Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

RÉSEAUX SEMI-CONJUGUÉS SUR UNE SURFACE DANS L'ESPACE À CONNEXION PROJECTIVE À QUATRE DIMENSIONS

BOHUMIL CENKL, Praha

(Reçu le 10 juin 1961)

Dans le présent travail, on donne une classification de surfaces suivant les réseaux semi-conjugués et l'on introduit une dualisation de ces surfaces (congruences de droites). Pour le cas général d'une surface à deux réseaux semi-conjugués on trouve les formes invariantes (l',,élément projectif") de la surface et leur signification géométrique.

1. Le présent travail est une contribution à l'étude de propriétés locales de variétés à connexion projective au sens de [5]. Par une surface de l'espace à quatre dimensions muni d'une connexion projective nous entendrons donc une variété de König P^4_{02} définie comme suit: A tout point (u^1, u^2) d'un domaine à deux dimensions de paramètres Ω soit associé un espace projectif $P_4(u^1, u^2)$ à quatre dimensions, de centre $A_0(u^1, u^2)$. A tout arc $\gamma \subset \Omega$ joignant deux points, soit (u^1_1, u^2_1) et (u^1_2, u^2_2), du domaine paramétrique Ω est associée une homographie $\mathbf{P}_\gamma$: $P_4(u^1_1, u^2_1) \to P_4(u^1_2, u^2_2)$. L'étude d'une telle variété correspond donc à l'étude de la géométrie intérieure d'une surface dans l'espace à quatre dimensions muni d'une connexion projective. Les propriétés locales d'une surface plongée dans un espace à connexion projective à quatre dimensions ont été étudiées par M. M. KIMPARA dans son travail [2].

La connexion sur la variété considérée peut être définie analytiquement de la façon suivante: Dans l'espace local P_4 fixons le repère A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 de façon à voir

$$(1.1) \qquad [A_0 A_1 A_2 A_3 A_4] = 1 .$$

Soient

$$(1.2) \qquad \mathrm{d}A_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4) , \quad \omega^0_0 + \omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 + \omega^4_4 = 0$$

les équations du mouvement du repère; dans la suite, nous écrirons tout simplement $\omega^\alpha_0 = \omega^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, 4)$. ω^β_α sont les formes Pfaff en paramètres principaux u^1, u^2 et en paramètres secondaires $v^1, \ldots, v^r$. Nous pouvons écrire les équations de structure sous la forme

$$(1.3) \qquad [d\omega_\alpha^\beta] = [\omega_\alpha^\lambda \omega_\lambda^\beta] - \tfrac{1}{2} R^\beta_{\alpha\gamma\mu}[\omega^\gamma \omega^\mu]\,, \quad R^\beta_{\alpha(\gamma\mu)} = 0\,.$$

Choisissons le repère de telle manière que $[A_0 A_1 A_2]$ soit le plan tangent à la surface en A_0. Nous avons donc

$$(1.4) \qquad \omega^3 = \omega^4 = 0\,,$$

d'où par différentiation extérieure,

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &[\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] - R^3_{012}[\omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ &[\omega^1 \omega_1^4] + [\omega^2 \omega_2^4] - R^4_{012}[\omega^1 \omega^2] = 0\,. \end{aligned}$$

Ecrivons, pour simplifier, $R^3_{012} = 2h_1$, $R^4_{012} = 2h_2$. Les équations (1.5) donnent alors

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &\omega_1^3 = a_1 \omega^1 + (a_2 + h_1)\,\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = (a_2 - h_1)\,\omega^1 + a_3 \omega^2\,, \\ &\omega_1^4 = b_1 \omega^1 + (b_2 + h_2)\,\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = (b_2 - h_2)\,\omega^1 + b_3 \omega^2\,. \end{aligned}$$

En différentiant extérieurement les équations (1.5) et (1.6), nous obtenons

$$(1.7) \qquad \begin{gathered} [dh_1 + h_1(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + h_2 \omega_4^3 \omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ [dh_2 + h_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) + h_1 \omega_3^4 \omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ [\omega^1\, da_1 + a_1(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_3^3) + b_1 \omega_4^3 - 2a_2 \omega_1^2] + \\ + [\omega^2\, d(a_2 + h_1) + (a_2 + h_1)(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) - a_3 \omega_1^2 + (b_2 + h_2)\,. \\ .\, \omega_4^3 - a_1 \omega_2^1] - (R^3_{112} - a_1 R^1_{012} - \overline{a_2 + h_1} R^2_{012})\,[\omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ [\omega^1\, d(a_2 - h_1) + (a_2 - h_1)(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) - a_1 \omega_2^1 + (b_2 - h_2)\,\omega_4^3 - \\ - a_3 \omega_1^2 + [\omega^2\, da_3 + a_3(\omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_3^3) + b_3 \omega_4^3 - 2a_2 \omega_2^1] - \\ - R^3_{212} - \overline{a_2 - h_1} R^1_{012} - a_3 R^2_{012})\,[\omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ [\omega^1\, db_1 + b_1(\omega_0^0 - 2\omega_1^1 + \omega_4^4) + a_1 \omega_3^4 - 2b_2 \omega_1^2] + \\ + [\omega^2\, d(b_2 + h_2) + (b_2 + h_2)(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) - b_3 \omega_1^2 + \\ + (a_2 + h_1)\,\omega_3^4 - b_1 \omega_2^1] - R^4_{112} - b_1 R^1_{012} - \overline{b_2 + h_2} R^2_{012})\,[\omega^1 \omega^2] = 0\,, \\ [\omega^1\, d(b_2 - h_2) + (b_2 - h_2)(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) - b_1 \omega_2^1 + (a_2 - h_1)\,\omega_3^4 - \\ - b_3 \omega_1^2] + [\omega^2\, db_3 + b_3(\omega_0^0 - 2\omega_2^2 + \omega_4^4) + a_3 \omega_3^4 - 2b_2 \omega_2^1] - \\ - (R^4_{212} - \overline{b_2 - h_2} R^1_{012} - b_3 R^2_{012})\,[\omega^1 \omega^2] = 0\,. \end{gathered}$$

