Czechoslovak Mathematical Journal

Jiří Kopáček

Решение задачи Коши для линейных гиперболических уравнений методом конечных разностей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 52–78

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100601

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ИРЖИ КОПАЧЕК (Jiří Kopáček), Прага

(Поступило в редакцию 13/II 1962 г.)

В работе доказана с помощью разностного разделяющего оператора (ср. [1]) устойчивость двух разностных схем для линейных гиперболических уравнений любого порядка и получено существование решения задачи Коши для таких уравнений методом конечных разностей.

Л. Гординг получил в работе [1] существование решения задачи Коши для уравнения (1.1), доказав два априорных неравенства (энергетическое и дуальное) для решений этого уравнения. При этом он использовал разделяющий оператор, введенный Ж. Лере [2]. В данной работе решение задачи Коши для уравнения (1.1) получается методом конечных разностей, причем не используется дуальное неравенство. Для двух разностных схем (явной и неявной), апроксимирующих уравнение (1.1), строится разностный разделяющий оператор. С помощью него и некоторых формул преобразования для разностных отношений, аналогичных формулам интегрирования по частям для производных, доказывается энергетическое неравенство для разностных отношений решений этих схем. Это неравенство означает устойчивость данных схем. Оно обеспечивает сходимость их решений к решению задачи Коши для (1.1).

Результаты этой работы были без доказательств опубликованы в [6]. Квазилинейные уравнения и линейные системы будут тем же методом рассмотрены в следующей работе автора.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Московского Государственного Университета О. А. Олейник, под руководством которой выполнена эта работа.

1. Обозначения и определения. Пусть $\{x\} = \{x_0, x'\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — $n + 1$-мерное пространство, Ω — область в n-мерном пространстве $\{x'\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, определенная неравенствами $0 \leqq x_i \leqq 2\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $Q_T \equiv \{0 \leqq x_0 \leqq T,\ x' \in \Omega\}$ область в пространстве $\{x\}$. $Q_{T\delta} \equiv \{-\delta \leqq x_0 \leqq T,\ x' \in \Omega\}$. Пусть $\mathrm{D}_i \equiv \partial/\partial x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $\alpha = \{\alpha_0, \alpha'\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $|\alpha| = \sum_0^n \alpha_i$, — неотрицательные целые числа, $\mathrm{D}^\alpha \equiv \mathrm{D}_0^{\alpha_0}\mathrm{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n}$. Все рассматриваемые функции предполагаются периодическими по x' с периодом 2π и принимающими лишь действительные значения.

В области Q_T ищется периодическое по x' решение уравнения

$$(1.1)\qquad a(x, \mathrm{D})\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leqq m+1} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha u = f(x)\,,$$

удовлетворящее условиям

$$(2.1)\qquad \mathrm{D}_0^i u/_{x_0 = 0, x' \in \Omega} = \varphi_i(x')\,, \quad i = 0, 1, \dots, m\,,$$

где $a(x, \mathrm{D})$ – нормальный гиперболический оператор в Q_T, т.е. $a_{m+1, 0, \dots, 0} \equiv 1$, и уравнение $a_0(x, \lambda, \xi') = 0$ имеет при всех действительных $\xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, удовлетворяющих условию $\sum_1^n \xi_i^2 \neq 0$, и всех $x \in Q_T$ $m + 1$ различных действительных корней $\lambda_1(x, \xi')$, $\lambda_2(x, \xi')$, …, $\lambda_{m+1}(x, \xi)$, где $a_0(x, \mathrm{D}) \equiv \sum_{|\alpha| = m+1} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha$ – – главная часть оператора $a(x, \mathrm{D})$. Будем предполагать, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ удовлетворяют в Q_T условию Липшица по $x_0, x_1, \dots, x_n$ для $|\alpha| = m + 1$ и условию Липшица по $x_1, x_2, \dots, x_n$ для $|\alpha| \leqq m$ и ограничены. Разделяющим оператором (см. [1]) называется оператор

$$b(x, \mathrm{D}) \equiv \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \mathrm{D}_0} a_0(x, \mathrm{D})\,.$$

В пространстве $\{x\}$ построим сетку с шагами $\Delta x_0 = \tau$, $\Delta x_i = h$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ такими, что $T = M_\Delta \tau$, $2\pi = N_\Delta h$, M_Δ, N_Δ – натуральные числа. Пусть $\kappa = \tau/h$. Множество точек $x' = k'h \in \{x'\}$, где $k' = \{k_1, \dots, k_n\}$ – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqq k_i \leqq N_\Delta - 1$, обозначим Ω_Δ. Пусть u – функция, определенная в узлах сетки. Тогда через u_Δ обозначим функцию, определенную равенствами

$$u_\Delta(x) = u(k_0\tau, k_1 h, \dots, k_n h) \quad \text{для} \quad k_0\tau \leqq x_0 < (k_0 + 1)\, \tau\,,$$

$k_i h \leqq x_i < (k_i + 1)\, h$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Далее обозначим $\overset{\pm i}{u} = u(x_0, \dots, x_i \pm \pm \Delta x_i, \dots, x_n)$,

$$J_1 u = \tfrac{1}{2}(\overset{+0}{u} + u)\,, \quad J_2 u = \tfrac{1}{2}(\overset{+0}{u} + \overset{-0}{u})\,, \quad \hat{\Delta}_i u = u_{x_i} = \frac{1}{\Delta x_i}(\overset{+i}{u} - u)\,,$$

$$\hat{\Delta}^\alpha = \hat{\Delta}_0^{\alpha_0} \hat{\Delta}_1^{\alpha_1} \dots \hat{\Delta}_n^{\alpha_\nu}\,,$$

$$\Delta_i' u = u_{\bar{x}_i} = \frac{1}{\Delta x_i}(u - \overset{-i}{u})\,, \quad \Delta_i u = \tfrac{1}{2}(u_{x_i} + u_{\bar{x}_i})\,, \quad i = 0, 1, \dots, n\,,$$

$$\Delta^\alpha \equiv \Delta_0^{\alpha_0} \Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_n^{\alpha_n}\,,$$

$$\bar{\Delta}_0 u = u_{x_0}\,, \quad \bar{\Delta}_i u = J_1(\Delta_i u)\,(i = 1, 2, \dots, n)\,, \quad \bar{\Delta}^\alpha \equiv \bar{\Delta}_0^{\alpha_0} \bar{\Delta}_1^{\alpha_1} \dots \bar{\Delta}_n^{\alpha_n}\,,$$

$$[u]_{x_0 = p\tau}^{x_0 = r\tau} = u(r\tau, x') - u(p\tau, x')\,.$$

Пусть C^∞ – множество бесконечно дифференцируемых функций в полосе $0 \leqq x_0 \leqq T$, периодических по x' с периодом 2π, $C^{k,j}$ – множество функций u, имеющих непрерывные, периодические по x' с периодом 2π производные $\mathrm{D}^\alpha u$ с $|\alpha| \leqq k + j$, $\alpha_0 \leqq k$ в полосе $0 \leqq x_0 \leqq T$, $H^{k,j}(Q_T)$ – гильбертово пространство, получаемое замыканием C^∞ по норме

$$\left(\int_{Q_T} \sum_{\substack{|\alpha| \leqq k+j \\ \alpha_0 \leqq k}} |\mathrm{D}^\alpha u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}, \quad H^{k,0} \equiv H^k .$$

2. Формулы „интегрования“ по частям. Выведем некоторые формулы для разностных отношений, которые нам понадобятся для получения энергетического неравенства. При выводе этих формул будем пользоваться следующими тремя тождествами, которые проверяются непосредственно. Пусть v, w – – функции, заданные на нашей сетке. Тогда

$$(2.1) \qquad (vw)_{x_i} = wv_{x_i} + \overset{+i}{(vw_{\bar{x}_i})} = v_{x_i}w + \overset{+i}{v}\, w_{x_i} ,$$

$$(2.2) \qquad (vw)_{\bar{x}_i} = v_{\bar{x}_i}w + \overset{-i}{(vw_{x_i})} = v_{\bar{x}_i}w + \overset{-i}{v}\, w_{\bar{x}_i} ,$$

$$(2.3) \qquad \Delta_i(vw) = \Delta_i v w + \tfrac{1}{2}[\overset{+i}{(vw_{\bar{x}_i})} + \overset{-i}{(vw_{x_i})}] =$$

$$= \Delta_i v w + \tfrac{1}{2}(\overset{+i}{v}\, w_{x_i} + \overset{-i}{v}\, w_{\bar{x}_i}) = \Delta_i v\, \overset{+i}{w} + \Delta_i w\, \overset{-i}{v} .$$

Из (2.3) вытекает

$$(2.4) \qquad \tfrac{1}{2}[vw + \overset{-0}{(vw)}]_{x_0} = \Delta_0 v\, J_2 w + \Delta_0 w\, J_2 v ,$$

так как $\frac{1}{2}[vw + \overset{-0}{(vw)}]_{x_0} = \Delta(vw) = \frac{1}{2}\Delta_i v(\overset{+0}{w} + \overset{-0}{w}) + \frac{1}{2}\Delta_i w(\overset{+0}{v} + \overset{-0}{v})$. Пусть v, w – периодические по x' с периодом 2π функции на сетке. Тогда

$$(2.5) \qquad \sum_{\Omega_\Delta} \Delta_i v w = - \sum_{\Omega_\Delta} \Delta_i w v , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Для доказательства рассмотрим очевидное тождество $0 = \sum_{\Omega_\Delta} (vw)_{x_i}$.

$$0 = \sum_{\Omega_\Delta} (vw)_{x_i} = \tfrac{1}{2} \sum_{\Omega_\Delta} \{v_{x_i}w + \overset{+i}{(w_{\bar{x}_i}v)} + w_{x_i}v + \overset{+i}{(v_{\bar{x}_i}w)}\} ,$$

в силу периодичности

$$0 = \tfrac{1}{2} \sum_{\Omega_\Delta} \{v_{x_i}w + w_{\bar{x}_i}v + w_{x_i}v + v_{\bar{x}_i}w\} = \sum_{\Omega_\Delta} \{v\, \Delta_i w + w\, \Delta_i v\} .$$

Для тех же v, w, i и $k_0 = 2, 3, \ldots, M_\Delta$ справедлива формула

$$\sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_i v J_2 w = -\sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_i w J_2 v - \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{-0}{w}\,\Delta_i v + \overset{-0}{v}\,\Delta_i w\big)\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau}. \tag{2.6}$$

