlich ist

$$\Delta A_{ik} = A(x_{i+1}, t_k, u_{i+1,k}) - A(x_i, t_k, u_{ik}) = \frac{\partial A}{\partial x} h + \frac{\partial A}{\partial u} G' \Delta v_{ik} \tag{70}$$

(denn $\Delta x = h$) usw. Die rechte Seite der Gleichung (66) ist dann von der Form (wir bezeichnen $\Delta v_{ik}/h = P_{ik}$)

$$\begin{aligned} A_{i+1,k}\left(G_1' \frac{\Delta^2 P_{ik}}{h^2} + 3G_2'' \frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} . P_{ik} + G_3''' P_{ik}^3\right) + \\ + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial u} G_4' P_{ik}\right)\left(G_5' \frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} + G_6'' P_{ik}^2\right) + B_{i+1,k}\left(G_7' \frac{\Delta P_{ik}}{h} + G_8'' P_{i+1,k}^2\right) + \\ + G_9' P_{ik}\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} G_{10}' P_{ik}\right) + C_{i+1,k} G_9' P_{ik} + \\ + G_{ik}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial u} G_{11}' P_{ik}\right) + \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial u} G_{12}' P_{ik} . \end{aligned} \tag{71}$$

Mit verschiedenen Indizes der Ableitungen für die Funktion G drücken wir aus, dass diese Ableitung allgemein für verschiedene Werte v auszuwerten sind.

Die linke Seite der Gleichung (66) formen wir auf folgende Art um: Wir bezeichnen $v_{i,k+1} - v_{ik} = \square\, v_{ik}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} G(v_{ik} + \Delta v_{ik} + \square v_{ik}) &= G(v_{ik} + v_{i+1,k} - v_{ik} + v_{i,k+1} - v_{ik}) = \\ &= G(v_{i+1,k} + v_{i,k+1} - v_{ik}) . \end{aligned}$$

Nach bekannten Mittelwertsätzen erhalten wir

$$\begin{aligned} G(v_{i+1,k+1}) - G(v_{i,k+1}) - G(v_{i+1,k}) + G(v_{ik}) = \\ G(v_{i+1,k+1}) - G(v_{i+1,k} + v_{i,k+1} - v_{ik}) + \\ + G(v_{ik} + \Delta v_{ik} + \square v_{ik}) - G(v_{ik} + \square v_{ik}) - G(v_{ik} + \Delta v_{ik}) + G(v_{ik}) = \\ = G_a' . (v_{i+1,k+1} - v_{i+1,k} - v_{i,k+1} + v_{ik}) + G_b'' . \Delta v_{ik} \square v_{ik} . \end{aligned} \tag{72}$$

Die linke Seite der Gleichung (66) bekommt dann die Form

$$G_a' \frac{P_{i,k+1} - P_{ik}}{l} + G_b'' P_{ik} \frac{v_{i,k+1} - v_{ik}}{l} . \tag{73}$$

Für den Ausdruck $(v_{i,k+1} - v_{ik})/l$ setzen wir aus Gleichung (17), welche wir in folgender Form schreiben,

$$G_c' \frac{v_{i,k+1} - v_{ik}}{l} = A_{ik}\left(G_{13}' \frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} + G_{14}'' P_{ik}^2\right) + B_{ik} G_{15}' P_{ik} + C_{ik} G_{ik} + D_{ik} , \tag{74}$$

ein. Setzen wir nun den auf diese Weise umgeformten Ausdruck (73) für die linke Seite der Gleichung (66) und (71) für die rechte Seite ein, erhalten wir folgende Gleichung für P_{ik}:

$$(75)\qquad \frac{P_{i,k+1}-P_{ik}}{l} = A_{i+1,k}\frac{G_1'}{G_a'}\frac{\Delta^2 P_{ik}}{h^2} + B_{i+1,k}\frac{G_7'}{G_a'}\frac{\Delta P_{ik}}{h} +$$
$$+\left[A_{i+1,k}\frac{3G_2''}{G_a'}P_{ik} + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial u}G_4'P_{ik}\right)\frac{G_5'}{G_a'} - A_{ik}\frac{G_{13}'G_b''}{G_a'G_c'}P_{ik}\right]\frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} +$$
$$+\frac{1}{G_a'}\left(A_{i+1,k}G_3''' + \frac{\partial A}{\partial u}G_4'G_6'' - A_{ik}\frac{G_b''G_{14}''}{G_c'}\right)P_{ik}^3 +$$
$$+\alpha_1 P_{ik}^2 + \alpha_2 P_{i+1,k}^2 + \alpha_3 P_{ik} + \alpha_4\,,$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ in Bezug auf n gleichmässig beschränkte Ausdrücke sind.

Auf Grund der Gleichung (75) lässt sich nun leicht beweisen, dass für genügend kleine h aus der Beschränktheit der Funktion P_{ik} in allen Punkten der k-ten Zeile mit einer zweckmässig gewählten Konstante die Beschränktheit der Funktion $P_{i,k+1}$ in jedem inneren Punkte der $(k+1)$-ten Zeile mit derselben Konstante folgt.

Zu diesem Beweis benützen wir die Methode, welche wir schon beim Beweis von Lemma 2 angewendet haben. Wir beobachten zuerst zwei Tatsachen:

1. Im Ausdruck

$$(76)\qquad A_{i+1,k}G_3''' + \frac{\partial A}{\partial u}G_4'G_6''$$

werden die Ableitungen G_4', G_6'', G_3''' der Funktion $G(v)$ nicht genau im Punkte v_k ausgewertet. Werden sie genau im Punkte v_{ik} ausgewertet, so folgt aus der Definition $G(v)$, aus der gleichmässigen Beschränktheit der Ableitungen (64) und aus (65), dass eine solche positive Konstante φ existiert, dass

$$(77)\qquad A_{i+1,k}G_{ik}''' + \frac{\partial A}{\partial u}G_{ik}'G_{ik}'' < -2\varphi$$

in jedem Netzpunkte gleichmässig für alle Netze S_n gilt. Nach Voraussetzung über die Koeffizienten der Gleichung (1) sind die Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ in (75) beschränkt. Das Polynom

$$-\varphi P_{ik}^3 + \alpha_1 P_{ik}^2 + \alpha_2 P_{i+1,k}^2 + \alpha_3 P_{ik} + \alpha_4$$

ist ein Polynom dritten Grades mit einem scharf negativen Koeffizienten bei dem Glied von dritter Potenz. Es existiert daher eine bestimmte Konstante P_1 derart, dass für $P_{ik} = P_1 > 0$ (und gleichzeitig für $|P_{i+1,k}| < 2P_1$) dieses Polynom negativ ist und diese Eigenschaft hat nicht nur die Zahl P_1, sondern jede Zahl $P > P_1$. Gleichzeitig ist für $P_{ik} = P_2 < 0$ (und $|P_{i+1,k}| < -2P_2$) dieses Polynom positiv und diese Eigenschaft hat auch jede Zahl $P < P_2$. Diese Behauptungen sind um so gültiger je negativer (als $-\varphi$) der Koeffizient bei P_{ik}^3 sein wird.

Ist überall in der k-ten Zeile $|P_{ik}| \leqq c$ (wo c eine Konstante ist) gleichmässig für alle S_n, so kann man n so gross wählen (d. h. h so klein), dass $\Delta v_{ik} = hP_{ik}$ so klein wird, dass der Ausdruck (76) in der ganzen k-ten Zeile negativer als $-\varphi$

wird und für $P_{ik} > P_1$ und $P_{ik} < P_2$ wird das absolute Glied der rechten Seite der Gleichung (75) (d. h. das betrachtete Polynom dritten Grades) negativ. Dieser Umstand ermöglicht es, die Beweismethode aus Lemma 2 anzuwenden.

2. Die Zahl G'_c (und die Zahlen G'_a, G''_b) hat einen etwas anderen Charakter als die Zahlen G'_1, G'_2, denn sie ist Ableitung der Funktion $G(v)$ „in Zeitrichtung",

$$\frac{G_{i,k+1} - G_{ik}}{l} = G'_c \frac{v_{i,k+1} - v_{ik}}{l} = G'_c \frac{\Box v_{ik}}{l}.$$

Über die Beschränktheit der Zahlen $\Box v_{ik}/l$ in der k-ten Zeile setzen wir nichts voraus, so dass die Werte G'_c und $G'(v_{ik})$ sehr verschieden sein können.