Considérons en même temps la dualisation de la surface (A). Le repère dual E^0, E^1, E^2, E^3, E^4 soit donné par le équations

$$(1.8) \qquad E^\alpha A_\beta = \delta^\alpha_\beta\,.$$

Les équations fondamentales de la dualisation sont donc

$$
\begin{aligned}
(1.9)\quad dE^4 &= - \omega_4^4 E^4 - \omega_3^4 E^3 - (\overline{b_2 - h_2}\omega^1 + b_3\omega^2) E^2 - (b_1\omega^1 + \overline{b_2 + h_2}\omega^2) E^1 \,, \\
dE^3 &= - \omega_4^3 E^4 - \omega_3^3 E^3 - (\overline{a_2 - h_1}\omega^1 + a_3\omega^2) E^2 - (a_1\omega^1 + \overline{a_2 + h_1}\omega^2) E^1 \,, \\
dE^2 &= - \omega_4^2 E^4 - \omega_3^2 E^3 - \omega_2^2 E^2 - \omega_1^2 E^1 - \omega^2 E^0 \,, \\
dE^1 &= - \omega_4^1 E^4 - \omega_3^1 E^3 - \omega_2^1 E^2 - \omega_1^1 E^1 - \omega^1 E^0 \,, \\
dE^0 &= - \omega_4^0 E^4 - \omega_3^0 E^3 - \omega_2^0 E^2 - \omega_1^0 E^1 - \omega_0^0 E^0 \,.
\end{aligned}
$$

La dualisation de la surface (A) donne alors évidemment une congruence L formée de droites $[E^4E^3]$ dans l'espace dual. Pour toute variété de König P_{02}^4 à centres ponctuels dans les espaces locaux à quatre dimensions, nous obtenons de cette façon une variété de König généralisée (voir [5]) P_{12}^4, où les centres dans les espaces locaux sont réglés.

Soit donnée maintenant une variété P_{12}^4. Les équations fondamentales du mouvement du repère $B_1, \ldots, B_5$ (les points B_1, B_2 étant supposés situés sur la droite de la congruence L et $[B_1B_2B_3B_4]$ étant l'espace tangent à la congruence) suivant les courbes du domaine à deux dimensions de paramètres $\Omega(u, v)$ soient maintenant

$$
(1.10)\qquad dB_i = \omega_i^k B_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, 5)\,,
$$
$$
\omega_i^k = a_{i1}^k(u, v)\, du + a_{i2}^k(u, v)\, dv\,, \quad \omega_i^i = 0\,, \quad \omega_1^5 = \omega_2^5 = 0\,.
$$

Les fonctions $a_{i\kappa}^k$ $(\kappa = 1, 2)$ définissent la connexion de la variété considérée. Pour toute courbe γ: $u = u(t)$, $v = v(t)$ du domaine $\Omega(u, v)$ joignant deux points arbitraires (u_1, v_1), (u_2, v_2), les équations (1.10) deviennent des équations différentielles ordinaires; leur solution donne une surface réglée dans l'espace local $P_4(u_1, u_2)$, et qui forme le développement, dans ce $P_4(u_1, v_1)$, de la surface réglée de la congruence L formée par les droites de cette congruence en les points de la courbe γ. La connexion est alors donnée par une homographie $\mathbf{K}$ (dépendente de γ) entre les espaces locaux $P_4(u_1, v_1)$ et $P_4(u_2, v_2)$: $\mathbf{K}\, B_i(u_1, v_1) = B_i(u_2, v_2)$, B_i étant la solution des équations différentielles mentionnées, dans l'espace local $P_4(u_1, v_1)$.

Nous disons qu'une surface réglée est développable lorsqu'elle est développable dans l'espace local. L'équation différentielle des surfaces développables de la congruence peut donc être écrite comme

$$
(1.11)\qquad \omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3 = 0\,.
$$

Si nous supposons que la congruence L ne soit pas une congruence parabolique, elle sera décomposable en deux systèmes de surfaces développables. Fixons maintenant les points B_1, B_2 de telle façon, que chacun d'eux se trouve sur l'arrête de rebroussement d'un tel système de surface développables, lorsqu'on les développe dans l'espace local. Il résulte des équations (1.10) que l'on doit avoir

$$
(1.12)\qquad a_{12}^3 = a_{21}^3 = a_{12}^4 = a_{21}^4 = 0\,.
$$

Si nous choisissons alors le repère de façon à avoir $\bar{B}_1 = B_1$, $\bar{B}_2 = B_2$, $\bar{B}_3 = a_{11}^3 B_3 +$

$+ a^4_{11}B_4$, $\bar{B}_4 = a^3_{22}B_3 + a^4_{22}B_4$, nous pourrons écrire (en remplaçant à nouveau $\bar{B}_i$ par B_i)

$$\text{(1.13)} \qquad dB_1 = \omega^1_1 B_1 + \omega^2_1 B_2 + du\, B_3\,, \quad dB_2 = \omega^1_2 B_1 + \omega^2_2 B_2 + dv\, B_4\,.$$

Dans l'espace local, nous avons donc les changements admissibles des paramètres et de la base:

$$\text{(1.14)} \qquad \begin{aligned} B_1 &= \varrho \bar{B}_1\,,\\ B_2 &= \sigma \bar{B}_2\,,\\ B_3 &= \alpha^1_3\bar{B}_1 + \alpha^2_3\bar{B}_2 + \alpha^3_3\bar{B}_3 + \alpha^4_3\bar{B}_4\,,\\ B_4 &= \alpha^1_4\bar{B}_1 + \alpha^2_4\bar{B}_2 + \alpha^3_4\bar{B}_3 + \alpha^4_4\bar{B}_4\,,\\ B_5 &= \alpha^1_5\bar{B}_1 + \alpha^2_5\bar{B}_2 + \alpha^3_5\bar{B}_3 + \alpha^4_5\bar{B}_4 + \alpha^5_5\bar{B}_5\,,\\ &\varrho\sigma\alpha^5_5(\alpha^3_3\alpha^4_4 - \alpha^4_3\alpha^3_4) = 1\,, \quad u = u(\bar{u})\,, \quad v = v(\bar{v})\,. \end{aligned}$$

Ecrivons $u' = du/d\bar{u}$, $v' = dv/d\bar{v}$.