Здесь суммирование $\sum\limits_{1}^{k_0-1}$ означает суммирование по всем слоям $x_0 = s\tau$ с $s = 1, 2, \ldots, k_0 - 1$ и $\sum\limits_{\Omega_\Delta}$ означает суммирование по всем точкам x таким, что $x' \in \Omega_\Delta$ и $x_0 = k_0\tau$ фиксировано. Имеем, очевидно,

$$0 = \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{v}\,w\big)_{x_i} + \big(\overset{+0}{w}\,v\big)_{x_i} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big\{\sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{v}\,w_{x_i} + \overset{+0}{v}_{\bar{x}_i}w + w\,\overset{+0}{v}_{x_i} + \overset{+0}{v}\,w_{x_i} + \overset{+0}{w}\,v_{x_i} + \overset{+0}{w}_{\bar{x}_i}v + \overset{+0}{w}_{x_i}v + \overset{+0}{w}\,v_{\bar{x}_i}\big)\Big\} =$$

$$= \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{v}\,\Delta_i w + \overset{+0}{w}\,\Delta_i v\big) + \sum_{2}^{k_0}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{-0}{w}\,\Delta_i v + \overset{-0}{v}\,\Delta_i w\big) =$$

$$= 2\sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\Delta_i w\, J_2 v + \Delta_i v\, J_2 w\big) + \Big[\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{-0}{w}\,\Delta_i v + \overset{-0}{v}\,\Delta_i w\big)\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau}.$$

Пусть теперь ψ и χ периодические по x' функции, удовлетворяющие условию Липшица. Нам надо научиться преобразовывать выражения вида

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\, J_2(\chi w), \quad \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_i v J_2(\chi w), \tag{2.7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k_0 = 2, 3, \ldots, M_\Delta.$$

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\, J_2(\chi w) = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_0(\psi v)\, J_2(\chi w) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta} J_2(\chi w)\big(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0}\big) =$$

$$= -\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_0(\chi w)\, J_2(\psi v) + \tfrac{1}{2}\Big[h^n \sum_{\Omega_\Delta}\big\{\psi\chi v w + (\psi\,\overset{-0}{\chi}\,v w)\big\}\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0}\big) J_2(\chi w) =$$

$$= -\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_0 w\, J_2(\psi v) - \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{w}\,\chi_{x_0} + \overset{-0}{w}\,\chi_{\bar{x}_0}\big) J_2(\psi v) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\Big[h^n \sum_{\Omega_\Delta}\big\{\psi\chi v w + (\psi\,\overset{-0}{\chi}\,v w)\big\}\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau} - \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\big(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0}\big) J(\psi w) \quad \text{т.е.}$$

$$(2.8)\qquad \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\,J_2(\chi w) = \tfrac{1}{2}\Big[h^n \sum_{\Omega_\Delta}\{\psi\chi v w + (\psi\,\overset{-0}{\chi}\,wv)\}\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau} -$$

$$- \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_0 w\,J_2(\psi v) - \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{(\overset{+0}{w}\,\chi_{x_0} + \overset{-0}{w}\,\chi_{\bar{x}_0})\,J_2(\psi v) +$$

$$+ (\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0})\,J_2(\chi w)\}\,.$$

Далее имеем

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_0 v\,J_2(\psi v) = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\chi\,\Delta_0 v\,J_2 v +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_0 v\{\overset{+0}{v}(\overset{+0}{\psi} - \psi) + \overset{-0}{v}(\overset{-0}{\psi} - \psi)\} =$$

$$= \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\,J_2(\chi v) - \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\{\overset{+0}{v}(\overset{+0}{\chi} - \chi) + \overset{-0}{v}(\overset{-0}{\chi} - \chi)\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_0 v\{\overset{+0}{v}(\overset{+0}{\psi} - \psi) + \overset{-0}{v}(\overset{-0}{\psi} - \psi)\} = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\,J_2(\chi v) +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{\chi(\overset{+0}{v} - \overset{-0}{v})(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0}) - \psi(\overset{+0}{v} - \overset{-0}{v})(\overset{+0}{v}\,\chi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\chi_{\bar{x}_0})\}\,.$$

Отсюда и из (2.8), записанного для $v = w$, имеем

$$(2.9)\qquad \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_0 v\,J_2(\chi v) = \tfrac{1}{4}\Big[h^n \sum_{\Omega_\Delta}\{\psi\chi v^2 + (\psi\,\overset{-0}{\chi}\,v^2)\}\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau} -$$

$$- \tfrac{1}{4}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{(\overset{+0}{v}\,\chi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\chi_{\bar{x}_0})\,J(\psi v) + (\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} + \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0})\,J_2(\chi v)\} +$$

$$+ \tfrac{1}{8}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{\psi(\overset{+0}{v}\,\chi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\chi_{\bar{x}_0}) - \chi(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0})\}(\overset{+0}{v} - \overset{-0}{v})\,.$$

Займемся теперь вторым выражением (2.7).

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\,\Delta_i v\,J_2(\chi w) = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_i(\psi v)\,J_2(\chi w) -$$

$$- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}(\overset{+i}{v}\,\psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\psi_{\bar{x}_i})\,J_2(\psi w) = -\,\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\Delta_i(\chi w)\,J_2(\psi v) -$$

$$- \frac{K}{4}\Big[h^n \sum_{\Omega_\Delta}(\overset{-0}{\chi}\,w)\{(\overset{+0}{\psi}\,v) - (\overset{-i}{\psi}\,v)\} + (\overset{-0}{\psi}\,v)\{(\overset{+i}{\chi w}) - (\overset{-i}{\chi w})\}\Big]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}(\overset{+i}{v}\,\psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\psi_{\bar{x}_i})\,J_2(\chi w) = -\,\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\,\Delta_i w\,J_2(\psi v) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{(\overset{+i}{w}\,\chi_{x_i} + \overset{-i}{w}\,\chi_{\bar{x}_i})\, J_2(\psi v) + (\overset{+i}{v}\,\psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\psi_{\bar{x}_i})\, J_2(\chi w)\} -$$

$$-\frac{\kappa}{4}\,[h^n \sum_{\Omega_\Delta} \overset{-0}{(\chi w)}\,\{\overset{+i}{(\psi v)} - \overset{-i}{(\psi v)}\} + \overset{-0}{(\psi v)}\,\{\overset{+i}{(\chi w)} - \overset{-i}{(\chi w)}\}]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau}, \quad \text{т. е.}$$

(2.10)
$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\, \Delta_i v\, J_2(\chi w) = -\,\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\, \Delta_i w\, J_2(\psi v) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{(\overset{+i}{w}\,\chi_{x_i} + \overset{-i}{w}\,\chi_{\bar{x}_i})\, J_2(\psi v) + (\overset{+i}{v}\,\psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\psi_{\bar{x}_i})\, J_2(\chi w)\} -$$

$$-\frac{\kappa}{4}\,[h^n \sum_{\Omega_\Delta} \overset{-0}{(\chi w)}\,\{\overset{+i}{(\psi v)} - \overset{-i}{(\psi v)}\} + \overset{-0}{(\psi v)}\,\{\overset{+i}{(\chi w)} - \overset{-i}{(\chi w)}\}]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau}.$$

При выводе (2.10) использованы (2.3) и (2.6). Далее,

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\, \Delta_i v\, J_2(\psi v) = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\chi\, \Delta_i v\, J_2(v) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{\overset{+0}{v}\,(\overset{+0}{\psi} - \psi) + \overset{-0}{v}\,(\overset{-0}{\psi} - \psi)\}\,\chi\, \Delta_i v = \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\, \Delta_i v\, J_2(\chi v) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\, \Delta_i v\{\overset{+0}{v}\,(\overset{+0}{\chi} - \chi) + \overset{-0}{v}\,(\overset{-0}{\chi} - \chi)\} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\chi\, \Delta_i v\{\overset{+0}{v}\,(\overset{+0}{\psi} - \psi) + \overset{-0}{v}\,(\overset{-0}{\psi} - \psi)\}.$$

Отсюда и из (2.10), записанного для $v = w$, получим

(2.11)
$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\psi\, \Delta_i v\, J_2(\chi v) =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{(\overset{+i}{v}\,\chi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\chi_{\bar{x}_i})\, J_2(\psi v) + (\overset{+i}{v}\,\psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\,\psi_{\bar{x}_i})\, J_2(\chi v)\} +$$

$$+\frac{\kappa}{8}\,\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1}\sum_{\Omega_\Delta}\{\psi(\overset{+0}{v}\,\chi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\chi_{\bar{x}_0}) - \chi(\overset{+0}{v}\,\psi_{x_0} - \overset{-0}{v}\,\psi_{\bar{x}_0})\}\,(\overset{+i}{v} - \overset{-i}{v}) -$$

$$-\frac{\kappa}{8}\,[h^n \sum_{\Omega_\Delta} \overset{-0}{(\chi v)}\,\{\overset{+i}{(\psi v)} - \overset{-i}{(\psi v)}\} + \overset{-0}{(\psi v)}\,\{\overset{+i}{(\chi v)} - \overset{-i}{(\chi v)}\}]_{x_0=\tau}^{x_0=k_0\tau}.$$

Имеет место еще следующая формула, которая проверяется непосредственно:

(2.12)
$$\chi\, \Delta_j v\, J_2(\psi w) = \psi\, \Delta_j v\, J_2(\chi w) +$$

$$+\frac{\kappa_j}{4}\,(\overset{+j}{v} - \overset{-j}{v})\,\{\chi(\overset{+0}{\psi}_{x_0} w - \overset{-0}{\psi}_{\bar{x}_0} w) - \psi(\overset{+0}{\chi}_{x_0} w - \overset{-0}{\psi}_{\bar{x}_0} w)\},$$

где $\kappa_j = \kappa$ для $j \neq 0$ и $\kappa_0 = 1$.

Формулы (2.8)–(2.11), являющиеся аналогом формул интегрирования по частям, будут вместе с (2.12) играть основную роль при выводе энергетического неравенства. Прежде чем приступить к его выводу, разберем, в удобном для наших целей виде, некоторые параграфы работы [1].

