Jiří Jelínek

Les fonctions distributionnelles localement intégrables

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 477–485

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100533

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *12* (87) ПРАГА 30. XI. 1962 г., No 4

LES FONCTIONS DISTRIBUTIONNELLES LOCALEMENT INTÉGRABLES

JIŘÍ JELÍNEK, Praha

(Reçu le 10 décembre 1959; après modifications le 28 avril 1961)

Dans ce Mémoire, je m'occupe de fonctions distributionnelles dépendant d'un paramètre, qui sont localement intégrables par rapport à ce paramètre. Je vais déduire entre autre une simplification de la définition de la fonction distributionnelle localement intégrable, établie par M. S. LOJASIEWICZ.

J'emploie, pour la plupart, la notation de [1] et [2]. Toutes les fonctions et distributions sont réelles. Si Q est un intervalle compact dans E^n, $\mathscr{D}_Q$ est le système des fonctions (réelles) infiniment différentiables définies dans E^n, au support dans Q. Pour $\psi \in \mathscr{D}_Q$, je pose $|\psi| = \operatorname{Max} |\psi(y)|$ $(y \in Q)$. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres entiers non-négatifs, soit

$$|p| = \sum p_i\,, \quad D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial y_1^{p_1} \ldots \partial y_n^{p_n}}\,.$$

Pour $N = 1, 2, \ldots$, soit $\mathscr{U}_N$ l'ensemble des $\psi \in \mathscr{D}_Q$ pour lesquels on a

$$|p| \leqq N \Rightarrow |D^p\psi| \leqq \frac{1}{N}\,.$$

Les ensembles $\mathscr{U}_N$ forment un système fondamental de voisinages de zéro dans l'espace topologique linéaire $\mathscr{D}_Q$. Je n'emploie [3] que dans la démonstration du lemme 2.

Si f et g sont deux fonctions localement intégrables, il faut alors prendre (si nous n'écrivons pas par exemple $f(x) \geqq g(x)$ pour tous les x) le symbole $f \geqq g$ (ou $f(x) \geqq$ $\geqq g(x)$) dans le sens de la théorie des distributions, ce qui signifie dans notre cas $f(x) \geqq g(x)$ pour presque tous les x. Il y en a de même pour le symbole $f = g$ (ou $f(x) = g(x)$). $\mathscr{L}$ est donc l'espace des fonctions intégrables avec l'égalité définie de cette manière. En ce sens on peut prendre aussi $|f|$, $f \leqq g$, etc. (pour $f, g \in \mathscr{L}$). Si f est une fonction intégrable, j'écrirai souvent $\int f$ au lieu de $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Soient E^m_x, E^n_y deux espaces euclidiens, Ω un ensemble ouvert dans $E^m_x \times E^n_y$, $\Omega_x = \{y; (x, y) \in \Omega\}$. Pour tout x soit $S_x(y)$ une distribution définie dans $\Omega_x (y \in \Omega_x)$. On dit (d'après [1]) qu'une fonction distributionnelle S_x de la variable x est localement intégrable dans Ω si les deux conditions suivantes sont satisfaites pour chaque couple d'intervalles ouverts bornés P, Q où $P \subset E_x^m$, $Q \subset E_y^n$, $\overline{P \times Q} \subset \Omega$:

1°. (S_x, ψ) est une fonction mesurable de la variable x dans P pour tout $\psi \in \mathscr{D}_Q$.

2°. Il y a un voisinage de zéro $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{D}_Q$ et une fonction g intégrable dans P qui peut prendre aussi la valeur $+\infty$, de sorte qu'on a $|(S_x, \psi)| \leqq g(x)$ pour tous les $\psi \in \mathscr{U}$ et pour tous les $x \in P$.

Il apparaît que cette définition est équivalente à la définition suivante: Pour tout $\psi \in \mathscr{D}_y$ la fonction (S_x, ψ) de la variable x est localement intégrable dans son domaine, c'est-à-dire dans $\{x; \text{support } \psi \subset \Omega_x\}$. C'est la conséquence immédiate du théorème 2 de ce Mémoire.