Ähnlich können die Zahlen G'_a und G''_b von G'_{ik}, G''_{ik} allgemein sehr verschieden sein. Dieser Umstand stört an und für sich beim Konvergenzbeweis nicht besonders, denn die positive Funktion $G'(v)$ ist auf dem Intervall $\langle 0; 1 \rangle$ von unten durch eine positive Konstante beschränkt. Mit Rücksicht auf die schon einmal eingeführte Beziehung (22) mit fest gewähltem κ werden wir folgenden Vorgang wählen:

Die Eigenschaften der Funktion (61) (vor allem die Eigenschaft (65)) bleibt erfüllt, wie wir auch $E > 0$ wählen. Wählen wir nun E genügend klein, so erreichen wir, dass der Quotient G'_1/G'_a gleichmässig beliebig wenig von Eins verschieden sein wird; $\kappa > 0$ in (22) bleibt fest gewählt.

Kehren wir nun zu unseren Zahlen P_1, P_2 zurück. Wir wissen schon, dass p_{ik} (im absoluten Wert) in den Randpunkten des Definitionsgebietes durch eine Konstante P_0 gleichmässig beschränkt ist. Nach (60) wird also auch P_{ik} in diesen Punkten durch die Konstante

$$P'_0 = \frac{P_0}{\min G'(v)}, \quad -1 \leqq v \leqq 1, \tag{78}$$

beschränkt. Wir bezeichnen $P_3 = \max(P'_0, P_1, |P_2|)$ und wählen $a_3 > 0$, $a_3 < P_3$.

Wir behaupten nun: Wenn überall in der k-ten Zeile $|P_{ik}| \leqq P_3 + a_3$ ist, dann ist für alle Netze S_n mit genügend kleinem h auch in jedem inneren Punkte der $(k + 1)$-ten Zeile $|P_{ik}| \leqq P_3 + a_3$. Es genügt nämlich, dass h so gewählt wird, dass der Koeffizient (76) bei P^3_{ik} überall negativer als $-\varphi$ ist. Der Beweis der ausgesprochenen Behauptung ist dann fast wörtlich derselbe wie im Lemma 2. Der Unterschied ist nur darin, dass in der Gleichung (75) auch das Glied mit $(\Delta P_{i-1,k})/h$ vorkommt, was natürlich nichts ausmacht. Ähnlich wie wir das Glied $chB_{ik}(v_{i+1,k} - v_{ik})$ in (44) mit dem Glied $cA_{ik}(v_{i+1,k} - v_{ik})$ verbunden haben, verbinden wir nun dieses Glied mit dem Glied

$$cA_{i+1,k} \frac{G'_1}{G'_a} (P_{i-1,k} - P_{ik}).$$

Sonst bleiben der Vorgang und der Beweisgedanke unverändert. Hiermit ist also Lemma 3 bewiesen, denn die gleichmässige Beschränktheit von $|P_{ik}|$ am Rande (durch die Zahl $P'_0 < P_3 + a_3$) haben wir bewiesen und aus der Beziehung $p_{ik} = G' . P_{ik}$ und aus (61) folgt, dass es genügt, $P = 2H(P_3 + a_3)$ zu setzen.

Lemma 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 1 (*die Erfüllung der Beziehung* (22) *wird auch weiter vorausgesetzt*) *existieren solche Zahlen R und n_2, dass für Netze S_n, $n > n_2$, die Beziehung $|r_{ik}| \leqq R$ gilt.*

Beweis. Die Beweisführung verläuft ähnlich wie der Beweisvorgang für Lemma 3. Durch Differenzieren der Gleichung (52) nach x erhalten wir eine Differenzengleichung für

$$r_{ik} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2}.$$

(Wir bemerken, dass r_{ik} nur für Punkte auf den Geraden $x = h$, $x = 2k, \ldots$ definiert ist und nicht für Punkte der Geraden $x = 0$, $x = 1$.)

Weil, wie wir bewiesen haben, p_{ik} gleichmässig beschränkt ist,

$$|p_{ik}| \leqq P$$

($n > n_1$), lässt sich wieder eine der Substitution (60) ähnliche Substitution

$$p_{ik} = G(y_{ik}), \tag{79}$$

wo

$$G(y) = 2P \int_0^y \frac{1 - Ee^{2PFs}}{1 + Ee^{2PFs}} \, ds \tag{80}$$

ist, anwenden.

Wenn wir (79) in die Differenzengleichung für r_{ik} einsetzen und $\Delta y_{ik}/h = R_{ik}$ bezeichnen, erhalten wir für R_{ik} eine Gleichung von gleicher Form wie die Gleichung (75) für P_{ik} ist. Aus dieser Gleichung folgt nun wieder, dass wenn $|R_{ik}|$ in der k-ten Zeile durch eine genügend grosse Konstante, welche wir R_1 bezeichnen wollen, beschränkt ist, so ist $|R_{ik}|$ durch diese Konstante auch in allen inneren Punkten der ($k + 1$)-ten Zeile beschränkt (was für alle Netze S_n von einem bestimmten Index angefangen gilt).

Für die Beschränktheit von r_{ik} in den Randpunkten des Netzes können wir nicht den für p_{ik} angewendeten Vorgang benützen, denn wir haben die Beschränktheit von $u'(t)$ für $x = 0$, $x = 1$ angewendet, welche aus den Voraussetzungen über die Randbedingungen folgt, während wir hier nichts über die Beschränktheit des Quotienten

$$\frac{p_{i,k+1} - p_{ik}}{l}$$

kennen, welcher der Ableitung $p'(t)$ in den Randpunkten des Netzes entspricht. Wir benützen daher diesen einfachen Kunstgriff: Wir prolongieren das Netz S_n um weitere Netzpunkte mit den x-Koordinaten $x = -h$, $x = 1 + h$.

In der nullten Zeile definieren wir $u_{i,0}$ in diesen Punkten so, dass die Gleichung (17) nicht nur in den inneren Punkten des Abschnittes $t = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$, sondern auch in den Punkten $x = 0$, $x = 1$ erfüllt ist.

Wir betrachten zuerst einmal den Punkt $x = 0$. Den Wert der Netzlösung in diesem Punkte bezeichnen wir mit u_{00}, den Wert p_{ik} mit p_{00} (diese Werte sind eindeutig durch die Funktion $f(x)$ definiert). Wir sollen nun $u_{-1,0}$ resp. $p_{-1,0}$ derart definieren, dass die Gleichung (17) erfüllt bleibt. Wir formen sie folgenderweise um:

$$\text{(81)} \qquad \frac{u_{01} - u_{00}}{l} = A_{00} \frac{p_{00} - p_{-1,0}}{h} + B_{00}p_{00} + C_{00}u_{00} + D_{00} ;$$

Daraus folgt

$$\text{(82)} \qquad A_{00}p_{-1,0} = (A_{00} + hB_{00})\, p_{00} - h\, \frac{u_{01} - u_{00}}{l} + h(C_{00}u_{00} + D_{00}) .$$

Aus Gleichung (82) ist $p_{-1,0}$ eindeutig bestimmt und dadurch auch $u_{-1,0}$. Auf ähnliche Weise wird auch in den weiteren Zeilen fortgefahren.

Weil der Bruch

$$\frac{u_{01} - u_{00}}{l} \quad \text{resp.} \quad \frac{u_{0,k+1} - u_{0,k}}{l}$$

nach Voraussetzung in Bezug auf n gleichmässig beschränkt ist ($g(t)$ hat auf dem Intervall $\langle 0, \tau \rangle$ eine stetige Ableitung) und von p_{00} resp. $p_{0,k}$ haben wir die (gleichmässige) Beschränktheit bewiesen, so ist nach (82) resp. den ähnlichen Gleichungen für die weiteren Zeilen auch $p_{-1,0}$ resp. $p_{-1,k}$ beschränkt. Weil $q_{0,k}$ am Rande $x = 0$ gleichmässig beschränkt ist, da $g(t)$ auf dem Intervall $\langle 0, \tau \rangle$ eine stetige Ableitung besitzt, und für $p_{0,k}$ haben wir die gleichmässige Beschränktheit bewiesen, folgt nun aus der Gültigkeit der Gleichung (17) in den Randpunkten $x = 0$ auch die gleichmässige Beschränktheit für r_{0k}. Ähnlich gehen wir auch in den Punkten der Gerade $x = 1$ vor, auf welcher wir ganz analog die gleichmässige Beschränktheit von p_{ik} (und r_{ik}) für $x = 1$ beweisen.

Nach (79) ist

$$\text{(83)} \qquad r_{ik} = G' R_{ik} .$$

Weil r_{ik} in den Randpunkten des Netzes gleichmässig beschränkt ist, ist nach (83) auch R_{ik} in diesen Punkten durch eine Konstante, welche wir R_2 bezeichnen, gleichmässig beschränkt. Damit ist Lemma 4 bewiesen, denn es genügt offfenbar

$$R = 2P \max (R_1, R_2)$$

zu setzen. Aus Gleichung (17) folgt dann die gleichmässige Beschränktheit von

$$\text{(84)} \qquad q_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l} .$$

Um die Beschränktheit der weiteren Differenzenquotienten zu beweisen, differenzieren wir die Gleichung (17) nach der Zeit und dividieren mit l. In das Ergebnis setzen wir für r_{ik} aus Gleichung (17) ein. Dadurch erhalten wir eine Differenzengleichung für q_{ik}. Diese Gleichung wird das Glied q_{ik}^2 enthalten, was jedoch keine Schwierigkeiten bildet, denn die Beschränktheit von q_{ik} haben wir schon bewiesen.