3. Разделяющий оператор и положительная определенность некоторой квадратичной формы. Рассмотрим нормальный гиперболический оператор $(m + 1)$-ого порядка

$$a(\mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \leqq m+1} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha \tag{3.1}$$

с постоянными действительными коэффициентами, и соответствующий ему разделяющий оператор

$$b(\mathrm{D}) = \frac{1}{m+1} \frac{\partial}{\partial \mathrm{D}_0} a_0(\mathrm{D}) = \sum_{|\beta| = m} b_\beta \mathrm{D}^\beta, \tag{3.2}$$

где $a_0(\mathrm{D}) \equiv \sum_{|\alpha| = m+1} a_\alpha \mathrm{D}^\alpha$ – главная часть оператора $a(\mathrm{D})$. По определению гиперболичности и в силу однородности $a_0(\mathrm{D})$ имеем при $\|\xi'\| = (\sum_1^n \xi_i^2)^{1/2} \neq 0$ и ξ действительных

$$a_0(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \ldots, i\xi_n) = \prod_{j=1}^{m+1} \left(\mathrm{D}_0 - i\|\xi'\| \lambda_j \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right) \tag{3.3}$$

и

$$b_0(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \ldots, i\xi_n) = \prod_{j=1}^{m} \left((\mathrm{D}_0 - i\|\xi'\| \mu_j \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right),$$

где

$$\lambda_j \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right), \quad \mu_j \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)$$

корни уравнений

$$a_0 \left(\lambda, \frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right), \ldots, \frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right) = 0, \quad b\left(\mu, \frac{\xi_1}{\|\xi'\|}, \ldots, \frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right) = 0,$$

которые по условию гиперболичности действительны и строго различны между собой, т.е.

$$\inf_{\|\xi'\| \neq 0} \left|\lambda_l \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right) - \lambda_k \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right| \geqq C > 0 \quad \text{для} \quad k \neq l, \tag{3.4}$$

$$\inf_{\|\xi'\| \neq 0} \left|\lambda_k \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right) - \mu_j \left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right| \geqq C > 0$$

$$\text{для} \quad l, k = 1, 2, \ldots, m+1, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Рассмотрим теперь для гладких функций u, v, периодических по x' с периодом 2π, выражение

$$(3.5) \qquad a_0(\mathrm{D})\,u b(\mathrm{D})\,v + a_0(\mathrm{D})\,v\,b(\mathrm{D})\,u = \sum_{\substack{|\alpha|=m+1\\|\beta|=m}} a_\alpha b_\beta(\mathrm{D}^\alpha u\,\mathrm{D}^\beta v + \mathrm{D}^\alpha v\,\mathrm{D}^\beta u)\,.$$

Каждое выражение $\mathrm{D}^\alpha u\,\mathrm{D}^\beta v + \mathrm{D}^\beta u\,\mathrm{D}^\alpha v$ ($|\alpha| = m + 1$, $|\beta| = m$) можно представить в виде

$$\mathrm{D}^\alpha u\,\mathrm{D}^\beta v + \mathrm{D}^\alpha v\,\mathrm{D}^\beta u = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{D}_j \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} B^{j,\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}(\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\delta v + \mathrm{D}^\gamma v\,\mathrm{D}^\delta u)\,.$$

Это можно получить, на пример последовательным применением тождества

$$(3.5') \qquad \begin{gathered}\mathrm{D}_j\,\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\delta v + \mathrm{D}_j\,\mathrm{D}^\delta v\,\mathrm{D}^\delta u = \\ = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\delta v + \mathrm{D}^\gamma v\,\mathrm{D}^\delta u) - (\mathrm{D}_j\,\mathrm{D}^\delta u\,\mathrm{D}^\gamma v + \mathrm{D}_j\,\mathrm{D}^\delta v\,\mathrm{D}^\gamma u)\end{gathered}$$

до тех пор, пока не придется преобразовать выражения

$$\mathrm{D}_s\,\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\gamma v + \mathrm{D}_s\,\mathrm{D}^\gamma v\,\mathrm{D}^\gamma u = \mathrm{D}_s(\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\gamma v)\,,$$

или

$$\begin{gathered}\mathrm{D}_{j_1}\ldots\mathrm{D}_{j_k}\mathrm{D}^\eta u\,\mathrm{D}_{i_1}\ldots\mathrm{D}_{i_{k-1}}\mathrm{D}^\eta v + D_{j_1}\ldots\mathrm{D}_{j_k}\mathrm{D}^\eta v\,\mathrm{D}_{i_1}\ldots\mathrm{D}_{i_{k-1}}\mathrm{D}^\eta u\,,\\ |\eta| + k = m + 1,\ j_s \neq i_l,\ s = 1, \ldots, k,\ l = 1, \ldots, k - 1\,.\end{gathered}$$

Необходимое представление для последнего получается с помощью применения $(2k - 1)$-раз тождества $(3.5')$ с j равным последовательно $j_1, i_1, \ldots, i_{k-1}, j_k$. Это соответствует обычному методу преобразования интеграла $\int(\mathrm{D}^\alpha u\,\mathrm{D}^\beta v + \mathrm{D}^\alpha v\,\mathrm{D}^\beta u)\,\mathrm{d}x$ в интегралы по границе области интегрированием по частям. Поэтому (3.5) представляется в виде

$$(3.6) \qquad \begin{gathered}a_0(\mathrm{D})u\,b(\mathrm{D})v + a_0(\mathrm{D})v\,b(\mathrm{D})u = \\ = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{D}_j \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^j_{\gamma\delta}(\mathrm{D}^\gamma u\,\mathrm{D}^\delta v + \mathrm{D}^\gamma v\,\mathrm{D}^\delta u) = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{D}_j\,A^j(u, v)\,.\end{gathered}$$

Такое представление, очевидно, неединственно, но все эти представления равноценны для наших целей.

Полагая в (3.6) $v = \bar{u}$ (комплексно сопряженная к u), получим

$$(3.7) \qquad \begin{gathered}a_0(\mathrm{D})u\,\overline{b(\mathrm{D})u} + \overline{a_0(\mathrm{D})u}\,b(\mathrm{D})u = \\ = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{D}_j \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^j_{\gamma\delta}(\mathrm{D}^\gamma u\,\overline{\mathrm{D}^\delta u} + \overline{\mathrm{D}^\gamma u}\,\mathrm{D}^\delta u) = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{D}_j\,A^j(u, \bar{u})\,.\end{gathered}$$

Подставляя в (3.7) $u = g(x_0)\,e^{ix'\xi'}$, $\|\xi'\| \neq 0$, ξ' – действительное, где $g(x_0)$ – – гладкая функция, получим

$$a_0(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \dots, i\xi_n)\, g\, \overline{b(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \dots, i\xi_n)\, g} +$$

$$+ \overline{a_0(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \dots, i\xi_n)\, g}\, b(\mathrm{D}_0, i\xi_1, \dots, i\xi_n)\, g =$$

$$= \mathrm{D}_0 \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta}\{\mathrm{D}_0^{\gamma_0} g (i\xi_1)^{\gamma_1} \dots (i\xi_n)^{\gamma_n}\, \mathrm{D}_0^{\delta_0}\bar{g}(-i\xi_1)^{\delta_1} \dots (-i\xi_n)^{\delta_n} +$$

$$+ \mathrm{D}_0^{\gamma_0}\bar{g}(-i\xi_1)^{\gamma_1} \dots (-i\xi_n)^{\gamma_n}\, \mathrm{D}_0^{\delta_0} g (i\xi_1)^{\delta_1} \dots (i\xi_n)^{\delta_n},$$

т. к. A_j при таком u не зависит от $x_1, \dots, x_n$ для $j = 1, 2, \dots, n$. Используя теперь (3.3), имеем

$$(3.8)\quad 2\,\mathrm{Re}\left\{\prod_{j=1}^{m+1}\left(\mathrm{D}_0 - i\|\xi'\|\, \lambda_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right) g \cdot \overline{\prod_{j=1}^{m}\left(\mathrm{D}_0 - i\|\xi'\|\, \mu_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right) g}\right\} =$$

$$= \mathrm{D}_0 \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A_0^{\gamma\delta}\left\{\mathrm{D}^0_{\gamma_0} g \|\xi'\|^{m-\gamma_0}\, \overline{\mathrm{D}_0^{\delta_0} g \|\xi'\|^{m-\delta_0}} \left(i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_1} \dots \left(i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_n} \left(-i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_1} \dots\right.$$

$$\dots \left(-i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_n} + \overline{\mathrm{D}_0^{\gamma_0} g \|\xi'\|^{m-\gamma_0}}\, \mathrm{D}_0^{\delta_0} g \|\xi'\|^{m-\delta_0} \left(i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_n} \dots$$

$$\left.\dots \left(i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_n} \left(-i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_1} \dots \left(-i\frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_n}\right\}.$$

Рассмотрим многочлены

$$P_k(\zeta; \xi') = \prod_{j \neq k}\left(\zeta - i\|\xi'\|\, \lambda_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right),$$

$$k = 1, 2, \dots, m+1, \quad Q(\zeta; \xi') = \prod_1^m\left(\zeta - i\|\xi'\|\, \mu_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right),$$

с коэффициентами, зависящими от ξ'.

Тогда $Q = \sum_1^{m+1} \beta_k P_k$, где

$$(3.9)\quad \beta_k = \frac{Q\left(i\|\xi'\|\, \lambda_k\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right)}{P_k\left(i\|\xi'\|\, \lambda_k\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right)} = \frac{\prod_1^m\left(\lambda_k\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right) - \mu_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right)}{\prod_{j \neq k}\left(\lambda_k\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right) - \lambda_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right)} \geqq C_1 > 0$$

при всех $\|\xi'\| \neq 0$ в силу (3.4). При этом, очевидно, β_k не зависят от $\|\xi'\|$, лишь бы он был отличен от нуля. Поэтому левая часть (3.8) представляется в виде

$$(3.10)\qquad \mathrm{D}_0 \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k |P_k(\mathrm{D}_0) g|^2,$$

где $P_k(\mathrm{D}_0)g$ есть линейная однородная форма функций

$$\|\xi'\|^{m-\gamma_0}\mathrm{D}_0^{\gamma_0}g = g_{\gamma_0}, \quad \gamma_0 = 0, 1, \ldots, m \tag{3.11}$$

вида $\sum_0^m P_{\gamma_0}^k g_{\gamma_0}$, где

$$\sum_{\gamma_0=0}^m P_{\gamma_0}^k g_{\gamma_0}\zeta^{\gamma_0} = \prod_{j\neq k}\left(\zeta - i\lambda_j\left(\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)\right) = P_k\left(\zeta; \frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right). \tag{3.11}$$

Так как эти многочлены образуют базис в пространстве многочленов степени $\leqq m$, то $\det\left(P_{\gamma_0}^k\right) \neq 0$. Поэтому при $\|\xi'\| \neq 0$ из $|\sum_0^m P_{\gamma_0}^k g_{\gamma_0}|^2 = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, m+1$ вытекает $g_{\gamma_0} = 0$ для $\gamma_0 = 0, 1, \ldots, m$. Отсюда, ввиду того, что коэффициенты $P_{\gamma_0}^k$ и β_k зависят лишь от $\xi'/\|\xi'\|$, существует такая постоянная $C_2 > 0$, независящая от ξ' и g, что

$$\sum_{k=1}^{m+1}\beta_k\left|\sum_{\gamma_0=0}^m P_{\gamma_0}^k g_{\gamma_0}\right|^2 \geqq C_2\sum_{\gamma_0=0}^m |g_{\gamma_0}|^2. \tag{3.12}$$

Но так как равенство (3.8) выполняется для всякой гладкой функции $g(x_0)$, то коэффициенты квадратичной формы переменных g_{γ_0}, стоящей под знаком производной D_0 в правой части (3.8), и квадратичной формы тех же переменных $\sum_1^{m+1}\beta_k|P_k(\mathrm{D}_0)g|^2 = \sum_1^{m+1}\beta_k|\sum_0^m P_{\gamma_0}^k g_{\gamma_0}|^2$ совпадают. Это следует из следующей леммы:

Лемма 3.1. *Пусть $A = (a_{lj})$ и $B = (b_{lj})$ — постоянные матрицы $(m+1)$-ого порядка. Если для любой гладкой (компелксной) функции $f(t)$ выполнено равенство*

$$\mathrm{D}\Big(\sum_{l,j=0}^m a_{lj}\,\mathrm{D}^l f\,\overline{\mathrm{D}^j f}\Big) = \mathrm{D}\Big(\sum_{l,j=0}^m b_{lj}\,\mathrm{D}^l f\,\overline{\mathrm{D}^j f}\Big),$$

где $\mathrm{D} = \partial/\partial t$, то $a_{lj} = b_{lj}$, $l, j = 0, 1, \ldots, m$.

