Czechoslovak Mathematical Journal

Marius Ion Stoka

Sur les correspondances entre des espaces projectifs à connexion projective linéaire

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 622–631

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100593

SUR LES CORRESPONDANCES ENTRE DES ESPACES PROJECTIFS À CONNEXION PROJECTIVE LINÉAIRE

MARIUS I. STOKA, Bucarest

(Reçu le 19 janvier 1963)

On détermine les formes euxquelles nous pouvous réduire le tenseur Π^i_{jk} de M. G. Vrănceanu d'une correspondance entre deux plans dans le cas où ses composantes sont des fonctions linéaires des coordonnées.

Admettons deux plans projectifs $P_2(x, y)$ et $E_2(u^1, u^2)$ entre lesquels nous avons la correspondance définie par

$$u^i = u^i(x, y)\,, \quad (i = 1, 2)\,. \tag{1}$$

Les directions caractéristiques de la correspondance (1) sont fournies par l'équation

$$\Pi^1_{22}\,\mathrm{d}y^3 + 3\Pi^1_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + 3\Pi^1_{11}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y - \Pi^2_{11}\,\mathrm{d}x^3 = 0 \tag{2}$$

où Π^i_{jk} est le tenseur projectif de l'espace P_2 fourni par les formules

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{\delta^i_j}{3}\Gamma_k - \frac{\delta^i_k}{3}\Gamma_j\,, \quad (i, j, k = 1, 2)$$

Γ^i_{jk} étant la connexion affine de l'espace P_2, et $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$.

La correspondance (1) est de la première, de la deuxième ou de la troisième espèce selon que l'équation (2) a des racines distinctes, une racine double ou une racine triple [1].

Le professeur G. VRĂNCEANU a démontré que la correspondance (1) est de la première, de la deuxième, ou de la troisième espèce selon que la forme quadratique

$$\Psi = \Pi_{11}\,\mathrm{d}x^2 + 2\Pi_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \Pi_{22}\,\mathrm{d}y^2 \quad (\Pi_{ij} = \Pi^s_{ri}\Pi^r_{sj})$$

est non-dégénérée, dégénérée, ou identique nulle [2].[1])

Il a démontré également que le tenseur Π^i_{jk} peut être considéré comme associé à la correspondance (1) si [3][2])

$$\begin{aligned} d_{y^2} - 2c_{xy} - b_{x^2} - 2da_x + 3cb_x - ad_x + 3(c^2 + bd)\,y &= 0\,, \\ a_{x^2} - 2b_{xy} - c_{y^2} - 2ad_y + 3bc_y - a_yd + 3(b^2 + ac)\,x &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

où $a = \Pi^1_{22}$, $b = \Pi^1_{12}$, $c = -\Pi^1_{11}$, $d = \Pi^2_{11}$.

---

[1]) Page 154. [2]) Page 131.

Dans le cas du tenseur Π^i_{jk} constant, le prof. G. Vrănceanu a démontré [4][3]) que nous pouvons réduire ce tenseur à l'une des formes

$$1)\quad \Pi^1_{12} = 1,\ \Pi^2_{11} = \pm 1; \qquad 2)\quad \Pi^1_{12} = 1\,; \qquad 3)\quad \Pi^2_{11} = 1\,,$$

les composantes non écrites étant nulles. Dans le premier cas, la correspondance est de la première espèce, dans le deuxième cas de la deuxième espèce et dans le troisième de la troisième espèce.

Dans cette étude nous determinons les formes auxquelles nous pouvons réduire le tenseur Π^i_{jk} dans le cas où ses composantes sont des fonctions linéaires de variables x et y.

Par conséquent, nous considérons le tenseur Π^i_{jk} fourni par les formules

$$(4)\qquad a = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1\,, \quad b = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2\,, \quad c = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3\,,$$
$$d = \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma\,,$$

où α_i, β_i, γ_i sont constantes et $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$ pour au moins une valeur de j $(j=1, 2, 3, 4)$ car, dans le cas contraire, le tenseur Π^i_{jk} serait constant.