Unter der Voraussetzung über die Randbedingungen folgt, dass $\partial u/\partial t$ für $t = 0$ auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ eine Ableitung nach x besitzt, welche auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ der Lipschitzschen Bedingung genügt, für $x = 0$ und $x = 1$ auf dem Intervall $\langle 0, \tau\rangle$ eine stetige Ableitung nach t besitzt, wobei aus den Bedingungen (10) die Stetigkeit der Randbedingungen in den Punkten (0; 0) und (1; 0) folgt. Für den Beweis der Beschränktheit der Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta q_{ik}}{h}, \quad \frac{\Delta^2 q_{ik}}{h^2}$$

und dadurch auch der Differenzenquotienten

$$\frac{\Box p_{ik}}{l}, \quad \frac{\Delta^3 u_{ik}}{h^3}, \quad \frac{\Delta^4 u_{ik}}{h^4}$$

kann man also denselben Beweisvorgang anwenden, welchen wir zum Beweis der Beschränktheit der niedrigeren Differenzenquotienten benützt haben; die Rolle von u_{ik} spielt in diesem Fall die Netzfunktion q_{ik}.

Dadurch ist der Beweis des Satzes 2 gegeben, denn wir wollen Beweise bekannter Behauptungen nicht reproduzieren (siehe z. B. [10]): Aus der Funktionenfolge $u_n(x, t)$ kann man eine mit den Funktionen $u_{nx}(x, t)$, $u_{nxx}(x, t)$, $u_{nt}(x, t)$ einschliesslich auf $\bar{Q}$ gleichmässig konvergente Folge herausheben. Die Grenzfunktion $u(x, t)$ erfüllt die gegebene Differentialgleichung (in unserem Fall sogar einschliesslich des Randes) und die vorgeschriebenen Randbedingungen. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt die gleichmässige Konvergenz der ganzen Folge $u_n(x, t)$ zu der Lösung $u(x, t)$.

Anmerkung 6. Die in Satz 1 gemachten Voraussetzungen über die Koeffizienten A, B, C, D der Gleichung (1) sind etwas schwächer als in der Literatur für die klassische Lösung des Problems „im Ganzen" gefordert wird (vgl. z. B. [7], [5]). Unter den angeführten Voraussetzungen über die Glattheit der Randwertfunktionen $f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ lassen sich diese Voraussetzungen noch weiter abschwächen: Durch den im Beweis des Satzes 1 angeführten Vorgang gelangen wir zur gleichmässigen Beschränktheit von p_{ik}, r_{ik}, q_{ik}. Dazu genügt es, dass der Koeffizient A in $\bar{R}$ beschränkte Ableitungen A_x, A_u, welche der Lipschitzschen Bedingung in bezug auf x und u genügen, besitzt; das Gleiche setzen wir von den Koeffizienten B, C, D voraus. Jetzt betrachten wir zuerst die Gleichung (17):

$$q_{ik} = A_{ik} r_{ik} + B_{ik} p_{ik} + C_{ik} u_{ik} + D_{ik}\,. \tag{85}$$

Aus der Forderung der Stetigkeit der Ableitung $\partial u/\partial t$ am Rande (d. h. der Stetigkeit der Ableitungen der Funktionen $h(t)$, $g(t)$) erfolgte die gleichmässige Beschränktheit von p_{ik} am Rande. Offenbar genügte hierzu die Erfüllung der Lipschitzschen Bedingung, d. h. die Beschränktheit der Funktion q_{ik} am Rande.

Es ist leicht zu zeigen, dass aus der Beschränktheit der Funktion q_{ik} auf $\bar{Q}$ die

Beschränktheit der Funktion p_{ik} auf $\bar{Q}$ folgt: Wir definieren zu diesem Zweck die Funktion v_{ik}, deren Differenzenquotienten wir

$$\frac{\Delta v_{ik}}{h} = P_{ik}, \quad \frac{\Delta^2 v_{ik}}{h^2} = R_{ik}$$

bezeichnen, folgendermassen:

$$\begin{aligned}
v_{0k} &= u_{0k}, \\
P_{0k} &= p_{0k}\left(1 + h\frac{B_{0k}}{A_{0k}}\right), \\
P_{1k} &= p_{1k}\left(1 + h\frac{B_{1k}}{A_{1k}}\right) + h\frac{B_{0k}}{A_{0k}}p_{0k}, \\
P_{2k} &= p_{2k}\left(1 + h\frac{B_{2k}}{A_{2k}}\right) + h\frac{B_{1k}}{A_{1k}}p_{1k} + h\frac{B_{0k}}{A_{0k}}p_{0k}, \\
&\vdots \\
P_{ik} &= p_{ik}\left(1 + h\frac{B_{ik}}{A_{ik}}\right) + h\sum_{j=0}^{i-1}\frac{B_{jk}}{A_{jk}}p_{jk}. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hiermit ist offensichtlich die Funktion v_{ik} eindeutig in allen Netzpunkten definiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta P_{0k}}{h} &= \frac{P_{1k} - P_{0k}}{h} = \frac{\Delta p_{0k}}{h} + \frac{B_{1k}}{A_{1k}}p_{1k}, \\
&\vdots \\
\frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} &= \frac{P_{ik} - P_{i-1,k}}{h} = \frac{\Delta p_{i-1,k}}{h} + \frac{B_{ik}}{A_{ik}}p_{ik}. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{86}$$

Weil

$$\frac{\Delta p_{i-1,k}}{h} = \frac{\Delta^2 u_{ik}}{h^2} = r_{ik}$$

ist, können wir die Gleichung (85) unter Benutzung der Beziehung (86) in der Form

$$q_{ik} = A_{ik}\frac{\Delta P_{i-1,k}}{h} + C_{ik}u_{ik} + D_{ik} \tag{87}$$

schreiben. Aus Gleichung (87) ist zu ersehen, dass (unter den angeführten Voraussetzungen über die gleichmässige Beschränktheit der Funktionen u_{ik}, q_{ik}) $\Delta P_{i-1,k}/h$ gleichmässig beschränkt ist,

$$\left|\frac{\Delta P_{i-1,k}}{h}\right| \leqq b,$$

wobei b unabhängig von n ist.

Die gleichmässige Beschränktheit der Funktion p_{ik} in den Randpunkten $x = 0$ haben wir bewiesen, $|p_{0k}| \leqq P_0$. Durch die Gleichung (86) sind (wenn h genügend klein ist) für bekannte $\Delta P_{i-1,k}/h$ und bekannte p_{0k} die Werte der Funktion p_{ik} ($i = 1, 2, \ldots$)

$$\frac{p_{ik} - p_{i-1,k}}{h} = -\frac{B_{ik}}{A_{ik}} p_{ik} + \frac{\Delta P_{i-1,k}}{h}$$

gegeben.

Diese Werte sind im absoluten Wert kleiner, als die entsprechenden Werte der positiven Funktion ${}^{(1)}p_{ik}$, welche durch die Gleichung

$$\frac{{}^{(1)}p_{ik} - {}^{(1)}p_{i-1,k}}{h} = a\,{}^{(1)}p_{ik} + b \tag{88}$$

mit der Anfangsbedingung ${}^{(1)}p_{0k} = P_0$ definiert ist. (Wir haben

$$\max_{\bar{R}} \left| \frac{B(x, t, u)}{A(x, t, u)} \right| = a$$

bezeichnet und setzen voraus, dass h genügend klein ist, so dass $ah < 1$ ist.) Die Gleichung (88) bringen wir auf die Form

$${}^{(1)}p_{ik}(1 - ah) = {}^{(1)}p_{i-1,k} + hb\,. \tag{89}$$

Wir bezeichnen

$$h' = \frac{h}{1 - ah}, \quad \text{d. h.} \quad (1 - ah)(1 + ah') = 1 \tag{90}$$

und multiplizieren die Gleichung (89) mit der Zahl $(1 + ah')$. Wir erhalten ${}^{(1)}p_{ik} = (1 + ah')\,{}^{(1)}p_{i-1,k} + h(1 + ah')\,b$ oder

$$\frac{{}^{(1)}p_{ik} - {}^{(1)}p_{i-1,k}}{h'} = a\,{}^{(1)}p_{i-1,k} + b\,. \tag{91}$$

Die Lösung dieser Gleichung mit der Anfangsbedingung ${}^{(1)}p_{0k} = P_0$ wird durch die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = ay + b \tag{92}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = P_0$ auf dem „verlängerten" Intervall $\langle 0; 1/(1 - ah)\rangle$ majorisiert. Diese Lösung ist offenbar gleichmässig beschränkt, $|y| \leqq d$. Also ist $|p_{ik}| \leqq d$.