Эта лемма легко получается, если выбрать $f(t)$ надлежащим образом. Итак, получаем следующую лемму:

Лемма 3.2. *Существует постоянная $C > 0$, зависящая лищь от коэффициентов оператора $a_0(\mathrm{D})$, такая что*

$$\sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A_{\gamma\delta}^0\left\{\varrho_{\gamma_0}\bar{\varrho}_{\delta_0}\left(i\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_1}\cdots\left(i\frac{\xi'}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_n}\left(-i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_1}\cdots\left(-i\frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_n} + \right.$$

$$\left. + \bar{\varrho}_{\gamma_0}\varrho_{\delta_0}\left(i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_1}\cdots\left(i\frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right)^{\delta_n}\left(-i\frac{\xi_1}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_1}\cdots\left(-i\frac{\xi_n}{\|\xi'\|}\right)^{\gamma_n}\right\} \geqq C\sum_{\gamma_0=0}^m |\varrho_{\gamma_0}|^2$$

при всех $\|\xi'\| \neq 0$, где $A_{\gamma\delta}^0$ определяются формулой (3.6) *и $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_m$ — любой вектор.*

Рассмотрим теперь для действительной периодической по x' функции u выражение

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \Delta^\gamma u \, \Delta^\delta u \,,$$

где $A^0_{\gamma\delta}$ определяются формулой (3.6) и Δ^γ – оператор, введенный в пункте 1. Верна следующая лемма:

Лемма 3.3. *Для любой периодической по x' действительной функции u на сетке*

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \Delta^\gamma u \, \Delta^\delta u \geqq C \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 \,, \tag{3.13}$$

где $C > 0$ константа, независящая ни от u, ни от шагов h, τ.

Доказательство. Вводим в Ω_Δ полную ортонормированную систему функций

$$\mu'(x') = e^{ip_1x_1} \cdot e^{ip_2x_2} \dots e^{ip_nx_n}\,, \quad \text{где} \quad 0 \leqq p_j \leqq N_\Delta - 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)\,,$$

$x_j = k_jh$, $k_j = 0, 1, \dots, N_\Delta - 1$, и скалярное произведение определяется как $(2\pi)^{-n} h^n \sum_{\Omega_\Delta} u \cdot v$. Тогда функции u и v, удовлетворяющие условиям леммы, представляются в виде

$$u = \sum_p a^{(p)}(x_0)\, \mu^{(p)}(x')\,, \quad v = \sum_p b^{(p)}(x_0)\, \mu^{(p)}(x')\,,$$

причем

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} uv = (2\pi)^n \sum_p a^{(p)}(x_0)\, \overline{b^{(p)}(x_0)} = (2\pi)^n \sum_p \overline{a^{(p)}(x_0)}\, b^{(p)}(x_0) = \tag{3.14}$$

$$= \frac{(2\pi)^n}{2} \sum_p a^{(p)}\, \overline{b^{(p)}} + \overline{a^{(p)}}\, b^{(p)}\,.$$

Далее,

$$\Delta_j \mu^{(p)}(x') = i\beta_{pj} \mu^{(p)}(x')\,, \tag{3.15}$$

где

$$\beta p_j = h^{-1} \sin(p_jh)\,, \tag{3.16}$$

поэтому

$$\Delta^\gamma u = \sum_p \Delta_0^{\gamma_0} a^{(p)}(x_0)\, (i\beta_{p_1})^{\gamma_1} \dots (i\beta_{p_n})^{\gamma_n}\, \mu^{(p)}(x')\,. \tag{3.17}$$

Стсюда, в силу (3.14) и (3.15), левая часть (3.13) представляется в виде

$$(3.18) \qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \Delta^\gamma u \, \Delta^\delta u =$$

$$= \frac{(2\pi)^n}{2} \sum_p \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \{ \Delta_0^{\gamma_0} a^{(p)} (i\beta_{p_1})^{\gamma_1} \dots (i\beta_{p_n})^{\gamma_n} \overline{\Delta_0^{\delta_0} a^{(p)} (i\beta_{p_1})^{\delta_1} \dots (i\beta_{p_n})^{\delta_n}} +$$

$$+ \overline{\Delta_0^{\gamma_0} a^{(p)} (i\beta_{p_1})^{\gamma_1} \dots (i\beta_{p_n})^{\gamma_n}} \Delta_0^{\delta_0} a^{(p)} (i\beta_{p_1})^{\delta_1} \dots (i\beta_{p_n})^{\delta_n} \} =$$

$$= \frac{(2\pi)^n}{2} \sum_p{}' \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \left\{ \Delta_0^{\gamma_0} a^{(p)} \|\beta_p\|^{m-\gamma_0} \overline{\Delta_0^{\delta_0} a^{(p)} \|\beta_p\|^{m-\delta_0}} \left(i \frac{\beta_{p_1}}{\|\beta_p\|} \right)^{\gamma_1} \dots \right.$$

$$\dots \left(i \frac{\beta_{p_n}}{\|\beta_p\|} \right)^{\gamma_n} \left(-i \frac{\beta_{p_1}}{\|\beta_p\|} \right)^{\delta_1} \dots \left(-i \frac{\beta_{p_n}}{\|\beta_p\|} \right)^{\delta_n} +$$

$$+ \overline{\Delta_0^{\gamma_0} a^{(p)} \|\beta_p\|^{m-\gamma_0}} \Delta_0^{\delta_0} a^{(p)} \|\beta_p\|^{m-\delta_0} \left(-i \frac{\beta_{p_1}}{\|\beta_p\|} \right)^{\gamma_1} \dots \left(-i \frac{\beta_{p_n}}{\|\beta_p\|} \right)^{\gamma_n} \left(i \frac{\beta_{p_1}}{\|\beta_p\|} \right)^{\delta_1} \dots$$

$$\left. \dots \left(i \frac{\beta_{p_n}}{\|\beta_p\|} \right)^{\delta_n} \right\} + (2\pi)^n \sum_p{}'' A^0_{m,0,\dots,0,m,0,\dots,0} |\Delta_0^m a^{(p)}|^2 ,$$

где $\sum\limits_p{}'$ и $\sum\limits_p{}''$ означают суммирование по таким p, для которых $\|\beta_p\| = = (\sum\limits_1^n \beta_{p_j}^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$ или $\|\beta_p\| = 0$ соответственно. Поскольку

$$(3.19) \qquad A^0_{m,0,\dots,0,m,0,\dots,0} = \tfrac{1}{2}$$

в силу нормальности $a(\mathrm{D})$, $b(\mathrm{D})$, то, считая $\|\beta_p\|^0 = 1$ для $\|\beta_p\| = 0$, получим

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta} \Delta^\gamma u \, \Delta^\delta u \geqq \frac{(2\pi)^n}{2} \tilde{C} \sum_p \sum_{\gamma_0=0}^m |\Delta^{\gamma_0} a^{(p)} \|\beta_p\|^{m-\gamma_0}|^2 \geqq C h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 ,$$

что требовалось доказать.

Этим доказана положительная определенность квадратичной формы (3.13) в случае постоянных коэффициентов. Чтобы охватить уравнения с переменными коэффициентами, используем разложение единицы. Его можно построить следующим образом. Разобьем отрезок $\langle 0, 2\pi \rangle$ на L частей длины $l > 0$ $(L . l = 2\pi)$ и рассмотрим функцию

$$\tilde{e}_0(t) = \begin{cases} \exp\left(1 - l^2/(l^2 - t^2)\right), & |t| < l , \\ 0, & |t| \geqq l . \end{cases}$$

Для любого целого k положим $\tilde{e}_k(t) = \tilde{e}_0(t - kl)$. Очевидно, что функции $\tilde{e}_k$ бесконечно дифференцируемы в интервале $(-\infty, +\infty)$, $0 \leqq \tilde{e}_k(t) \leqq 1$, и в каждой точке отличны от нуля не больше чем две из этих функций. Кроме того, $\sum \tilde{e}_k^2(t) \geqq \geqq \exp(-2/3) > 0$. Тогда функции

$$e_k(t) = \tilde{e}_k(t) : \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{e}_k^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

бесконечно дифференцируемы, $0 \leqq e_k(t) \leqq 1$, равны нулю при $|t - kl| \geqq l$ и $\sum_{-\infty}^{+\infty} e_k^2(t) \equiv 1$. Полагая теперь для любого $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, где q_j — целые числа

$$e_q(x') = e_{q_1}(x_1)\, e_{q_2}(x_2) \ldots e_{q_n}(x_n)\,, \tag{3.21}$$

где e_{q_j} — функции из (3.20), получаем, очевидно, что $e_q(x')$ бесконечно дифференцируемы, в каждой точке отлично от нуля лишь конечное число этих функций, $0 \leqq e_q(x') \leqq 1$ всюду, $e_q(x') = 0$ при $|x_j - q_j l| \geqq l$, $\sum_{(q)} e_q^2(x') \equiv 1$.

