František Nožička

Les transformations de Lorentz en tant que cas spécial de correspondances plus générales dans l'espace de Minkowski

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 4, 609–628

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100643

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964 Прага

LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ EN TANT QUE CAS SPÉCIAL DE CORRESPONDANCES PLUS GÉNÉRALES DANS L'ESPACE DE MINKOWSKI

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Reçu le 17 octobre 1963)

Dans ce travail, on établit d'une manière originale les transformations générales de Lorentz à l'aide d'une condition très simple (voir (2,3)), et dont on purrait se servir aussi dans le cas de systèmes non-inertiels spéciaux. On montre également que les transformations de Lorentz peuvent s'écrire d'une façon symbolique sous la forme très simple de (2,20). Le travail fournit une base pour la généralisation des transformations de Lorentz au cas de systèmes non-inertiels; ces problèmes seront traités dans un travail ultérieur, formant la suite de celui-ci.

Le présent travail se rattache au travail antérieur du même auteur „Les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski" (voir ce Journal, *13* (1963), 290–321). Dans nos considérations, nous profiterons des résultats et des notions introduites dans le travail cité, tout en gardant la même notation, en particulier la convention d'Einstein, usuelle dans le calcul tensoriel. Les indices désignés par des lettres latines prennent les valeurs 1, 2, 3, les indices grecs prennent les valeurs 1, 2, 3, 4.

Ce travail a pour but d'introduir un certain système de coordonnées de l'observateur, se déplaçant suivant la trajectoire donnée dans le système inertiel donné, et d'étudier, à l'aide de ce système nouveau (qu'on appelle système de coordonnées propre de l'observateur (voir le paragraphe 2), en accord avec le terme de „temps propre"), les correspondances existant entre le système de coordonnées du système inertiel original et celui d'un autre système, que l'on y introduit. Le résultat principal du paragraph 2, c'est notre théorème 1, où l'on définit une certaine correspondance spéciale qui est biunivoque sous certaines conditions. En particulier, dans le cas où il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme, cette correspondance est biunivoque dans l'espace de Minkowski tout entier. On montre alors que la correspondance en question coincide, dans ce cas particulier, avec les transformations de Lorentz. Il est donc possible de déduire de cette manière à l'aide de la condition (2, 3) du paragraphe 2 les transformations générales de Lorentz, que l'on peut écrire sous la forme très simple de (2,20). Au paragraphe 3, on discute la condition (2,3) caractérisant les correspondances ainsi introduites du point de vue de la Géométrie et de la Physique.

Pour des raisons de notation, nous nous référons à deux travaux seulement, désignés dans la suite par (I) et (II); ce sont

(I) Les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski. (Czechoslovak Math. Journal, *13* (1963), 290–321.)

(II) Elementareigenschaften der Weltlinien und gleichförmig beschleunigte Bewegung in der Minkowskischen Mechanik. (Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, *3* (1962), 2.)

1. Remarques introductives. Dans un système inertiel donné $E(x, y, z) \equiv E(x^i)$ de temps t le mouvement d'une particule de masse inertielle μ soit décrit par le système d'équations

$$(1,1) \qquad x^i = x^i(t)\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

où nous supposerons que

a) les fonctions $x^i(t)$ sont au moins cinq fois continument différentiables pour $t \in (-\infty, \infty)$;

b) pour chaque $t \in (-\infty, \infty)$ il existe un nombre positif $\underset{0}{v}$ tel que l'on ait

$$(1,2) \qquad v \equiv \sqrt{\left(\delta_{ik} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)} < \underset{0}{v} < c\,.$$

A la trajectoire (1,1), il est associé, dans l'espace linéaire à quatre dimensions correspondant de coordonnées x, y, z, t, une géodésique décrite par

$$(1,3) \qquad x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,,$$

où $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$, $x^4 \equiv t$, et où

$$(1,4) \qquad \tau = \int_{\underset{0}{t}}^{t} \sqrt{\left(1 - \frac{(v)^2}{(c)^2}\right)} \,\mathrm{d}t\,,$$

$\underset{0}{t}$ étant fixé, $\underset{0}{t} \in (-\infty, \infty)$ [1]), est le „temps propre„ de la particule M (ou bien de l'observateur „lié" à la particule M). Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ où

$$(1,5) \qquad g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,, \quad g_{44} = -c^2\,, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq \beta$$

introduit une métrique indéfinie dans l'espace linéaire correspondant. Cet espace métrique est donc un espace de Minkowski à quatre dimensions; nous le désignerons par $L(x^\alpha)$.

[1]) Il est aisé de montrer que sous l'hypothèse (1,1) le paramètre τ parcourt l'intervale $(-\infty, \infty)$.

Pour la géodésique C décrite par (1,3) on a donc les formules de Frenet (voir (I), p. 310)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{1}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu} \underset{2}{i^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i^\alpha} = \frac{P}{\mu c^2} \underset{1}{i^\alpha} + \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i^\alpha}, \tag{1,6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{3}{i^\alpha} = -\frac{Q}{\mu c} \underset{2}{i^\alpha} + \frac{R}{\mu c} \underset{4}{i^\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{4}{i^\alpha} = -\frac{R}{\mu c} \underset{3}{i^\alpha},$$

où les vecteurs $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ sont orthonormaux au sens de la métrique de Minkowski

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i^\alpha} \underset{1}{i^\beta} = -c^2, \quad g_{\alpha\beta} \underset{2}{i^\alpha} \underset{2}{i^\beta} = g_{\alpha\beta} \underset{3}{i^\alpha} \underset{3}{i^\beta} = g_{\alpha\beta} \underset{4}{i^\alpha} \underset{4}{i^\beta} = 1, \tag{1,7}$$

$$g_{\alpha\beta} \underset{r}{i^\alpha} \underset{s}{i^\beta} = 0, \quad \text{pour} \quad r \neq s. \quad \mathrm{Det}\left[\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}\right] = 1,$$

où $\underset{1}{i^\alpha} = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\tau$ et le vecteur $\underset{2}{i^\alpha}$ a la même direction que le vecteur $\mu(\mathrm{d}^2x^\alpha/\mathrm{d}\tau^2)$, c'est-à-dire le vecteur de force de Minkowski. Les grandeurs scalaires P, Q, R définies par les équations (1,6) aux points de la géodésique ont la dimension physicale de force. On trouve dans (I) les formules (3,4) (4,9), $(4,22)_b$ montrant comment on peut exprimer ces scalaires. On a en particulier

$$P = \mu \left(g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2} \right)^{1/2}. \tag{1,8}$$

De même: $P = O \Rightarrow Q = R = O$, $Q = O \Rightarrow R = O$.

Désignons par X le point de coordonnées X^α, et par $\underset{0}{X}$ le point de coordonnées $\underset{0}{X^\alpha}$ (etc) dans l'espace de Minkowski $L \equiv L(x^\alpha)$. L'ensemble

$$K_{\underset{0}{x}} = \mathscr{E}[X \in L;\ g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{X^\alpha})(X^\beta - \underset{0}{X^\beta}) = 0] \tag{1,9$_a$}$$

est un bi-cône isotropique de centre $\underset{0}{X}$. Les ensembles

$$^+K_{\underset{0}{x}} = \mathscr{E}[X \in K_{\underset{0}{x}};\ X^4 \geqq \underset{0}{X^4}], \tag{1,9$_b$}$$

$$^-K_{\underset{0}{x}} = \mathscr{E}[X \in K_{\underset{0}{x}};\ X^4 \leqq \underset{0}{X^4}] \tag{1,9$_c$}$$

représentent les cônes „positif" et „négatif" isotropique ayant le point $\underset{0}{X}$ pour sommet. Alors le théorème énoncé et démontré dans (II) est valable (voir II), p. 11, théorème 1.)

