P. I. Petrov

Дифференциальные инварианты второго порядка двумерных пространств симметрической аффинной связности и их применения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 3, 427–434

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100576`

Чехословацкий математический журнал т. 13 (88) 1963, Прага

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДВУМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

П. И. ПЕТРОВ, Казань

(Поступило в редакцию 21/XII 1961)

В работе построен базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка обобщенного пространства симметрической аффинной связности двух измерений A_2; затем, с помощью установленного в тексте инвариантного признака проективно-евклидовых пространств A_2, из него получены базисные инварианты последних.

Введение. Используемые ниже понятия и факты из области теории дифференциальных инвариантов обобщенных пространств содержатся в монографии Т. И. Томаса [1]. Проблема разыскания скалярных инвариантов изучена в ней с точки зрения теории бесконечно малых преобразований С. Ли. Корни инфинитезимальных операторов преобразований составляющих первых двух аффинных нормальных тензоров $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta_1}$, $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta_1\delta_2}$:

$$X^{\mu}_{\nu}(2)\, J \equiv \begin{pmatrix} \alpha\mu \\ \beta\gamma\delta_1\nu \end{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta_1}} + \begin{pmatrix} \alpha\mu \\ \beta\gamma\delta_1\delta_2\nu \end{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta_1\delta_2}}, \tag{1}$$

где

$$\begin{pmatrix} \alpha\mu \\ \beta\gamma\delta_1\nu \end{pmatrix} = A^{\alpha}_{\nu\gamma\delta_1}\delta^{\mu}_{\beta} + A^{\alpha}_{\beta\nu\delta_1}\delta^{\mu}_{\gamma} + A^{\alpha}_{\beta\gamma\nu}\delta^{\mu}_{\delta_1} - A^{\mu}_{\beta\gamma\delta_1}\delta^{\alpha}_{\nu},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha\mu \\ \beta\gamma\delta_1\delta_2\nu \end{pmatrix} = A^{\alpha}_{\nu\gamma\delta_1\delta_2}\delta^{\mu}_{\beta} + \ldots - A^{\mu}_{\beta\gamma\delta_1\delta_2}\delta^{\alpha}_{\nu},$$

индуцированных неособенной заменой координат $x \to \bar{x}$, дают абсолютные скалярные дифференциальные инварианты второго порядка пространства A_2. Полную систему

$$X^{\mu}_{\nu}(2)\, J = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2),$$

однако, Т. И. Томас [1, 176 стр.] не проинтегрировал, следовательно, ворпос о базисе (2, 2) остался открытым. Отсюда основная цель настоящей работы — построить в конечном виде базис (2.2) абсолютных скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка двумерных простанств симметрической аффинной связности.

1. Теорема замены (replacement theorem) [1, § 39] приводит проблему отыскания скалярных дифференциальных инвариантов пространств симметрической аффинной связности к нахождению совокупных алгебраических инвариантов последовательности аффинных нормальных тензоров. В частности, ворпос о базисе (2,2) — задача разыскания в пространстве двух измерений совокупных алгебраических инвариантов двух тензоров $A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, $A^{\alpha}_{\mu\gamma\delta\varepsilon}$, обладающих соответственно следующими свойствами симметрии:

$$(2) \qquad A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = A^{\alpha}_{\gamma\beta\delta}\,, \quad A^{\alpha}_{(\beta\gamma\delta)} = 0\,,$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} &A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = A^{\alpha}_{\gamma\beta\delta\varepsilon} = A^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon\delta}\,, \\ &A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} + A^{\alpha}_{\beta\delta\varepsilon\gamma} + A^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma\delta} + A^{\alpha}_{\gamma\delta\varepsilon\beta} + A^{\alpha}_{\gamma\varepsilon\beta\delta} + A^{\alpha}_{\delta\varepsilon\beta\gamma} = 0\,. \end{aligned}$$