Пусть теперь $a_0(x, \mathrm{D})$ — нормальный гиперболический оператор с переменными коэффициентами. Рассмотрим для любой функции u на сетке, периодической по x', форму

$$\sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u\,. \tag{3.22}$$

Коэффициенты этой формы при $x = X \in Q_T$ равны коэффициентам соответствующей формы из (3.6), записанного для оператора с постоянными коэффициентами $a_0(X, \mathrm{D})$. Умножим (3.22) на $1 \equiv \sum_{(q)} e_q^2(x')$. Число l выберем позже. Суммируя по Ω_Δ, получим

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \Big\{ \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u \sum_{(q)} e_q^2(x') \Big\}\,,$$

где суммирование по q производится лишь по q, удовлетворяющим неравенствам $0 \leqq q_j \leqq 2\pi/l = L$. Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\begin{aligned} & h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x) \Big\{ \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u \sum_{(q)} e_q^2(x') \Big\} = \\ & = h^n \sum_{(q)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} e_q^2 A^0_{\gamma\delta}(x_0, q_1 l, \ldots, q_n l)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u + \\ & + h^n \sum_{(q)} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} e_q^2 [A^0_{\gamma\delta}(x_0, x') - A^0_{\gamma\delta}(x_0, q_1 l, \ldots, q_n l)]\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u = \\ & = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{(q)} \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x_0, ql)\, [\Delta^\gamma(e_q u)\, \Delta^\delta(e_q u)] + \\ & + O_l\Big(h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m-1} |\Delta^\gamma u|^2\Big) + l\,.\,O\Big(h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} |\Delta^\gamma u|^2\Big)\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $O_l(\varphi)$ есть величина порядка φ, зависящая и от l (возрастающая при убывании l) и от максимумов модулей коэффициентов $A^0_{\gamma\delta}(x)$, $O(\psi)$ есть величина порядка ψ, зависящая от констант Липшица коэффициентов $A^0_{\gamma\delta}(x)$. При выводе (3.23) использована формула (2.3). К каждому слагаемому при фиксированном q первой суммы в (3.23) можно применить лемму 3.3. Получим, что

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u \geqq$$

$$\geqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{(q)} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma(e_q u)|^2 - R_1(l)\, h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} |\Delta^\gamma u|^2 - lR_2 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 \geqq$$

$$\geqq Ch^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 \sum_{(q)} e_q^2 - R_3(l)\, h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} |\Delta^\gamma u|^2 -$$

$$- R_1(l)\, h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} |\Delta^\gamma u|^2 - lR_2 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 ,$$

где R_2 — константа, независящая от l, R_1 i R_3 — функции, возрастающие при убывании l. Если подобрать l настолько малым, что $lR \leqq \frac{1}{2}C$, то получаем следующую лемму:

Лемма 3.4. *Пусть* $\sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u$ — *форма* (3.22), *коэффициенты которой удовлетворяют условию Липшица по* $x_0, x_1, \ldots, x_n$. *Тогда существуют константы* C_1 *и* C_2, *зависящие от коэффициентов соответствующего оператора* $a_0(x, \mathrm{D})$ (*от максимумов модулей и констант Липшица этих коэффициентов и константы* C, *фигурирующей в* (3.4)), *но независящие от* u, τ, h, *что*

$$(3.24)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=|\delta|=m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u \geqq C_1 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} |\Delta^\gamma u|^2 - C_2 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} |\Delta^\gamma u|^2$$

для любой периодической по x' *функции и на сетке.* C_1 *и* C_2 *можно, очевидно, считать независящими от* x_0 *для* $x_0 \in \langle 0, T \rangle$.

4. Явная разностная схема для решения задачи (1.1), (1.2). Будем считать, что f и φ_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — функции, определенные всюду в Q_T или Ω соответственно и периодические по x'.

Схема 1. На сетке с шагами τ, h, выбранными, как показано в п. 1, определим функцию u следующим образом: Положим

$$(4.1)\qquad u(k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(k_1 h, \ldots, k_n h) \frac{(k_0\tau)^i}{i!}$$

для $-\left[\frac{\delta}{\tau}\right] \leqq k_0 \leqq m + 1$ и любых целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, где δ — фиксированное положительное число. Для точек $x = \{k_0\tau, k_1 h, \ldots, k_n h\}$ с $1 \leqq k_0 \leqq \leqq M_\Delta - 1$, $0 \leqq k_i \leqq N_\Delta - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляем уравнение

$$(4.2)\qquad a(x, \Delta)\, u = f(x)\,,$$

которое получается из (1.1) заменой D^α на Δ^α. Уравнения (4.1) и (4.2) определяют явную разностную схему и позволяют определить функцию u последовательно на всех слоях $x_0 = k_0\tau$ с $m+2 \leqq k_0 \leqq M_\Delta + m$, если периодически продолжать значения u из Ω_Δ на весь слой $x_0 = \text{const}$. Для решений (4.1) и (4.2) имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если коэффициенты $a_\alpha(x)$ нормального гиперболического оператора $a(x, \mathrm{D})$ удовлетворяют при $|\alpha| = m+1$ условию Липшица по $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и при $|\alpha| \leqq m$ ограничены, то при $\kappa \leqq \kappa_0$ справедливо неравенство*

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2_{x_0 = k_0\tau} \leqq C\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} |f|^2\} \tag{4.3}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$ (при $k_0 = 0, 1$ второе слагаемое считается равным нулю), где u — решение (4.1) и (4.2) и κ_0 — достаточно малая постоянная, зависящая от коэффициентов оператора $a_0(x, \mathrm{D})$. Если, кроме того, $a_\alpha(x)$ при $|\alpha| \leqq m$ удовлетворяют условию Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2_{x_0 = k_0\tau} \leqq \\ \leqq \tilde{C}\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{1}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\} \end{aligned} \tag{4.3'}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$. Константы C, $\tilde{C}$ зависят от максимумов модулей и констант Липшица коэффициентов оператора $a(x, \mathrm{D})$ и константы из (3.4), но не зависят от f, φ_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$, τ, h.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, приведем две леммы.

Лемма 4.1. *Для функции v, определенной на сетке и для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$, имеет место оценка*

$$\begin{aligned} h^n \sum_{\Omega_\Delta} (v^2 + \overset{-0}{v}{}^2)|_{x_0 = k_0\tau} \leqq \\ \leqq C\{\tau h^n \sum_{1}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} |\Delta_0 v|^2 + h^n \sum_{\Omega_\Delta} (v^2 + \overset{-0}{v}{}^2)|_{x_0 = \tau}\}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где C — постоянная, зависящая от $T = M_\Delta \tau$, но независящая от v, τ, h.

Лемма 4.2. *Пусть $y(x_0)$ — неотрицательная функция для $x_0 = k_0\tau$, $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$, удовлетворяющая при $1 \leqq k_0 \leqq M_\Delta$ неравенству*

$$y(k_0\tau) \leqq C\{y(0) + \tau \sum_{s=0}^{k_0} y(s\tau) + F(k_0\tau)\}, \tag{4.5}$$

где $F(k_0\tau)$ — неотрицательная, неубывающая функция для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$. Тогда

$$y(k_0\tau) \leqq C_1\{y(0) + F(k_0\tau)\}, \tag{4.6}$$

для $k_0 = 0, 1, \ldots, M_\Delta$ *при* $F(0)$ *равном нулю. Константа* C_1 *зависит от* C *и* $T = M_\Delta \tau$.

Лемма 4.1. очевидна, лемма 4.2 доказывается аналогично, как в работе [3] (стр. 144).

Доказательство теоремы 1. Взяв разностный разделяющий оператор в виде

$$(4.7) \qquad J_2\{b(x, \Delta)\, u\}\,,$$

где $b(x, D)$ есть оператор, определенный формулой (3.2), составим сумму

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \{a(x, \Delta)\, u - f\}\, J_2\{b(x, \Delta)\, u\} = 0\,,$$

для $2 \leqq k_0 \leqq M_\Delta$, откуда получим

$$(4.8) \qquad \tau h^n \sum_{1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} a_0(x, \Delta)\, u\, J_2\{b(x, \Delta)\, u\} = \tau h^n \sum_{1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \{- \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(x)\, \Delta^\alpha u + f\}\, J_2\{b(x, \Delta)\, u\}\,.$$

Правая часть (4.8) мажорируется величиной

$$(4.9) \qquad C_1\{\tau h^n \sum_{1}^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\alpha| \leqq m} (|\Delta^\alpha u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\alpha u}|^2) + \tau h^n \sum_{1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} f^2\}\,.$$

C_1 константа, зависящая от максимумов модулей $a_\alpha(x)$. Так как левая часть (4.8) содержит члены вида

$$\tau h^n \sum_{1}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi\, \Delta_j\, \Delta^\gamma u\, J_2\{\chi\, \Delta^\delta u\}\,, \quad |\gamma| = |\delta| = m\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,,$$

то ее можно преобразовать с помощью формул п. 2 и получить в конечном счете, что левая часть (4.8) больше выражения

$$(4.10) \qquad [h^n \sum_{\Omega_\Delta} \{ \sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u + (\sum_{|\gamma| = |\delta| = m} A^0_{\gamma\delta}(x)\, \overset{-0}{\Delta^\gamma u\, \Delta^\delta u})\}]_{x_0 = \tau}^{x_0 = k_0 \tau} - C_2(1 + \kappa)\, \tau h^n \sum_{1}^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2) - \kappa C_3 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0 \tau} - \kappa C_3 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = \tau}\,.$$

Применяя теперь к первому слагаемому (4.10) лемму 3.4, получим, что левая часть (4.8) больше выражения

(4.11)

$$C_4 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} - C_5 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} -$$

$$- C_2(1+\kappa)\tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right) - \kappa C_3 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} -$$

$$- C_6(1+\kappa)\, h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=\tau}.$$

Будем считать

$$\kappa \leqq \frac{1}{2}\frac{C_4}{C_3} = \kappa_0 . \tag{4.12}$$

Это естественное ограничение, связанное с областью зависимости решения уравнения (1.1). Тогда из (4.8) с помощью (4.9) и (4.11) получим

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} \leqq C_7 \Big\{ h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m-1} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} + \tag{4.13}$$

$$+ h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|=m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=\tau} + \tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2 + \right.$$

$$\left. + \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} f^2 \right\}.$$

Применяя лемму (4.1) к $v = \Delta^\beta u$ с $|\beta| \leqq m - 1$, получим из (4.13)

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} \leqq \tag{4.14}$$

$$\leqq C_8 \Big\{ h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=\tau} +$$

$$+ \tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right) + \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} f^2 \Big\}.$$

Обозначая теперь $y(k_0\tau) = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau}$, $F(k_0\tau) = \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} f^2$ мы сможем применить лемму 4.2 и получить из (4.14) неравенство

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|\leqq m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=k_0\tau} \leqq \tag{4.15}$$

$$\leqq C_9 \Big\{ h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma|+m} \left(|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma} u|^2\right)/_{x_0=\tau} + \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} f^2 ,$$

верное для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$, причем константа C_9 удовлетворяет требованиям на константы, фигурирующие в теореме 1.

