András Ádám; Karel Čulík; György Pollák

Ein Satz über teilweise gerichtete Graphen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 619–621

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100592`

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

EIN SATZ ÜBER TEILWEISE GERICHTETE GRAPHEN

A. ÁDÁM, Szeged, K. ČULÍK, Praha und G. POLLÁK, Szeged

(Eingegangen am 20. Dezember 1962)

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, wann ein teilweise gerichteter Graph einen starken Homomorphismus gestattet.

Eine Menge Γ, in der eine binäre irreflexive Relation $\varrho(x, y)$ definiert ist, heißt ein *teilweise gerichteter Graph*. Die Elemente von Γ heißen die *Punkte* des Graphen. Um die späteren Betrachtungen zu vereinfachen, führen wir die weitere Relation $\sigma(x, y) = \varrho(x, y) \& \varrho(y, x)$ ein.

Hat der (teilweise gerichtete) Graph G eine mehr-eindeutige Abbildung $x \to x'$ auf den Graphen G', so daß

$$\sigma(x, y) \Leftrightarrow x' = y' \qquad (x \neq y)\,,$$
$$\varrho(x, y) \& \bar{\varrho}(y, x) \Rightarrow \varrho(x', y') \& \bar{\varrho}(y', x')\,,$$
$$\bar{\varrho}(x, y) \& \bar{\varrho}(y, x) \Rightarrow \bar{\varrho}(x', y') \& \bar{\varrho}(y', x')$$

gilt, so sagen wir, daß diese Abbildung ein *starker Homomorphismus* ist. (In der zweiten Formel kommt notwendigerweise die Äquivalenz vor. Die Umkehrung der dritten Formel ist auch gültig, wenn x' und y' verschieden sind.) Jeder Graph gestattet wesentlich höchstens einen starken Homomorphismus.

Satz. *Ein teilweise gerichteter Graph G gestattet dann und nur dann einen starken Homomorphismus, wenn die folgenden Bedingungen* α), β) *für jedes Tripel x, y, z verschiedener Punkte erfüllt sind:*

$$\alpha)\ \sigma(x, y) \& \varrho(x, z) \Rightarrow \varrho(y, z)\,, \quad \beta)\ \sigma(x, y) \& \varrho(z, x) \Rightarrow \varrho(z, y)\,.$$

Beweis. Es sei angenommen, daß G einen starken Homomophismus gestattet, und seien ferner die Prämissa von α) gültig. x' und y' stimmen überein. Wir sondern zwei Fälle danach ab, ob $\varrho(z, x)$ gilt oder nicht. Wenn es gilt, so ist auch $\sigma(x, z)$ erfüllt, so daß $x' = z'$ gelten muß; daraus folgt $\sigma(y, z)$. Gilt $\varrho(z, x)$ nicht, so ist $\varrho(y', z')$ wahr und $\varrho(z', y')$ falsch (wegen der Übereinstimmung von x' und y'). Dies impliziert $\varrho(y, z)$.

Seien nun die Prämissa von β) wahr. Es genügt den Fall zu betrachten, daß $\varrho(x, z)$ nicht gilt. Da $\varrho(z', y')$ wahr und $\varrho(y', z')$ falsch ist, muß $\varrho(z, y)$ gelten.

Umgekehrt, sei G ein Graph, der die Eigenschaften α) und β) besitzt. Wir zeigen zuerst, daß die Relation σ im folgenden Sinne transitiv ist: wenn die verschiedenen Punkte a, b, c den Relationen $\sigma(a, b)$ und $\sigma(b, c)$ genügen, so wird auch $\sigma(a, c)$ erfüllt. Tatsächlich, die Anwendung von α) bzw. β) für b, a, c als x, y, z (der Reihe nach) versichert die Gültigkeit von $\varrho(a, c)$ bzw. $\varrho(c, a)$.

