František Zítek
Fonctions aléatoires d'intervalle, IV

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 3, 416–435

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100684`

FONCTIONS ALÉATOIRES D'INTERVALLE, IV

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 7 novembre 1964)

L'article forme la suite des travaux antérieurs publiés sous le même titre dans ce journal. Il est dédié, d'une part, au développement de la théorie de l'intégrale (pB), et, d'autre part, à l'étude des propriétés d'une certaine modification des notions d'intégrale (pB) et d'intégrale (BB).

1. INTRODUCTION

Dans le présent article, nous supposons connus les résultats principaux des trois travaux antérieurs portant le même titre: [6], [7] et [8]. Dans notre travail [6], nous avons introduit e.a. les notions d'intégrale (BB) et d'intégrale (pB) d'une fonction aléatoire d'intervalle. Leurs théories se développaient d'abord tout à fait parallèlement; plus tard, dans [7], [8] et quelques autres travaux, seule l'intégrale (BB) était considérée. Un des buts du présent article est justement de prolonger ce parallélisme existant entre la théorie de l'intégrale (BB) et celle de l'intégrale (pB) et de compléter, autant que possible, la théorie de l'intégrale (pB) par des résultats analogues à ceux qui sont déjà connus pour l'intégrale (BB). De plus, nous introduirons ici deux nouvelles notions: l'intégrale (pS) et l'intégrale (BS). Nous étudierons leurs propriétés fondamentales ainsi que leurs rapports aux notions d'intégrale (pB) et d'intégrale (BB). Nous essaierons aussi de définir une nouvelle notion de dérivée d'une fonction aléatoire, en comparant ses propriétés avec celles de la dérivée introduite dans [7], paragraphe 4.

En général, nous maintenons ici également le système de notations introduit dans [6], [7] et [8], avec quelques légères modifications seulement. Afin d'éviter toute équivoque possible, nous allons commencer par un rappel sommaire des notions et des symboles les plus importants.

Les mots d'*intervalle* et de *partition* d'un intervalle gardent le même sens que dans [6] (voir p. 584 et 588). Il en est de même des symboles $|I|$, $\boldsymbol{K}$, $\nu(\mathscr{D})$, Ω, $\mathfrak{S}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $V\{x\}$, $\sim$, (voir [6], p. 583, 484 et 588). Par $\mathfrak{D}(J)$ nous désignerons le système de toutes les partitions de l'intervalle J donné.

Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux partitions d'un intervalle J, nous dirons que $\mathscr{D}_1$ est *plus fine* que $\mathscr{D}_2$, ou bien que $\mathscr{D}_2$ est plus grossière que $\mathscr{D}_1$, ou bien encore que $\mathscr{D}_1$ est un raffinement de $\mathscr{D}_2$, et nous écrirons $\mathscr{D}_1 \leqq \mathscr{D}_2$, lorsque pour tout intervalle $I \in \mathscr{D}_1$ il existe un intervalle $I' \in \mathscr{D}_2$ tel que $I \subset I'$. La relation $\leqq$ ainsi introduite est donc évidemment une relation d'ordre partiel dans le système $\mathfrak{D}(J)$ en question. Le symbole de $\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2$, où $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}_2 \in \mathfrak{D}(J)$, désignera „le plus grossier commun raffinement" des partitions $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, c'est-à-dire la partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$ jouissant des propriétés que voici: a) $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_1$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_2$; b) si $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}_2$, alors $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}$. Il est clair que

$$(1.1) \qquad (\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2) \leqq \mathscr{D}_1\,, \quad (\mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2) \leqq \mathscr{D}_2\,;$$

$$(1.2) \qquad \mathscr{D}_1 \leqq \mathscr{D}_2 \;\Rightarrow\; \nu(\mathscr{D}_1) \leqq \nu(\mathscr{D}_2)\,.$$

Si $J \in \boldsymbol{K}$, nous écrirons $\mathscr{D}_J$ pour dénoter „la plus grossière partition de K renfermant J", c'est-à-dire la partition $\mathscr{D}_J \in \mathfrak{D}(K)$ jouissant des propriétés a') $J \in \mathscr{D}_J$; b') si $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(K)$, $J \in \mathscr{D}$, alors $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_J$.