Aus der gleichmässigen Beschränktheit der Funktion p_{ik} folgt aus der Beziehung (85) die gleichmässige Beschränktheit der Funktion r_{ik}.

Wir bemerken hierbei den Umstand, dass wenn wir $\max |q_{ik}| = q_k$ bezeichnen, dann $|p_{ik}| \leqq a_1 q_k + b_1$, $|r_{ik}| \leqq a_2 q_k + b_2$ ist, wobei a_1, b_1, a_2, b_2 positive von n unabhängige Konstanten sind, welche nur von den Koeffizienten der Gleichung (85), der Konstante H, welche $|u_{ik}|$ gleichmässig beschränkt, und von P_0 abhängen: Da die Konstante a nur von den Koeffizienten A, B abhängt, die Konstante b von q_k

linear abhängig ist, $b = a_3 q_k + b_3$, wobei a_3, b_3 von den Koeffizienten der Gleichung une von H abhängen, und die Gleichung (92) linear ist, so ist die Lösung

$$y = \frac{b}{a}(e^{ax} - 1) + P_0 e^{ax}$$

wieder *linear* in q_k.

Wir kommen nun zu unserer Frage (am Anfang dieser Anmerkung) zurück, d. h. zur Frage über die Voraussetzungen für die Glattheit der Funktionen A, B, C, D. Durch den Beweisvorgang für Satz 1 haben wir die gleichmässige Beschränktheit der Funktionen p_{ik} und r_{ik} und dadurch auch der Funktion q_{ik} bewiesen. Wir differenzieren nun die Gleichung (85) nach t (und bezeichnen kurz $(q_{i,k+1} - q_{ik})/l = \Box q_{ik}/l = Q_{ik}$, $(A_{i,k+1} - A_{ik})/l = \Box A_{ik}/l$ usw.):

$$\frac{\Box q_{ik}}{l} = A_{ik}\frac{\Delta^2 q_{ik}}{h^2} + B_{ik}\frac{\Delta q_{ik}}{h} + C_{ik}q_{ik} + \tag{93}$$

$$+ \frac{\Box A_{ik}}{l} r_{i,k+1} + \frac{\Box B_{ik}}{l} p_{i,k+1} + \frac{\Box C_{ik}}{l} u_{i,k+1} + \frac{\Box D_{ik}}{l}.$$

Wir beobachten hierbei, dass die Gleichung nicht für den direkten Beweis der Beschränktheit der Funktion q_{ik} geeignet ist, weil auch wenn man $|p_{ik}|$ und $|r_{ik}|$ linear auf Grund von q_k abschätzen kann, so ist

$$\frac{\Box A_{ik}}{l} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial u} q_{ik}$$

und im Glied $\Box A_{ik}/l \,.\, r_{ik}$ ist das Produkt $q_k q_{ik}$ und man kann die Substitution von der Form (29) nicht anwenden; darum haben wir zum Beweis der Beschränktheit der Funktion q_{ik} „im Ganzen" einen anderen Beweisvorgang gewählt. Wenn wir jedoch die Beziehung (93) wieder nach t differenzieren (wodurch wie eine Gleichung für Q_{ik} erhalten), kommt diese Schwierigkeit nicht mehr vor, denn es ist

$$\frac{\Box^2 A_{ik}}{l^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 A}{\partial t\,\partial u} q_{ik} + \frac{\partial^2 A}{\partial u^2} q_{ik}^2 + \frac{\partial A}{\partial u} Q_{ik} \tag{94}$$

wobei wir die Werte der Ableitungen der Funktion A in geeigneten Punkten nehmen müssen; zu dem geforderten Resultat genügt es, wenn $\partial A/\partial t$, $\partial A/\partial u$ die Lipschitzsche Bedingung in bezug auf t und u erfüllen (usw.), und q_{ik} beschränkt ist. Die Gleichung für Q_{ik} wird also von der Form

$$\frac{\Box Q_{ik}}{l} = A_{ik}\frac{\Delta^2 Q_{ik}}{h^2} + B_{ik}\frac{\Delta Q_{ik}}{h} + \alpha_1 Q_{ik} + \alpha_2\frac{\Delta^2 q_{i,k+1}}{h^2} + \alpha_3\frac{\Delta q_{i,k+1}}{h} + \alpha_4 \tag{95}$$

sein, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gleichmässig beschränkte Funktionen sind. Aber

$$\left|\frac{\Delta^2 q_{ik}}{h^2}\right|, \quad \left|\frac{\Delta q_{ik}}{h}\right|$$

können auf Grund von Q_k linear abgeschätzt werden, wobei $Q_k = \max_i |Q_{ik}|$ ist. Aus der Gleichung (95) folgt nun (vgl. Gleichung (22) und (34))

$$Q_{i,k+1} = Q_{ik}(1 - 2cA_{ik} - hcB_{ik}) + cA_{ik}Q_{i-1,k} + (cA_{ik} + hcB_{ik})\,Q_{i+1,k} + \\ + l\alpha_1 Q_{ik} + l\alpha_2 \frac{\Delta^2 q_{i,k+1}}{h^2} + l\alpha_3 \frac{\Delta q_{i,k+1}}{h} + l\alpha_4 . \tag{96}$$

Für alle Netze S_n von einem bestimmten Index n'_2 angefangen werden die Ausdrücke in den Klammern positiv. Wenn wir gleichzeitig

$$\left|\frac{\Delta^2 q_{i,k+1}}{h^2}\right|, \quad \left|\frac{\Delta q_{i,k+1}}{h}\right|$$

durch lineare Abschätzung in Q_{k+1} ersetzen, so erhalten wir

$$Q_{k+1} \leqq Q_k + l(\alpha_5 Q_k + \alpha_6 Q_{k+1} + \alpha_7)$$

($\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ sind nicht negative Konstanten), oder wenn wir

$$\frac{\alpha_5 + \alpha_6}{1 - l\alpha_6} = \alpha_8 , \quad \frac{\alpha_7}{1 - l\alpha_6} = \alpha_9$$

bezeichnen, erhalten wir

$$\frac{Q_{k+1} - Q_k}{l} \leqq \alpha_8 Q_k + \alpha_9 . \tag{97}$$

Für unsere Randbedingungen ist die Funktion Q_{ik} am Rande des Rechteckes $\bar{Q}$ (mit einer bestimmten Konstante Q') beschränkt. Wenn wir (97) durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \alpha_8 Q + \alpha_9$$

mit der Anfangsbedingung Q' ersetzen, wird ihre Lösung auf dem Intervall $\langle 0; \tau \rangle$ die Funktion Q_k majorisieren.

Damit ist die gleichmässige Beschränktheit von $Q_{ik} = \Box q_{ik}/l$ und damit also auch nach dem vorangegangenen, die gleichmässige Beschränktheit von

$$\frac{\Delta^2 q_{ik}}{h^2} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta q_{ik}}{h}$$

bewiesen. Damit haben wir die gleichmässige Beschränktheit der notwendigen Differenzenquotienten bewiesen und dadurch auch die Existenz der Lösung des Problem (1), (2). Also:

Die Lösung, welche die durch Satz 1 geforderten Eigenschaften besitzt, existiert für genügend glatte Randbedingungen (siehe Satz 1) unter den einzigen Voraussetzungen, dass die Funktionen A_x, A_t, A_u (und ähnlich für B, C, D) auf $\bar{Q}$ der Lipschitzschen Bedingung in Bezug auf ihre Argumente genügen.

Satz 2. (Unstetige Randbedingungen.) *Die Koefizienten A, B, C, D der Gleichung* (1) *mögen dieselben Voraussetzungen wie in Satz* 1 *erfüllen. Die Randwertfunktionen*

$f(x)$, $g(t)$, $h(t)$ seien auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ resp. $\langle 0, \tau\rangle$ teilweise stetig und im absoluten Wert durch die Konstante K beschränkt. (Die Bedingungen (10) fallen weg.) Dann existiert in Q gerade eine Lösung $u(x, t)$ der Gleichung (1), welche durch die Konstante (6) beschränkt ist und auf dem Rand zu dem Wert der Randwertfunktion in jedem solchen inneren Punkte des Intervalles $\langle 0, 1\rangle$ resp. $\langle 0, \tau\rangle$, in welchem die Funktion $f(x)$ resp. $g(t)$ resp. $h(t)$ stetig ist, stetig fortsetzbar ist. Diese Lösung ist in der Klasse von Funktionen, welche die in diesem Satz geforderten Eigenschaften besitzen und in Q beschränkt sind, einzig.