Si $\beta_1 \neq 0$, par le changement de variables $\bar{x} = \beta_1^2 x$, $\bar{y} = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$, nous pouvons obtenir $\Pi^1_{22} = y$, c'est à dire $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, $\beta_1 = 1$.

Si $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$, par un changement de variables $\bar{x} = \alpha_1 x + \gamma_1$, $\bar{y} = \sqrt{(|\alpha_1|)}\, y$, nous pouvons obtenir $\alpha_1 = \pm 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$.

Si $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, par un changement de variables nous pouvons obtenir $\Pi^1_{22} = \eta$ $(\eta = 0{,}1)$, c'est à dire $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = \eta$.

Nous avons donc à considèrer les cinq cas suivants:

[1]: $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0\,;$

[2]: $\alpha_1 = \beta_1 = 0\,, \quad \gamma_1 = 1\,;$

[3]: $\alpha_1 = 1\,, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0\,;$

[4]: $\alpha_1 = -1\,, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 0\,;$

[5]: $\alpha_1 = \gamma_1 = 0\,, \quad \beta_1 = 1\,.$

Dans le cas [1], en procédant comme ci-dessus nous avons les sous-cas suivants:

[1.1]: $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0\,;$

[1.2]: $\alpha_2 = \beta_2 = 0\,, \quad \gamma_2 = 1\,;$

[1.3]: $\alpha_2 = 1\,, \quad \beta_2 = \gamma_2 = 0\,;$

[1.4]: $\alpha_2 = \gamma_2 = 0\,, \quad \beta_2 = 1\,;$

[1.5]: $\alpha_2 = \gamma_2 = 0\,, \quad \beta_2 = -1\,.$

---

[3]) Page 499.

Dans le cas [1.1] nous avons les sous-cas

[1.1.1]: $\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0\,;$

[1.1.2]: $\alpha_3 = \beta_3 = 0\,,\quad \gamma_3 = 1\,;$

[1.1.3]: $\alpha_3 = 1\,,\quad \beta_3 = \gamma_3 = 0\,;$

[1.1.4]: $\alpha_3 = -1\,,\quad \beta_3 = \gamma_3 = 0\,;$

[1.1.5]: $\alpha_3 = \gamma_3 = 0\,,\quad \beta_3 = 1\,.$

Finalement, dans le cas [1.1.1] nous avons les sous-cas

[1.1.1.1]: $\alpha_4 = 1\,,\quad \beta_4 = \gamma_4 = 0\,;$

[1.1.1.2]: $\alpha_4 = \gamma_4 = 0\,,\quad \beta_4 = 1\,;$

[1.1.1.3]: $\alpha_4 = \gamma_4 = 0\,,\quad \beta_4 = -1\,.$

Par le changement de variables $\bar{x} = y$, $\bar{y} = -x$, la connexion $\Pi^2_{11} = y$, donc la connexion du cas [1.1.1.2], est transformée en connexion de la troisième espèce

[I'_3]: $$\Pi^1_{22} = x\,.$$

Par le changement de variables $\bar{x} = y$, $\bar{y} = -x$, la connexion $\Pi^2_{11} = -y$, donc la connexion du cas [1.1.1.3], est transformée dans la même connexion [I'_3].

Par le changement de variables $\bar{x} = y$, $\bar{y} = x$, la connexion $\Pi^2_{11} = x$, donc la connexion du cas [1.1.1.1], est transformée dans la connexion de la troisième espèce

[II_3]: $$\Pi^1_{22} = y\,.$$

Donc, *dans le cas* [1.1.1], *la connexion* Π^i_{jk} *est réduite à l'une des formes* [I'_3], [II_3].