Lemme 1. *Soient* (1,1) *les équations de mouvement d'une particule de masse dans le système inertiel donné, et soient* (1,3) *les équations de la géodésique correspon-*

dante dans l'espace $L(x^\alpha)$ de Minkowski. Supposons que (1,2) a lieu aux points de la géodésique. Alors pour tout point $\underset{0}{X} \in L$ il existe un et un seul point $\underset{1}{X}$ de la ligne (1,3) pour lequel $\underset{1}{X} \in {}^-K_{\underset{0}{x}}$, et un et un seul point $\underset{2}{X}$ pour lequel $\underset{2}{X} \in {}^+K_{\underset{0}{x}}$.

Remarque 1. Si $\underset{0}{X}$ est justement sur la géodésique, alors les points $\underset{0}{X}, \underset{1}{X}, \underset{2}{X}$ coincident. Le point $\underset{0}{X}$ est le sommet commun des deux cônes ${}^+K_{\underset{0}{x}}$, ${}^-K_{\underset{0}{x}}$. Si $\underset{0}{X}$ ne se trouve pas sur la ligne, nous trouvons $\underset{1}{X} \neq \underset{2}{X}$.

2. M-système de coordonnées (Le système de coordonnées propre d'un observateur dans M). Soit $X \equiv \{X^\alpha\}$ un point quelconque dans L, $X(\tau) \equiv \{x^\alpha(\tau)\}$ un point quelconque de la géodésique (1,3). Alors le vecteur $X^\alpha - x^\alpha(\tau)$ dans L peut etre exprimé comme une combinaison linéaire de vecteurs linéairement indépendants $\underset{1}{i}^\alpha, \underset{2}{i}^\alpha, \underset{3}{i}^\alpha, \underset{4}{i}^\alpha$ au point $x(\tau)$ qui figurent dans les formules de Frenet (1,6) et jouissent des propriétés (1,7). Donc

$$X^\alpha - x^\alpha(\tau) = \xi^0 \underset{1}{i}^\alpha(\tau) + \xi^1 \underset{2}{i}^\alpha(\tau) + \xi^2 \underset{3}{i}^\alpha(\tau) + \xi^3 \underset{4}{i}^\alpha(\tau)\,, \tag{2,1}$$

où $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ sont les coefficients de cette combinaison linéaire. En vertu de (1,7), il découle de (2,1)

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{1}{i}^\beta(\tau) = -\, c^2 \xi^0\,,$$

c'est-à-dire

$$\xi^0 = -\, \frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{1}{i}^\beta(\tau)\,. \tag{2,2}$$

Lemme 2. *Soit $X \equiv \{X^\alpha\}$ un point quelconque dans L (un „événement" quelconque) qui ne se trouve pas sur la géodésique (1,3). Soient $\underset{1}{X} \equiv \{x^\alpha(\underset{1}{\tau})\}$, $\underset{2}{X} = \{x^\alpha(\underset{2}{\tau})\}$ deux points de la ligne (1,3), jouissant de la propriété (1,2), où les cônes isotropiques ${}^-K_x$, ${}^+K_x$ la coupent.*[2] *Il existe alors au moins une valeur du paramètre $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ telle que l'on a*

$$g_{\alpha\beta}(X^\alpha - x^\alpha(\tau))\, \underset{1}{i}^\beta(\tau) = 0\,. \tag{2,3}$$

Démonstration. En vertu des définitions $(1,9)_b$, $(1,9)_c$ des cônes ${}^+K_x$, ${}^-K_x$ et du bicône K_x, nous avons

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{1}{\tau})]\,[X^\beta - x^\beta(\underset{1}{\tau})] = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{2}{\tau})]\,[x^\beta - x^\beta(\underset{2}{\tau})] = 0\,,$$

[2]) D'après notre lemme 1, il existe une paire $\underset{1}{X}, \underset{2}{X}$, déterminé sans ambiguité. Il est évident que $\underset{1}{\tau} < \underset{2}{\tau}$.

où $X = \{X^\alpha\}$ est un point fixe (voir l'énoncé). D'après le théorème de la moyenne, il existe une valuer $\tilde{\tau} \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ telle que

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{2}{\tau})]\,[X^\beta - x^\beta(\underset{2}{\tau})] - g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{1}{\tau})]\,[X^\beta - x^\beta(\underset{1}{\tau})] =$$
$$= (\underset{2}{\tau} - \underset{1}{\tau})\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,[X^\beta - x^\beta(\tau)]\right\}_{\tau=\tilde{\tau}} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tilde{\tau})]\,\underset{1}{i}^\beta(\tilde{\tau}) = 0\,,$$

car

$$(2,3)^* \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,[X^\beta - x^\beta(\tau)] = -2g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{1}{i}^\beta(\tau),\ \underset{1}{i}^\beta(\tau) = \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}.$$

Notre lemme 2 est donc démontré.

Lemme 3. *Dans les hypothèses du lemme* 2, *on a*

$$(2,4)_a \qquad g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,[X^\beta - x^\beta(\tau)] > 0 \quad \text{pour tout} \quad \tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})\,,$$
$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{1}{\tau})]\,\underset{1}{i}^\beta(\underset{1}{\tau}) < 0\,,$$
$$(2,4)_b \qquad g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{2}{\tau})]\,\underset{1}{i}^\beta(\underset{2}{\tau}) > 0\,.$$

Démonstration. La fonction $\Phi(\tau) = g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,[X^\beta - x^\beta(\tau)]$ est manifestement continue pour toutes les valeurs du paramètre τ de la géodésique C, et ne s'annule — en vertu du lemme 1 et de la remarque 1 — que pour $\tau = \underset{1}{\tau}$ et $\tau = \underset{2}{\tau}$. Elle est donc soit toujours positive, soit toujours négative, dans l'intervalle $(\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$. Il résulte de la définition des cônes ^-K_x, ^+K_x et de la supposition $X \notin C$, que $X^4 < x^4(\underset{2}{\tau})$, $X^4 > x^4(\underset{1}{\tau})$. Il existe donc $\tilde{\tau} \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ tel que $X^4 = x^4(\tilde{\tau})$. Pour cette valuer $\tilde{\tau}$ nous avons alors

$$\Phi(\tilde{\tau}) = g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tilde{\tau})]\,[X^\beta - x^\beta(\tilde{\tau})] =$$
$$= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tilde{\tau})]\,[X^k - x^k(\tilde{\tau})] - c^2[X^4 - x^4(\tilde{\tau})]^2 =$$
$$= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tilde{\tau})]\,[X^k - x^k(\tilde{\tau})] > 0\,,$$

car si l'on avait $\delta_{ik}[X^i - x^i(\tilde{\tau})]\,[X^k - x^k(\tilde{\tau})] = 0$, on aurait $X^i - x^i(\tilde{\tau}) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, ce qui signifierait, vu que $X^4 - x^4(\tilde{\tau}) = 0$, que le point X coincide avec le point $X(\tilde{\tau}) = \{x^\alpha(\tilde{\tau})\}$ et se trouve donc sur la géodésique C, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses. Il en découle évidemment $(2,4)_a$.