Она допускает формулировку: найти инварианты тензора аффинной кривизны

$$B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta}$$

пространства A_2 и ковариантной производной $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\varepsilon}$ этого тензора, так как имеют место соотношения:

$$(4) \qquad B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} - A^{\alpha}_{\beta\delta\gamma}\,, \quad 3A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + B^{\alpha}_{\gamma\beta\delta}\,,$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} &B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\varepsilon} = A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} - A^{\alpha}_{\beta\delta\gamma\varepsilon}\,, \\ &6A^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = 2B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\varepsilon} + B^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon,\delta} + B^{\alpha}_{\gamma\beta\delta,\varepsilon} + B^{\alpha}_{\gamma\beta\varepsilon,\delta} + B^{\alpha}_{\delta\beta\varepsilon,\gamma}\,. \end{aligned}$$

Дальнейшее видоизменение задачи базируется на нижеследующие предложения:

Лемма 1. *Тензор кривизны $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ пространства A_2 всегда можно представить формулой*

$$(6) \qquad -\tfrac{1}{2}B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \delta^{\alpha}_{[\gamma}\Psi_{|\beta|\delta]} + \delta^{\alpha}_{\beta}\Psi_{[\gamma\delta]}\,,$$

где $\Psi_{\alpha\beta}$ — тензор.

Действительно, с одной стороны, (6) выражает линейно однородно с постоянными коэффициентами существенные определяющие тензора кривизны B^{2}_{112}, B'_{212}, B^{1}_{112}, B^{2}_{212} через Ψ_{11}, Ψ_{22}, Ψ_{12}, Ψ_{21} с неравным нулю определителем

$$(7) \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, контрактируя равенство (6) по индексам α, δ, получаем уравнение

$$(8) \qquad \Psi_{\beta\gamma} = B^{\sigma}_{(\beta\gamma)\sigma} + \tfrac{1}{3}B^{\sigma}_{[\beta\gamma]\sigma}\,,$$

которое определяет компоненеты $\Psi_{\alpha\beta}$ как независимые линейные формы от величин $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$.

Используя соотношения (6), (8) и факт линейной независимости составляющих $B^{\alpha}_{\beta 12,\gamma}$, заключаем:

Лемма 2. *$B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta,\varepsilon}$ выражается через $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ линейно однородно с постоянными коэффициентами и обратно.*

Итак, интересующая нас задача сведена к построению совокупных алгебраических инвариантов тензоров $\Psi_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ в бинарной области.

2. Сперва найдем целые рациональные инварианты каждого из тензоров $\Psi_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ в отдельности, а затем их смешанные инварианты.

а) *Инварианты тензора* $\Psi_{\alpha\beta}$. Ковариантный тензор второй валентности $\Psi_{\alpha\beta}$ разлагается на сумму двух неприводимых тензоров

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{(\alpha\beta)} + \Psi_{[\alpha\beta]}\,. \tag{9}$$

В пространстве двух измерений антисимметрическую часть $\Psi_{[\alpha\beta]}$ его можно отождествить со скаляром, полагая

$$J_1 = \tfrac{1}{2}\Psi_{[\alpha\beta]}e^{\alpha\beta}\,, \tag{10}$$

где $e^{\alpha\beta} = -e^{\beta\alpha}$ задано матрицей

$$(e^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Дискриминант тензора $a_{\alpha\beta} = \Psi_{(\alpha\beta)}$

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{12}$$

представляет собою, как известно, наипростейший, (наинизшей степени относительно составляющих $a_{\alpha\beta}$) алгебраический инвариант этого тензора. Любой другой его инвариант является постоянным кратным степени J_2.

б) *Инварианты тензора* $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$. В аффинной алгебре тензоров имеет место теорема полной приводимости, согласно которой всякий приводимый тензор можно рассматривать как результат сложения некоторого числа неприводимых тензоров. Формула И. А. Схоутена [2], реализующая такое представление, будучи приложена к тензору валентности три $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ двумерного пространства, дает

$$\Psi_{\alpha\beta,\gamma} = \Psi_{(\alpha\beta,\gamma)} + \tfrac{2}{3}\big(\Psi_{[\alpha\beta],\gamma} + \Psi_{[\gamma\beta],\alpha}\big) + \tfrac{2}{3}\big(\Psi_{(\alpha\beta),\gamma} - \Psi_{\gamma(\alpha,\beta)}\big)\,. \tag{13}$$