Lemme 1. *Soit $\mathscr{M} \subset \mathscr{D}_Q$ un ensemble convexe cerclé tel qu'à chaque ensemble $\mathscr{B}$ borné dans $\mathscr{D}_Q$, un nombre $\lambda > 0$ est associé de sorte que $\lambda\mathscr{M} \supset \mathscr{B}$. $\mathscr{M}$ est alors un voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_Q$.*

Démonstration. Dans le cas contraire, il y aurait des fonctions φ_N $(N = 1, 2, \ldots)$ telles que

$$\varphi_N \in \mathscr{U}_N - N \,.\, \mathscr{M} \,. \tag{1}$$

Comme $\varphi_N \in \mathscr{U}_N$, on a $\varphi_N \to 0$, ce qui implique que $\{\varphi_N\}$ est borné et qu'il y a un nombre $\lambda > 0$ tel que $\varphi_N \in \lambda\mathscr{M}$ pour tous les nombres N positifs. On n'a donc pas (1) pour $N > \lambda$, ce qui est une contradiction.

Lemme 2. *Soit $\mathscr{X}$ un espace linéaire normé. Toute forme bilinéaire $F(\varphi, \psi)$ séparément continue dans $\mathscr{X} \times \mathscr{D}_Q$ (Q est un intervalle compact dans E^n) est alors continue.*

Démonstration. Désignons par $\mathscr{U}$ la sphère unité dans $\mathscr{X}$ et par $\mathscr{B}$ un ensemble borné dans $\mathscr{D}_Q$. Nous prouverons d'abord que la forme $F(\varphi, \psi)$ est bornée dans $\mathscr{U} \times \mathscr{B}$. Si nous choisissons $\psi \in \mathscr{D}_Q$ fixe, $F(\varphi, \psi)$ est alors une forme linéaire continue de la variable φ, c'est-à-dire un élément de $\mathscr{X}'$ (voir [3]). Désignons par $F_1(\psi)$ l'application de $\mathscr{D}_Q$ dans $\mathscr{X}'$ que nous venons de définir. D'après [2], Ch. III, Th. VII, tout ensemble borné dans $\mathscr{D}_Q$ est relativement compact. Il s'ensuit que l'ensemble $\mathscr{B}$ est contenu dans un compact convexe cerclé $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}_Q$. Comme l'application F_1 est continue pour la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{X}'$, pour cette topologie l'ensemble $F_1(\mathscr{K})$ est compact. D'après [3], Chap. IV, § 2, 6, Th. 6, la topologie de l'espace $\mathscr{X}$ est celle de Mackey, c'est-à-dire la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles convexes cerclés qui sont compacts pour la topologie de la convergence simple. Il y a donc un voisinage de zéro $\mathscr{V}$ dans l'espace $\mathscr{X}$ tel qu'on a $F(\varphi, \psi) \leqq 1$ pour les $\varphi \in \mathscr{V}$ $\psi \in \mathscr{K}$. Il y a encore un nombre $\lambda > 0$ tel que $\lambda\mathscr{V} \supset \mathscr{U}$; comme $\mathscr{B} \subset \mathscr{K}$, on a l'inégalité $|F(\varphi, \psi)| \leqq \lambda$ pour tous $\varphi \in \mathscr{U}$, $\psi \in \mathscr{B}$. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des $\psi \in \mathscr{D}_Q$ tels que $|F(\varphi, \psi)| \leqq 1$ pour tout $\varphi \in \mathscr{U}$. D'après le lemme 1, $\mathscr{M}$ est un voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_Q$ ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 3. *Soit $S(x, y)$ une distribution définie dans $P \times Q$ où $P \subset (E^m)_x$, $Q \subset (E^n)_y$ sont des intervalles compacts. Supposons que la distribution $(S(x, y), \psi(y))_y$*

de la variable x soit une fonction intégrable dans P pour tout $\psi \in \mathscr{D}_Q$. Il y a alors une fonction $g^*(x)$ intégrable dans P et un voisinage de zéro dans $\mathscr{D}_Q$ tels que $\psi \in \mathscr{U} \Rightarrow |(S(x, y), \psi(y))_y| \leqq g^*(x)$.