Comme $\Phi(\underset{1}{\tau}) = \Phi(\underset{2}{\tau}) = 0$, $\Phi(\tau) > 0$ pour $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$, on a

$$\frac{\Phi(\tau) - \Phi(\underset{1}{\tau})}{\tau - \underset{1}{\tau}} > 0 \quad \text{pour} \quad \tau > \underset{1}{\tau}\,, \qquad \frac{\Phi(\tau) - \Phi(\underset{2}{\tau})}{\tau - \underset{2}{\tau}} < 0\,, \quad \text{pour} \quad \tau < \underset{2}{\tau}$$

donc $\Phi'(\underset{1}{\tau}) \geqq 0$, $\Phi'(\underset{2}{\tau}) \leqq 0$. Il découle de (2,1) et (1,7) que

$$\Phi(\tau) = g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,[X^\beta - x^\beta(\tau)] = -\,(\xi^0)^2\,c^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2\,.$$

Comme $\Phi(\underset{1}{\tau}) = \Phi(\underset{2}{\tau}) = 0$, il en résulte

$$(\xi^0)^2 = \frac{1}{c^2}\,[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2] \tag{2,5}$$

pour les valuers $\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau}$. Si l'on avait, simultanément pour $\underset{1}{\tau}$ et $\underset{2}{\tau}$, $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 0$, il résulterait de (2,5) et (2,1) que l'on a $X^\alpha = x^\alpha(\underset{1}{\tau})$, $X^\alpha = x^\alpha(\underset{2}{\tau})$, en contradiction avec l'hypothèse $X \notin C$. De cela et de (2,5), il résulte que l'on a $\xi^0 \neq 0$ pour $\underset{1}{\tau}$ et $\underset{2}{\tau}$, d'où il découle ensuite en vertu de (2,2)

$$\begin{aligned}\Phi'(\tau) &= -\,2g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = -\,2g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{1}{i^\beta} = \\ &= 2c^2\xi^0 \neq 0 \quad \text{pour} \quad \underset{1}{\tau} \text{ et } \underset{2}{\tau}\,,\end{aligned} \tag{2,6}$$

donc $\Phi'(\underset{1}{\tau}) \neq 0$, $\Phi'(\underset{2}{\tau}) \neq 0$. En raison des inégalités $\Phi'(\underset{1}{\tau}) \geqq 0$, $\Phi'(\underset{2}{\tau}) \leqq 0$, il s'en ensuit $\Phi'(\underset{1}{\tau}) > 0$, $\Phi'(\underset{2}{\tau}) < 0$. Il découle alors de (2,6) que l'on a

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{1}{\tau})]\,\underset{1}{i^\beta}(\underset{1}{\tau}) < 0\,, \quad g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\underset{2}{\tau})]\,\underset{1}{i^\beta}(\underset{2}{\tau}) > 0\,,$$

et ce sont les inégalités $(2,4)_b$ qu'il fallait démontrer.

Théorème 1. *Soit $X \equiv \{X^\alpha\}$ un point quelconque dans L, soit C une géodésique décrite par (1,3), jouissant de la propriété (1,2), soit $X \notin C$. Supposons que l'ensemble des $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$, qui ont la propriété (2,3),[3] soit composé d'un seul point. Alors les relations*

$$X^\alpha = x^\alpha(\tau) + \xi^1 \underset{2}{i^\alpha}(\tau) + \xi^2 \underset{3}{i^\alpha}(\tau) + \xi^3 \underset{4}{i^\alpha}(\tau) \tag{$2,6_a$}$$

déterminent une correspondance biunivoque existant entre le quadruple (X^1, X^2, X^3, X^4) est le quadruple $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ pour $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$.

---

[3]) Pour la signification des points $\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau}$ voir notre lemme 2.

Démonstration. Soit donné un quadruple $[X^1, X^2, X^3, X^4]$, c'est-à-dire un point $X \equiv \{X^\alpha\} \in L$. Alors pour tout point $x(\tau) \equiv \{x^\alpha(\tau)\}$ de la géodésique C nous pouvons écrire(2, 1), d'où il résulte en vertu de $(1,7)$

$$(2,6)_b \qquad \begin{aligned} \xi^1 &= g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{2}{i}^\beta(\tau)\,, \\ \xi^2 &= g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{3}{i}^\beta(\tau)\,, \\ \xi^3 &= g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{4}{i}^\beta(\tau)\,. \end{aligned}$$

D'après notre lemme 2 et les hypothèses du théorème à démontrer il existe un et un seul nombre $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ tel que $(2,3)$ a lieu. Si nous calculons cette valeur τ à partir de $(2,3)$ et la substituons ensuite dans $(2,6)_b$, nous obtenons, d'une manière univoque, le triple nombre ξ^1, ξ^2, ξ^3. A tout quadruple (X^1, X^2, X^3, X^4) il est donc associé un quadruple $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ où $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$.

Lorsque $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$, $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$, est donné, il y correspond par $(2,6)_b$ un et un seul quadruple (X^1, X^2, X^3, X^4).

Remarque 2. On peut éliminer l'hypothèse de $X \notin C$ de l'énoncé du théorème 1. Si $X \in C$, alors $X^\alpha = x^\alpha(\tau)$, et le quadruple (X^1, X^2, X^3, X^4) correspond à $(0, 0, 0, \tau)$ et vice versa.

Remarque 3. L'hypothèse du théorème 1 disant que l'ensemble des $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ vérifiant $(2,3)$ n'est composé que d'un point est certainement satisfaite si la fonction $\varphi(\tau) \equiv g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{1}{i}^\beta(\tau)$ est croissante dans $\langle \underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau} \rangle$. En effet, il découle alors immédiatement de $(2,4)_6$ qu'il existe une seule valuer $\tau \in (\underset{1}{\tau}, \underset{2}{\tau})$ pour laquelle $\varphi(\tau) = 0$.

Remarque 4. Si l'ensemble des $\tau \in (\underset{1}{\tau}\ \underset{2}{\tau})$ vérifiant $(2,3)$ n'était pas composé d'un seul point, les relations $(2,6)_a$ ne détermineraient pas une correspondance biunivoque entre (X^1, X^2, X^3, X^4) et $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$.

Remarque 5. Le „temps propre„ τ, c'est-à-dire le paramètre de la géodésique $(1,3)$ a la dimension du temps. En vertu des formules de Frenet $(1,6)$ et des relations $(2,6)_b$ nous trouvons facilement que les coefficients ξ^1, ξ^2, ξ^3 de la combinaison linéaire du membre droit de $(2,6)_a$ ont la dimension de longueur.

Les valeurs $\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ étant données, la correspondance $(2,6)_a$ donne $X^\alpha = x^\alpha(\tau)$; nous obtenons donc un point de la géodésique, ou encore la position de l'observateur lié à la particule qui se meut suivant la trajectoire $(1,1)$ dans le système inertiel original E. Nous voyons donc que τ est vraiment le temps propre de l'observateur. Comme ξ^1, ξ^2, ξ^3 ont la dimension de longueur et que la correspondance $(2,6)_a$ est biunivoque (sous les hypothèses de notre théorème), nous pouvons prendre les quadruples $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ pour un système particulier de coordonnées de l'observateur lié à la particule[4]) qui se meut suivant la trajectoire décrite par (1,1). Nous pouvons donc énoncer la définition suivante:

Définition 1. Soit C la géodésique dans L correspondant à la trajectoire d'une particule M dans le système inertiel original aux coordonnées cartésiennes x, y, z, et où t est le temps. Soit (1,3) la description de cette géodésique dans L. Nous appelons alors le système $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ *système propre de coordonnées d'origine M (ou bien système propre de coordonnées de l'observateur lié à la particule M)*.