Beweis. Der Gedanke des Beweises ist einfach: Wir bilden eine Folge von genügend glatten Randwertfunktionen

(98) $$f_m(x)\,, \quad g_m(t)\,, \quad h_m(t)$$

(welche die Bedingungen von Satz 1 erfüllen) und welche im Sinne der lokal gleichmässigen Konvergenz die Funktionen $f(x)$, $g(t)$ und $h(t)$ approximieren (d. h. $f_m(x) \to \to f(x)$ gleichmässig auf jedem Intervall $\langle\alpha, \beta\rangle$, welches innerhalb des Intervalles, auf welchem die Funktion $f(x)$ stetig ist, liegt, usw.). Der Funktionenfolge (98) wird die Folge von Funktionen $u_m(x, t)$ entsprechen, deren Limes, wie wir beweisen werden, die gesuchte Lösung ist.

Unsere Hauptaufgabe wird es sein zu beweisen, dass die Folge $u_m(x, t)$ konvergent ist, und dass die Grenzwertfunktion $u(x, t)$ die Gleichung (1) erfüllt. Die Erfüllung der Randbedingungen in jedem Punkt der Stetigkeit der Randwertfunktionen wird durch die bekannte Methode der Barrieren bewiesen. Die Beschränktheit der Lösung durch die Konstante (6) folgt aus dem Grenzübergang. Die Eindeutigkeit der Lösung wird mit Hilfe der Methode der Arbeit [12] des Autors bewiesen.

Um zu beweisen, dass die Folge $u_m(x, t)$ konvergent ist und dass die Grenzwertfunktion $u(x, t)$ die Lösung der Gleichung (1) ist, beweisen wir die gleichmässige Beschränktheit der Ableitungen (der erforderlichen Ordnung) der Funktionen $u_m(x, t)$ auf einem beliebigen (fest gewählten) Rechteck $\bar{Q}_0$ mit den den Koordinatenachsen x, t parallelen Seiten, welcher innerhalb des Rechteckes mit den Seiten $x = 0$, $x = 1$, $t = 0$, $t = \tau$ liegt. Die Methode, welche wir zu diesem Zwecke anwenden, verlangt ein schrittweises Ableiten der Gleichung (1). Hier stossen wir auf Schwierigkeiten, denn in den abgeleiteten Gleichungen werden Ableitungen höherer als zweiter Ordnung sein, deren Existenz wir bewiesen haben. Wir werden also folgendermassen fortfahren:

Aus dem Beweis von Satz 1 ist zu ersehen, dass die Lösung eine genügende Anzahl von Ableitungen besitzen wird, wenn die Koeffizienten der Gleichung und die Randwertfunktionen genügende Anzahl von Ableitungen haben werden. Wir wählen daher die Funktionen (98) genügend glatt (wir können sie sogar unendlichmal differenzierbar wählen) und die Koeffizienten A, B, C, D in Gleichung (1) approximieren wir durch die Folgen

(99) $$A_m\,, \quad B_m\,, \quad C_m\,, \quad D_m$$

sogenannter „Mittelwertfunktionen" (siehe z. B. S. L. Sobolev, Někotoryje priměněnija funkcionalnogo analiza v matematičeskoj fizike), welche unendlichmal differenzierbar sind. Wir zeigen, dass, wenn die Ableitungen der Funktionen A, B, C, D durch bestimmte Konstanten beschränkt sind, so sind die Ableitungen der Funktionen (99) durch dieselben Konstanten beschränkt (genaueres siehe weiter). Dieser Umstand ermöglicht die gleichmässige Abschätzung der notwendigen Ableitungen der Funktionen $u_m(x, t)$.

Wir wollen zuerst diese wichtige Eigenschaft der Mittelwertfunktionen (von welcher wir gesprochen haben) zeigen. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion (es genügt sogar nur eine integrierbare Funktion) auf dem Intervall $\langle a, b\rangle$, und wir wollen

$$f_\rho(\xi) = C_0 \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} f(x)\, e^{(x-\xi)^2/[(x-\xi)^2-\rho^2]}\, \mathrm{d}x\,, \quad a + \varrho \leqq \xi \leqq b - \varrho \tag{100}$$

bezeichnen, wobei ϱ eine positive Konstante ist ($2\varrho < b - a$); C_0 ist eine durch die Bedingung

$$C_0 \int_{-\varrho}^{\varrho} e^{x^2/(x^2-\rho^2)}\, \mathrm{d}x = 1 \tag{101}$$

bestimmte positive Konstante. Die Funktion $f_\varrho(\xi)$ (die sogenannte Mittelwertfunktion, welche der Funktion $f(x)$ entspricht) hat auf dem Intervall $\langle a + \varrho, b - \varrho\rangle$ Ableitungen nach der Veränderlichen ξ jeder Ordnung (vgl. das angeführte Buch von S. L. Sobolev). Wir behaupten nun: Erfüllt die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $\langle a, b\rangle$ die Lipschitzsche Bedingung mit der Konstante L (d. h. $|f(x) + h) - f(x)| \leqq \leqq L|h|$), so gilt auf dem Intervall $\langle a + \varrho; b - \varrho\rangle$

$$|f'(\xi)| \leqq L. \tag{102}$$

Es ist nämlich (im ersten Integral wenden wir die Substitution $x - h = x'$ an und schreiben die Veränderliche wieder als x)

$$\left|\frac{f_\varrho(\xi + h) - f_\rho(\xi)}{h}\right| =$$

$$= \left|\frac{C_0 \int_{\xi+h-\varrho}^{\xi+h+\varrho} f(x)\, e^{(x-\xi-h)^2/[(x-\xi-h)^2-\sigma)^2}\, \mathrm{d}x - C_0 \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} f(x)\, e^{(x-\xi)^2/[(x-\xi)^2-\varrho^2]}\, \mathrm{d}x}{h}\right| =$$

$$= C_0 \left|\frac{\int_{\xi-\varrho}^{\xi+\varrho} [f(x+h)-f(x)] e^{(x-\xi)^2/[(x-\xi)^2-\varrho^2]}\, \mathrm{d}x}{h}\right| \leqq LC_0 \int_{\xi-\varrho}^{\xi+\rho} e^{(x-\xi)^2/[(x-\xi)^2-\rho^2]} \mathrm{d}x = L$$

(auf Grund von (101)).

Auf gleiche Weise wird folgendes bewiesen: Die Funktion $f(x, y)$ erfülle auf dem Rechteck $\bar{O}$ ($a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d$) die Lipschitzsche Bedingung mit der Konstante L in Bezug auf x. Wir bezeichnen

$$f_\rho(\xi, \eta) = C_1 \iint_{r\leqq\rho} f(x, y)\, e^{r^2/(r^2-\rho^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

wobei

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\,, \quad C_1 \iint\limits_{r \leqq \varrho} e^{r^2/(r^2-\rho^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 1$$

ist. Dann gilt auf dem Rechteck $\bar{O}_1$ $(a + \varrho \leqq x \leqq b - \varrho, c + \varrho \leqq y \leqq d - \varrho)$

$$\left|\frac{\partial f_\rho}{\partial \xi}\right| \leqq L\,.$$

Weil auf dem Rechteck O_1 die Ableitung der Mittelwertfunktion gleich der Mittelwertfunktion der Ableitung ist (siehe das angeführte Werk von S. L. Sobolev), so gilt z. B.

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial y} = C_1 \iint\limits_{r \leqq \rho} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, e^{r^2/(r^2-\rho^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,;$$

wenn die Funktion $\partial f/\partial y$ auf $\bar{O}$ der Lipschitzschen Bedingung in Bezug auf x und mit der Konstante L genügt, so gilt

$$\left|\frac{\partial^2 f_\rho}{\partial y\, \partial x}\right| \leqq L \text{ auf } \bar{O}_2\left(a + 2\varrho \leqq x \leqq b - 2\varrho, c + \varrho \leqq y \leqq d - \varrho\right).$$

Ähnliche Behauptungen gelten offensichtlich auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Wir kommen nun zum Beweis der gleichmässigen Beschränktheit der Ableitungen der Funktionen $u_m(x, t)$ in $\bar{Q}_0$. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Resultate über die Beschränktheit der Ableitungen der Mittelwertfunktionen in einem kleineren Bereich als der ursprüngliche Bereich der betrachteten Funktionen ist, gelten. Wir erweitern also vorerst die Funktionen A, B, C, D aus dem Bereich $\bar{R}$ (vgl. (8)) auf einen grösseren (rechteckigen) Bereich $\bar{R}'$, mit Hilfe der bekannten Methode (siehe z. B. Fichtengolc, Kurs differencialnogo i intěgralnogo isčislenija) bei Erhaltung der Klasse dieser Funktionen. Die derart erweiterten Funktionen bezeichnen wir A', B', C', D'. Wenn früher auf $\bar{R}$ z. B.

$$0 < \alpha_0 \leqq A \leqq \alpha\,, \quad \left|\frac{\partial B}{\partial x}\right| \leqq \eta$$

galt, so wird nun

$$0 < \alpha_0' \leqq A' \leqq \alpha'\,, \quad \left|\frac{\partial B'}{\partial x}\right| \leqq \eta'$$

gelten, wobei im allgemeinen Fall $\alpha_0' < \alpha_0$, $\alpha < \alpha'$, $\eta < \eta'$ usw. sein wird.