Dans le cas [1.1.5], *le système* (3) *n'est pas vérifié.*

Dans le cas [1.1.4], *le système* (3) *est vérifié identiquement.*

Si $\beta_4 \neq 0$, $\alpha_4 = 0$, par le changement de variables $\bar{x} = \beta_4 y + \gamma_4$, $\bar{y} = x$, nous obtenons la connexion de la deuxième espèce

[II'_2]: $$\Pi^1_{22} = \lambda x\,,\quad \Pi^1_{12} = -\,\Pi^2_{22} = -\,y\,,\quad (\lambda \neq 0)\,.$$

Si $\alpha_4 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0, 3$, par la transformation

$$\bar{x} = \frac{\beta_4}{3(\beta_4 - 3)}\,x + \frac{\beta_4}{3\alpha_4}\,y + \frac{\gamma_4}{3\alpha_4}\,,\quad \bar{y} = x\,,$$

nous obtenons la même connexion [I'_2].

Si $\alpha_4 \neq 0$, $\beta_4 = 3$, par la transformation

$$\bar{x} = \frac{1}{3\alpha_4}(\alpha_4 x + 3y + \gamma_4)\,,\quad \bar{y} = x\,,$$

nous obtenons la connexion

$[\mathrm{II}_2']$: $$\Pi^1_{22} = 3x + y\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -y\,.$$

Si $\alpha_4 \neq 0$, $\beta_4 = 0$, par un changement de variables $\bar{x} = \alpha_4^{-1}\, y$, $\bar{y} = x$, nous obtenons la connexion

$[\mathrm{III}_2']$: $$\Pi^1_{22} = y + \lambda\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -y\,.$$

Si $\alpha_4 = \beta_4 = 0$, par un changement de variables nous obtenons la connexion

$[\mathrm{IV}_2']$: $$\Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -y\,,$$

ou la connexion $[\mathrm{I}_2']$ avec $\lambda = 0$.

Dans le cas [1.1.3], nous obtenons, d'une manière analogue, les connexions

$[\mathrm{I}_2'']$: $$\Pi^1_{22} = \lambda x\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,,$$

$[\mathrm{II}_2'']$: $$\Pi^1_{22} = -3x + y\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,,$$

$[\mathrm{III}_2'']$: $$\Pi^1_{22} = y + \lambda\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,,$$

$[\mathrm{IV}_2'']$: $$\Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,.$$

Dans le cas [1.1.2], si $\alpha_4 = 0$, il résulte que $\beta_4 \neq 0$ et par le changement de variables $\bar{x} = \beta_4 y + \gamma_4$, $\bar{y} = x$, nous obtenons la connexion

$[\mathrm{V}_2]$: $$\Pi^1_{22} = \lambda x\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = 1\,, \qquad (\lambda \neq 0)\,.$$

Si $\beta_4 = 0$, il résulte $\alpha_4 \neq 0$ et par le changement de variables $\bar{x} = \alpha_4^{-1} y$, $\bar{y} = x + \alpha_4^{-1}\gamma_4$, nous obtenons la connexion

$[\mathrm{VI}_2]$: $$\Pi^1_{22} = y\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = 1\,.$$

Si $\alpha_4 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0$, par un changement de variables nous obtenons la connexion $[\mathrm{V}_2]$.

Donc, *dans le cas* [1.1], *la connexion* Π^i_{jk} *est réduite à l'une des formes* $[\mathrm{I}_3']$, $[\mathrm{II}_3]$, $[\mathrm{I}_2']$, …, $[\mathrm{VI}_2]$.