Тензор

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \Psi_{(\alpha\beta,\gamma)}\,, \tag{14}$$

получающийся из $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ операцией симметрирования, имеет четыре существеных составляющих. Если обозначить

$$u_{\alpha\beta\gamma} \equiv \tfrac{2}{3}\big(\Psi_{[\alpha\beta],\gamma} + \Psi_{[\gamma\beta],\alpha}\big)\,, \tag{15}$$

то легко видеть, что

$$u_{(\alpha\beta\gamma)} = 0\,, \quad u_{\alpha\beta\gamma} = u_{\gamma\beta\alpha}\,. \tag{16}$$

В силу соотношений (16) неприводимый тензор $u_{\alpha\beta\gamma}$ имеет только два линейно независимых определяющих, например, u_{112}, u_{221}. Для целей дальнейшего достаточно вместо $u_{\alpha\beta\gamma}$ взять его комитант

$$u_\alpha = u_{\alpha\lambda\mu} e^{\lambda\mu}\,, \tag{17}$$

так как $u_1 = 3u_{112}$, $u_2 = -3u_{221}$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, убеждают, что вместо неприводимого трехвалентного тензора

$$v_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{2}{3}\left(\Psi_{(\alpha\beta),\gamma} - \Psi_{\gamma(\alpha,\beta)}\right) \tag{18}$$

с думя существенными компонентами v_{211}, v_{122}, достаточно рассмотреть вектор

$$v_\alpha = v_{\alpha\lambda\mu} e^{\lambda\mu}\,, \tag{19}$$

ибо $v_1 = -3v_{211}, v_2 = 3v_{122}$. Неприводимые части тензора представляют собою независимые линейные однородные комбинации с постоянными коэффициентами составляющих исходного тензора. Отсюда непосредственно следует

Лемма 3. *Каждый совокупный инвариант тензоров*

$$u_i,\ v_j,\ c_{ijk} \tag{20}$$

— инвариант тензора $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$ и обратно.

После этих предварительных замечаний уже нетрудно перечислить алгебраические инварианты тензора $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$. Пусть тензору c_{ijk} отвечает бинарная кубическая форма

$$f = c_{ijk} x^i x^j x^k \quad (i, j, k = 1, 2)\,. \tag{21}$$

Её ковариант второй степени

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

где

$$f_{ij} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\,,$$

как известно, называется *гессианом*. Учетверенное значение дискриминанта гессиана H формы f

$$J_3 = 4 \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \tag{23}$$

— её относительный инвариант. В классической теории форм его называют *дискриминантом* кубической бинарной формы. Всякий целый рациональный инвариант формы f (или тензора c_{ijk}) будет постоянным кратным степени дискриминанта J_3. Чтобы получить смешанные инварианты тензоров u_i, v_j, c_{ijk} или отвечающих им бинарных форм, воспользуемся основной теоремой теории инвариантов:

„Всякий инвариант системы любых тензоров есть линейная комбинация слагаемых, каждое из которых получается из этих тензоров с помощью действий умножения тензоров, полных альтернирований и последующего полного свёртывания“ [3].

Прилагая эту теорему к разысканию инвариантов векторов u_i, v_j или, соответственно, $p^i = e^{i\sigma}u_\sigma$, $q^k = e^{k\tau}v_\tau$, убеждаемся, что определитель

$$J_4 = \begin{vmatrix} p' & p^2 \\ q' & q^2 \end{vmatrix} \tag{24}$$

является инвариантом и притом любой другой целый рациональный инвариант векторов p^i, q^k будет постоянным кратным степени инварианта J_4. Подобным же образом находим, что

$$J_5 = c_{ijk}p^ip^jp^k\,, \quad J_6 = h_{ij}p^ip^j\,, \quad J_7 = c_{ijk}q^iq^jq^k \tag{25}$$

инварианты наинизших степеней, соответственно, пар тензоров c_{ijk}, p^s и c_{ijk}, q^s. Тензор $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$, имеющий 8 существенных компонент, обладает $8 - 4 = 4$ абсолютными алгебраическими инвариантами относительно полной линейной группы на плоскости. Известно, что всякий рациональный инвариант (абсолютный) системы форм может быть представлен в виде частного двух целых рациональных (относительных) инвариантов одинакового веса.