Exemple 1. Dans le système inertiel x, y, z, t le mouvement d'une particule de masse est écrit par les équations

$$(2,7)_a \qquad x = a \cos \omega t\,, \quad y = a \sin \omega t\,, \quad z = 0\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

où $a > 0$, $\omega > 0$ sont des constantes et $a\omega < c$. Fixons un $\underset{0}{t} \in (-\infty, \infty)$. D'après (1,2), (1,4) nous calculons facilement

$$(2,7)_b \qquad \tau = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\right)}\left(t - \underset{0}{t}\right).$$

Il découle alors de $(2,7)_{a,b}$

$$(2,7)_c \qquad \underset{1}{i}^1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{a\omega}{\sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}} \sin \omega t\,,$$

$$\underset{1}{i}^2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{a\omega}{\sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}} \cos \omega t\,,$$

$$\underset{1}{i}^3 = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = 0\,, \quad \underset{1}{i}^4 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}}\,,$$

$$(2,7)_d \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{a\omega^2}{1 - (a^2\omega^2)/c^2} \cos \omega t\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{a\omega^2}{1 - (a^2\omega^2)/c^2} \sin \omega t\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\,.$$

Nous avons donc en vertu de (1,8) et (1,5)

$$P^2 = \mu^2 \left(g_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \frac{\mathrm{d}^2x^\beta}{\mathrm{d}\tau^2}\right) = \mu^2 \left[\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2\right] = \mu^2 \frac{a^2\omega^4}{[1 - (\omega^2a^2)/c^2]^2}\,,$$

[4]) Voilà qui est dit d'une façon heuristique, pour aider l'intuition. Nous identifions l'„observateur" avec le point correspondant de la trajectoire.

c'est-à-dire

$$(2{,}7)_e \qquad P = \frac{\mu a \omega^2}{1 - (a^2\omega^2)/c^2} \,.$$

A partir de $(2{,}7)_{d,e}$ et de la première formule de Frenet de (1,6) nous trouvons

$$(2{,}8)_a \qquad \underset{2}{i}{}^1 = -\cos \omega t \,, \quad \underset{2}{i}{}^2 = -\sin \omega t \,, \quad \underset{2}{i}{}^3 = 0 \,, \quad \underset{2}{i}{}^4 = 0 \,.$$

D'après la deuxième formule de Frenet (1,6) on a

$$(2{,}8)_b \qquad \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}{}^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \underset{2}{i}{}^\alpha - \frac{P}{\mu c^2} \underset{1}{i}{}^\alpha \,.$$

A partir de $(2{,}8)_b$, $(2{,}8)_a$, $(2{,}7)_e$, $(2{,}7)_c$ nous trouvons

$$(2{,}8)_c \qquad \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}{}^1 = \frac{\omega}{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]^{\frac{3}{2}}} \sin \omega t \,, \qquad \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}{}^2 = \frac{\omega}{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]^{\frac{3}{2}}} \cos \omega t \,,$$

$$\frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}{}^3 = 0 \,, \qquad \frac{Q}{\mu c} \underset{3}{i}{}^4 = \frac{a\omega^2}{c^2 \, [1 - (a^2\omega^2)/c^2]^{\frac{3}{2}}} \,.$$

Comme nous avons $g_{\alpha\beta} \underset{3}{i}{}^\alpha \underset{3}{i}{}^\beta = 1$ d'après (1,7), il résulte des relations précédentes

$$\frac{Q^2}{\mu^2 c^2} = \frac{\omega^2}{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]^2}$$

donc

$$(2{,}8)_d \qquad Q = \frac{\mu c \omega}{1 - (a^2\omega^2)/c^2} \,.$$

Une modification de $(2{,}8)_{c,d}$ donne

$$(2{,}8)_e \qquad \underset{3}{i}{}^1 = \frac{1}{\sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}} \sin \omega t \,, \qquad \underset{3}{i}{}^2 = \frac{-1}{\sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}} \cos \omega t \,,$$

$$\underset{3}{i}{}^3 = 0 \,, \qquad \underset{3}{i}{}^4 = -\frac{a\omega}{c^2 \sqrt{[1 - (a^2\omega^2)/c^2]}} \,.$$

Nous calculons le vecteur $\underset{4}{i}{}^\alpha$ à partir des conditions

$$g_{\alpha\beta} \underset{1}{i}{}^\alpha \underset{4}{i}{}^\beta = 0 \,, \quad g_{\alpha\beta} \underset{2}{i}{}^\alpha \underset{4}{i}{}^\beta = 0 \,, \quad g_{\alpha\beta} \underset{3}{i}{}^\alpha \underset{4}{i}{}^\beta = 0 \,,$$

$$g_{\alpha\beta} \underset{4}{i}{}^\alpha \underset{4}{i}{}^\beta = 1 \,, \quad \mathrm{Det}\,[\underset{1}{i}{}^\alpha, \underset{2}{i}{}^\alpha, \underset{3}{i}{}^\alpha, \underset{4}{i}{}^\alpha] = 1 \,;$$

(cf. (1,7)) et des vecteurs $\underset{1}{i}{}^\alpha$, $\underset{2}{i}{}^\alpha$, $\underset{3}{i}{}^\alpha$ déjà connus à l'aide de $(2{,}7)_a$, $(2{,}8)_a$, $(2{,}8)_b$, $(2{,}8)_e$. Nous obtenons ainsi

$$(2{,}8)_f \qquad \underset{4}{i}{}^1 = 0 \,, \quad \underset{4}{i}{}^2 = 0 \,, \quad \underset{4}{i}{}^3 = 1 \,, \quad \underset{4}{i}{}^4 = 0 \,.$$

Il n'est pas nécessaire de calculer le scalaire R figurant dans les formules de Frenet (1,6), car la courbe donné est une courbe plane dans le système inertiel donné (voir (I), théorème 14).

Soit maintenant (X, Y, Z, T) un point quelconque dans L (un „événement„ quelconque). Si nous écrivons alors la condition (2,3) sous la forme

$$\delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \underset{1}{i^k}(\tau) - c^2[T - t(\tau)] \underset{1}{i^4} = 0\,,$$

il en découle

$$T - t(\tau) = \frac{1}{c^2 \underset{1}{i^4}} \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \underset{1}{i^k}(\tau)\,. \tag{2,9$_a$}$$

Lorsque les équations $(2,6)_b$ revetent les formes équivalentes de

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \underset{2}{i^k}(\tau) - c^2[T - t(\tau)] \underset{2}{i^4}\,,\\
\xi^2 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \underset{3}{i^k}(\tau) - c^2[T - t(\tau)] \underset{3}{i^4}\,,\\
\xi^3 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \underset{4}{i^k}(\tau) - c^2[T - t(\tau)] \underset{4}{i^4}
\end{aligned}$$

et que nous y substituons d'après $(2,9)_a$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \left(\underset{2}{i^k} - \frac{\underset{1}{i^k}\underset{2}{i^4}}{\underset{1}{i^4}} \right),\\
\xi^2 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \left(\underset{3}{i^k} - \frac{\underset{1}{i^k}\underset{3}{i^4}}{\underset{1}{i^4}} \right),\\
\xi^3 &= \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)] \left(\underset{4}{i^k} - \frac{\underset{1}{i^k}\underset{4}{i^4}}{\underset{1}{i^4}} \right).
\end{aligned} \tag{2,9$_b$}$$

Dans notre cas spécial de la trajectoire $(2,7)_a$ les relations $(2,9)_b$ deviennent – après une substitution pour $\underset{1}{i^\alpha}, \underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ d'après les formules $(2,7)_c$, $(2,8)_a$, $(2,8)_c$, $(2,8)_f$ et après quelques modifications –

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= a - (X \cos \omega t + Y \sin \omega t)\,,\\
\xi^2 &= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\right)} (X \sin \omega t - Y \cos \omega t)\,,\\
\xi^3 &= Z\,.
\end{aligned} \tag{2,10$_a$}$$

Dans le cas spécial de la trajectoire $(2,7)_a$ la relation $(2,9)_a$ donne

$$(2,10)_b \qquad T - t = \frac{a\omega}{c^2}\sqrt{\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}\right)}\left[- X \sin \omega t + Y \cos \omega t\right],$$

où nous pouvons remplacer t par la fonction τ de (1,2). L'équation $(2,10)_b$ n'a pas (en générale) une solution t univoque pour le point (X, Y, Z, T) fixé (arbitrairement).