Démonstration. Désignons par $\mathscr{X}$ l'espace $\mathscr{D}_P$ dans lequel nous établissons la norme

$$\|\varphi\| = \operatorname*{Max}_{x \in P} |\varphi(x)| \quad (\text{pour } \varphi \in \mathscr{D}_P)$$

au lieu de sa topologie usuelle. Désignons $(S(x, y), \varphi(x)\,\psi(y))$ par $F(\varphi, \psi)$ pour $\varphi \in \mathscr{X}$, $\psi \in \mathscr{D}_Q$. D'après la supposition du lemme, $F(\varphi, \psi)$ est une application bilinéaire de $\mathscr{X} \times \mathscr{D}_Q$ dans E_1, séparément continue par rapport à φ et à ψ. D'après le lemme 2, F est donc continue. Cela signifie qu'il y a un voisinage de zéro $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{D}_Q$ tel que

$$\psi \in \mathscr{M},\ \varphi \in \mathscr{D}_P,\ \operatorname*{Max}_{x} |\varphi(x)| \leqq 1 \Rightarrow |(S(x, y),\ \varphi(x)\,\psi(y))| \leqq 1\,,$$

c'est-à-dire $\psi \in \mathscr{M} \Rightarrow \int |(S(x, y), \psi(y))_y|\, dx \leqq 1$. Le reste est une conséquence immédiate du lemme suivant si l'on y écrit $(S(x, y), \psi(y))_y$ au lieu de $S(\psi)$.

Lemme 4. *Désignons par $(\mathscr{L}_p)_x$ l'espace des classes des fonctions intégrables $f(x)$ $(x \in P)$, muni de la norme $\|f\| = \int |f(x)|\, dx$. Soit S une application continue de $(\mathscr{D}_Q)_y$ dans $(\mathscr{L}_P)_x$. Il y a alors un voisinage de zéro $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{D}_Q$ et un $G(x) \in (\mathscr{L}_P)_x$ tels que $\psi \in \mathscr{U} \Rightarrow S(\psi) \leqq G$.*

Démonstration. S étant continu, il y a un ensemble $\mathscr{M}$ de la forme

$$\left\{\psi \in \mathscr{D}_Q;\ \left|\frac{\partial^{kn}}{\partial y_1^k \ldots \partial y_n^k}\, \psi(y)\right| \leqq \delta\right\}.$$

où $\delta > 0$, k est naturel, tel que

$$\psi \in \mathscr{M} = \int |S(\psi)| \leqq 1\,. \tag{2}$$

Choisissons les fonctions $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ dans E_1 de manière que $\int \varrho_i(t)\, dt = 1$, $\varrho_i \geqq 0$, $\varrho_1(y_1)\,\varrho_2(y_2) \ldots \varrho_n(y_n) \in (\mathscr{D}_Q)_y$ où $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Pour chaque fonction $h \in (\mathscr{D}_Q)_y$, les fonction h_i^j, $a_i^j \in (\mathscr{D}_Q)_y$, où les

$$a_i^j(y) = a_i^j(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

ne dépendent pas de y_i, sont bien déterminées par les égalités qui suivent:

$$h(y) = h_0^0(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}\, h_1^0(y) + a_1^0(y)\,\varrho_1(y_1)\,, \quad h_1^0(y) = \frac{\partial}{\partial y_2}\, h_2^0(y) + a_2^0(y)\,\varrho_2(y_2)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_{n-1}^0(y) = \frac{\partial}{\partial y_n}\, h_n^0(y) + a_n^0(y)\,\varrho_n(y_n)\,,$$

$$h_n^0(y) = h_0^1(y) = \frac{\partial}{\partial y_1}\, h_1^1(y) + a_1^1(y)\,\varrho_1(y_1)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_{n-1}^1(y) = \frac{\partial}{\partial y_n}\, h_n^1(y) + a_n^1(y)\,\varrho_n(y_n)\,, \quad h_n^1(y) = h_0^2(y) = \ldots$$

et ainsi de suite jusqu'à la fonction $h_0^{k+1}(y)$. Pour satisfaire à ces égalités, on pose $a_i^j(y) = \int_{E_1} h_{i-1}^j(y)\, dy_i$. Si $\int |h(y)|\, dy \leqq 1$, on a $a_1^0(y) = \int h(y)\, dy_1$, $|a_1^0(y)| \leqq \int |h(y)|\, dy_1$, d'où $\int |a_1^0(y)\, \varrho_1(y_1)|\, dy \leqq 1$, car a_1^0 ne dépend pas de y_1 et $\int \varrho_1(y_1)\, dy_1 = 1$. D'après la définition de h_1^0, il s'ensuit que