Nous considérons maintenant le cas [1.2]. Dans ce cas le système (3) nous fournit $\beta_3 = \beta_4 = 0$. Donc, la connexion Π^i_{jk} s'écrit

$$\Pi^1_{22} = 0\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = 1\,, \quad -\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \alpha_3 x + \gamma_3\,, \quad \Pi^2_{11} = \alpha_4 x + \gamma_4\,.$$

Si $\alpha_3 = 0$, il résulte $\alpha_4 \neq 0$, et par le changement de variables

$$\bar{x} = -y\,, \quad \bar{y} = -\sqrt[3]{(\alpha_4)}\, x - \frac{\gamma_4}{\sqrt[3]{(\alpha_4^2)}}$$

nous obtenons la connexion de la première espèce

$[\mathrm{I}_1]$: $$\Pi^1_{22} = y\,, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \lambda\,.$$

Si $\alpha_4 = 0$, il résulte $\alpha_3 \neq 0$ et par le changement de variables nous obtenons la connexion

$[\mathrm{II}_1]$: $$\Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \pm\, y\,,$$

si $\gamma_4 = 0$, et la connexion

$$[\mathrm{III}_1]: \quad \Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \lambda\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \pm y\,, \qquad (\lambda \neq 0)\,,$$

si $\gamma_4 \neq 0$.

Si $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$, par un changement de variables

$$\bar{x} = -y\,, \quad \bar{y} = -\frac{\sqrt[3]{(\alpha_4)}}{\alpha_3}(\alpha_3 x + \gamma_3)\,,$$

nous obtenons la connexion

$$[\mathrm{IV}_1]: \quad \Pi^1_{22} = y + \lambda\,, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \mu y\,, \qquad (\mu \neq 0)\,.$$

Dans le cas [1.3], le système (3) n'est pas vérifié.

Dans le cas [1.4], le système (3) nous fournit $\beta_3 = 0$, $\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0$. Donc, la connexion Π^i_{jk} s'écrit

$$\Pi^1_{22} = \Pi^2_{11} = 0\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,, \quad -\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \alpha_3 x + \gamma_3\,.$$

Si $\alpha_3 = 0$, par un changement de variables nous obtenons la connexion $[\mathrm{II}_1]$ ou la connexion $[\mathrm{IV}''_2]$ ayant $\varepsilon = 0$.

Si $\alpha_3 \neq 0$, par le changement de variables

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{(|\alpha_3|)}}(\alpha_3 x + \gamma_3)\,, \quad \bar{y} = y\,,$$

nous obtenons la connexion

$$[\mathrm{V}_1]: \qquad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \pm x\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = y\,.$$

Dans le cas [1.5], nous obtenons les mêmes connexions.

Donc, *dans le cas* [1], *la connexion* Π^i_{jk} *est réduite à l'une des formes* $[\mathrm{I}'_3]$, $[\mathrm{II}_3]$, $[\mathrm{I}_2], \ldots, [\mathrm{IV}_2]$, $[\mathrm{I}_1], \ldots, [\mathrm{V}_1]$.

Dans le cas [2], le système (3) nous fournit

$$\begin{gathered} \alpha_2(2\alpha_2 + \beta_3) = 0\,, \quad \beta_2(2\alpha_2 + \beta_3) = 0\,, \quad 3\alpha_3 - 2\beta_4 + 3\gamma_2(\beta_3 + 2\alpha_2) = 0\,, \\ \alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\beta_3 + \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 = 0\,, \quad \alpha_2\beta_3 + 2\beta_3^2 + 2\beta_2\beta_4 = 0\,, \\ -\alpha_4 + 3\alpha_2\gamma_3 + 6\beta_3\gamma_3 + 3\beta_4\gamma_2 + 3\beta_2\gamma_4 = 0\,. \end{gathered}$$

Ce système admet les solutions

$$\alpha_2 = \beta_2 = \beta_3 = 0\,, \quad \alpha_4 = -\frac{9\alpha_3\gamma_2}{2}\,, \quad \beta_4 = \frac{3\alpha_3}{2}$$

et

$$\alpha_3 = -\frac{2\alpha_2}{\beta_2}\,, \quad \beta_3 = -2\alpha_2\,, \quad \alpha_4 = -\frac{3\alpha_2^3}{\beta_2^2}\,, \quad \beta_4 = -\frac{3\alpha_2^2}{\beta_2}\,,$$

$$\gamma_4 = \frac{3\alpha_2\beta_2^2\gamma_3 + 3\alpha_2^2\beta_2\gamma_2 - \alpha_2^3}{\beta_2^3}\,, \qquad (\beta_2 \neq 0)\,.$$