Nous savons d'après notre lemme 1 et remarque 1 que le bicône isotropique de centre (X, Y, Z, T) coupe la géodésique associé à la trajectoire $(2,7)_a$ soit en deux points correspondant aux valuers $\underset{1}{t} < \underset{2}{t}$, soit en un seul point (si $\underset{1}{t} = \underset{2}{t}$). Le cas de $\underset{1}{t} = \underset{2}{t}$, où le point (X, Y, Z, T) se trouve sur la trajectoire correspondante est trivial: la condition $(2,10)_b$ se réduit ici à la relation $T = t = t(\tau)$. Si ce n'est pas le cas, nous savons qu'il existe dans l'intervalle $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$ au moins une valeur T pour laquelle $(2,10)_b$ a lieu. Mais cette valeur n'est pas, en général, la solution univoque de l'équation $(2,10)_b$ dans l'intervalle $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t})$. Dans ce cas spécial, la correspondance (2,4) n'est donc pas biunivoque pour tous les points $(X, Y, Z, T) \in L$.

Considérons dans L l'ensemble particulier des points $(0, 0, 0, T)$, $T \in (-\infty, \infty)$, ce qui correspond aux points de la géodésique de l'observateur dans le système inertiel original. Dans ce cas particulier, l'équation $(2,10)_b$ a une seule solution $t = T$ et les relations $(2,10)_a$ prennent la forme

$$(2,11) \qquad \xi^1 = a\,, \quad \xi^2 = \xi^3 = 0\,.$$

Les équations (2,11) ne sont donc rien d'autre que les équations de mouvement des origines du système inertiel original par rapport au système („propre") de l'observateur lié à la particule M dont la trajectoire est décrite, dans le système inertiel original, par les équations (2,7). Il en résulte aussi l'interprétation évidente du système propre dans le cas spécial considéré.

Exemple 2. Dans le système inertiel de l'exemple 1, la trajectoire de la particule M soit décrite par les équations

$$(2,12) \quad x = v^1(t - \underset{0}{t}) + \underset{0}{x}\,, \quad y = v^2(t - \underset{0}{t}) + \underset{0}{y}\,, \quad z = v^3(t - \underset{0}{t}) + \underset{0}{z}\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

où $v^1, v^2, v^3, \underset{0}{x}, \underset{0}{y}, \underset{0}{z}, \underset{0}{t}$ sont des constantes et $0 < v^2 = \delta_{ik}v^iv^k < c^2$. Nous avons donc

$$(2,13)_a \qquad \frac{dx}{dt} = v^1\,, \quad \frac{dy}{dt} = v^2\,, \quad \frac{dz}{dt} = v^3$$

et d'après (1,2),

$$(2,13)_b \qquad \tau = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}\,(t - \underset{0}{t})\,.$$

Il résulte de $(2,13)_{a,b}$ que l'on a

$$(2,13)_c \qquad \underset{1}{i}^1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{v^1}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}\,, \quad \underset{1}{i}^2 = \frac{v^2}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}\,,$$
$$\underset{3}{i}^1 = \frac{v^3}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}\,, \quad \underset{1}{i}^4 = \frac{1}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}\,.$$

Comme il s'agit, dans notre cas de la trajectoire (2,12), d'un mouvement rectiligne uniforme, nous avons $P = Q = R = 0$ où P, Q, R sont les scalaires figurant dans les formules de Frenet (1,6) (cf. (I), théorème 12, p. 312). Il résulte des formules de Frenet que pour la trejectoire (2,12) les vecteurs $\underset{2}{i}^\alpha, \underset{3}{i}^\alpha, \underset{4}{i}^\alpha$ sont constants dans L. Choisissons-les d'une façon quelconque mais telle que les conditions (1,7) soient satisfaites. Définissons les vecteurs $\underset{s}{u}^\alpha$, $s = 1, 2, 3$ comme suit

$$(2,14) \qquad \underset{s}{u}^i = \delta^i_s + \frac{R-1}{(v)^2}\,\delta_{sl}v^lv^i\,, \quad i = 1, 2, 3, \quad \underset{s}{u}^4 = \frac{Rv^s}{(c)^2}\,,$$

où nous écrivons pour simplifier

$$(2,15) \qquad R = \frac{1}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}\,.$$

Proposition 1. *Les vecteurs $\underset{s}{u}^\alpha$, $s = 1, 2, 3$ définis par (2,14) forment avec le vecteur $\underset{1}{i}^\alpha$ un système orthogonal au sens de la métrique de Minkowski, c'est-à-dire que l'on a*

$$(2,16) \qquad g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^\alpha\underset{s}{u}^\beta = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\underset{s}{u}^\alpha\underset{r}{u}^\beta = \delta_{rs}\,, \quad r, s = 1, 2, 3\,.$$

Démonstration. De $(2,13)_c$ et (2,14) il découle d'une part

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i}^\alpha\underset{s}{u}^\beta = \delta_{ik}\underset{1}{i}^k\underset{s}{u}^i - (c)^2\,\underset{1}{i}^4\underset{s}{u}^4 = \delta_{ik}\underset{1}{i}^k\left(\delta^i_s + \frac{R-1}{(v)^2}\,\delta_{sl}v^lv^i\right) - (c)^2\,\underset{1}{i}^4\,\frac{Rv^s}{(c)^2} =$$
$$= \underset{1}{i}^s + \frac{R-1}{(v)^2}\,(v)^2\,v^s\underset{1}{i}^4 - Rv^s\underset{1}{i}^4 = \underset{1}{i}^s(1 + R - 1 - R) = 0\,.$$

d'autre part — en tenant compte de (2,15) —

$$g_{\alpha\beta}\underset{s}{u}^\alpha\underset{r}{u}^\beta = \delta_{ik}\underset{s}{u}^i\underset{r}{u}^k - (c)^2\,\underset{s}{u}^4\underset{r}{u}^4 = \delta_{ik}\left(\delta^i_s + \frac{R-1}{(v)^2}\,v^sv^i\right)\left(\delta^k_r + \frac{R-1}{(v)^2}\,v^rv^k\right) -$$
$$- \frac{1}{(c)^2}\,R^2v^sv^r = \delta_{rs} + 2\,\frac{R-1}{(v)^2}\,v^rv^s + \frac{(R-1)^2}{(v)^2}\,v^sv^r - \frac{R^2}{(c)^2}\,v^sv^r =$$

$$= \delta_{rs} + \frac{v^r v^s}{(v)^2}\left(2R - 2 + R^2 - 2R + 1 - \frac{R^2(v)^2}{(c)^2}\right) =$$

$$= \delta_{rs} + \frac{v^r v^s}{(v)^2}\left[-1 + R^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right] = \delta_{rs} .$$