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial y_1} h_1^0(y) \right| dy \leqq 2 .$$

De la même manière, on déduit

$$a_2^0(y) = \int h_1^0(y)\, dy_2 , \quad \left| \frac{\partial}{\partial y_1} a_2^0(y) \right| \leqq \int \left| \frac{\partial}{\partial y_1} h_1^0(y) \right| dy_2 , \quad \int \left| \frac{\partial}{\partial y_1} a_2^0(y) \cdot \varrho_2(y_2) \right| dy \leqq 2 ,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int \left| \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} h_2^0(y) \right| dy \leqq 4$ et ainsi de suite. A la fin, on déduit

$$\int \left| \frac{\partial^{n(k+1)}}{\partial y_1^{k+1} \partial y_2^{k+1} \ldots, \partial y_n^{k+1}} h_0^{k+1}(y) \right| dy \leqq 2^{n(k+1)} ,$$

et par conséquence, si $\int |h(y)|\, dy \leqq 1$, alors

$$\left| \frac{\partial^{kn}}{\partial y_1^k, \ldots, \partial y_n^k} h_0^{k+1}(y) \right| \leqq C \tag{3}$$

où la constante C ne dépend que de k et de Q, mais non pas de h.

Définissons l'application linéaire continue R de $(\mathscr{L}_Q)_y$ dans $(\mathscr{L}_P)_x$ comme suit: Si $h \in \mathscr{D}_Q$, soit $R(h) = S(h_0^{k+1})$. La continuité résulte de (2) et (3). Comme $\mathscr{D}_Q$ est dense dans $\mathscr{L}_Q$ et que $\mathscr{L}_P$ est complet, on peut prolonger l'application R avec continuité dans $\mathscr{L}_Q$, ce qu'on peut faire univoquement.

Nous allons prouver qu'il existe un $G(x) \in (\mathscr{L}_P)_x$ tel que $R(h) \leqq G$ pour chaque fonction $h \in \mathscr{D}_Q$ qui satisfait à l'implication

$$p_1 \leqq 1,\ p_2 \leqq 1,\ \ldots,\ p_n \leqq 1 \Rightarrow |D^p h| \leqq 1 . \tag{4}$$

Supposons que $h \in \mathscr{D}_Q$ remplisse (4). Divisons Q en 2^{jn} intervalles égaux, en divisant chaque côté de Q en 2^j parties égales (j naturel). La frontière de ces parties ne joue aucun rôle ici. Désignons cette division par Δ_j. Soit $h_j \in \mathscr{L}_Q$ la fonction définie comme suit: Pour tout $d \in \Delta_j$, la fonction partielle $(h_j)_d$ est constante et égale à la valeur de la fonction h au centre de d. Il résulte de (4) que $h_j \to h$ uniformément et que

$$|h_j - h_{j-1}| \leqq \frac{1}{2^j} K , \tag{5}$$

où la constante K est la somme des longueurs des côtés de l'intervalle Q. Soit $g_j = \sum_{d \in \Delta_j} |R(\chi_d)|$ où χ_d est la fonction caractéristique de l'intervalle d. On a

$$\int g_j(x)\, dx = \sum_{d \in \Delta_j} \int |R(\chi_d)| \leqq \|R\| \cdot |Q| , \tag{6}$$

où $\|R\|$ est la norme de R, $|Q|$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble Q. Il découle de (5) que

$$|R(h_j - h_{j-1})| \leqq \frac{1}{2^j} K \, . \, g_j$$

(voir la définition de g_j), car $h_j - h_{j-1}$ est une combinaison linéaire des fonctions χ_d avec les coefficients qui n'ont pas la valeur absolue plus grande que $(1/2^j)\, K$. Comme

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} (h_j - h_{j-1})\,(h_0 = 0)\,, \quad \text{on a} \quad |R(h)| \leqq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^j} K \, . \, g_j \, .$$

D'après (6), la somme au second membre converge dans $\mathscr{L}_P$, d'où il résulte que

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} K \, . \, g_j(x)$$

est la fonction désirée et que $\mathscr{U} = \{\psi \in \mathscr{D}_Q;\ |p| \leqq (k+2)\, n \Rightarrow |D^p\psi| \leqq 1\}$ est le voisinage désiré.