Nous allons calculer maintenant, comment changent les expressions (1.13) si nous y appliquons les transformations (1.14). Nous pouvons écrire

$$\text{(1.15)} \qquad \begin{aligned} \varrho\, d\bar{B}_1 &\equiv \sigma\omega^2_1\bar{B}_2 + du(\alpha^2_3\bar{B}_2 + \alpha^3_3\bar{B}_3 + \alpha^4_3\bar{B}_4) \pmod{\bar{B}_1}\,,\\ \sigma\, d\bar{B}_2 &\equiv \varrho\omega^1_2\bar{B}_1 + dv(\alpha^1_4\bar{B}_1 + \alpha^3_4\bar{B}_3 + \alpha^4_4\bar{B}_4) \pmod{\bar{B}_2}\,, \end{aligned}$$

tandis que

$$\text{(1.16)} \qquad \begin{aligned} \bar{\omega}^2_1 &= \sigma\varrho^{-1}\omega^2_1 + \alpha^2_3\varrho^{-1}\,du\,, \quad \bar{\omega}^3_1 = \varrho^{-1}\alpha^3_3\,du\,, \quad \bar{\omega}^4_1 = \varrho^{-1}\alpha^4_3\,du\,,\\ \bar{\omega}^1_2 &= \varrho\sigma^{-1}\omega^1_2 + \alpha^1_4\sigma^{-1}\,dv\,, \quad \bar{\omega}^3_2 = \sigma^{-1}\alpha^3_4\,dv\,, \quad \bar{\omega}^4_2 = \sigma^{-1}\alpha^4_4\,dv\,. \end{aligned}$$

A partir de ces équations nous obtenons immédiatement

$$\text{(1.17)} \qquad \begin{aligned} \bar{a}^2_{11} &= a^2_{11}\sigma\varrho^{-1}u' + \varrho^{-1}\alpha^2_3u'\,, \quad \bar{a}^2_{12} = \varrho^{-1}\sigma v' a^2_{12}\,,\\ \bar{a}^1_{22} &= a^1_{22}\varrho\sigma^{-1}v' + \sigma^{-1}\alpha^1_4v'\,, \quad \bar{a}^1_{21} = \varrho\sigma^{-1}u' a^1_{21}\,. \end{aligned}$$

Il est évident qu'on peut poser

$$\text{(1.18)} \qquad a^2_{11} = a^1_{22} = 0\,, \quad a^2_{12} = a^1_{21} = 1\,.$$

Les changements admissibles de paramètres et de la base sont maintenant

$$\text{(1.19)} \qquad \begin{aligned} B_1 &= \varrho\bar{B}_1\,,\\ B_2 &= \sigma\bar{B}_2\,,\\ B_3 &= \alpha^1_3\bar{B}_1 + \varrho u'^{-1}\bar{B}_3\,,\\ B_4 &= \alpha^2_4\bar{B}_2 + \sigma v'^{-1}\bar{B}_4\,,\\ B_5 &= \alpha^1_5\bar{B}_1 + \alpha^2_5\bar{B}_2 + \alpha^3_5\bar{B}_3 + \alpha^4_5\bar{B}_4 + u'v'\varrho^{-2}\sigma^{-2}\bar{B}_5\,,\\ u &= u(\bar{u})\,, \quad v = v(\bar{v})\,, \quad \varrho^{-1}\sigma v' = 1\,, \quad \varrho\sigma^{-1}u' = 1\,. \end{aligned}$$

Au lieu des équations (1.13) nous avons à présent

$$\text{(1.20)} \qquad dB_1 = \omega^1_1 B_1 + dv\, B_2 + du\, B_3\,, \quad dB_2 = du\, B_1 + \omega^2_3 B_2 + dv\, B_4\,.$$

En raison de (1.19) et (1.20) nous pouvons écrire

$$(1.21) \qquad \alpha_3^1 \, d\bar{B}_1 + \varrho u'^{-1} \, d\bar{B}_3 \equiv \omega_3^5 u'^{-1} \varrho^{-1} \sigma^{-2} \bar{B}_5 \pmod{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4},$$
$$\alpha_4^2 \, d\bar{B}_2 + \sigma v'^{-1} \, d\bar{B}_4 \equiv \omega_4^5 v'^{-1} \varrho^{-2} \sigma^{-1} \bar{B}_5 \pmod{\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \bar{B}_4}.$$

Nous avons donc les formules de transformation

$$(1.22) \qquad \bar{\omega}_3^5 = \varrho^{-2} \sigma^{-2} \omega_3^5 \,, \quad \bar{\omega}_4^5 = \varrho^{-2} \sigma^{-2} \omega_4^5 \,.$$

2. Sur la surface (A) donnée par les équations (1.4) considérons un réseau conjugué ou semi-conjugué.[1]) Dans ce but, ayons sur la surface deux couches de courbes: $m_1 \omega^1 + m_2 \omega^2 = 0$, $n_1 \omega^1 + n_2 \omega^2 = 0$. Nous demandons alors, quelles sont les conditions pour que la première couche soit conjuguée aux courbes de la deuxième. Les droites $[A_0, m_2 A_1 - m_1 A_2]$ suivant une courbe de la deuxième couche doivent donc former une surface développable, d'est-à-dire il faut que l'on ait

$$(2.1) \quad \{m_2 \omega_1^3 - m_1 \omega_2^3\}_{\omega^1 = n_2, \omega^2 = -n_1} = 0 \,, \quad \{m_2 \omega_1^4 - m_1 \omega_2^4\}_{\omega^1 = u_2, \omega^2 = -u_1} = 0 \,.$$

En effet, on a alors $[d\{\lambda A_0 + m_2 A_1 - m_1 A_2\}_{\omega^1 = u_2, \omega^2 = -u_1}, A_0, A_1, A_2] = 0$. Ecrivons donc les équations (2.1) sous la forme

$$(2.2) \qquad m_2 u_2 a_1 - (a_2 + h_1) \, m_2 u_1 - (a_2 - h_1) \, m_1 u_2 + m_1 u_1 a_3 = 0 \,,$$
$$m_2 u_2 b_1 - (b_2 + h_2) \, m_2 u_1 - (b_2 - h_2) \, m_1 u_2 + m_1 u_1 b_3 = 0 \,.$$

En vertu de (1.7), nous voyons qu'il est possible de poser

$$(2.3) \qquad a_1 = b_3 = 0 \,.$$

Au lieu de (1.6) nous pouvons donc écrire

$$(2.4) \qquad \omega_1^3 = (a_2 + h_1) \, \omega^2 \,, \qquad \omega_2^3 = (a_2 - h_1) \, \omega^1 + a_3 \omega^2 \,,$$
$$\omega_1^4 = b_1 \omega^1 + (b_2 + h_2) \, \omega^2 \,, \quad \omega_2^4 = (b_2 - h_2) \, \omega^1 \,.$$

Les formes asymptotiques sont maintenant

$$(2.5) \qquad \varphi_1 = 2 a_2 \omega^1 \omega^2 + a_3 (\omega^2)^2 \,, \quad \varphi_2 = b_1 (\omega^1)^2 + 2 b_2 \omega^1 \omega^2 \,,$$

où

$$d^2 A_0 \equiv \varphi_1 A_3 + \varphi_2 A_4 \pmod{A_0 A_1 A_2} \,.$$

Ensuite, nous essaierons de trouver les surfaces sur lesquelles il existe des asymptotiques. Supposons donc que nous ayons

$$(2.6) \qquad \text{I.} \quad a_2 b_2 \neq 0 \,.$$

[1]) Par „réseau semi-conjugué" nous entendrons un réseau de courbes tel que les tangentes à une couche suivant une courbe de l'autre couche forment une surface développable; mais nous n'obtenons pas de surfaces développables en échangeant les deux couches. Dans ce cas-là, nous dirons que les courbes de la première couche sont conjuguées aux courbes de la seconde couche, mais non pas inversement. Tous les objets (surfaces réglées etc.) sont étudiés dans le développement dans l'espace local correspondant.