Dans le premier cas, la connexion Π^i_{jk} est

$$\Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \gamma_2\,, \quad -\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = \alpha_3 x + \gamma_3\,,$$

$$\Pi^2_{11} = -\frac{9\alpha_3\gamma_2}{2}\,x + \frac{3\alpha_3}{2}\,y + \gamma_4\,.$$

Il en résulte que $\alpha_3 \neq 0$.

Si $\gamma_2 = 0$, par le changement de variables

$$\bar{x} = \sqrt{(|\alpha_3|)}\,x + \frac{\gamma_3\sqrt{(|\alpha_3|)}}{\alpha_3}\,, \quad \bar{y} = \frac{\alpha_3}{\sqrt[4]{(|\alpha_3|^3)}}\,y + \frac{2\gamma_4}{3\sqrt[4]{(|\alpha_3|^3)}}\,,$$

nous obtenons la connexion

$[\mathrm{VI}_1]$: $$\Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \pm\, x\,, \quad \Pi^2_{11} = \pm\,\tfrac{3}{2}y\,.$$

Si $\gamma_2 \neq 0$, par le changement de variables

$$\bar{x} = \frac{16\gamma_2^2}{\alpha_3}\,(\alpha_3 x + \gamma_3)\,, \quad \bar{y} = \frac{8\gamma_2}{3\alpha_3}\left(-\frac{9\alpha_3\gamma_2}{2}\,x + \frac{3\alpha_3}{2}\,y + \gamma_4\right),$$

nous obtenons la connexion

$[\mathrm{VII}_1]$: $$\Pi^1_{22} = \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -\lambda x + \frac{15}{16}\,,$$

$$\Pi^2_{11} = \frac{9\lambda}{2}\,x + \frac{3\lambda}{2}\,y + \frac{27}{32}\,.$$

Dans le deuxième cas, la connexion Π^i_{jk} est

$$\Pi^1_{22} = 1\,, \quad \Pi^1_{22} = -\Pi^2_{22} = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2\,,$$

$$-\Pi^1_{11} = \Pi^2_{21} = -\frac{2\alpha_2}{\beta_2}\,(\alpha_2 x + \beta_2 y) + \gamma_3\,,$$

$$\Pi^2_{11} = -\frac{3\alpha_2^2}{\beta_2^2}\,(\alpha_2 x + \beta_2 y) + \frac{3\alpha_2^2\beta_2\gamma_2 + 3\alpha_2\beta_2^2\gamma_3 - \alpha_2^3}{\beta_2^3}\,, \qquad (\beta_2 \neq 0)\,.$$

Si $\alpha_2 = 0$, par le changement de variables

$$\bar{x} = |\beta_2|\,x\,, \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{(|\beta_2|)}}\,(\beta_2 y + \gamma_2)$$

nous obtenons la connexion $[\mathrm{IV}_2]$ avec $\varepsilon = 1$ si $\gamma_3 = 0$, et la connexion $[\mathrm{III}_1]$ si $\gamma_3 \neq 0$.

Si $\alpha \neq 0$, par le changement de variables

$$\bar{x} = |\beta_2|\,x\,, \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{(|\beta_2|)}}\,(\alpha_2 x + \beta_2 y) + \frac{\beta_2\gamma_2 - \alpha_2}{\beta_2\sqrt{(|\beta_2|)}}\,,$$

nous obtenons la connexion $[\mathrm{IV}_2]$ ayant $\varepsilon = 1$ ou $[\mathrm{III}_1]$.