Wählen wir ϱ_0 fest und bezeichnen $\bar{R}_0$ den rechteckigen Bereich (der Veränderlichen x, t, u), welcher in $\bar{R}'$ liegt, dessen Rand vom Rande des Bereiches R' die Entfernung $4\varrho_0$ hat. (Dabei wählen wir ϱ_0 so klein, dass der Bereich $\bar{R}$ in $\bar{R}_0$ liegt). In $\bar{R}_0$ wird offenbar $0 < \alpha_0' \leqq A' \leqq \alpha'$ usw. gelten. Wir wählen eine absteigende

Folge positiver Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \quad \varrho_0 > \varrho_1, \quad \lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0$ und bilden zu den Funktionen A', B', C', D' Folgen

$$A_m, B_m, C_m, D_m, \tag{103}$$

welche den Mittelwertfunktionen mit dem Kern $e^{r^2/(r^2-\rho^2)}$ entsprechen. Die Funktionen (103) werden auf $\bar{R}_0$ (gleichmässig) zu den Funktionen A', B', C', D' konvergieren, auf $\bar{R}$ also zu den Funktionen A, B, C, D. Wir bilden eine Folge der Lösungen $u_m(x, t)$ der Gleichung (1) mit den Koeffizienten (103) und genügend glatten Randwertfunktionen (98). (Wir setzen voraus, dass wir den Bereich $\bar{R}$ so erweitert haben, dass $(x, t, u_m) \in \bar{R}_0$ ist.) Wir zeigen nun, dass die erforderlichen Ableitungen der Funktionen $u_m(x, t)$ auf $\bar{Q}_0$ gleichmässig beschränkt sind. Um die Bezeichnung nicht zu komplizieren, werden wir bei diesem Gedankengang anstatt u_m, A_m, B_m, C_m, D_m nur u, A, B, C, D schreiben. Wir betrachten zuerst die Funktion $\partial u/\partial x = p$. In die Gleichung (1) führen wir die Substitution $u = G(v)$ ein, wobei $G(v)$ die Funktion (61) ist (mit etwas veränderten Konstanten auf Grund der Erweiterung der Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung auf den Bereich $\bar{R}'$). Wir erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A\frac{G''}{G'}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{GC}{G'} + \frac{D}{G'}. \tag{104}$$

Wir setzen

$$w = g(x)\,.\,t\,.\,v\,, \tag{105}$$

wobei $g(x)$ eine Funktion ist, welche alle Ableitungen auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ besitzt, gleich Null für $x \in \langle 0; \delta\rangle$ und $x \in \langle 1 - \delta, 1\rangle$ und gleich Eins für $\langle 2\delta, 1 - 2\delta\rangle$ ist; δ ist eine beliebige positive so gewählte Zahl, dass das Rechteck $\bar{Q}_0$ innerhalb des Rechteckes mit den Seiten $x = 8\delta$, $x = 1 - 8\delta$, $t = 0, t - \tau$ liegt. Wenn wir nun $v = w/gt$ in (104) einsetzen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A\frac{G''}{G'}\frac{1}{tg}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(B - 2A\frac{g'}{g} - 2A\frac{G''}{G}\frac{g'}{g}v\right)\frac{\partial w}{\partial x} +$$
$$+ A\frac{G''tg'^2}{G'g}v^2 - \left[At\left(g'' - \frac{2g'^2}{g}\right) + Btg' - g\right]v + \frac{CGtg}{G'} + \frac{Dtg}{G'},$$

welche auf dem Rechteck Q_1 ($\delta < x < 1 - \delta, 0 < t \leqq \tau$) gilt. Wenn wir jetzt nach der Veränderlichen x ableiten (dass es zulässig ist, haben wir durch die Einführung der Mittelwertfunktionen erreicht), erhalten wir (wir bezeichnen $\partial w/\partial x = P$)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left[\quad\right]\frac{\partial P}{\partial x} + \left[A_x + A_u G'\frac{1}{tg}(P - tg'v)\right]\frac{G''}{G'}\frac{1}{tg}P^2 + \tag{106}$$
$$+ A\left(\frac{G''}{G'}\right)'\frac{1}{tg}(P - tg'v)\frac{1}{tg}P^2 + \ldots = A\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \left[\quad\right]\frac{\partial P}{\partial x} +$$
$$+ \frac{1}{t^2g^2}\left\{\left[A_u G'' + A\left(\frac{G''}{G'}\right)'\right]P^3 + [\ ]P^2 + [\ ]P + [\ ]\right\},$$

wo die ziemlich komplizierten Ausdrücke in eckigen Klammern gleichmässig (in Bezug auf den Index m) beschränkt sind. (Wir haben einigemale die Funktion v anstatt der Funktion $w/(tg)$ benützt, denn wir wissen, dass die Funktion v beschränkt ist, während tg im Nenner mancher Ausdrücke die Übersichtlichkeit gestört hätte). Die Gleichung (106) gilt in dem Rechteck Q_1. Die Randbedingungen sind $P = 0$. Wir zeigen, dass P auf dem Rechteck Q_1 eine von oben beschränkte Funktion ist. Es erreiche in irgendeinem Punkte O aus Q_1 die Funktion P ihr positives Maximum. Wir schreiben die Gleichung (106) in der Form

$$\frac{\partial P}{\partial t} - A\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \left[\qquad\right]\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{t^2 g^2}\left(\alpha_3 P^3 + \alpha_2 P^2 + \alpha_1 P + \bar{\alpha}\right). \tag{107}$$

Im Punkt des Maximums ist die linke Seite nicht negativ. Die Ausdrücke $\bar{\alpha}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind beschränkt (keiner der Koeffizienten des Gliedes P^k ($k = 0, 1, 2, 3$) in der Gleichung (106) hat im Nenner t und g in höherer Potenz als der zweiten). Aus den Eigenschaften der Funktion $G(v)$ folgt, dass der Koeffizient α_3 scharf negativ ist, $\alpha_3 <$ konst < 0, denn

$$A_u G'' + A\left(\frac{G''}{G'}\right)' = \frac{1}{G'}\left(A_u G' G'' + A G''' - A\frac{G''^2}{G'}\right).$$

Nun ist auf Grund von (62) und (65) $A_u G' G'' + A G''' < 0$, das dritte Glied in der Klammer ist negativ. Die scharfe Negativität folgt aus der (gleichmässigen) Stetigkeit der Ableitungen G', G'', G''' auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$. Weil es sich also in (107) um ein Polynom dritten Grades mit scharf negativem Koeffizientem α_3 handelt, welches nicht negativ sein soll, ist P von oben beschränkt. Auf gleiche Weise wird die Beschränktheit von unten bewiesen, so dass in Q_1

$$|P| < k = \text{konst} \tag{108}$$

ist. Weil $g(x) \equiv 1$ auf dem Intervall $\langle 2\delta, 1 - 2\delta\rangle$ ist, wird, wenn wir $\bar{Q}_2 = \langle 2\delta, 1 - 2\delta\rangle \times \langle t_0, \tau\rangle$, $t_0 > 0$, bezeichnen, $\partial v/\partial x = P/t$ in Q_2 sein, also ist

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| < \frac{k}{t_0} \quad \text{in} \quad Q_2\,. \tag{109}$$

Dabei wählen wir $t_0 > 0$ so klein, dass das Rechteck $\bar{Q}_0$ im Inneren des Rechteckes mit den Seiten $x = 8\delta$, $x = 1 - 8\delta$, $t = 4t_0$, $t = \tau$ liegt. Aus der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = G'\frac{\partial v}{\partial x}$$

folgt die Beschränktheit von $\partial u/\partial x$ in $\bar{Q}_2$ unabhängig von den Randbedingungen.

Ganz ähnlich wird die Beschränktheit der Ableitung $\partial^2 u/\partial x^2$ und dadurch auch der Ableitung $\partial u/\partial t$ auf dem Rechteck $\bar{Q}_3$, welches in Q_2 liegt, bewiesen. Durch weiteres Ableiten wird die Beschränktheit der Ableitungen $\partial^2 u/\partial t\,\partial x$ (und dadurch auch der Ableitung $\partial^3 u/\partial x^3$) und $\partial^3 u/\partial t\,\partial x^2$ (und hiermit auch der von $\partial^2 u/\partial t^2$)

schrittweise auf kleineren Rechtecken bewiesen. Hiermit ist die Beschränktheit dieser Ableitungen in $\bar{Q}_0$ bewiesen.