Чтобы оценить разности $(m+1)$-ого порядка, применим к уравнениям (4.2) оператор Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Используя еще формулу (2.3), получим, что функции $\Delta_i u$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям

$$a_0(x, \Delta)\,\Delta_i u = \mathrm{d}_i(x, \Delta)\,u + \Delta_i f\,, \tag{4.16i}$$

где $\mathrm{d}_i(x, \Delta)$ – оператор, содержащий разности $\Delta^\alpha u$ с $|\alpha| \leqq m+1$, $\alpha_0 \leqq m$ с ограниченными коэффициентами в предположении, что $a_\alpha(x)$ с $|\alpha| \leqq m$ удовлетворяют условию Липшица по x'. При этом используется нормальность оператора $a(x, \mathrm{D})$. Умножая теперь каждое уравнение (4.16i) на $J_2\{b(x, \Delta)\,\Delta_i u\}$, получим, суммируя по x_0 от τ до $(k_0 - 1)\,\tau$, $2 \leqq k_0 \leqq M_\Delta$, и по $x' \in \Omega_\Delta$,

$$\begin{aligned} &\tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} a_0(x, \Delta)\,\Delta_i u\; J_2\{b(x, \Delta)\,\Delta_i u\} = \\ &= \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} (\mathrm{d}_i(x, \Delta)\,u + \Delta_i f]\; J_2\{x, \Delta)\,\Delta_i u\}\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Правая часть (4.17) мажорируется в силу периодичности всех функций величиной

$$C_{10}\{\tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2) + \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2\}\,. \tag{4.18}$$

Левая часть (4.17) в силу (4.11) и (4.12) больше чем

$$\begin{aligned} &\frac{C_4}{2} h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma \Delta_i u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma \Delta_i u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} - \\ &- C_5 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m-1} (|\Delta^\gamma \Delta_i u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma \Delta_i u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} - \\ &- C_{11} \tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma \Delta_i u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma \Delta_i u}|^2) - \\ &- C_{12} h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m} (|\Delta^\gamma \Delta_i u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma \Delta_i u}|^2)/_{x_0 = \tau}\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Поэтому (4.17) после суммирования по i от 1 до n дает, с помощью (4.18) и (4.19)

$$\begin{aligned} &h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} \leqq \\ &\leqq C_{13}\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} + \tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2) + \\ &\quad + h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = \tau} + \tau h^n \sum_1^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2\}\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Правая часть (4.20) оценивается с помощью (4.15), и поэтому получаем

$$(4.21)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} \leqq$$

$$\leqq C_{14}\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)_{x_0 = \tau} +$$

$$+ \tau h^n \sum_1^{k_0} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2) + \tau h^n \sum_1^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^n |\Delta_i f|^2)\} .$$

Применяя к (4.21) лемму 4.2 с

$$y(k_0\tau) = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| = m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} ,$$

$$F(k_0\tau) = \tau h^n \sum_1^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^n |\Delta_i f|^2) + h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = \tau} ,$$

получим, используя снова (4.15), неравенство

$$(4.22)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = k_0\tau} \leqq$$

$$\leqq C_{15}\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| + m+1, \gamma_0 \leqq m} (|\Delta^\gamma u|^2 + |\overset{-0}{\Delta^\gamma u}|^2)/_{x_0 = \tau} + \tau h^n \sum_1^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^n |\Delta_i f|^2)\}$$

для $k_0 = 1, 2, \ldots, M_\Delta$. Теорема 1 вытекает теперь из (4.15) и (4.22) и следующей леммы:

Лемма 4.3. *Для функции и, определенной формулой* (4.1), *справедливы оценки*

$$(4.23)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+\nu, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2/_{x_0 = k_0\tau} \leqq C h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^m \sum_{|\gamma| \leqq m+\nu-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2$$

для $k_0 = 0, 1, \nu \geqq 0$,

$$(4.24)\qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq 1, \gamma_0 = 0} |\Delta^\gamma \Delta_0^{\alpha_0} u|^2/_{x_0 = k_0\tau} \leqq C_1 h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^m \sum_{|\gamma| \leqq 1} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2$$

для $\alpha_0 \leqq m, -\left[\dfrac{\delta}{2\tau}\right] \leqq k_0 \leqq -1$, *где* δ — *фиксированное положительное число, фигурирующее в определении схемы* 1 *и константа* C *зависит существенно от* $\max \kappa$, *которое предполагается ограниченным.*

Доказательство этой леммы легко получается, если учесть, что

$$(4.25)\qquad \Delta_0^{\gamma_0} \frac{(k_0\tau)^i}{i!} = \begin{cases} 0, & \gamma_0 > i , \\ \dfrac{t^{i-\gamma_0}}{(i - \gamma_0)!} , & \gamma_0 \leqq i , \end{cases}$$

где t — некоторое число из отрезка $\langle\tau(k_0 - \gamma_0), \tau(k_0 + \gamma_0)\rangle$. Поэтому $t = O(\tau)$ для $k_0 = 0, 1$, и $t = O(1)$ для $k_0 = -1, -2, \ldots -\left[\frac{\delta}{2\tau}\right]$. Нужно также использовать ограниченность $\tau/h = \kappa$. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть u — решение* (4.1) *и* (4.2) *и пусть выполнено* (4.12). *Если коэффициенты $a_\alpha(x)$ удовлетворяют условию Липшица по $x_0, x_1, \ldots, x_n$ для $|\alpha| = m + 1$, условию Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для $|\alpha| \leqq m$ и ограничены, то для и справедливы неравенства*

(4.26)
$$\tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1} |\Delta^\gamma u|^2 \leqq$$
$$\leqq C\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\},$$

(4.27)
$$\tau h^n \sum_{-[\delta/2\tau]}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{\alpha_0 = 0}^{m} (|\Delta_0^{\alpha_0} u|^2 + \sum_{i=0}^{n} |\Delta_i \Delta_0^{\alpha_0} u|^2) \leqq$$
$$\leqq C\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\},$$

где константа C не зависит от φ, f, h, τ, а зависит лишь от T и δ, где δ имеет то же значение, что и в лемме 4.3.

Доказательство. Из уравнений (4.2) получаем оценку

$$|\Delta_0^{m+1} u|^2 \leqq C\{\sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2 + f^2\}$$

для $x = \{k_0\tau, \ldots, k_n h\}$, $k = 1, 2, \ldots, M_\Delta - 1$, $0 \leqq k_i \leqq N_\Delta - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как при $k_0 = 0$, $\Delta_0^{m+1} u = 0$ в силу (4.1), то, суммируя по x_0 и по x' получим

$$\tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} |\Delta_0^{m+1} u|^2 \leqq C\tau h^n \sum_{1}^{M-1} \sum_{\Omega_\Delta} \{\sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2 + f^2\}.$$

Суммируя (4.3′) по x_0 от 0 до $(M - 1)\tau$, получим

$$\tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1, \gamma_0 \leqq m} |\Delta^\gamma u|^2 \leqq$$
$$\leqq \tilde{C} T\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{1}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\}.$$

Из этих двух неравенств вытекает

$$\tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\gamma| \leqq m+1} |\Delta^\gamma u|^2 \leqq$$
$$\leqq C_2\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{0}^{M-1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\},$$

что доказывает первое утверждение теоремы 2. Далее имеем, очевидно, $\Delta_0^{m+1}u(k_0\tau, k'h) = 0$ для $k_0 \leqq 0$. Поэтому, суммируя (4.24) по $x_0 = k_0\tau$ от $k_0 = -\left[\dfrac{\delta}{2\tau}\right]$ до $k_0 = -1$, получаем, учитывая (4.26), неравенство

$$\tau h^n \sum_{-[\delta/2\tau]}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{\alpha_0=0}^{m} \left(|\Delta_0^{\alpha_0}u|^2 + \sum_{i=0}^{n} |\Delta_i\Delta_0^{\alpha_0}u|^2\right) \leqq$$

$$\leqq C_3\{h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\Delta^\gamma \varphi_i|^2 + \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f|^2)\}\,.$$

Теорема 2 полностью доказана.

5. Существование решения задачи (1.1), (1.2). Имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $a_\alpha(x)$ непрерывны в Q_T и удовлетворяют условиям теоремы 2. Пусть $f(x) \in H^{0,1}(Q_T)$, $\varphi_i(x') \in H^{m+1-i}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $f^\nu(x) \in C^\infty$, $\varphi_i(x') \in C^\infty$ ($i = 0, 1, \ldots, m$), причем $\|f - f^\nu\|_{H^{0,1}(Q_T)} \to 0$, $\|\varphi_\nu^i - \varphi_i\|_{H^{m+1-i}(\Omega)} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Пусть τ^ν, h^ν — последовательность шагов, стремящаяся к нулю при $\nu \to \infty$, такая, что $\|f_{\Delta^\nu}^\nu - f\| \to 0$, $\|(\Delta_j f^\nu)_{\Delta^\nu} - \mathrm{D}_j f\| \to 0$, $\|(\Delta^\gamma \varphi_i^\nu)_{\Delta^\nu} - \mathrm{D}^\gamma \varphi_i\| \to 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $|\gamma| \leqq m + 1 - i$. $f_{\Delta^\nu}^\nu$ (аналогично для $(\varphi_i^\nu)_{\Delta^\nu}$) означает функцию, построенную согласно пункту 1 для функции f^ν, рассмотренной лишь на сетке с шагами τ^ν, h^ν, и $\|\ \|$ означает норму в $L_2(Q_T)$ или в $L_2(\Omega)$. Пусть теперь u^ν — функции на сетке с шагами τ^ν, h^ν, определенные с помощью (4.1) и (4.2) с начальными функциями φ_i^ν ($i = 0, 1, \ldots, m$), и правой частью f^ν. Пусть выполнено условие (4.12), т. е. $\kappa_\nu = \tau^\nu/h^\nu \leqq \kappa_0$. Тогда функции $(u^\nu)_{\Delta^\nu}$ слабо в $L_2(Q_T)$ сходятся при $\nu \to \infty$ л функции $u \in H^{m+1}(Q_T)$, удовлетворяющей уравнению (1.1) почти всюду в Q_T, принимающей в среднем значения (1.2). Для нее справедливо неравенство*

$$(5.1)\quad \int_{Q_T} \sum_{|\alpha| \leqq m+1} |\mathrm{D}^\alpha u|^2\, \mathrm{d}x \leqq C\left\{\int_\Omega \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\mathrm{D}^\gamma \varphi_i|^2\, \mathrm{d}x' + \int_{Q_T} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{D}_i f|^2)\right\}.$$

При этом функции $(\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu}$, $|\alpha| \leqq m + 1$ слабо в $L_2(Q_T)$ сходятся к $\mathrm{D}^\alpha u$. Константа C в (5.1) зависит лишь от коэффициентов оператора $a(x, \mathrm{D})$.