Dans le cas [3], le système (3) devient

$$3\alpha_2(2\alpha_2+\beta_3)+2(3\alpha_3-\beta_4)=0\,,\quad \beta_2(2\alpha_2+\beta_3)+\beta_3=0\,,$$
$$\gamma_2(2\alpha_2+\beta_3)+\gamma_3=0\,,\quad \alpha_4(\beta_2-1)+\alpha_3(\alpha_2+2\beta_3)+\alpha_2\beta_4=0\,,$$
$$2\beta_4(3\beta_2-1)+3\beta_3(\alpha_2+2\beta_3)=0\,,\quad \gamma_4(3\beta_2-2)+3\gamma_3(\alpha_2+2\beta_3)+3\beta_4\gamma_2=0\,.$$

Ce système admet les solutions

1°. $\alpha_2=\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=\beta_4=\gamma_4=0,\ \beta_2=1;$

2°. $\alpha_2=\beta_3=\gamma_3=\alpha_4=0,\ \beta_2=\frac{1}{3},\ \beta_4=3\alpha_3,\ \gamma_4=9\alpha_3\gamma_2;$

3°. $\alpha_2=\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=\alpha_4=\beta_4=0,\ \beta_2=\frac{2}{3};$

4°. $\alpha_2=\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=\alpha_4=\beta_4=\gamma_4=0,\ \beta_2\neq 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};$

5°. $\alpha_2=-2\beta_3\neq 0,\ \beta_2=\frac{1}{3},\ \gamma_2=\dfrac{\gamma_3}{3\beta_3},\ \alpha_4=-9\beta_3(\alpha_3+3\beta_3^2),$

$\beta_4=3(\alpha_3+3\beta_3^2),\ \gamma_4=\dfrac{3\gamma_3(\alpha_3+3\beta_3^2)}{\beta_3}\,;$

6°. $\alpha_2=-\beta_3\neq 0,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=\dfrac{\gamma_3}{\beta_3},\ \alpha_3=-\dfrac{3\beta_3^2}{4},\ \beta_4=-\dfrac{3\beta_3^2}{4},\ \gamma_4=-\dfrac{3\beta_3\gamma_3}{4}\,;$

7°. $\alpha_2=-\frac{5}{4}\beta_3\neq 0,\ \beta_2=\frac{2}{3},\ \gamma_2=\dfrac{2\gamma_3}{3\beta_3},\ \alpha_3=-\frac{21}{16}\beta_3^2,\ \alpha_4=\frac{81}{64}\beta_3^3,\ \beta_4=-\frac{9}{8}\beta_3^2;$

8°. $\alpha_2\neq-\frac{1}{2}\beta_3,\ -2\beta_3,\ -\beta_3,\ \frac{5}{4}\beta_3,\qquad \beta_2=-\dfrac{\beta_3}{2\alpha_2+\beta_3},\ \gamma_2=-\dfrac{\gamma_3}{2\alpha_2+\beta_3},$

$\alpha_3=\dfrac{\beta_3^2-4\alpha_2^2}{4},\ \alpha_4=-\dfrac{(\alpha_2-\beta_3)(2\alpha_2+\beta_3)^2}{4},\ \beta_4=\dfrac{3\beta_3(2\alpha_2+\beta_3)}{4},$

$\gamma_4=\dfrac{3\gamma_3(2\alpha_2+\beta_3)}{4}\,.$

Dans le cas 1°, la connexion Π^i_{jk} est réduite à la connexion [I''_2] avec $\lambda=1$, ou à la connexion

[VIII'_1]: $\qquad \Pi^1_{22}=\Pi^2_{11}=x\,,\quad \Pi^1_{12}=-\Pi^2_{22}=y\,.$

Dans le cas 2°, nous obtenons la connexion [I''_2] avec $\lambda=3$, ou la connexion

[IX'_1]: $\Pi^1_{22}=3x,\ \Pi^1_{12}=-\Pi^2_{22}=y,\ \Pi^1_{11}=-\Pi^2_{21}=\pm x,\ \Pi^2_{11}=\pm 3y\,.$