Proposition 2. *Soient* $\underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ *trois vecteurs constants arbitraires aux points de la géodésique correspondant à la trajectoire* (2,12), *ces vecteurs satisfaisant aux relations* (1,7). *Il existe alors des nombres* A_r^s $(s, r = 1, 2, 3)$, *déterminés sans ambiguité, tels que*

(2,17)
$$\underset{r+1}{i^\alpha} = A_r^s \underset{s}{u^\alpha} ,$$

où $\underset{s}{u^\alpha}$ *sont les vecteurs définis par* (2,14) *et la matrice*

(2,18)
$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Démonstration. Comme nous avons $g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{s}{u^\beta} = 0$, $g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\ \underset{s+1}{i^\beta} = 0$, pour $s = 1, 2, 3$, on peut écrire les vecteurs $\underset{s+1}{i^\alpha}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\underset{1}{u^\alpha}, \underset{2}{u^\alpha}, \underset{3}{u^\alpha}$, c'est-à-dire sous la forme (2,17). Il s'ensuit alors des conditions (1,17) et des relations (2,16) que l'on a

$$\delta_{rs} = g_{\alpha\beta}\ \underset{r+1}{i^\alpha}\ \underset{s+1}{i^\beta} = g_{\alpha\beta}\underset{l}{u^\alpha}\underset{k}{u^\beta} A_s^l A_r^k = A_s^l A_r^k \delta_{lk} ,$$

ce qui entraine l'orthogonalité de la matrice (2,18).

Il s'agit maintenant de déterminer le système propre de coordonnées (au sens de la définition 1, voir p. 616) de l'observateur en M dans notre cas particulier de la trajectoire (2,12). Ici nous pouvons écrire la condition (2,3), c'est-à-dire la condition

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\ \underset{1}{i^\beta}(\tau) = 0$$

— compte tenu des relations $(2,13)_{a,b,c}$ — comme suit:

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\ \underset{1}{i^\beta}(\tau) = \delta_{ik}[X^i - x^i(\tau)]\ \underset{1}{i^k} - c^2[T - t(\tau)]\ \underset{1}{i^4} =$$

$$= \delta_{ik}[X^i - v^i(t - \underset{0}{t}) - \underset{0}{x^i}]\,\frac{v^k}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} - c^2(T - \underset{0}{t})\,\frac{1}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} =$$

$$= \delta_{ik}\left(X^i - v^i\,\frac{\tau}{[\sqrt{1 - (v/c)^2}]} - \underset{0}{x^i}\right)\frac{v^k}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} -$$

$$- c^2 . \left(T - \underset{0}{t} - \frac{\tau}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}}\right)\frac{1}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} = 0 ,$$

c'est-à-dire, après quelques modifications,

$$\delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, v^k - c^2(T - \underset{0}{t}) + [c^2 - (v)^2] \frac{\tau}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} = 0\,.$$

De cela, nous obtenons ensuite

$$\frac{1}{(c)^2}\, \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, v^k - (T - \underset{0}{t}) + \sqrt{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}\, \tau = 0\,,$$

d'où il résulte

$$(2{,}19)_a \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}} \left[(T - \underset{0}{t}) - \frac{1}{c^2}\, \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, v^k\right].$$

En tenant compte de $(2{,}13)_c$, nous pouvons écrire $(2{,}19)_a$ d'une manière plus consise comme

$$(2{,}19)_b \qquad \tau = -\frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{1}{i^\beta}\,.$$

Nous voyons donc que, pour le cas particulier de la trajectoire (2,12) considéré, $(2{,}19)_b$ est équivalent à la condition (2,3).

Toujours pour notre cas spécial de (2,12), écrivons les relations $(2{,}6)_b$ à l'aide des relations $(2{,}13)_{a,b,c}$ comme

$$\begin{aligned}
\xi^s &= g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\, \underset{s+1}{i^\beta}(\tau) = \\
&= \delta_{ik}[X^i - \underset{0}{x^i}(\tau)]\, \underset{s+1}{i^k} - c^2[T - t(\tau)]\, \underset{s+1}{i^4} = \\
&= \delta_{ik}[X^i - \underset{0}{x^i} - v^i(t - \underset{0}{t})]\, \underset{s+1}{i^k} - c^2(T - t)\, \underset{s+1}{i^4} = \\
&= \delta_{ik}\left(X^i - \underset{0}{x^i} - v^i \frac{\tau}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}}\right) \underset{s+1}{i^k} - c^2\left(T - \underset{0}{t} - \frac{\tau}{\sqrt{[1 - (v/c)^2]}}\right) \underset{s+1}{i^4} = \\
&= \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, \underset{s+1}{i^k} - c^2(T - \underset{0}{t})\, \underset{s+1}{i^4} - \tau\{\delta_{jk}\underset{1}{i^j}\, \underset{s+1}{i^k} - c^2 \underset{1}{i^4}\, \underset{s+1}{i^4}\} = \\
&= g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{s+1}{i^\beta} - \tau g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\, \underset{s+1}{i^\beta}\,.
\end{aligned}$$

Or en vertu de (1,7) nous avons $g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\, \underset{s+1}{i^\beta} = 0$ pour $s = 1, 2, 3$. Donc $\xi^s = g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{1}{x^\alpha})\, \underset{s+1}{i^\beta}$ pour $s = 1, 2, 3$. Cela donne avec $(2{,}19)_b$ l'énoncé suivant:

Dans le cas de la trajectoire (2,12) le système d'équations

$$(2{,}20) \qquad \xi^s = g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{s+1}{i^\beta}\,, \quad \tau = -\frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{1}{i^\beta}\,,$$

où $\underset{s+1}{i^\alpha}$, $s = 1, 2, 3$ sont des vecteurs arbitraires jouissant de la propriété

$$(2{,}20)_a \qquad g_{\alpha\beta}\, \underset{1}{i^\alpha}\, \underset{s+1}{i^\beta} = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\, \underset{s+1}{i^\alpha}\, \underset{r+1}{i^\beta} = \delta_{sr}\,, \quad r, s = 1, 2, 3\,,$$

décrit une correspondance biunivoque existant entre les quadruples (X, Y, Z, T), $(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau)$ dans L entier.

En conclusion de notre exemple 2 nous allons énoncer le théorème suivant:

Théorème 2. *Les relations* $(2{,}20)$, *c'est-à-dire les relations*

$$\xi^s = g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{s+1}{i^\beta}\,, \quad \tau = -\frac{1}{(c)^2}\, g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{1}{i^\beta}\,,$$

où $\underset{s+1}{i^\alpha}$ $(s = 1, 2, 3)$ *sont des vecteurs constants arbitraires jouissant de la propriété* $(2{,}20)_a$ *et* $\underset{1}{i^\beta}$ *est le vecteur défini par* $(2{,}13)_c$, *représentent les transformations de Lorentz générales. Les transformations de Lorentz sont un cas spécial de la correspondance* $(2{,}6)_a$.