Доказательство. Если применить к u^ν теорему 2, то в силу условий на f^ν и φ^ν имеем, что правые части (4.26) и (4.27) равномерно ограничены, так как они сходятся к

$$C\left\{\int_\Omega \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma| \leqq m+1-i} |\mathrm{D}^\gamma \varphi_i|^2\, \mathrm{d}x' + \int_{Q_T} (f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{D}_i f|^2)\, \mathrm{d}x\right\}.$$

Отсюда вытекает слабая компактность функций $(\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu}$ ($|\alpha| \leqq m + 1$) в $L_2(Q_T)$ и функций $(\Delta_0^{\alpha_0} u^\nu)_{\Delta^\nu}$, $(\Delta_i \Delta_0^{\alpha_0} u^\nu)_{\Delta^\nu}$ с $\alpha_0 \leqq m$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ в $L_2(Q_{T,\delta/2})$. Следовательно, некоторая подпоследовательность сходится к функциям $u_\alpha \in L_2(Q_T)$ или $L_2(Q_{T,\delta/2})$, для которых справедлива оценка

$$(5.2)\quad \int_{Q_T} \sum_{|\alpha| \leqq m+1} |u_\alpha|^2 \,\mathrm{d}x \leqq C \left\{ \int_\Omega \sum_{i=0}^{m} \sum_{|\gamma|+m+1-i} |\mathrm{D}^\gamma \varphi_i|^2 \,\mathrm{d}x' + \int_{Q_T} \left(f^2 + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{D}_i f|^2\right) \right\}.$$

Последнее получается с помощью теоремы о норме предела слабо сходящейся последовательности (см. [4]). Докажем теперь, что $u_\alpha = \mathrm{D}^\alpha u$ (обобщенная производная в смысле С. Л. Соболева). Пусть ψ — гладкая периодическая по x' функция, равная нулю вне полосы $\varepsilon \leqq x_0 \leqq T - \varepsilon$, где ε — любое положительное число ($\varepsilon < T/2$). Тогда при $|\alpha| \leqq m + 1$

$$(5.3)\quad \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \Delta^\alpha u^\nu \psi = \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} (-1)^{|\alpha'|} \Delta_0^{\alpha_0} u^\nu \, \Delta^{\alpha'} \psi =$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} u^\nu \, \Delta^\alpha \psi .$$

Здесь использована периодичность ψ по x', финитность ψ по x_0, (2.5) и формула $\overset{-0}{\Delta_0} u\psi = \Delta_0 (u \overset{-0}{\psi}) - (\Delta_0 \overset{-0}{\psi} \,.\, u)$, которая получается из (2.3) при $v = u$, $w = \overset{-0}{\psi}$. Но (5.3) можно записать в виде

$$(5.4)\quad \int_{Q_T} (\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu} \, \psi_{\Delta^\nu} \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{Q_T} (u^\nu)_{\Delta^\nu} \, (\mathrm{D}^\alpha \psi)_{\Delta^\nu} \,\mathrm{d}x + O(\tau^\nu, h^\nu)\,,$$

где $O(\tau, h)$ есть величина порядка τ, h, причем используется гладкость ψ и равномерная ограниченность $u^\nu_{\Delta^\nu}$ в $L_2(Q_T)$. Устремляя $\nu \to \infty$ по слабо сходящейся подпоследовательности $u^\nu_{\Delta^\nu}$, $(\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu}$, получаем

$$(5.5)\quad \int_{Q_T} u_\alpha \, \psi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{Q_T} u \, \mathrm{D}^\alpha \psi \,\mathrm{d}x\,,$$

что и требовалось доказать. Из (5.5) в частности следует

$$(5.6)\quad \int_{Q_T} \psi \, \mathrm{D}_i \, \mathrm{D}^\alpha u \,\mathrm{d}x + \int \mathrm{D}_i \psi \, \mathrm{D}^\alpha u \,\mathrm{d}x = 0$$

для $|\alpha| \leqq m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и произвольной периодической функции ψ. Но левая часть (5.6) равна

$$\int_{S_i{}^{2\pi}} \psi \, \mathrm{D}^\alpha u \,\mathrm{d}\sigma - \int_{S_i{}^0} \psi \, \mathrm{D}^\alpha u \,\mathrm{d}\sigma\,,$$

где S_i^0, $S_i^{2\pi}$ — сечения Q_T плоскостями $x_i = 0, 2\pi$. В виду произвольности и периодичности ψ это означает, что $\mathrm{D}^\alpha u/_{x_i = 2\pi} = \mathrm{D}^\alpha u/_{x_i = 0}$. Поэтому $u \in H^{m+1}(Q_T)$.

Чтобы доказать, что u удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду, умножим (4.2) на такую же функцию ψ как и выше. Суммируя по Ω_Δ и по x_0 от τ до $(M_\Delta - 1)\,\tau$, получаем

$$(5.7) \qquad \int_{Q_T} \{(a_\alpha)_{\Delta^\nu} (\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu} \psi_{\Delta^\nu} - f^\nu_{\Delta^\nu} \psi_{\Delta^\nu}\} \, dx = 0 .$$

Так как $(a_\alpha)_{\Delta^\nu} \to a_\alpha$, $\psi_{\Delta^\nu} \to \psi$ равномерно при $\nu \to \infty$ и $(\Delta^\alpha u^\nu)_{\Delta^\nu} \to D^\alpha u$ слабо в $L_2(D_T)$, то в (5.7) можно перейти к пределу при $\nu \to \infty$ и получить

$$(5.8) \qquad \int_{Q_T} [a(x, D)\, u - f]\, \psi \, dx = 0 .$$

Отсюда в силу произвольности ψ вытекает, что $a(x, D)\, u = f(x)$ выполняется почти всюду. Из (5.5) и (5.2) следует (5.1). Чтобы доказать, что u принимает начальные значения (1.2), заметим прежде всего, что из (4.27) вытекает, аналогично, как (5.5) из (4.26), что $D_0^{\alpha_0} u \in H^1(Q_{T,\delta/2})$, $|\alpha| \leqq m$. Но для $x_0 \leqq 0$

$$D_0^{\alpha_0} u = D_0^{\alpha_0} \sum_0^m x_0^i \varphi_i(x')/i! .$$

Функция из H^1 принимает свои значения на многообразии n измерений, поэтому из последнего равенства вытекает $D_0^{\alpha_0} u/_{x_0=0} = \varphi_{\alpha_0}(x')$, $\alpha_0 \leqq m$.

Сходимость всей последовательности $u^\nu_{\Delta^\nu}$ и единственность полученного решения вытекает из теоремы 4.1 работы [1]. Теорема полностью доказана.

Замечание. Если $a_\alpha(x)$ ($|\alpha| \leqq m$) только ограничены, но не непрерывны, то теорема остается в силе. Для этого достаточно приблизить их непрерывными и перейти к пределу. Если коэффициенты оператора $a(x, D)$, правая часть f и начальные функции φ_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ достаточно гладкие, то решение, построенное в предыдущей теореме, будет классическим.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $a(x) \in C^{1,[n/2]+2}$, $f \in C^{1,[n/2]+2}$, $\varphi_i \in C^{m-i+[n/2]+3}$; *тогда функция* u, *построенная в теореме* 3 *принадлежит* $C^{m+1}(Q_T)$ *и удовлетворяет уравнению* (1.1) *и условиям* (1.2) *в каждой точке. При этом сходимость функций* $(\Delta^\alpha u)_\Delta$ $(|\alpha| \leqq m + 1)$ *при* $\tau, h \to 0$ *к соответствующими производным* $D^\alpha u$ *будет равномерная в* C.

Доказательство этой теоремы использует возможность получения равномерных по h, τ оценок для выражений

$$h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\beta| \leqq m} \sum_{|\gamma| \leqq [n/2]+3, \gamma_0 = 0} |\Delta^\beta \hat{\Delta}^\gamma u|^2 , \quad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \sum_{|\beta| \leqq m} \sum_{|\gamma| \leqq [n/2]+2, \gamma_0 = 0} |\Delta^\beta \hat{\Delta}^\gamma \hat{\Delta}_0 u|^2$$

и следующую лемму, доказанную в работе [5].

Лемма 4.4. *Если* $u(k_0\tau, k'h)$ *периодическая по* x' *функция на сетке, то*

$$\int_\Omega |D^\gamma \tilde{u}(k_0\tau, x')| \, dx' \leqq 4^{|\gamma|} h^n \sum_{\Omega_\Delta} |\hat{\Delta}^\gamma u|^2 \quad (\gamma_0 = 0),$$

где $\tilde{u}(k_0\tau, x') = \sum\limits_p a^{(p)}(k_0\tau)\, \mu^{(p)}(x')$, $x' \in \Omega$ *и* $a^{(p)}(k_0\tau)$ *коэффициенты разложения функции* $u(k_0\tau, k'h)$ *по ортонормированной системе функций на сетке* $\mu^{(p)}(x') = \exp(ip_1x_1)\exp(ip_2x_2)\ldots\exp(ip_nx_n)$ *с* $|p_j| \leqq (N_\Delta - 1)/2$ $(N_\Delta$ *нечетно) или* $-N_\Delta/2 < p_j \leqq N_\Delta/2$ $(N_\Delta$ *четно).*

Таким образом получается равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность в Q_T функций $\widetilde{\Delta^\alpha u}$ для $|\alpha| \leqq m + 1$, продолженных по x_0 линейно между слоями, откуда, в силу единственности решения задачи (1.1), (1.2), вытекает и равномерная сходимость этих продолжений, а в силу равностепенной непрерывности и равномерная сходимость функций $(\Delta^\alpha u)_\Delta$ при τ, $h \to 0$.

Замечание. Теорема 4 обобщается на случай, когда $f \in H^{1,[n/2]+2}$, $\varphi_i \in H^{m+i+[n/2]+3}$.

6. Неявная разностная схема для решения задачи (1.1), (1.2). Все рассуждения предыдущих пунктов можно провести для следующей неявной разностной схемы, преимущество которой заключается в том, что она применима при условии

$$\kappa \leqq R < +\infty \tag{6.1}$$

вместо условия $\kappa \leqq \kappa_0$ [(4.12)], необходимого для явной схемы. R – любая положительная постоянная.