Wir kommen wieder zu unserer ursprünglichen Bezeichnung u_m, A_m, B_m, C_m, D_m, zurück. Die Ableitungen der Funktionen $u_m(x. t)$ werden in $\bar{Q}_0$ gleichmässig in Bezug auf m beschränkt sein, denn die durchgeführten Abschätzungen (Gleichung (107) und analog für höhere Ableitungen) hängen nur von den Werten der Koeffizienten A_m, B_m, C_m, D_m und ihren Ableitungen ab und diese Werte sind auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen A, B, C, D und der oben angeführten Eigenschaft der Mittelwertfunktionen gleichmässig beschränkt. Weil in $\bar{Q}_0$ die Ableitungen

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 u_m}{\partial x^3}$$

gleichmässig beschränkt sind, kann man aus der Folge $u_m(x, t)$ eine solche in $\bar{Q}_0$ gleichmässig konvergente Folge

$$u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_m}, \ldots, \lim_{n \to \infty} u_{k_m} = u(x, t) \tag{110}$$

herausheben, dass die Ableitungen

$$\frac{\partial u_m}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_m}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}$$

in $\bar{Q}_0$ gleichmässig konvergieren (und zwar zu den Funktionen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wie auf gewöhnliche Weise bewiesen werden kann). Auf gewöhnliche Weise (durch Anwenden einer diagonalen Folge) wird auch bewiesen, dass man aus der Folge $u_m(x, t)$ eine auf dem ganzen Q konvergente Folge herausheben kann, welche auf Q die Gleichung (1) erfüllt. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass die ganze Folge $u_m(x, t)$ in Q zur Funktion $u(x, t)$ konvergiert, was wir beweisen sollten. Dabei ist die Konvergenz auf jedem in Q liegenden Rechteck $\bar{Q}_0$ gleichmässig.

Anmerkung 7. Aus dem Beweis ist zu sehen, dass die Randbedingungen viel allgemeiner als stückweise stetig gewählt werden können.

Anmerkung 8. Aus dem Vorangehenden ist die Anwendbarkeit der Netzmethode (unter der Voraussetzung (22)) offensichtlich, denn in beiden Fällen (der glatten und nichtstetigen Randbedingungen) konvergiert die Folge der Netzfunktionen zu der gesuchten Lösung. Für glatte Randbedingungen gleichmässig auf $\bar{Q}$, für nichtstetige Randbedingungen lokal gleichmässig auf Q, d. h. gleichmässig auf jedem in Q liegenden geschlossenen Rechteck Q_0 (mit den zu den Koordinaten parallelen Seiten).

Dieses Ergebnis formulieren wir kurz folgendermassen:

Satz 3. *Die Netzmethode für das Problem* (1), (2) *konvergiert.*

III. TRANSFORMATION DER NICHTLINEAREN GLEICHUNG AUF EINE QUASILINEARE GLEICHUNG

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man das Problem für die Gleichung (1), Kap. I, auf ein Problem für eine quasilineare Gleichung bringen kann.

Wir betrachten die erste Randwertaufgabe für die Gleichung

(1)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + D(x, t, u)\,u + E(x, t, u)\,,$$

in dem Rechteck Q $(0 < x < 1, 0 < t \leqq \tau)$. Auf der Grundlinie $t = 0$ des Rechteckes und auf seinen Seiten $x = 0$, $x = 1$ sind die Randwertfunktionen

(2) $$u(x, 0) = f(x)\,, \quad u(0, t) = g(t)\,, \quad u(1, t) = h(t)$$

vorgeschrieben. Wir setzen voraus, dass die Funktion $f(x)$ resp. $g(t)$, $h(t)$ auf dem Intervall $\langle 0; 1\rangle$ resp. $\langle 0; \tau\rangle$ stetig ist und dass $f(0) = g(0)$, $f(1) = h(0)$ ist. Wir suchen eine in geschlossenem Rechteck $\bar{Q}$ stetige Funktion $u(x, t)$, welche in Q die Gleichung (1) erfüllt und auf der Grundlinie und den Seiten des Rechteckes gleich den vorgeschriebenen Funktionen (2) ist. Auf gleiche Weise wie in dem vorhergehenden Kapitel wird folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 1. *Es sei für alle* $(x, t) \in \bar{Q}$, $u \in (-\infty, \infty)$ *(siehe Anmerkung* 1*)*

(3) $$A(x, t, u) > 0\,, \quad D(x, t, u) \leqq \alpha\,, \quad |E(x, t, u)| \leqq \beta\,,$$

wobei α, β *Konstanten sind. Es sei weiter*

$$|f(x)| \leqq K\,, \quad |g(t)| \leqq K\,, \quad |h(t)| \leqq K\,.$$

Wir bezeichnen $\max(\beta, K) = L$ *und* $\max(1 + \alpha, 0) = \gamma$. *Wenn eine Lösung* $u(x, t)$ *des gegebenen Problems existiert, so gilt*

(4) $$|u(x, t)| \leqq Le^{\gamma\tau}$$

in $\bar{Q}$.

Anmerkung 1. Es ist wieder (wie in Kap. II) zu sehen, dass in den Voraussetzungen über die Funktionen A, D, E für u nicht das ganze Intervall $(-\infty, \infty)$ betrachtet werden muss.

Satz 1. *Es seien die Voraussetzungen aus Lemma* 1 *erfüllt. Wir bezeichnen* $Le^{\gamma\tau} = M$. *Die Funktionen* $A, A_t, A_x, A_{xx}, B, B_t, B_x, B_{xx}$ *seien in dem Bereich* $\bar{B} = \bar{Q} \times \langle -M, M\rangle$ *stetig. Wenn eine Lösung* $u(x, t)$ *des Problems* (1), (2) *existiert, so gilt*

$$u(x, t) = g[x, t, v(x, t)]\,,$$

wobei g *eine durch die Koeffizienten* A, B *der Gleichung* (1) *bestimmte Funktion ist, und* $v(x, t)$ *die Lösung einer bestimmten quasilinearen parabolischen Gleichung ist.*

Beweis. Aus der Voraussetzung $A > 0$ folgt $A(x, t, u) > \delta$ in $\bar{B}$, wobei δ eine positive Konstante ist (und gleichzeitig folgt natürlich auch die Beschränktheit der Funktion A von oben). Wir bezeichnen

$$\frac{B(x, t, u)}{A(x, t, u)} = F(x, t, u)\,, \tag{5}$$

$$\int_{-M}^{u} F(x, t, w)\,\mathrm{d}w = \Phi(x, t, u)\,, \tag{6}$$

$$\int_{-M}^{u} e^{\Phi(x,t,w)}\,\mathrm{d}w = \Psi(x, t, u) \tag{7}$$

und führen die Funktion $v(x, t)$ durch die Beziehung

$$v = f(x, t, u) = \frac{\Psi(x, t, u)}{\Psi(x, t, M)} \tag{8}$$

ein.

Die Zuordnung der Funktionen u und v auf Grund der Beziehung (8) ist für jeden Punkt (x, t) eineindeutig, denn Ψ ist nach (7) eine wachsende Funktion der Veränderlichen u. Wenn wir $u(x, t) \in \langle -M, M\rangle$ kennen, so kennen wir auch $v(x, t) \in \in \langle 0; 1\rangle$ und umgekehrt.

Die inverse Funktion zur Funktion (8) bezeichnen wir

$$u = g(x, t, v)\,. \tag{9}$$

Wir berechnen leicht

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.$$

Alle angeführten Ableitungen der Funktion g haben einen Sinn, denn g ist eine inverse Funktion zur Funktion f, welche nach (6) und (7) zwei stetige Ableitungen nach den Veränderlichen hat. Die Ableitungen nach den Veränderlichen x und t sind auf Grund der Voraussetzungen über die Funktionen A, B, also auch über die Funktion F, berechtigt.

Die Gleichung (1) bekommt dann die Form

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = A\left\{\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{B}{A}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2\right]\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} + \tag{11}$$

$$+ \left(2A\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v} + \ldots\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots$$

Auf Grund der Definitionen Φ und Ψ und der Bezeichnung der Funktionen f ond g lässt sich leicht (durch direktes Ableiten) feststellen, dass

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{B}{A}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = -\frac{\Psi}{e^\Phi} F \frac{\Psi}{e^\Phi} + F\left(\frac{\Psi}{e^\Phi}\right)^2 \equiv 0$$

ist, wobei wir kurz

$$\Psi(x, t, M) = \Psi\,, \quad \Phi(x, t, u) = \Phi(x, t, g) = \Phi\,, \quad F(x, t, u) = F(x, t, g) = F$$

bezeichnet haben. Die Gleichung (11) erhält dann die Form (wir beobachten, dass $\partial g/\partial v > 0$ ist)

$$(13)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = A[x, t, g(x, t, v)]\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\;)\,\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots,$$

was eine parabolische quasilineare Gleichung für die Funktion $v(x, t)$ ist. Die Randbedingungen für die Funktion v folgen leicht durch Anwendung der Transformation (8) aus den Bedingungen für die Funktion u. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

Anmerkung 2. Offensichtlich gilt: wenn u die Lösung der Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) ist, so ist die durch die Gleichung (8) gegebene Funktion v die Lösung der quasilinearen Gleichung (13) mit den Randbedingungen, welche durch die Transformation (8) gegeben sind und umgekehrt. Mit Hilfe der Transformation (8) lässt sich die Lösung der nichtlinearen Gleichung (1) auf die Lösung einer quasilinearen Gleichung bringen.