Démonstration. D'après $(2{,}17)$, les trois premières des relations $(2{,}20)$ peuvent être écrites sous la forme

$$(2{,}21) \qquad \xi^s = A^r_s\, g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{r}{u^\beta}\,,$$

où la matrice des éléments A^r_s, c'est-à-dire la matrice $(2{,}18)$, est orthogonale (en vertu de la proposition 2). Or d'après $(2{,}14)$ nous avons

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha})\, \underset{r}{u^\beta} &= \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, \underset{r}{u^k} - c^2(T - \underset{0}{t})\, \underset{r}{u^4} = \\ &= \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i}) \left(\delta^i_r - \frac{R-1}{(v)^2}\, v^r v^i\right) - Rv^r(T - \underset{0}{t}) = \\ &= X^r - \underset{0}{x^r} - \frac{R-1}{(v)^2}\, v^r \delta_{ik}(X^i - \underset{0}{x^i})\, v^k - Rv^r(T - \underset{0}{t})\,. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire $(2{,}21)$ comme

$$(2{,}22) \qquad \xi^s = \delta_{rk} A^r_s \left\{X^k - \underset{0}{x^k} - Rv^k(T - \underset{0}{t}) - \frac{R-1}{(v)^2}\, v^k \delta_{il}(X^i - \underset{0}{x^i})\, v^l\right\}, \qquad s = 1, 2, 3\,.$$

Mais les relations $(2{,}22)$ jointes à la relation $(2{,}19)_a$ représentent les transformations de Lorentz dans le cas le plus général (voir (I), p. 291).

Remarque 6. Dans notre exemple 1, nous avons d'une part déduit les transformations de Lorentz générales et, d'autre part, nous avons montré qu'il est possible de les écrire sous la forme concise $(2{,}20)$, où $\underset{2}{i^\alpha}, \underset{3}{i^\alpha}, \underset{4}{i^\alpha}$ sont des vecteurs vérifiant $(2{,}20)_a$, d'ailleurs quelconques.

3. Conclusion. Pour une valeur $\tau \in (-\infty, \infty)$ fixée du paramètre de la géodésique C décrite par (1,3), la condition (2,3) admet une interprétation géométrique: elle détermine l'hyperplan dans L orthogonal, au sens de la métrique dans L, à la géodésique C dans son point $x(\tau) = \{x^\alpha(\tau)\}$. Aux points situés sur l'hyperplan

$$R_\tau = \mathscr{E}[X \in L;\ g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\ \underset{1}{i^\beta}(\tau) = 0]\,,$$

où $\tau \in (-\infty, \infty)$ est un nombre fixé, correspond donc le même τ, c'est-à-dire le même temps de l'observateur lié à la particule M dont ke mouvement est caractérisé par la géodésique C. Dans le cas où la géodésique donnée est une droite dans L, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un mouvement rectiligne uniforme de la particule M dans le système inertiel original original, alors le système des hyperplans R_τ suivant cette droite forme un systèmed 'hyperplans parallèles (ces hyperplans représentent donc une congruence d'hyperplans dans L). Chacun de ces hyperplans à trois dimensions représente pour l'observateur en M l'„espace d'événements simultanés", car l'observateur en M associe le même temps τ à chaque point $X \in R_\tau$.

Lorsque $\tau \in (-\infty, \infty)$ est fixé, l'hyperplan R_τ est décrit par les relations paramétriques $(2,6)_a$ d'où il résulte

$$(2,23)_a \qquad B_1^\alpha \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^1} = \underset{2}{i^\alpha}(\tau)\,, \quad B_2^\alpha \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^2} = \underset{3}{i^\alpha}(\tau)\,, \quad B_3^\alpha \equiv \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^3} = \underset{4}{i^\alpha}(\tau)\,.$$

La métrique indéfinie de l'espace Lde Minkowski, définie par le tenseur $g_{\alpha\beta}$ donné par (1,5), induit sur R_τ une métrique, qui est complètement déterminée par le tenseur

$$(2,23)_b \qquad a_{jk} \equiv g_{\alpha\beta} B_j^\alpha B_k^\beta \quad (j, k = 1, 2, 3)\,.$$

Pour le tenseur a_{jk} il s'ensuit de $(2,23)_b$, $(2,23)_a$ et (1,17) que $a_{jk} = \delta_{jk}$ (= 1 pour $j = k$, et = 0 pour $j \neq k$). Nous voyons donc la métrique induite sur R_τ est (pour tout $\tau \in (-\infty, \infty)$ fixé) euclidienne. Les nombres ξ^1, ξ^2, ξ^3 sont donc, pour l'observateur en M, les coordonnées cartésiennes orthogonales des points dans son espace R_τ d'événements simultanés. La condition (2,3), qui conduirait, dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, sans équivoque aux transformations de Lorentz, est donc, du point de vue de la Physique, tout à fait acceptable.

Mais il est possible d'interpréter la condition (2,3), dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, d'une autre façon encore. En effet, supposons que la géodésique$C$ soit une droite dans L. Alors nous avons pour les scalaires P, Q, R dans les formules de Frenet (1,6) l'égalité

$$(2,24) \qquad P = Q = R = 0\,.$$

Soit $X \in L$, $X \notin C$, un point arbitraire. D'après notre lemme 1 et notre remarque 1 le cône isotropique K_x, coupe la droite C en deux points distincts $\{x^\alpha(\underset{1}{\tau})\}$, $\{x^\alpha(\underset{2}{\tau})\}$; nous pouvons supposer $\underset{1}{\tau} < \underset{2}{\tau}$. Ce fait admet l'interprétation physicale que voici:

l'observateur lié à la particule M, dont le mouvement par rapport au système inertiel original est caractérisé par la géodésique C, émet à l'instant (propre) $\underset{1}{\tau}$ des signaux lumineux dans toutes les directions. Un de ces signaux atteint une autre particule N (le point N) en position X^1, X^2, X^3 et au moment T (pour un observateur dans le système inertiel original). En ce même instant T, le point N est source de signaux lumineux repartant dans toutes les directions. Un de ces signaux reflétés atteint l'observateur lié à M à l'instant $\underset{2}{\tau}$ (de son temps propre). Cet observateur déclarera alors que le signal correspondant a atteint la particule N (et a été refléchi par elle) à l'instant

$$\tau = \frac{\underset{1}{\tau} + \underset{2}{\tau}}{2}\,. \tag{2,25}$$

A présent, nous allons démontrer la proposition suivante:

Soit C une géodésique, décrite par (1,3) et jouissant de la propriété (1,2). Soit $X \in L - C$, d'ailleurs quelconque. Soient $\{x^\alpha(\underset{2}{\tau})\}$, $\{x^\alpha(\underset{1}{\tau})\}$ les deux points de la géodésique C où les cônes ${}^{+}K_x$, ${}^{-}K_x$ (dans cet ordre) intersectent la géodésique C. [5]) Alors pour tout $\tau \in (-\infty, \infty)$, nous avons l'identité

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{1}{i}^\beta(\tau) = \int_{\underset{1}{\tau}}^{\tau} P g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{2}{i}^\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \\ - \frac{1}{\underset{2}{\tau} - \underset{1}{\tau}} \int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} \int_{\underset{1}{\tau}}^{\tau} P g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{2}{i}^\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau + c^2\left(\tau - \frac{\underset{1}{\tau} + \underset{2}{\tau}}{2}\right). \tag{2,26}$$

Ecrivons

$$f_1(\tau) = g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{1}{i}^\beta(\tau)\,, \tag{2,27$_a$}$$

$$f_2(\tau) = \int_{\underset{1}{\tau}}^{\tau} P g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{2}{i}^\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \\ - \frac{1}{\underset{2}{\tau} - \underset{1}{\tau}} \int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} \int_{\underset{1}{\tau}}^{\tau} P g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)]\,\underset{2}{i}^\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau + c^2\left(\tau - \frac{\underset{1}{\tau} + \underset{2}{\tau}}{2}\right). \tag{2,27$_b$}$$

A partir de cela et de la première des formules de Frenet (1,6), nous trouvons facilement que l'on a $\mathrm{d}f_1/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}f_2/\mathrm{d}\tau$ pour tout $\tau \in (-\infty, \infty)$, donc

$$f_1 = f_2 + k\,, \quad k \ldots \text{constant}\,. \tag{2,27$_c$}$$

[5]) L'existence et l'unicité de cette paire de points sont garanties par notre lemme 1.