Dans le cas 3°, nous obtenons la connexion [I''_2] avec $\lambda=\frac{3}{2}$

[X'_1]: $\qquad \Pi^1_{22}=\frac{3}{2}x\,,\quad \Pi^1_{12}=-\Pi^2_{22}=y\,,\quad \Pi^2_{11}=1\,.$

Dans le cas 4°, la connexion Π^i_{jk} est réduite à l'une des connexions [I'_3], [V_2] avec $\lambda=1$, [I''_2] ayant $\lambda=1$.

Dans le cas 5°, la connexion Π^i_{jk} est réduite à

$$[\mathrm{XI}'_1]:\quad \Pi^1_{22} = 3x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x + y,\quad \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -\frac{\lambda}{3}x + \tfrac{1}{2}y,$$

$$\Pi^2_{11} = \frac{4\lambda + 3}{8}(x + 2y)\,.$$

Dans le cas 6°, nous obtenons la connexion

$$[\mathrm{XII}'_1]:\quad \Pi^1_{22} = x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x + y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -\tfrac{3}{4}x + y,$$
$$\Pi^2_{11} = \lambda x - \tfrac{3}{4}y\,.$$

Dans le cas 7°, nous obtenons la connexion

$$[\mathrm{XIII}'_1]:\quad \Pi^1_{22} = x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x + \tfrac{2}{3}y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \tfrac{21}{25}x + \tfrac{4}{5}y,$$
$$\Pi^2_{11} = -\tfrac{81}{125}x - \tfrac{18}{25}y + \lambda\,.$$

Dans le cas 8°, nous obtenons la connexion $[\mathrm{I}_3]$, $[\mathrm{V}_2]$ ou

$$[\mathrm{XIV}'_1]:\quad \Pi^1_{22} = x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \lambda x - \frac{1}{2\lambda + 1}y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \frac{1 - 4\lambda^2}{4}x + y,$$

$$\Pi^2_{11} = \frac{(1 - \lambda)(2\lambda + 1)^2}{4}x + \frac{3(2\lambda + 1)}{4}y \quad (\lambda \neq -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{4}, -1, -2)\,.$$

Dans le cas [4], nous obtenons la connexion $[\mathrm{I}_2]$, $[\mathrm{V}_2]$ et

$$[\mathrm{I}''_3]:\quad \Pi^1_{22} = -x,$$

$$[\mathrm{VIII}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = \Pi^2_{11} = -x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -y,$$

$$[\mathrm{IX}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -3x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \pm x,\ \Pi^2_{11} = \pm 3y,$$

$$[\mathrm{X}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -\tfrac{3}{2}x,\ \Pi^1_{22} = -\Pi^2_{22} = -y,\ \Pi^2_{11} = 1,$$

$$[\mathrm{XI}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -3x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x - y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \frac{\lambda}{3}x + \frac{y}{2},$$
$$\Pi^2_{11} = \frac{4\lambda + 3}{8}(3 + 2y),$$

$$[\mathrm{XII}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x - y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -\tfrac{3}{4}x + y,$$
$$\Pi^2_{11} = \lambda x - \tfrac{3}{4}y,$$

$$[\mathrm{XIII}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x - \tfrac{2}{3}y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -\tfrac{21}{25}x + \tfrac{4}{5}y,$$
$$\Pi^2_{11} = -\tfrac{81}{125}x + \tfrac{18}{25}y + \lambda,$$

$$[\mathrm{XIV}''_1]:\quad \Pi^1_{22} = -x,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \lambda x + \frac{1}{2\lambda + 1}y,$$
$$\Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \frac{1 - 4\lambda^2}{4}x - y,$$
$$\Pi^2_{11} = \frac{(1 - \lambda)(2\lambda + 1)^2}{4}x - \frac{3(2\lambda + 1)}{4}y \quad (\lambda \neq -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{4}, -1, -2)\,.$$