Si nous désignons par δ la différentielle selon les paramètres secondaires et que e_i^k soit la forme ω_i^k où les paramètres principaux sont fixés, nous obtenons les relations

$$\delta a_3 = a_3(2e_2^2 - e_0^0 - e_3^3 + (a_2/b_2)\, e_3^4)\,, \quad \delta b_1 = b_1(2e_1^1 - e_0^0 - e_4^4 + (b_2/a_2)\, e_4^3)\,.$$

Supposons maintenant que nous ayons

a) $a_3 = 0,\ b_1 \neq 0$.

Alors la courbe $\omega^1 = 0$ est une asymptotique sur la surface (A). En vertu de (2.2) et de nos suppositions nous trouvons qu'il existe sur la surface (A), à part de l'asymptotique, un et un seul réseau semi-conjugué. Cherchons à établir le degré de généralité de telle surface. Cette dernière est donnée par le système d'équations (1.4), (1.6) avec les conditions $a_1 = a_3 = b_3 = 0$. En différentiant extérieurement ces équations nous obtenons avec $(1.7_{1,2})$ les équations quadratiques

$$(2.7)\quad [\omega^1 b_1 \omega_4^3 - 2a_2\omega_1^2] + [\omega^2\, \mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + b_2\omega_4^3] + \\ + (.) = 0\,,$$

$$[\omega^1\, \mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + b_2\omega_4^3] - 2a_2[\omega^2\omega_2^1] + (.) = 0\,,$$

$$[\omega^1\, \mathrm{d}b_1 + b_1(\omega_0^0 + \omega_4^4 - 2\omega_1^1) - 2b_2\omega_1^2] + \\ + [\omega^2\, \mathrm{d}b_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) - b_1\omega_2^1 + a_2\omega_3^4] + (.) = 0\,,$$

$$[\omega^1\, \mathrm{d}b_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) - b_1\omega_2^1 + a_2\omega_3^4] - 2b_2[\omega^2\omega_2^1] + (.) = 0\,.$$

Ici, (.) remplace les termes qu'il n'est pas nécessaire d'écrire explicitement. Nous voyons immédiatement que le système donné est fermé et en involution. Sa solution dépend d'une fonction de deux variables. Nous obtenons évidemment le même résultat si nous supposons $a_3 \neq 0,\ b_1 = 0$. Soit ensuite

b) $a_3 = b_1 = 0$.

Les équations (2.2) pour les directions semi-conjuguées deviennent maintenant

$$(2.8)\quad m_2u_1(a_2 + h_1) + m_1u_2(a_2 - h_1) = 0\,,\quad m_2u_1(b_2 + h_2) + m_1u_2(b_2 - h_2) = 0\,.$$

Il est facile de montrer que les équations données sont en général indépendentes. En effet, on a

$$(2.9)\qquad \delta(a_2 \pm h_1) = (a_2 \pm h_1)(e_1^1 + e_2^2 - e_0^0 - e_3^3) - (b_2 \pm h_2)\, e_4^3\,,$$
$$\delta(b_2 \pm h_2) = (b_2 \pm h_2)(e_1^1 + e_2^2 - e_0^0 - e_4^4) - (a_2 \pm h_1)\, e_3^4\,.$$

Les formes asymptotiques sont maintenant

$$(2.10)\qquad \varphi_1 = 2a_2\omega^1\omega^2\,,\quad \varphi_2 = 2b_2\omega^1\omega^2\,.$$

Nous voyons donc que nous avons sur la surface deux couches de courbes asymptotiques, mais, bien entendu, la surface se trouve dans l'espace P_4 à connexion projective à quatre dimensions et ne peut être plongée dans un espace P_3 à connexion projective à trois dimensions. L'espace osculateur de la surface est un espace à quatre dimensions, comme cela découle des équations

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} dA_1 &= \{(a_2 + h_1) A_3 + (b_2 + h_2) A_4\}\, \omega^2 \quad (\operatorname{mod} A_0A_1A_2)\,, \\ dA_2 &= \{(a_2 - h_1) A_3 + (b_2 - h_2) A_4\}\, \omega^1 \quad (\operatorname{mod} A_0A_1A_2)\,. \end{aligned}$$

Les points $(a_2 + h_1) A_3 + (b_2 + h_2) A_4$; $(a_2 - h_1) A_3 + (b_2 - h_2) A_4$ sont en général indépendents, car on a

$$\delta(a_2h_2 - b_2h_1) = (a_2h_2 - b_2h_1)(2e_1^1 + 2e_2^2 - 2e_0^0 - e_3^3 - e_4^4)\,.$$

Une surface à deux couches d'asymptotiques est donnée par le système d'équations de Pfaff

$$(2.12)\qquad \begin{gathered} \omega^3 = \omega^4 = 0\,, \\ \omega_1^3 = (a_2 + h_1)\,\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = (a_2 - h_1)\,\omega^1\,, \quad \omega_1^4 = (b_2 + h_2)\,\omega^2\,, \\ \omega_2^4 = (b_2 - h_2)\,\omega^1\,. \end{gathered}$$

Par différentiation extérieure nous en obtenons selon $(1.7_{1,2})$

$$(2.13)\qquad \begin{gathered} -\,2a_2[\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2\, da_2 + a_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + b_2\omega_4^3] + (.) = 0\,, \\ [\omega^1\, da_2 + a_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + b_2\omega_4^3] - 2a_2[\omega^2\omega_2^1] + (.) = 0\,, \\ -\,2b_2[\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2\, db_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) + a_2\omega_3^4] + (.) = 0\,, \\ [\omega^1\, db_2 + b_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) + a_2\omega_3^4] - 2b_2[\omega^2\omega_2^1] + (.) = 0\,. \end{gathered}$$

Il est évident qu'il existe une solution et qu'elle depend de quatre fonctions d'une variables. Nous avons donc le résultat suivant:

Dans l'espace à quatre dimensions muni d'une connexion projective il existe une surface dépendant d'une fonction de deux variables et telle qu'il existe sur elle une couche de courbes asymptotiques et un réseau semi-conjugué. Une surface à deux couches de courbes asymptotiques qu'il n'est pas possible de plonger dans un espace à connexion projective à trois dimensions dépend de quatre fonctions d'une variable.