Схема 2. Операторы D_i заменяются разностными операторами $\overline{\Delta}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Определяем функцию u на сетке следующим образом:

$$u(k_0\tau, k_1k, \ldots, k_nh) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(k'h) \frac{(k_0\tau)^i}{i!} \tag{6.2}$$

для $-[\delta/\tau] \leqq k_0 \leqq m$, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – любые целые числа. Для каждой точки $x = \{k_0\tau, k_1h, \ldots, k_nh\}$ с $0 \leqq k_0 \leqq M_\Delta - 1$, $0 \leqq k_j \leqq N_\Delta - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ составляем уравнение

$$a(x, \overline{\Delta})\, u = f(x). \tag{6.3}$$

(6.2) и (6.3) вместе с условиями периодичности составляют разностную схему для последовательного определения u на слоях $x_0 = k_0\tau$ с $k_0 = m + 1, \ldots, M_\Delta + m$, если полученные значения u продолжать периодически из Ω_Δ на весь слой $x_0 = \mathrm{const}$. Разрешимость получаемой при этом алгебраической системы вытекает из энергетического неравенства, аналогичного (4.3).

Для решений схемы 2. справедливы теоремы, аналогичные теоремам пп. 4,5. Разделяющий оператор берется в виде $J_1\{b(x, \overline{\Delta})\, u\}$ и используются другие формулы „интегрирования по частям“ (ср. п. 2). Приведем эти формулы, которые основаны на следующих двух тождествах:

$$(6.4) \qquad h^n \sum_{\Omega_\Delta} \overline{\Delta}_i v\, J_1 w = h^n \sum_{\Omega_\Delta} \Delta_i(J_1 v)\, J_1 w = -\, h^n \sum_{\Omega_\Delta} \overline{\Delta}_i w\, J_1 v\,,$$

которое вытекает из (2.5) для периодических по x' функций v, w и $i = 1, 2, \ldots, n$, и

$$(6.5) \qquad \overline{\Delta}_0 v J_1 w = (vw)_{x_0} - \overline{\Delta}_0 w J_1 v\,,$$

которое вытекает из (2.1).

Этих тождеств было бы достаточно для уравнений с постоянными коэффициентами. В общем случае мы должны преобразовывать выражения

$$\tau h^n \sum_{0}^{M_\Delta - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi \overline{\Delta}_i v\, J_1 w\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

где v, w, ψ, χ периодические по x' функции на сетке. Используя (2.1) и (6.5), имеем

$$(6.6) \quad \tau h^n \sum_{0}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi \overline{\Delta}_0 v\, J_1(\chi w) = \tau h^n \sum_{0}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \{\overline{\Delta}_0(\psi v)\, J_1(\chi w) - \overset{+0}{v}\, \psi_{x_0}\, J_1(\chi w)\} =$$

$$= [h^n \sum_{\Omega_\Delta} \psi\chi v w]_{x_0 = 0}^{x_0 = k_0\tau} - \tau h^n \sum_{0}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \{\overline{\Delta}_0(\chi w)\, J_1(\psi v) + \overset{+0}{v}\, \psi_{x_0}\, J_1(\chi w)\} =$$

$$= [h^n \sum_{\Omega_\Delta} \psi\chi v w]_{x_0 = 0}^{x_0 = k_0\tau} - \tau h^n \sum_{0}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \chi \overline{\Delta}_0 w\, J_1 v \,-$$

$$-\, \tau h^n \sum_{0}^{k_0 - 1} \sum_{\Omega_\Delta} \{\overset{+0}{w}\, \chi_{x_0}\, J_1(\psi v) + \overset{+0}{v}\, \psi_{x_0}\, J_1(\chi w)\}\,.$$

Так как

$$(6.7) \qquad \chi\, \overline{\Delta}_0 v\, J_1(\psi v) = \psi\chi\, \overline{\Delta}_0 v\, J_1 v + \chi\, \overline{\Delta}_0 v\, \tfrac{1}{2} \overset{+0}{v} (\overset{+0}{\psi} - \psi) =$$

$$= \psi\, \overline{\Delta}_0 v\, J_1(\chi v) = \tfrac{1}{2} \overline{\Delta}_0 v \psi\, \overset{+0}{v} (\overset{+0}{\chi} - \chi) + \tfrac{1}{2} \overline{\Delta}_0 v \chi\, \overset{+0}{v} (\overset{+0}{\psi} - \psi) =$$

$$= \psi\, \overline{\Delta}_0 v\, J_1(\chi v) + \tfrac{1}{2} \overset{+0}{v} (\overset{+0}{v} - v) (\chi \psi_{x_0} - \psi \chi_{x_0})\,,$$

то из (6.7) и (6.6) получим

$$(6.8)\qquad \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi\, \bar{\Delta}_0 v\, J_1(\chi v) = \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{\Omega_\Delta} \chi\psi v^2\Big]_{x_0=0}^{x_0=k_0\tau} -$$

$$- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \overset{+0}{v}\, \{\chi_{x_0} J_1(\psi v) + \psi_{x_0} J_1(\psi v)\} -$$

$$- \tfrac{1}{4}\tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \overset{+0}{v}\, (\overset{+0}{v} - v)\,(\chi\psi_{x_0} - \psi\chi_{x_0})\,.$$

Из (2.3) следует для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{\Delta}_i(vw) = J_1\, \Delta_i(vw) = J_1\{\Delta_i v w + \tfrac{1}{2}(\overset{+i}{v}\, w_{x_i} + \overset{-i}{v}\, w_{\bar{x}_i})\} =$$

$$= \bar{\Delta}_i v w + \tfrac{1}{2}\Delta_i\, \overset{+0}{v}\, (\overset{+0}{w} - w) + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{v}\, w_{x_i} + \overset{-i}{v}\, w_{\bar{x}_i})\,,$$

откуда

$$(6.9)\qquad \bar{\Delta}_i(vw) = \bar{\Delta}_i v w + \frac{\kappa}{4}(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v})\, w_{x_0} + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{v}\, w_{x_i} + \overset{-i}{v}\, w_{\bar{x}_i})\,.$$

С помощью (6.9) для $i = 1, 2, \ldots, n$ получаем

$$(6.10)\qquad \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi\, \bar{\Delta}_i v\, J_1(\chi w) = \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \bar{\Delta}_i(\psi v)\, J_1(\chi w) -$$

$$- \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} J_1(\chi w) \left\{\frac{\kappa}{4}(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v})\, \psi_{x_0} + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{v}\, \psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\, \psi_{\bar{x}_i})\right\} =$$

$$= - \tau^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \bar{\Delta}_i(\chi w)\, J_1(\psi v) - J_1(\chi w) \left\{\frac{\kappa}{4}(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v})\, \psi_{x_0} + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{v}\, \psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\, \psi_{x_i}\right) =$$

$$= - \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \chi\, \bar{\Delta}_i w\, J_1(\psi v) -$$

$$- \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} J_1(\psi v) \left\{\frac{\kappa}{4}(\overset{+i,+0}{w} - \overset{-i,+0}{w})\, \chi_{x_0} + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{w}\, \chi_{x_i} + \overset{-i}{w}\, \chi_{\bar{x}_i})\right\} -$$

$$- \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} J_1(\chi w) \left\{\frac{\kappa}{4}(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v})\, \psi_{x_0} + \tfrac{1}{2}J_1(\overset{+i}{v}\, \psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\, \psi_{\bar{x}_i})\right\}.$$

При выводе (6.10) использовано (6.4). Далее имеем

$$(6.11)\qquad \sum_{\Omega_\Delta} \chi\, \bar{\Delta}_i v\, J_1(\psi v) = \sum_{\Omega_\Delta} \{\chi\psi\, \bar{\Delta}_i v\, J_1\, v + \tfrac{1}{2}\chi\, \bar{\Delta}_i v\, \overset{+0}{v}\, (\overset{+0}{\psi} - \psi)\} =$$

$$= \sum_{\Omega_\Delta} \psi\, \bar{\Delta}_i v\, J_1(\chi v) - \sum_{\Omega_\Delta} \{\tfrac{1}{2}\psi\, \bar{\Delta}_i v\, \overset{+0}{v}\, (\overset{+0}{\chi} - \chi) + \tfrac{1}{2}\chi\, \bar{\Delta}_i v\, \overset{+0}{v}\, (\overset{+0}{\psi} - \psi)\}\,.$$

Из (6.10) и (6.11) вытекает

$$
\tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \psi\, \overline{\Delta}_i v\, J_1(\chi v) =
$$
$$
- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \left\{ \frac{\kappa}{4} \Big(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v} \Big) \psi_{x_0} + \tfrac{1}{2} J_1\Big(\overset{+i}{v}\, \psi_{x_i} + \overset{-i}{v}\, \psi_{\bar{x}_i} \Big) \right\} J_1(\chi v) -
$$
$$
- \tfrac{1}{2}\tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \left\{ \frac{\kappa}{4} \Big(\overset{+i,+0}{v} - \overset{-i,+0}{v} \Big) \chi_{x_0} + \tfrac{1}{2} J_1\Big(\overset{+i}{v}\, \chi_{x_i} + \overset{-i}{v}\, \chi_{\bar{x}_i} \Big) \right\} J_1(\psi v) +
$$
$$
+ \frac{\kappa}{8} \tau h^n \sum_{0}^{k_0-1} \sum_{\Omega_\Delta} \overset{+0}{v} \left(\psi \chi_{x_0} - \chi \psi_{x_0} \right) J_1\Big(\overset{+i}{v} - \overset{-i}{v} \Big) . \tag{6.12}
$$

В остальном все доказательства являются повторением соответствующих доказательств для явной схемы и поэтому их не приводим.

Литература

[1] *Л. Гординг:* Прямое решение задачи Коши для гиперболических уравнений. Математика (Сборник переводов) *2 : 1*, (1958), 81—95.

[2] *J. Leray:* Lectures on hyperbolic equations with var. coef. Institute for Advanced Study. Princeton, 1952.

[3] *О. А. Ладыженская:* Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва, 1953.

[4] *Ф. Риэс-Б. С. Надь:* Лекции по функциональному анализу. Москва 1954.

[5] *О. А. Ладыженская:* Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. Ученные записки ЛГУ, вып. *23* (1952), 192—246.

[6] *Й. Копачек:* Решение задачи Коши для гиперболических уравнений методом конечных разностей. ДАН СССР, т. *141*, № 3 (1961), 551—554.

Summary

FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS OF ARBITRARY ORDER

JIŘÍ KOPÁČEK, Praha

Two stable difference schemes (explicit and implicit) for the solution of the Cauchy problem for linear hyperbolic equations of arbitrary order are presented, and the existence of the solution of this problem proved.

The results of this paper were published without proofs in [6].