В частности, базис функционально независимых абсолютных инравиантов системы форм f, u_ix^i, v_sx^s всегда можно задавать с помощью 5 относительных инвариантов. Таким образом, для задачи рубрики б) остается только дать доказательство независимости инвариантов J_3, J_4, J_5, J_6, J_7. Метод исследования такого рода вопросов изложен в статье автора [4]. Применим его к интересующему нас случаю. Находим, что якобиан

$$\frac{\partial(J_3J_4J_5J_6J_7)}{\partial(p'c_{111}c_{112}c_{122}c_{222})} \tag{26}$$

для фиксированных значений переменных — точки M^0

$$c^0_{111} = c^0_{222} = 0\,; \quad c^0_{112} = c^0_{122} = 1\,; \quad p'_0 = 1\,, \quad p^2_0 = 0\,; \quad q'_0 = 0\,, \quad q^2_0 = 1 \tag{27}$$

изображается таблицей

$$\Delta^0_8 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Так как $\Delta^0_8 \neq 0$, то I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 независимы и в окрестности точки M_0.

в) *Совокупные инварианты тензоров* $\Psi_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$. В пространстве двух измерений указанные здесь тензоры имеют, соответственно, 4, 8 определяющих. Это значит, что они имеют 8 абсолютных или 9 относительных инвариантов. Из них 7 уже построены. Остается, таким образом, найти еще два совокупных инварианта системы тензоров a_{ij}, p^i, q^k, c_{ijk}. С помощью цитированной выше основной теоремы теории инвариантов без затруднений можно доказать, что искомые инварианты должны быть не ниже третьей степени от компонент выписанных тензоров. Поэтому

$$I_8 = a_{ij}p^ip^j\,, \quad I_9 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_{12} \\ a_{21} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} h_{11} & a_{12} \\ h_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{29}$$

представляют простейшие инварианты их. Докажем, что скаляры I_2, I_8, I_9 функционально независимы. Для этого вычислим якобиан

$$\Delta_3 \equiv \frac{\partial(I_2 I_8 I_9)}{\partial(a_{11}a_{12}a_{22})}\,, \tag{30}$$

заранее положив p^i, q^i, c^σ_{ijk} равными постоянным из (27), при нижеследующих числовых значениях переменных a_{ij}:

$$a^0_{11} = a^0_{22} = 0\,, \quad a^0_{12} = -\tfrac{1}{2}\,. \tag{31}$$

Простой подсчет показывает, что

$$\Delta^0_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

$\Delta^0_3 \neq 0$. Значит, инварианты I_2, I_8, I_9 функционально независимы в некоторой окрестности значений (27), (31) переменных p^i, q^i, c_{ijk}, a_{ij}. Поскольку инварианты I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 вовсе не содержат переменных a_{ij}, то из вышеизложенного вытекает

Лемма 3. *Инварианты* I_s $(s = 1, \ldots, 9)$ *независимы.*

Сопоставляя это положение с одной теоремой из общей теории инвариантов обобщенных пространств, утверждающей возможность всегда задавать базис полной системы аффинных скалярных дифференциальных инвариантов при помощи только рациональных инвариантов [1, § 76], получаем теорему [5]:

Теорема 1. *Инварианты* $I_1, I_2, \ldots, I_9$ *образуют наипростейший базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка двумерного пространства симметрической аффинной связности.*

3. Пространство A_2 называется проективно-евклидовым, если оно допускает отображение на евклидово с сохранением геодезических линий [6]. Две аффинные связности Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^k_{ij}$, имеющие в одной и той же системе координат общие геодезические линии, связаны равенством

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij} = \Psi_i\delta^k_j + \Psi_j\delta^k_i\,,$$