Si nous supposons seulement la spécialisation (2.3) du repère, nous pouvons poser de plus

$$(2.14)\qquad \text{II.}\quad a_2 = b_2 = 0\,.$$

Nous avons alors

$$(2.15)\qquad \begin{gathered} \omega_1^3 = h_1\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = -h_1\omega^1 + a_3\omega^2\,, \quad \omega_1^4 = b_1\omega^1 + h_2\omega^2\,, \\ \omega_2^4 = -h_2\omega^1\,. \end{gathered}$$

Dans la suite, nous écrivons tout simplement $a = a_3$, $b = b_1$. Les équations des directions conjuguées prennent la forme

$$(2.16)\qquad m_2u_1h_1 - m_1u_2h_1 - m_1u_1a = 0\,, \quad -m_2u_1h_2 + m_1u_2h_2 + m_2u_2b = 0\,.$$

Soit maintenant

a) $abh_1h_2 \neq 0$.

La résolution des équations (2.16) donne

$$(2.17)\qquad \left(\frac{u_1}{u_2}\right)_{1,2} = \frac{ab \pm [ab(ab + 4h_1h_2)]^{\frac{1}{2}}}{2ah_2}; \quad m_2u_2bh_1 - m_1u_1ah_2 = 0\,.$$

Il existe donc deux réseaux semi-conjugués sur une surface dans l'espace à quatre dimensions muni de connexion projective. Seulement si l'équation

$$(2.18)\qquad ab + 4h_1h_2 = 0$$

est vérifiée, nous n'avons qu'un réseau semi-conjugué. Nous savons que la dualisation de la surface (A) conduit à une congruence dans l'espace dual, donnée par les équations (1.9). Les surfaces développables de cette congruence sont données par l'équation $\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3 = 0$. Dans le cas général, cette congruence est non-parabolique. Mais si (2.18) a lieu, nous obtenons une congruence parabolique dont le système de surfaces développables est donné par l'équation

$$(2.19)\qquad \omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3 \equiv -(a/4)\, h_2(2h_2\omega^2 + b\omega^1)^2 = 0\,.$$

Nous voyons que les surfaces développables de la congruence parabolique correspondent, dans ce cas-là, à la deuxième couche du réseau semi-conjugué sur la surface par la correspondance naturelle qui existe entre la surface et la congruence réalisant sa dualisation. Dans le cas d'une surface à un seul réseau semi-conjugué la transformation de Laplace est réalisable dans un sens seulement. La première transformée de Laplace sera en général une surface à deux réseaux semi-conjugués; c'est ce que nous allons faire voir maintenant. Les droites joignant les paires de points correspondants sur la surface (A) et sur la première transformée de Laplace (B) forment une congruence L_1 qui est manifestement non-parabolique; l'espace à trois dimensions tangent à cette congruence suivant une de ses droites est, comme on le sait bien, formé par l'enveloppe linéaire du plan tangent à la surface (A) en le point A_0 et du plan osculateur de la courbe, passant par A_0, du premier système du réseau semi-conjugué. Cet espace, tangent à la congruence, est sous-espace de l'espace local à quatre dimensions appartenant au point A_0. Nous voilà donc en présence d'une variété de König généralisée P_{12}^4, maisavec la propriété qu'une surface focale (nous entendons par cela une variété P_{02}^4) est spéciale.

La variété générale P_{12}^4 peut être donnéé par les équattions (1.10). Or, supposons que nous avons déjà chnagé la base de façon à avoir (1.20). Pour que les courbes $m_1\, du + m_2\, dv = 0$ soient conjuguées aux courbes $n_1\, du + n_2\, dv = 0$ sur la surface focale (A_1), il faut et il suffit que, en vertu de la relation

$$d\{\lambda A_1 + m_1A_2 - m_2A_3\} \equiv (m_1\omega_2^4 - m_2\omega_3^4)\, A_4 + (m_1\omega_2^5 - m_2\omega_3^5)\, A_5 \pmod{A_1A_2A_3}$$

les équations

$$(2.20)\qquad m_1u_1 + m_2u_2a_{31}^4 - m_2u_1a_{32}^4 = 0\,, \quad -m_2(u_2a_{31}^5 - u_1a_{32}^5) = 0$$

soient vérifiées.

Nous obtenons des relations analogues pour les réseaux semi-conjugués sur la surface focale (A_2)

(2.21) $$m_2 u_2 - m_1 u_2 a_{41}^3 + m_1 u_1 a_{42}^3 = 0\,, \quad -m_1(u_2 a_{41}^5 - u_1 a_{42}^5) = 0\,.$$

Mais si nous demandons qu'il existe sur la surface focale (A_1) un et un seul réseau semi-conjugué, il faudra que l'on ait

(2.22) $$a_{31}^5 = 0\,.$$

L'équation

(2.23) $$a_{42}^5 = 0$$

exprime la condition pour que les deux réseaux semi-conjugués sur (A_2) coïncident. Or si nous tenons compte de (1.22), nous voyons que la transformée de Laplace d'une surface à un seul réseau semi-conjugué ne jouit pas nécessairement de cette propriété. Cette transformée de Laplace a en général deux réseaux semi-conjugués. En procédant à la dualisation d'une surface à un seul réseau semi-conjugué et de sa transformée de Laplace, nous obtenons donc en général une congruence parabolique et une congruence non-parabolique qui ont une surface focale commune (dualisation de la congruence L_1). Cette surface a une couche d'asymptotiques et un réseau semci-conjugué, elle existe et dépend d'une fonction de deux variables, comme nous le savons déjà.

Il existe donc une surface à un réseau semi-conjugué et elle dépend également d'une fonction de deux variables, à condition que sa première transformée de Laplace a deux réseaux semi-conjugués. Mais si la transformée de Laplace d'une surface à un seul réseau semi-conjugué a elle-aussi un seul réseau semi-conjugué, la surface initiale dépend de quatre fonctions d'une variable. La congruence qui a ces deux surfaces pour ses surfaces focales est donnée par les équations (2.22), (2.23), les équations du mouvement du repère étant (1.10), (1.20).