En effet, on a

$$S(\psi) = R\left(\frac{\partial^{(k+1)n}}{\partial^{k+1} y_1, \ldots, \partial^{k+1} y_n} \psi(y)\right) \quad \text{pour} \quad \psi \in \mathscr{U}$$

(dans ce cas on a dans la définition de R $a_i^j = 0$ pour tous les i, j), et comme la fonction

$$h(y) = \frac{\partial^{(k+1)n}}{\partial^{k+1} y_1, \ldots, \partial^{k+1} y_n} \psi(y)$$

remplit (4), d'après ce que nous venons de prouver, on a $|S(\psi)| = |R(h)| \leqq G$. Le lemme est donc démontré.

Théorème 1. *Soit $S(x, y)$ une distribution définie dans $P \times Q$ où $P \subset (E^m)_x$, $Q \subset (E^n)_y$ sont des intervalles compacts. Pour toute fonction $\psi \in \mathscr{D}_Q$, la distribution $(S(x, y), \psi(y))_y$ soit une fonction intégrable de la variable x dans P. Il existe alors une fonction distributionnelle $S_x(y)$, où y parcourt Q et x parcourt P, de sorte que*

$$\int_P (S_x(y),\ \psi(y))\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = (S(x, y),\ \varphi(x)\, \psi(y))_{x,y} \tag{7}$$

pour tous $\varphi \in \mathscr{D}_P$, $\psi \in \mathscr{D}_Q$.

Remarque. (7) est équivalent à l'égalité $(S_x, \psi) = (S(x, y),\ \psi(y))_y$ pour tout $\psi \in \mathscr{D}_Q$ où l'expression au premier membre est une fonction de la variable x au sens usuel.

Démostration. Choisissons un voisinage convexe cerclé $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{D}_Q$ et une fonction $g^*(x)$ intégrable dans P tels qu'on ait

$$\psi \in \mathscr{U} \Rightarrow (S(x, y),\ \psi(y))_y \leqq g^*(x)\, . \tag{8}$$

Cela est possible d'après le lemme 3. Choisissons une suite d'intervalles $I_j \subset (E^m)_x$ pour laquelle $I_j \to 0$ régulièrement $(j = 1, 2, \ldots)$. Prenons $I_j + x$ dans le même sens que dans les espaces linéaires. Pour presque tous les $x \in \operatorname{int} P$, on a

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j + x} g^*(\xi)\, \mathrm{d}\xi = g^*(x) < \infty\, . \tag{9}$$

Supposons que $x \in \text{int}\, P$ et que (9) soit valable. Il est évident que l'ensemble des $\psi \in \mathscr{D}_Q$ pour lesquels il existe la limite finie

$$(10) \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{1}{I_j} \int_{I_j+x} (S(\xi, y), \psi(y))_y \, d\xi$$

est un sous-espace linéaire de $\mathscr{D}_Q$ et que la limite (10) est une forme linéaire de la variable ψ, définie dans le sous-espace en question. Cette forme est continue, parce que, d'après (8) et (9), elle est bornée dans $\mathscr{U}$ par le nombre $g^*(x)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il y a une forme linéaire S_x définie dans $\mathscr{D}_Q$ de sorte qu'elle est borné dans $\mathscr{U}$ par le nombre $g^*(x)$ et que $S_x(\psi)$ est égal à la limite (10) pour tous les ψ pour lesquels (10) a un sens. Définissons encore $S_x = 0$ pour les x pour lesquels (9) n'est pas valable, et construisons la fonction $g(x)$ comme suit: $g(x) = g^*(x)$ pour les x pour lesquels (9) est valable ($x \in \text{int}\, P$), $g(x) = 0$ pour les autres x. On a

$$(S(x, y), \varphi(x)\, \psi(y)) = \int (S(x, y), \psi(y))_y \, \varphi(x) \, dx = \int (S_x(y), \psi(y))\, \varphi(x) \, dx \, .$$

En effet, choisissons une fonction $F(x) = (S(x, y), \psi(y))_y$. On a $F(x) = (S_x, \psi)$ pour les x pour lesquels (9) et

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{I_j} \int_{I_j+x} F(\xi)\, d\xi = F(x)$$

sont valables, c'est-à-dire pour presque tous les x, car la dernière limite est justement la limite (10) que nous avons posée égale à (S_x, ψ) en supposant que (9) soit valable.