Dans le cas [5], nous obtenons les connexions [II_3], [VI_2], [I_1], [III_2''], [IV_1] et

[XV_1]: $\Pi^1_{22} = y,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{12} = \pm x,\ \Pi^2_{11} = \pm y,$

[XVI_1]: $\Pi^1_{22} = \pm y,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = -y,\ \Pi^2_{11} = \pm 9x,$

[$XVII_1$]: $\Pi^1_{22} = \pm y,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = x,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \lambda x + y,$
$\Pi^2_{11} = \pm 3x - \lambda y,$

[$XVIII_1$]: $\Pi^1_{22} = y,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \pm x + \lambda,\ \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \pm\lambda x - y,$
$\Pi^2_{11} = 9x,$

[XIX_1]: $\Pi^1_{22} = y, \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = -6x \pm y, \Pi^1_{11} = -\Pi^2_{21} = \pm 6x - 3y + \lambda,$
$\Pi^2_{11} = 162x \pm 27y,$

[XX_1]: $\Pi^1_{22} = y,\ \Pi^1_{12} = -\Pi^2_{22} = \dfrac{1}{\lambda(1-\lambda)}\,x \pm y,\ \Pi^1_{11} = \pm 2\lambda^2(1-\lambda)\,x - \lambda\,.$
$.\,(\lambda - 2)\,y,\ \Pi^2_{11} = (\lambda - 1)\,x \pm \lambda^2(2\lambda - 3)\,y,\ (\lambda \neq 0, 1, \tfrac{3}{2}).$

Nous avons donc le théorème:

Si les composantes du tenseur Π^i_{jk} sont fonctions linéaires de variables x at y, celui-ci est réduit, par des changements de variables, à l'une des formes [I_3], [II_3], [I_2]–[VI_2], [I_1]–[XX_1]. *La correspondance entre les plans P_2 et E_2 est, dans les deux premiers cas de la troisième espèce, dans les six cas suivants de la deuxième espèce et dans les vingt derniers cas de la première espèce.*

Bibliographie

[1] *O. Borůvka:* Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. Publ. Fac. Sc. Brno, *85*, 1926.

[2] *G. Vrănceanu:* Transformazioni puntuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessioní affine euclidea. Bol. Un. Mat. It., *12*, Nr. 1, 1957.

[3] *G. Vrănceanu:* Lecţii de Geometrie Diferenţială, vol. *III*. Bul, 1960.

[4] *G. Vrănceanu:* Sul tensore associato ad una corrispondenza tra spazi proiettivi. Bol. Un. Mat. It., *12*, Nr. 4, 1957.

Резюме

О СООТВЕТСТВИЯХ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ С ЛИНЕЙНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

МАРИУС И. СТОКА (Marius I. Stoka), Бухарест

Если заданы две проективные плоскости $P_2(x, y)$ и $A_2(u^1, u^2)$, между которыми имеется соответствие

(1) $$u^i = u^i(x, y)\,, \quad i = 1, 2,$$

то характеристические направления соответствия (1) даны уравнением

$$(2) \qquad \Pi^1_{22}\,\mathrm{d}y^3 + 3\Pi^1_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + 3\Pi^1_{11}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y - \Pi^2_{11}\,\mathrm{d}x^3 = 0\,,$$

где Π — проективный тензор пространства.

Согласно теории О. Борувки соответствие (1) является соответствием первого, второго или третьего рода смотря по тому, если уравнение (2) имеет различные корни, один двухкратный корень или только один трехкратный корень.

Г. Врончеану нашел условия, которым должны удовлетворять компоненты Π^i_{jk} проективного тензора, чтобы они определяли соответствие (1).

На основании этих результатов в статье выведены формулы, к которым сводится тензор Π^i_{jk} в случае, когда его компоненты являются линейными функциями от переменных x, y.