Ayons maintenant une surface générale à deux réseaux semi-conjugués distincts, et supposons $1 + 4h_1h_2 \neq 0$. Vu nos hypothèses et les équations (1.7) nous pouvons poser

(2.24) $$b_1 = a_3 = a_2 + h_1 = b_2 - h_2 = 0\,, \quad a_1 = b_3 = 1\,.$$

Nous pouvons donc écrire les équations (1.16) sous la forme

(2.25) $$\omega_1^2 = \omega^1\,, \quad \omega_2^3 = -2h_1\omega^1\,, \quad \omega_1^4 = 2h_2\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = \omega^2\,.$$

Avec cette spécialisation du repère, les surfaces développables de la congruence L, duale à la surface (A), sont données par l'équation $\omega^1\omega^2(1 + 4h_1h_2) = 0$. A présent, nous supposons, bien entendu, $1 + 4h_1h_2 \neq 0$. Dans le cas contraire, il ne serait pas possible de spécialiser le repère de façon à avoir (2.24). Par application du lemme de Cartan nous obtenons des équations (1.7)

$$(2.26)\qquad 2h_2\omega_4^3 - \omega_2^1 = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2\,,$$
$$\omega_0^0 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 + 2h_1\omega_1^2 = \lambda_3\omega^1 + (\lambda_1 + R_{112}^3 - R_{012}^1)\,\omega^2\,,$$
$$2h_1\omega_2^1 + \omega_4^3 = (\lambda_2 - 2r_2 - R_{212}^3 - 2h_1R_{012}^1)\,\omega^1 + \lambda_4\omega^2\,,$$
$$-\,2h_1\omega_3^4 - \omega_1^2 = \mu_1\omega^1 + \mu_2\omega^2\,,$$
$$\omega_0^0 + \omega_4^4 - 2\omega_2^2 - 2h_2\omega_2^1 = (\mu_2 - R_{212}^4 + R_{012}^2)\,\omega^1 + \mu_3\omega^2\,,$$
$$-\,2h_2\omega_1^2 + \omega_3^4 = \mu_4\omega^1 + (R_{112}^4 - 2h_2R_{012}^2 + 2s_1 + \mu_1)\,\omega^2\,,$$
$$\mathrm{d}h_1 + h_1(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) + h_2\omega_4^3 = r_1\omega^1 + r_2\omega^2\,,$$
$$\mathrm{d}h_2 + h_2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_4^4) + h_1\omega_3^4 = s_1\omega^1 + s_2\omega^2\,.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(2.27)\qquad (1 + 4h_1h_2)\,\omega_4^3 = (\lambda_2 - 2r_2 - R_{212}^3 - 2h_1R_{012}^1 + 2h_1\lambda_1)\,\omega^1 + \\ + (\lambda_4 + 2\lambda_2h_1)\,\omega^2\,,$$
$$(1 + 4h_1h_2)\,\omega_2^1 = \{(\lambda_2 - 2r_2 - R_{212}^3 - 2h_1R_{012}^1)\,2h_2 - \lambda_1\}\,\omega^1 + \\ + (2h_2\lambda_4 - \lambda_2)\,\omega^2\,,$$
$$(1 + 4h_1h_2)\,\omega_3^4 = (\mu_3 - 2h_2\mu_1)\,\omega^1 + (R_{112}^4 - 2h_2R_{012}^2 + 2s_1 + \mu_1 - \\ - 2h_2\mu_2)\,\omega^2\,,$$
$$(1 + 4h_1h_2)\,\omega_1^2 = -(\mu_1 + 2h_1\mu_3)\,\omega^1 - \{\mu_2 + 2h_1(R_{112}^4 - 2h_2R_{012}^2 + \\ + 2s_1 + \mu_1)\}\,\omega^2$$

et pour simplifier

$$(2.28)\qquad \omega_4^3 = K_1\omega^1 + K_2\omega^2\,,\quad \omega_2^1 = K_3\omega^1 + K_4\omega^2\,,\quad \omega_3^4 = L_1\omega^1 + L_2\omega^2\,,\\ \omega_1^2 = L_3\omega^1 + L_4\omega^2\,.$$

Par différentiation extérieure, nous obtenons des équations quadratiques d'où il résulte:

$$(2.29)\qquad \begin{aligned} \delta K_1 &= K_1(e_1^1 + e_4^4 - e_0^0 - e_3^3) + e_4^1 - 2h_1e_4^2\,,\\ \delta K_2 &= K_2(e_2^2 + e_4^4 - e_0^0 - e_3^3)\,,\\ \delta K_3 &= K_3(e_2^2 - e_0^0) + e_2^0 + 2h_1e_3^1\,,\\ \delta K_4 &= K_3(2e_2^2 - e_0^0 - e_1^1) - e_4^1\,,\\ \delta L_1 &= L_1(e_1^1 + e_3^3 - e_0^0 - e_4^4)\,,\\ \delta L_2 &= L_2(e_2^2 + e_3^3 - e_0^0 - e_4^4) + 2h_2e_3^1 + e_3^2\,,\\ \delta L_3 &= L_3(2e_1^1 - e_0^0 - e_2^2) - e_3^2\,,\\ \delta L_4 &= L_4(e_1^1 - e_0^0) + e_1^0 - 2h_2e_4^2\,. \end{aligned}$$

Nous voyons qu'il est possible de poser

$$(2.30)\qquad K_1 = K_3 - L_2 = L_4 = 0\,.$$

Nous avons évidemment aussi

$$\delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\,\omega^1\,, \quad \delta\omega^2 = (e_0^0 - e_2^2)\,\omega^2\,. \tag{2.31}$$

Nous voyons donc que les formes suivantes sont invariantes:

$$\varphi_1 = K_2\frac{(\omega^2)^3}{(\omega^1)^2}\,, \quad \varphi_2 = L_1\frac{(\omega^1)^3}{(\omega^2)^2}\,, \tag{2.32}$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{L_1(\omega^1)^5 + K_2(\omega^2)^5}{(\omega^1\omega^2)^3}\,, \quad \psi = \frac{h_1(\omega^1)^2 + h_2(\omega^2)^2}{\omega^1\omega^2}\,,$$

$$L_1 = \frac{\mu_3 - 2h_2\mu_1}{1 + 4h_1h_2}\,, \quad K_2 = \frac{\lambda_4 + 2\lambda_2h_1}{1 + 4h_1h_2}\,.$$

La forme invariante φ sera appelée élément linéaire projectif de la congruence à connexion projective dans l'espace à connexion projective à quatre dimensions.