Lemme 5. *Soient $P \subset (E^m)_x$, $Q \subset (E^n)_y$ des intervalles compacts. Soit $S_x(y)$ ($x \in P$, $y \in Q$) une fonction distributionnelle telle que pour toute fonction $\psi \in \mathscr{D}_Q$, (S_x, ψ) est une fonction intégrable de la variable x dans P. On a alors: à chaque ensemble $\mathscr{B}$ borné dans $\mathscr{D}_Q$, un nombre $K \geqq 0$ est associé de sorte que $\psi \in \mathscr{B} \Rightarrow$ $\Rightarrow \int |(S_x, \psi)|\, dx \leqq K$.*

Démonstration par contradiction. On peut supposer que l'ensemble $\mathscr{B}$ pour lequel le lemme n'est pas valable soit borné convexe cerclé. Désignons $\sup_{\psi \in \mathscr{B}} |(S_x, \psi)|$ par $M(x)$. On a $0 \leqq M(x) < \infty$ pour $x \in P$. Définissons par récurrence les suites $\psi_j \in \mathscr{B}$, λ_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) comme suit: Soit h_k pour $k \to \infty$ une suite quelconque telle que $h_k \searrow 0$. Comme

$$\text{Min}\, [|(S_x, \sum_{\iota=0}^{j-1} \psi_\iota)|, \; h_k M(x)] \searrow 0$$

dans P et que l'intégrale inférieure de Lebesgue

$$\underline{\int_P} \text{Min}\, [|(S_x, \sum_{\iota=0}^{j-1} \psi_\iota)|, \; h_k M(x)] < \infty \, ,$$

d'après le lemme de Fatou, cette intégrale inférieure converge monotonement vers zéro. Choisissons donc $\lambda_0 = 1$, λ_j de sorte que

$$0 < \lambda_j < \tfrac{1}{2}\lambda_{j-1}\,, \tag{11}$$

$$\int_P \operatorname{Min}\left[|(S_x, \sum_{\iota=0}^{j-1}\psi_\iota)|,\ \lambda_j M(x)\right] \leqq \frac{1}{2^j}\,. \tag{12}$$

Maintenant nous utiliserons le fait que le lemme n'est pas valable pour l'ensemble $\mathscr{B}$. Choisissons ψ_j de sorte que

$$\psi_j \in \lambda_j \mathscr{B}\,, \tag{13}$$

$$\int |(S_x, \psi_j)|\,\mathrm{d}x \geqq \int |(S_x, \sum_{\iota=0}^{j-1}\psi_\iota)|\,\mathrm{d}x + j \tag{14}$$

(la somme vide soit égale au zéro). D'après (11) et (13), il existe $\psi = \sum \psi_j$. Désignons $\sigma_j = \sum_{\iota=0}^{j}\psi_\iota$, $\zeta_j = \sum_{\iota=j+1}^{\infty}\psi_\iota$. Comme $\zeta_j \in 2\lambda_{j+1}\mathscr{B}$ (d'après (11) et (13)), de la définition de $M(x)$ il résulte que

$$|(S_x, \zeta_j)| \leqq 2\lambda_{j+1}M(x)\,,$$

c'est-à-dire, d'après (12) où nous écrivons $j + 1$ au lieu de j, on a

$$\int_P \operatorname{Min}\left[|(S_x, \sigma_j)|,\ |(S_x, \zeta_j)|\right] \leqq 2 \cdot \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2^j}\,. \tag{15}$$

En appliquant la formule

$$\int |\sigma + \zeta| \geqq \int (|\sigma| - |\zeta|)_+ = \int |\sigma| - \int \operatorname{Min}(|\sigma|, |\zeta|)\,,$$

on déduit de (15) que $\int |(S_x, \psi)|\,\mathrm{d}x = \int |(S_x, \sigma_j + \zeta_j)|\,\mathrm{d}x \geqq \int |(S_x, \sigma_j)|\,\mathrm{d}x - (1/2^j)$. Comme nous avons $\int |(S_x, \sigma_j)| \geqq j$ (d'après (14)), nous obtiendrons $\int_P |(S_x, \psi)|\,\mathrm{d}x = \infty$, ce qui est en contradiction avec la supposition.