Par intégration de $\underset{1}{\tau}$ à $\underset{2}{\tau}$, nous obtenons

$$(2,27)_d \qquad \int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} f_1 \, d\tau = \int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} f_2 \, d\tau + k(\underset{2}{\tau} - \underset{1}{\tau}) .$$

Or d'après (2,3)* et la définition des valeurs $\underset{2}{\tau}$, $\underset{1}{\tau}$, on a

$$\int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} f_1(\tau) \, d\tau = - \tfrac{1}{2} \{g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)] \, [X^\beta - x^\beta(\tau)]\}_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} = 0 .$$

Il résulte alors de $(2,27)_b$

$$\int_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} f_2(\tau) \, d\tau = \frac{c^2}{2} \left(\tau - \frac{\underset{1}{\tau} + \underset{2}{\tau}}{2} \right)^2 \Bigg|_{\underset{1}{\tau}}^{\underset{2}{\tau}} = 0 .$$

De cela et de $(2,27)_c$ nous obtenons l'identité (2,26).

Si C est une droite et que l'observateur lié à M définisse la simultanéité au moyen de la radiolocation, c'est-à-dire par la définition (2,25), il résulte alors de (2,24), (2,25) et (2,26)

$$g_{\alpha\beta}[X^\alpha - x^\alpha(\tau)] \, \underset{1}{\dot{x}^\beta}(\tau) = 0 ,$$

et c'est justement la condition (2,3). C'est donc à bon droit que nous avons pris l'hyperplan R_τ pour le monde d'événements simultanés pour l'observateur en M, dans le cas du mouvement rectiligne uniforme. Remarquons encore que la condition (2,3) est invariante par rapport au choix du système inertiel original, c'est-à-dire invariante par les transformations de Lorentz.

Il se pose maintenant la question de savoir s'il ne serait pas possible de prendre la condition (2,5) comme le point de départ pour une généralisation des transformations de Lorentz aux systèmes non-inertiels, c'est-à-dire de déduire à partir de cette condition une correspondance biunivoque existant entre les systèmes non-inertiels, dans l'espace L entier. Or cela n'est pas possible en général, car les hyperplans R_τ définis suivant une géodésique dans L qui n'est pas droite ne forment pas une congruence, d'où il s'ensuit que la correspondance $(2,6)_a$ n'est pas biunivoque dans L entier. Mais il est bon de signaler que, dans le cas du mouvement rectiligne uniforme, la condition (2,3) est équivalente à la définition de simultanéité par (2,25). Nous montrerons dans un travail ultérieur comment ce fait peut être exploité pour généraliser les transformations de Lorentz aux systèmes non-inertiels.

Резюме

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОРЕНЦА КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ БОЛЕЕ ОБЩИХ СООТВЕТСТВИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА, Прага

Пусть в данной инерциальной системе $E(x, y, z)$ для рвемени t движение материальной точки задано системой уравнений $x^i = x^i(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, причем предполагается:

а) функции $x^i(t)$ по крайней мере пять раз дифференцируемы на интервале $(-\infty, \infty)$,

Б) существует положительное число $\underset{0}{v}$ такое, что

(I) $$v \equiv \sqrt{\left(\delta_{ik} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right)} < \underset{0}{v} < c\,, \quad (c \ldots \text{скорость света})$$

для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

Требование (I) усиливающее обыкновенное предположение (что материальная точка движется с точки зрения наблюдателя каждой инерциальной системы со скоростью меньшей c), позволяет ввести подходящую координатную систему наблюдателя, движущегося вдоль выше рассматриваемой траектории, и на основе этой новой системы координат (которая в работе называется собственной координатной системой наблюдателя) перейти к соответствиям между исходной инерциальной системой координат и новой системой.

Пусть

(II) $$x^\alpha = x^\alpha(\tau)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4\,,$$

представляют уравнения мировой линии в пространстве Минковского, которая соответствует выше рассматриваемой траектории материальной точки, причем

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)} \mathrm{d}t$$

представляет собственное время этой точки. В каждой точке $\{x^\alpha(\tau)\}$ этой мировой линии можно выбрать систему четырех векторов $\underset{1}{i}^\alpha, \underset{2}{i}^\alpha, \underset{3}{i}^\alpha, \underset{4}{i}^\alpha$, где $\underset{1}{i}^\alpha = \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$, которые ортонормированы в смысле метрики Минковского т. е.

$$g_{\alpha\beta} \underset{\nu}{i}^\alpha \underset{\mu}{i}^\beta = g_{\nu\mu}$$

(причем $g_{\nu\mu}$ – метрический тензор пространства Минковского). Эти векторы являются векторами, выступающими в формулах Френе (1,6) этой работы.

Если точка x, координаты которой в исходной инерциальной системе равны x^α, то вектор, компоненты которого $X^\alpha - x^\alpha(\tau)$, можно представить в виде линейной комбинации векторов $\underset{1}{i^\alpha}(\tau)$, $\underset{1}{i^\alpha}(\tau)$, $\underset{3}{i^\alpha}(\tau)$, $\underset{4}{i^\alpha}(\tau)$ т. е.

$$X^\alpha - x^\alpha(\tau) = \xi^0 \underset{1}{i^\alpha}(\tau) + \xi^1 \underset{2}{i^\alpha}(\tau) + \xi^2 \underset{3}{i^\alpha}(\tau) + \xi^3 \underset{4}{i^\alpha}(\tau)\,.$$

Система этих четырех уравнений в месте с условием

(III) $$g_{\alpha\beta}\big(X^\alpha - x^\alpha(\tau)\big)\,\underset{1}{i^\beta}(\tau) = 0$$

определяет при определенных предположениях взаимно простые соответствия между (x^1, x^2, x^3, x^4) и $(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Теорема 1 абзаца 2 касается именно этого соответствия, которое определено уравнениями $(2{,}6)_a$.

В случае, когда материальная точка движется равномерно и прямолинейно, соответствующие преобразования $(2{,}6)_a$ переходят в преобразования Лоренца. Отсюда вытекает, что (общие) преобразования Лоренца можно коротко записать в виде

$$\xi^s = g_{\alpha\beta}\big(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha}\big)\,\underset{s+1}{i^\beta}\,, \quad s = 1, 2, 3\ ;$$

$$\tau = -\frac{1}{c^2}\, g_{\alpha\beta}\big(X^\alpha - \underset{0}{x^\alpha}\big)\,\underset{1}{i^\beta}\,,$$

где $\underset{s+1}{i^\alpha}$ — любые постоянные векторы, обладающие свойством

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\,\underset{s+1}{i^\beta} = 0\,, \quad g_{\alpha\beta}\,\underset{s+1}{i^\alpha}\;\underset{v+1}{i^\beta} = \delta_{vs}\,,$$

и $\underset{1}{i^\alpha}$ — вектор, для которого $g_{\alpha\beta}\underset{1}{i^\alpha}\underset{1}{i^\beta} = -c^2$.

В заключение работы рассматриваются физическое и геометрическое значения условия (III).