In Satz 1 haben wir die Stetigkeit der Funktion $u(x, t)$ auf $\bar{Q}$, vor allem also die Stetigkeit der Randbedingungen, vorausgesetzt. Wenn es sich um nichtstetige Randbedingungen handelt, setzen wir (Satz 2, Kap. II) die Beschränktheit der Funktion u direkt als Voraussetzung des entsprechenden Satzes (sonst ist die Eindeutigkeit der Lösung nicht erfüllt). Also kann man die angeführte Transformation auf quasilineare Gleichungen auch für nichtstetige Randbedingungen anwenden.

Dieselbe Transformation kann man nicht nur für die erste Randwertaufgabe benützen, sondern auch für verschiedene andere Aufgaben (gemischte Randwertaufgaben usw.). Die Grundlage ist hierbei die Eigenschaft der durch die Substitution $u = e^{\varepsilon t} z$ entstandenen Gleichung (Lemma 1, Kap. II), auf Grund deren die Funktion z keine beliebig grossen Werte in dem inneren Punkt des Rechteckes, in welchem sie ihr lokales Maximum erreicht, annehmen kann.

Anmerkung 3. Die Gleichung (1) haben wir auch in der Form

$$(14)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + C(x, t, u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + E(x, t, u)$$

schreiben können und die Beschränktheit der Funktion E fordern können. Damit hätten wir sicher auch die Beschränktheit der Funktion z erhalten (es ist $D = 0$, so genügt es $\gamma = 1$ zu wählen). Die Gleichung für die Funktion u haben wir in der

Form (1) geschrieben, weil die Beschränktheit der Funktion E (für alle betrachteten x, t, u) eine zu beschränkende Voraussetzung ist. Trotzdem ist es notwendig zu beobachten, dass das absolute Glied der Gleichung (1) keine beliebige Potenz der Funktion u enthalten kann. Z. B. die (einzige) Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (t + 1) \sin x \,.\, u^2 + 2t^2 \cos^2 x \,.\, u^3 \tag{15}$$

mit sehr glatten Randbedingungen

$$u(x, 0) = 1\,, \quad u(0, t) = 1, \quad u(\pi, t) = 1 \tag{16}$$

ist für $0 \leqq t < 1$ die Funktion

$$u = \frac{1}{1 - t \sin x}\,, \tag{17}$$

welche auf der Geraden $x = \frac{1}{2}\pi$ in der Umgebung des Punktes $t = 1$ $(t < 1)$ offenbar nicht beschränkt ist. Das Problem (15) und (16) ist ein Beispiel des Problems, für welches keine Lösung in einem beliebigen Zeitintervall $\langle 0; \tau \rangle$ existiert.

Anmerkung 4. Mit Hilfe der Transformation (8) haben wir gezeigt, wie man eine Gleichung von der Form (1) auf eine quasilineare Gleichung bringen kann. Im vorigen Kapitel haben wir gezeigt, dass quasilineare Gleichungen verschiedene charakteristische Eigenschaften haben: Z. B.: sind die Koeffizienten der Gleichung und die Randbedingungen genügend glatt, so sind die Ableitungen der Lösung in $\bar{Q}$ einschliesslich des Randes beschränkt. Es ist zu sehen, dass wenn die Koeffizienten der Gleichung (1) genügend glatt sein werden (damit die Transformation (8) und die Koeffizienten der Gleichung (13) genügend glatt werden), werden auch die Ableitungen der entsprechenden Lösung u der Gleichung (1) in $\bar{Q}$ beschränkt sein. In diesem Sinne hat die Gleichung (1) den Charakter einer quasilinearen Gleichung.

Es entsteht diese Frage: Bei der Untersuchung der Beschränktheit der Funktion u stört der Umstand, wenn die Gleichung (1) auch höhere Potenzen der Ableitung nach der Veränderlichen x als die zweite besitzt, also $(\partial u/\partial x)^3$ u. ä., gar nicht, denn in dem betrachteten Punkte des Extrems der Funktion z sind die entsprechenden Ableitungen gleich Null. Es handelt sich darum, ob auch dann so eine Gleichung von quasilinearem Charakter sein wird. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt das Beispiel der Funktion

$$u = [x + (1 - t)^n]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

(n ist eine natürliche Zahl), welche in dem Zeitintervall (0; 1) die (einzige) Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [2 - 4n(1 - t)^{n-1} u^2] \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 \tag{19}$$

für die (bei genügend grossem n genügend glatte) Randbedingungen

$$(20) \qquad \begin{aligned} u(x, 0) &= (x + 1)^{\frac{1}{2}} \\ u(0, t) &= (1 - t)^{n/2} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1 \\ &= 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq t \leqq 2\,, \\ u(1, t) &= [1 + (1 - t)^n]^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq 2 \end{aligned}$$

ist. (Wir überzeugen uns z. B. leicht, dass in der Umgebung des Punktes $(0; 1)$ $(t < 1)$ die Ableitung $\partial u/\partial x$ unbeschränkt ist.)

Anmerkung 5. Auf Grund des Satzes 1 und der Anmerkung 2 haben wir uns in Kap. II mit einer quasilinearen Gleichung vom Typ

$$(21) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + C(x, t, u)_u + D(x, t, u)$$

beschäftigt.

Literatur

[1] *Gevrey M.*: Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Jour. math. pures et appl. *9* (1913), 305—471.

[2] *Gevrey M.*: Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Jour. math. pures et appl. *10* (1914), 105—148.

[3] *Ильин В. А.*: Разрешимость смешанной задачи для гиперболического и параболического уравнений в произвольном нормальном цилиндре. ДАН *127* (1959), 1, 23—26.

[4] *Калашников А. Ц.*: О первой краевой задаче нестационарной фильтрации. ДАН *115* (1957), 5, 858—861.

[5] *Ладыженская О. А.*: Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений. Труды Моск. мат. общ. *7* (1958), 149—177.

[6] *Олейник О. А.*: Об уравнениях типа нестационарной фильтрации. ДАН *113* (1957), 6, 1210—1213.

[7] *Олейник О. А.* и *Венцел Т. Д.*: Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейных уравнений параболического типа. Мат. Сбор. *41* (1957), 105—128.

[8] *Pogorzelski W.*: Problème aux limites pour l'équation parabolique dont les coefficients dépendent de la fonction inconnue. Ricerche mat. *5* (1956), 2, 258—272.

[9] *Rothe E.*: Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben. Math. Ann. *102* (1930), 650—670.

[10] *Венцел Т. Д.*: О применении метода конечных разностей к решении первой краевой задачи для уравнений параболического типа. Мат. Сбор. *40* (1957), 1, 101—122.

[11] *Венцел Т. Д.*: Первая краевая задача и задача Коши для квазилинейного параболического уравнения со многими пространственными переменными. Мат. Сбор. *41* (1957), 4, 499—520.

[12] *Rektorys K.*: Stanovení teploty v přehradě při působení vnitřních zdrojů tepla. Rozpravy ČSAV, řada mat., *66* (1956), 14, 1—74.

Резюме

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПО МЕТОДУ СЕТОК В ЦЕЛОМ

КАРЕЛ РЕКТОРИС (Karel Rektorys), Прага

При решении краевых задач для нелинейных параболических уравнений методом сеток возникают, как известно, трудности, заключающиеся в том, что существование решений доказывается не „в целом", т. е. не для любого интервала времени, а только для достаточно малого интервала времени.

В первой главе автор разбирает некоторые вопросы, касающиеся этой проблематики, и указывает причины, которые его вели к решению этой проблемы и к устранению упомянутых трудностей. Во второй главе проводится по методу сеток решение первой краевой задачи „в целом" для квазилинейного уравнения — сначала для гладких, а потом и для разрывных краевых условий. В случае разрывных краевых условий автор обходит громоздкий метод Бернштейна и тем самым в значительной мере ослабляет требования, налагаемые в литературе на коэффициенты рассматриваемого уравнения.

В третьей главе автор показывает, как можно более общее нелинейное уравнение свести к квазилинейному.