Lemme 6. *Sous les mêmes suppositions que dans le lemme 5, il existe un voisinage de zéro $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{D}_Q$ tel que $\psi \in \mathscr{M} \Rightarrow \int |(S_x, \psi)|\,\mathrm{d}x \leqq 1$.*

En effet, désignons $\mathscr{M} = \{\psi;\ \int |(S_x, \psi)|\,\mathrm{d}x \leqq 1\}$. Comme d'après le lemme 5 $\mathscr{M}$ satisfait aux suppositions du lemme 1, $\mathscr{M}$ est un voisinage de zéro, c. q. f. d.

Théorème 2. *Soient $P \subset (E^m)_x$, $Q \subset (E^n)_y$ des intervalles compacts. Soit $S_x(y)$ une fonction distributionnelle dans Q où x parcourt P, telle que pour chaque fonction $\psi \in \mathscr{D}_Q$, $(S_x(y), \psi(y))_y$ est une fonction intégrable de la variable x dans P. Il y a alors un voisinage de zéro $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{D}_Q$ et une fonction $g(x)$ intégrable dans P, qui peut prendre aussi la valeur $+\infty$, tels que $\psi \in \mathscr{U} \Rightarrow (S_x, \psi) \leqq g(x)$ pour tous les $x \in P$.*

Démonstration. Si nous désignons $S(\psi) = (S_x, \psi)$, où pour ψ fixe nous prenons l'expression du second membre pour un élément de $(\mathscr{L}_P)_x$, alors le lemme 6 garantit la continuité de l'application linéaire S de $\mathcal{D}_Q$ dans $\mathcal{L}_P$. D'après le lemme 4, il existe donc un voisinage de zéro $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{D}_Q$ et une fonction intégrable g^* dans P de sorte que

$$\psi \in \mathcal{U} \Rightarrow |(S_x, \psi)| \leqq g^*(x) \tag{16}$$

pour presque tous les $x \in P$. Soit $\{\psi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ une partie dense et dénombrable de D_Q. Il est évident qu'il y a un ensemble $M \subset P$ de mesure nulle et tel que $|(S_x, \psi_n)| \leqq g^*(x)$ pour tous les $x \in P - M$ et pour tous les ψ_n qui appartiennent à $\mathcal{U}$. (16) est donc valable pour tous les $x \in P - M$. Maintenant, il suffit de poser

$$g(x) = \begin{cases} g^*(x) & \text{pour } x \in P - M\,, \\ +\infty & \text{pour les autres } x\,. \end{cases}$$

Remarque. Sous les mêmes suppositions, si $\eta(x, y) \in \mathcal{D}_{P \times Q}$, $(S_x(y), \eta(x, y))$ est une fonction intégrable de la variable x, et si nous définissons une forme linéaire S dans $\mathcal{D}_{P \times Q}$ par $(S, \eta) = \int (S_x(y), \eta(x, y))\, dx$, alors S est une distribution et pour $\psi \in (\mathcal{D}_Q)_y$, on a

$$(S(x, y), \psi(y))_y = (S_x, \psi)$$

(dans le sens de l'égalité des fonctions et des distributions).

Démonstration. La fonction $(S_x(y), \eta(x, y))$ étant une limite des fonctions intégrables de la forme $(S_x(y), \sum_i \varphi_{ij}(x)\, \psi_{ij}(y))$ où $\sum_i \varphi_{ij}(x)\, \psi_{ij}(y) \to \eta(x, y)$ dans $\mathcal{D}_{P \times Q}(j \to \infty)$, elle est alors mesurable. Soit $\mathcal{B}$ borné dans $\mathcal{D}_{P \times Q}$. L'ensemble $\{\eta(x, y) \in \in (\mathcal{D}_Q)_y;\ x \in P, \eta \in \mathcal{B}\}$ [1]) étant borné dans $\mathcal{D}_Q$, on a d'après le théorème 2

$$|(S_x(y), \eta(x, y)| \leqq k \,.\, g(x)$$

où la constante k ne dépend que de $\mathcal{B}$. Il s'en ensuit que $(S_x(y), \eta(x, y))$ est intégrable et que $|(S, \eta)|$ est borné pour $\eta \in \mathcal{B}$. Le reste est évident.