Cherchons maintenant la signification géométrique des formes invariantes (2.32). Soient données deux surfaces, (A) et $(\bar{A})$, dans l'espace à connexion projective à quatre dimensions. Sur la surface (A) spécialisons le repère de façon à avoir (2.24), (2.30), (1.4); le repère sur la surface $(\bar{A})$ soit spécialisé d'un manière analogue. Les surfaces (A), $(\bar{A})$ soient en correspondance

$$\omega^1 = \bar{\omega}^1\,, \quad \omega^2 = \bar{\omega}^2\,. \tag{2.33}$$

Dans cette correspondance, les deuxièmes couches des réseaux semi-conjugués des deux surfaces, et donc aussi les surfaces développables des congruences L et $\bar{L}$, duales aux surfaces (A) et $(\bar{A})$, se correspondent. Soit donnée une homographie H entre les espaces locaux en des points correspondants:

$$HA_\alpha = \alpha_\alpha^\beta \bar{A}_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4)\,. \tag{2.34}$$

En passant aux repères duals nous obtenons de (2.34) l'homographie

$$HE^\alpha = \beta_\beta^\alpha \bar{E}^\beta\,, \tag{2.35}$$

où α, β sont liés par les relations correspondantes. Si nous demandons que les foyers des congruences L, $\bar{L}$ se correspondent par l'homographie H, nous aurons

$$HE^4 = \beta_4^4\bar{E}^4\,, \quad HE^3 = \beta_3^3\bar{E}_3\,. \tag{2.36}$$

Nous appellerons homographie fondamentale de la première, ou de la deuxième espèce respectivement, une homographie (2.35) *qui réalise un contact du premier ordre des courbes* $\kappa_1 : \omega^1 = 0$ *sur* (E^4) *et* $\bar{\kappa}_1 : \bar{\omega}^1 = 0$ *sur* $(\bar{E}^4)$, *ou respectivement, des courbes* $\kappa_2 : \omega^2 = 0$ *sur* (E^3) *et* $\bar{\kappa}_2 : \bar{\omega}^2 = 0$ *sur* $(\bar{E}^3)$. *Nous appellerons homographie fondamentale tout court une homographie fondamentale de la première espèce qui est en même temps une homographie fondamentale de la deuxième espèce.*

Les courbes κ_1, $\bar{\kappa}_1$, κ_2, $\bar{\kappa}_2$ sont précisément les courbes sur les surfaces focales dont les tangentes n'appartiennent pas aux congruences L ou $\bar{L}$ resp. Cherchons maintenant les conditions pour que H soit une homographie fondamentale de la première espèce. Il est évident que l'équation suivante doit être vérifiée (nous supposons $\omega^1 = 0$)

$$H\,\mathrm{d}E^4 = \varrho\,\mathrm{d}\bar{E}^4 + (.)\,\bar{E}^4\,, \quad \varrho = \beta_4^4\,. \tag{2.37}$$

Nous obtenons donc les conditions sous la forme

$$\begin{gathered}\beta_3^2 + 2h_2\beta_3^1 = 0\,, \quad \beta_2^2 + 2h_2\beta_2^1 = \varrho\,, \quad \beta_1^2 + 2h_2\beta_1^1 = 2\bar{h}_2\varrho\,, \\ \beta_0^2 + 2h_2\beta_0^1 = 0\,.\end{gathered} \tag{2.38}$$

D'une manière analogue, en tenant compte de l'équation $H\,\mathrm{d}E^3 = \sigma\,\mathrm{d}\bar{E}^3 + (.)\,\bar{E}^3$, $\sigma = \beta_3^3$, nous avons

$$\begin{gathered}\beta_4^1 - 2h_1\beta_4^2 = 0\,, \quad -2h_1\beta_2^2 + \beta_2^1 = -2\bar{h}_1\sigma\,, \quad -2h_1\beta_1^2 + \beta_1^1 = \sigma\,, \\ \beta_0^1 - 2h_1\beta_0^2 = 0\,,\end{gathered} \tag{2.39}$$

ce qui sont les conditions pour que H soit une homographie fondamentale de la deuxième espèce.

Si nous demandons de plus que H soit non seulement une homographie fondamentale, mais qu'elle réalise aussi un contact du premier ordre des surfaces focales (E_4), $(\bar{E}_4)$ et (E_3), $(\bar{E}_3)$ des congruences L et $\bar{L}$, nous obtenons les conditions

$$\bar{K}_2 = K_2\varrho\sigma^{-1}\,, \quad \bar{L}_1 = L_1\sigma\varrho^{-1}\,. \tag{2.40}$$

Au lieu de ($2.34_{1,2,3,}$) nous pouvons écrire à présent

$$\begin{aligned} HA_0 &= (\beta_1^1\beta_2^2 - \beta_2^1\beta_1^2)\,\varrho\sigma\bar{A}_0\,, \\ HA_1 &= (\beta_2^0\beta_1^2 - \beta_1^0\beta_2^2)\,\varrho\sigma\bar{A}_0 + \beta_0^0\beta_2^2\varrho\sigma\bar{A}_1 - \beta_0^0\beta_1^2\varrho\sigma\bar{A}_2\,, \\ HA_2 &= (\beta_1^0\beta_2^1 - \beta_2^0\beta_1^1)\,\varrho\sigma\bar{A}_0 - \beta_0^0\beta_2^1\varrho\sigma\bar{A}_1 + \beta_0^0\beta_1^1\varrho\sigma\bar{A}_2\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Nous allons demander maintenant que l'homographie H réalise un contact du premier ordre des surfaces (A) et $(\bar{A})$. Pour cela, il faut et il suffit, que les conditions

$$\alpha_0^0 = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 1\,, \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^1 = 0\,, \tag{2.42}$$

soient vérifiées. Si nous nous rendos compte de ce que $[\bar{E}^0\bar{E}^1\bar{E}^2\bar{E}^3\bar{E}^4] = 1$, nous pouvons écrire, au lieu des équations (2.31), (2.39) et (2.42),

$$\begin{gathered}\beta_0^0 = \beta_1^1 = \beta_2^2 = \beta_3^3 = \beta_4^4 = 1\,, \quad \beta_0^1 = \beta_2^1 = \beta_0^2 = \beta_1^2 = 0\,, \\ \beta_4^1 - 2h_1\beta_4^2 = 0\,, \quad \beta_3^2 + 2h_2\beta_3^1 = 0\,, \quad h_2 = \bar{h}_2\,, \quad h_1 = \bar{h}_1\,.\end{gathered} \tag{2.43}$$

Les conditions (2.40) deviennent alors

$$K_2 = \bar{K}_2\,, \quad L_1 = \bar{L}_1 \tag{2.44}$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Soit donnée une paire de surfaces (A), $(\bar{A})$, à deux réseaux semi-conjugués chacune, dans l'espace à quatre dimensions muni d'une connexion projective. Soient L, $\bar{L}$ les congruences duales aux surfaces (A), $(\bar{A})$. Supposons que les congruences L, $\bar{L}$ soient en correspondance développable C; cela détermine une correspondance C entre les surfaces (A), $(\bar{A})$ qui fait correspondre les deuxièmes couches de courbes des *réseaux semi-conjugués sur les surfaces. Supposons qu'il existe une homographie fondamentale H entre les espaces locaux en les points correspondants telle que sa dualisation réalise un contact du premier ordre des surfaces* (A) *et* $(\bar{A})$. *Alors sur les deux surfaces, les formes invariantes* ψ *se correspondent. Par contre, l'égalité des formes* ψ *sur les surfaces* (A), $(\bar{A})$ *garantit l'existence d'une correspondance du type donné. On voit que c'est une correspondance semi-conjuguée* (qui fait correspondre l'un à l'autre les deux réseaux semi-conjugués).