Sei ein Graph G' durch die folgende Vorschrift definiert:

1) Es gibt eine wohlbestimmte Abbildung $x \to x'$ von Γ auf die Punktmenge von G', und zwar $x' = y'$ $(x \neq y)$ gelte genau im Falle $\sigma(x, y)$,

2) $\varrho(x', y')$ $(x' \neq y')$ gilt genau dann, wenn es zwei Punkte x_0, y_0 von G gibt, so daß $x_0' = x'$ und $y_0' = y'$ ist, und ferner $\varrho(x_0, y_0)$ gilt.

Die erste der Eigenschaften, durch die die starken Homomorphismen definiert wurden, ist trivial erfüllt. Wir werden nun beweisen, daß die folgenden Behauptungen gelten:

(I) *sind x' und y' zwei verschiedene Punkte von G', so gilt höchstens eine von $\varrho(x', y')$ und $\varrho(y', x')$*,

(II) *gilt $\varrho(x', y')$ und sind x, y beliebige inverse Bilder von x', y' (der Reihe nach), so ist auch $\varrho(x, y)$ wahr.*

(I) und (II) versichern — wie man einsehen kann — daß die betrachtete Abbildung jede Eigenschaft besitzt, durch die die starken Homomorphismen definieren.

Um (I) zu beweisen, sei es angenommen, daß $\varrho(x', y') = \varrho(y', x') = \uparrow$ für irgendein Punktpaar von G'. Es gibt Punkte x_1, x_2, y_1, y_2 von G, die $x_1 \to x'$, $x_2 \to x'$, $y_1 \to y'$, $y_2 \to y'$, $\varrho(x_1, y_1)$, $\varrho(y_2, x_2)$ erfüllen. Da $\sigma(x_1, x_2)$ gilt, α) versichert $\varrho(x_2, y_1)$; $\varrho(y_1, x_2)$ folgt ähnlicherweise aus $\sigma(y_1, y_2)$ und β). So ergibt sich $\sigma(x_2, y_1)$ im Gegensatz mit $x' \neq y'$.

Seien x, y, x_1, y_1 derartige Punkte, daß $x \to x', x_1 \to x', y \to y', y_1 \to y', x' \neq y'$, $\varrho(x_1, y_1)$ gelten. Durch die Anwendung von α) ergibt sich $\varrho(x, y_1)$, und davon $\varrho(x, y)$ durch β).

Bemerkung. Man kann leicht weitere Begriffe des teilweise gerichteten Faktorgraphen und des einfachen teilweise gerichteten Graphen einführen und zugehörige Sätze ähnlicherweise wie bei K. Čulík: Zur Theorie der Graphen. Čas. pro pěst. mat. *83* (1958), 133—155, ableiten.

Резюме

ОДНА ТЕОРЕМА О ЧАСТИЧНО ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

А. АДАМ (A. Ádám), Сегед; К. ЧУЛИК (K. Čulík), Прага; Г. ПОЛЛАК (G. Pollák), Сегед

Частично ориентированным графом разумеется множество Γ, на котором определено иррефлексивное бинарное отношение $\varrho(x; y)$. Отображение $x \to x'$ частично ориентированного графа G на G' называется сильным гомоморфизмом, если:

1) $$\varrho(x, y) \,\&\, \varrho(y, x) \Leftrightarrow x' = y'(x \neq y)\,,$$

2) $$\varrho(x, y) \,\&\, \bar{\varrho}(y, x) \Rightarrow \varrho(x', y') \,\&\, \bar{\varrho}(y', x')\,,$$

3) $$\bar{\varrho}(x, y) \,\&\, \bar{\varrho}(y, x) \Rightarrow \bar{\varrho}(x', y') \,\&\, \bar{\varrho}(y', x')\,.$$

Частично ориентированный граф допускает сильный гомоморфизм именно тогда, когда для каждой тройки x, y, z отличных друг от друга вершин имеют место следующие соотношения:

α) $$\varrho(x, y) \,\&\, \varrho(y, x) \,\&\, \varrho(x, z) \Rightarrow \varrho(y, z)\,,$$

β) $$\varrho(x, y) \,\&\, \varrho(y, x) \,\&\, \varrho(z, x) \Rightarrow \varrho(z, y)\,.$$