Théorème 3. *Soit Ω un ensemble ouvert dans $(E^m)_x \times (E^n)_y$ et soit $S_x(y)$ une distribution définie dans Ω_x pour tout $x \in E^m$ de manière que pour tout $\psi \in (\mathcal{D})_y$, (S_x, ψ) est une fonction localement intégrable dans $\{x;$ support $\psi \subset \Omega_x\}$. Il existe alors une distribution S définie dans Ω de sorte que pour tout $\psi \in (\mathcal{D})_y$, on a*

$$(S(x, y), \psi(y))_y = (S_x, \psi) \quad \text{dans} \quad \{x;\ \text{support } \psi \subset \Omega_x\}\,. \tag{17}$$

Réciproquement, soit S une distribution définie dans Ω et pour tout $\psi \in (\mathcal{D})_y$, soit $(S(x, y), \psi(y))_y$ une fonction localement intégrable. Il existe alors une fonction distributionnelle $S_x(y)$ aux propriétés que nous avons mentionnées ci-dessus, pour laquelle on a (17).

Démonstration de la première partie: Définissons une distribution $S(x, y)$ de la même façon que dans la remarque ajoutée au théorème 2, par la formule $(S, \eta) = \int (S_x(y), \eta(x, y))\, dx$. Comme dans la remarque citée, on démontre que $(S_x(y),$

[1]) C'est-à-dire l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}_Q$ pour lesquelles il existe un point $x \in P$ et une fonction $\eta \in \mathcal{B}$ tels que $\varphi(y) = \eta(x, y)$ pour tous $y \in E^n$.

$\eta(x, y))$ est une fonction localement intégrable, c'est-à-dire intégrable, parce que son support est compact, et que S est une distribution.

Démonstration de la seconde partie: On peut recouvrir l'ensemble Ω par un système dénombrable d'ensembles $P_i \times Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, P^i \subset (E^m)_x,\ Q^i \subset (E^n)_y$ sont des intervalles compacts). Il y a alors une fonction distributionnelle $S_x^i(y)$ satisfaisant à l'assertion du théorème 1, où nous écrivons P^i, Q^i, S_x^i au lieu de P, Q, S_x. Comme pour $i \neq j$ on a $S_x^i = S_x^j$, pour presque tous les x dans l'intersection des domaines (cela s'ensuit de l'existence d'un ensemble dense et dénombrable $\{\psi_n\}$ de même que dans la démonstration du théorème 2), on peut trouver aisément une fonction distributionnelle S_x d'après [2], Ch. I, Th. 4 ,,recollement des morceaux".

Littérature

[1] *S. Lojasiewicz:* Sur la fixation des variables dans une distribution. Studia Mathematica, Tom *XVII*, fasc. 1, 1—64.

[2] *L. Schwartz:* Théorie des distributions. Paris 1950.

[3] *N. Bourbaki:* Les espaces vectorielles topologiques. *XIX*, *V.* Hermann, Paris.

Резюме

ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ИРЖИ ЙЕЛИНЕК (Jiří Jelínek), Прага

В работе исследуются системы обобщенных функций $S_x(y)$, зависящих от параметра x и локально интегрируемых по этому параметру (это значит, что $(S_x(y), \psi(y))$ — локально интегрируемая функция переменного x для любого $\psi \in \mathscr{D}$). Далее исследуются обобщенные функции $S(x, y)$ двух переменных, локально интегрируемые по переменному x, и доказывается, что оба понятия по существу эквивалентны, т. е. что для каждой локально интегрируемой по x системы $S_x(y)$ существует обобщенная функция $S(x, y)$, и для каждой обобщенной функции $S(x, y)$, локально интегрируемой по x, существует система $S_x(y)$ так, что имеет место $(S_x(y), \psi(y)) = (S(x, y), \psi(y))$ для любого $\psi \in \mathscr{D}$.

В работе кроме того упрощается определение Лоясевича локально интегрируемой системы обобщенных функций.