On peut voir que la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des formes ψ *et* φ_1, *ou* φ_2 *respectivement, sur les surfaces* (A), $(\bar{A})$ *est l'existence d'une homographie fondamentale qui réalise un contact du premier ordre des surfaces* (A) *et* $(\bar{A})$ *et en même temps des surfaces* (E^3) *et* $(\bar{E}^3)$, *ou resp.* (E^4) *et* $(\bar{E}^4)$. *Donc:*

Pour que les formes ψ, φ *sur les surfaces* (A), $(\bar{A})$ *soient égales, l'homographie fondamentale doit réaliser en même temps un contact du premier ordre et des surfaces* (A), $(\bar{A})$ *et des surfaces focales des congruences* L, $\bar{L}$, *et réciproquement.* La condition d'égalité de ψ sur les surfaces (A) et $(\bar{A})$ est équivalente à l'exsitence d'une correspondance semi-conjuguée; cela découle de considérations analogues à celles que nous avons faites ci-dessus.

Revenons maintenant à une telle spécialisation du repère, que les équations (2.3), (2.14) soient vérifiées de nouveau. Soit de plus

b) $a = 0$, $bh_1h_2 \neq 0$ ou bien $b = 0$, $ah_1h_2 \neq 0$. Dans ce cas-là, nous obtenons une surface sur laquelle il y a une seule couche de courbes asymptotiques. Les cas de $a = h_2 = 0$, $bh_1 \neq 0$ ou $b = h_1 = 0$, $ah_2 \neq 0$ sont analogues.

Si nous supposons que nous ayons

c) $h_1 = 0$, $abh_2 \neq 0$, les équations des directions conjuguées seront

$$m_1u_1a_3 = 0\,, \quad m_2u_2b_1 - h_2m_2u_1 - m_1u_2h_2 = 0\,. \tag{2.45}$$

Dans ce cas-là, la première couche de courbes d'un réseau semi-conjugué est en même temps la deuxième couche de l'autre réseau semi-conjugué. Il en est de même dans le cas où l'on a $h_2 = 0$, $abh_1 \neq 0$.

d) $h_1 = h_2 = 0$, $ab \neq 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un seul réseau semi-conjugué.* Dans ce cas-là, nous parlerons d'une *surface sans torsion.* Si l'on a ensuite

e) $h_1 = a = 0$, $bh_2 \neq 0$, ou bien $h_2 = b = 0$, $ah_1 \neq 0$, il existe sur la surface une seule couche d'asymptotiques, mais ∞^1 de réseaux semi-conjugués. Toute tangente à la surface en un point considéré peut être considéré comme tangente à la première couche de courbes du réseau semi-conjugué (la deuxième couche existe toujours).

f) $h_1 = h_2 = a = 0$, $b \neq 0$, ou bien $h_1 = h_2 = b = 0$, $a \neq 0$, sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la couche de courbes asymptotiques sur la surface soit également la première (deuxième) couche du réseau semi-conjugué dont la deuxième (première) couche est tout à fait arbitraire. Si $a = b = 0$, la surface peut être plongée dans un espace à connexion projective à trois dimensions.

Littérature

[1] *E. Cartan*: Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris 1937.

[2] *M. Kimpara*: Sur les surfaces plongées dans un espace à connexion projective à quatre dimensions. Tensor, *10*, 1 (1960), 61–72.

[3] *A. Švec*: Congruences de droites à connexion projective. Annales Polon. Mathem. *8* (1960), 291–322.

[4] *A. Švec*: Congruences de droites dans les espaces projectifs à dimension paire. Czechoslovak Math. Journal *8* (1958), 274–283.

[5] *A. Švec*: L'application des variétés à connexions à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czechoslovak Math. Journal *10* (1960), 523–550.

Резюме

ПОЛУСОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ НА ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

БОГУМИЛ ЦЕНКЛЬ (Bohumil Cenkl), Прага

Изучение поверхностей с полусопряженной сетью в четырехмерном пространстве с проективной связностью P_4 (т. е. с такой сетью кривых на поверхности, что касательные к кривым одного, т. наз. первого слоя кривых, вдоль кривой второго слоя образуют развертывающуюся поверхность) в сущности равносильно изучению прямолинейных конгруэнций в этом пространстве, подобно тому, как в проективном пространстве P_4 сопряженные сети и прямолинейные конгруэнции [4]. Оказывается, что можно найти несколько типов поверхностей с полусопряженной сетью или с асимптотическими линиями в P_4:

1. Поверхности с двумя различными полусопряженными сетями (общий случай).

2. Поверхности с одной полусопряженной сетью — они зависят от одной функции двух переменных.

3. Поверхности с одним слоем асимптотических линий и одной полусопряженной сетью — они зависят от одной функции двух переменных.

4. Поверхности с двумя слоями асимптотических линий — они зависят от четырех функций одного переменного.

5. Параболические поверхности с одним слоем асимптотических.

6. Поверхности, на которых первый слой кривых одной полусопряженной сети является одновременно вторым слоем второй полусопряженной сети.

7. Поверхности с одним слоем асимптотических и с ∞^1 полусопряженных сетей, в предположении $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. $k_1 = k_2 = 0$ является необходимым и до-

статочным условием для того, чтобы на поверхности имелась лишь одна полусопряженная сеть.

8. Асимптотический слой кривых на поверхности является первым (вторым) слоем полусопряженной сети, в то время как второй (первый) слой совершенно произволен.

На поверхностях 1-го типа найдены инвариантные формы (2.32), и толкуется их геометрический смысл при помощи дуализации поверхностей (прямолинейных конгруэнций). Показана связь указанных поверхностей с фокальными поверхностями их дуализации.