где Ψ_i — некоторый вектор. Отсюда находим связь между тензорами кривизн двух пространств, находящихся в геодезическом соответствии

$$\bar{B}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + 2\delta^{\alpha}_{[\gamma}\Psi_{|\beta|\delta]} + \delta^{\alpha}_{\beta}\Psi_{[\gamma\delta]} ,$$

где использовано обозначение

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha,\beta} - \Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} . \tag{33}$$

Требование $\bar{B}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = 0$ приводит к вывову, что тензор кривизны проективно-евклидового пространства должен иметь специфическое строение, а именно

$$-\tfrac{1}{2}B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \delta^{\alpha}_{[\gamma}\Psi_{|\beta|\delta]} + \delta^{\alpha}_{\beta}\Psi_{[\gamma\delta]} . \tag{34}$$

Однако, на основании леммы 1, условие (34) при $n = 2$ не накладывает на коэффициенты связности никакого ограничения. Поэтому, чтобы решить вопрос о том, допускает ли некоторое A_2 геодезическое отображение на евклидово пространство E_2, нужно сперва вычислить по заданным функциям Γ^k_{ij} соответствующий ему тензор кривизны $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, а затем по нему определить, использовав формулу (34), отвечающий ему тензор $\Psi_{\alpha\beta}$. После этого остается выяснить, существует ли вектор Ψ_i, удовлетворяющий тензорным дифференциальным уравнениям (33).

Необходимое и достаточное условие существования решения системы (33) — условие интегрируемости ее — в силу тождества Риччи и (34), имеет вид

$$\Psi_{\alpha[\beta,\gamma]} = 0 . \tag{35}$$

Условие (35), приняв во внимание рассмотрения п. 2 б), можно высказать так:

Лемма 4. *Для того, чтобы A_2 было проективно-евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы $p^{\alpha} + q^{\alpha} = 0$.*

С помощью леммы 4, если учесть, что пространство A_2, а стало быть Γ^k_{ij} и $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, а также то, что комитанты последнего p^i, q^k вещественны, легко получаются:

Теорема 2. *Пространство A_2 тогда итолько тогда проективно-евклидово, если $I_4 = 0$, $I_5 + I_7 = 0$.*

Теорема 3. *Базис* (2,2) *проективно-евклидового A_2 состоит из* 7 *скаляров:* $I_1, I_2, I_3, I_5, I_6, I_8, I_9$.

Литература

[1] *T. Y. Thomas:* The Differential Invariants of Generalized Spaces. Cambridge, 1934.

[2] *I. A. Schouten:* Der Ricci-Kalkül. Ab: VII. Berlin, 1924.

[3] *Г. Б. Гуревич:* Основы теории алгебраических инвариантов. ОГИЗ Гостехиздат, М-Л, 1948, 181, б).

[4] *П. И. Петров:* Скалярные дифференциальные инварианты третьего порядка риманового пространства трех измерений. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, tomus *XI*, fasc. 3—4, 1960, 208—209.
[5] *П. И. Петров:* Дифференциальные инварианты обобщенных пространств симметрической аффиной связности. ДАН СССР, т. *LXV*, № 2, 1949, 129—130.
[6] *И. А. Схоутен* и *Д. Дж. Стройк:* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, том 2. ИЛ, Москва, 1948, стр. 194.

Résumé

LES INVARIANTS DIFFERÉNTIELS DU SECOND ORDRE D'ESPACES À DEUX DIMENSIONS À CONNEXION AFFINE ET LEURS APPLICATIONS

P. I. PETROV, Kazan (UdRSS)

Le travail apporte les démonstrations des théorèmes publiés déjà dans [5]. Il s'agit ici de trouver le système complet d'invariants du second ordre d'un espace à deux dimensions, muni d'une connexion affine symétrique. On montre tout d'abord qu'il est possible de réduire ce problème à celui de trouver les invariants de deux tenseurs $\Psi_{\alpha\beta}$, $\Psi_{\alpha\beta,\gamma}$, voir (6), (8). Les invariants sont exprimés explicitement en (10), (12), (23)—(25), (28). A l'aide de ces invariants on trouve ensuite une condition fort simple ($J_4 = J_5 + J_7 = 0$) pour que l'espace en question soit euclidien projectif.