Pour la notion de *fonction aléatoire d'intervalle*, nous renvoyons de nouveau à [6], p. 584. Rappelons encore que toutes les fonctions aléatoires dont nous parlerons ici seront toujours des fonctions aléatoires d'intervalle *à accroissements indépendants*, définies dans un intervalle K (non-vide) donné.

Au lieu du symbole encombrant de $S(\mathscr{D}, J, X)$, (voir [6], (3.1), p. 588), nous écrirons tout simplement $X(\mathscr{D})$ pour dénoter la somme $\sum_{I \in \mathscr{D}} X(I)$.

La fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ étant donnée, nous posons comme d'habitude (pour simplifier, nous omettons partout ω ($\omega \in \Omega$) à l'intérieur des accolades désignant des événements aléatoires)

$$(1.3) \qquad F(I, x) = \mathbf{P}\{X(I) \leqq x\}\,, \quad -\infty < x < \infty\,,$$

$$(1.4) \qquad \varphi(I, s) = \int_\Omega e^{isX(I)}\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\,\mathrm{d}F(I, x)\,.$$

2. LES INTÉGRALES (pB) ET (pS)

La notion d'intégrale (pB) d'une fonction aléatoire d'intervalle a été introduite dans [6], § 3. Sa définition peut être donnée de deux manières différentes:

Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire définie dans K, soit $J \in \boldsymbol{K}$, $Z \in \mathfrak{X}^*$. Nous dirons que la fonction $\boldsymbol{X}$ a dans l'intervalle J l'intégrale (pB) égale à Z, (pB)-$\int_J \boldsymbol{X} = Z$, lorsque

a) pour toute suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de $\mathfrak{D}(J)$ telle que $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, la suite $X(\mathscr{D}_n)$ tend vers Z en probabilité; ou bien (l'autre version)

b) pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver $\delta > 0$ tel que si $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $v(\mathscr{D}) < \delta$, alors

$$(2.1) \qquad \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - \mathrm{Z}| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon .$$

Nous allons définir maintenant une nouvelle notion d'intégrale, analogue à la précédente: nous dirons que la fonction $\boldsymbol{X}$ admet dans J une intégrale pS, $(pS)-\int_J \boldsymbol{X}$, égale à Z, lorsque

b') pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(J)$ telle que (2.1) ait lieu pour tout $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$.

La définition peut également être exprimée à l'aide de la convergence de suites $\{X(\mathscr{D}_n)\}$; cependant, c'est un peu plus compliqué que dans le cas de l'intégrale (pB) (condition a) de ci-dessus): nous avons $(pS)-\int_J \boldsymbol{X} = \mathrm{Z}$, lorsque

a') il existe une suite $\{\mathscr{D}_n^*\}$, $\mathscr{D}_n^* \in \mathfrak{D}(J)$, $n = 1, 2, \dots$ telle que la suite $X(\mathscr{D}_n)$ tend vers Z en probabilité chaque fois que $\{\mathscr{D}_n\}$ est une suite de partitions, $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{D}(J)$, qui jouit des deux proprétés suivantes:

(i) $\mathscr{D}_{n+1} \leqq \mathscr{D}_n$ pour $n = 1, 2, \dots$,

(ii) pour chaque entier positif n il existe un entier positif $k(n)$ tel que $\mathscr{D}_{k(n)} \leqq \mathscr{D}_n^*$. [1])

Nous avons étudié déjà dans [6] certaines propriétés de l'intégrale (pB). On peut s'attendre que les propriétés de l'intégrale (pS) sont analogues; c'est pourquoi nous considérons, dans ce qui suit, les deux intégrales parallèlement. Tout d'abord, nous allons envisager le rapport mutuel de ces deux notions; le résultat est exprimé par le suivant théorème 1 et aussi par le théorème 6.

Théorème 1. *Si la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ donnée admet dans l'intervalle $J \in \boldsymbol{K}$ une intégrale (pB), elle y admet aussi une intégrale (pS) et l'on a*

$$(2.2) \qquad \mathbf{P}\left\{(pB) - \int_J \boldsymbol{X} = (pS) - \int_J \boldsymbol{X}\right\} = 1 .$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif, soit $\delta > 0$ tel que pour $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $v(\mathscr{D}) < \delta$, (2.1) a lieu, où, bien entendu, $Z = (pB)-\int_J \boldsymbol{X}$. Soit $\mathscr{D}_0$ une telle partition. En vertu de (1.2), nous avons (2.1) pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$ plus fine que $\mathscr{D}_0$. Donc, l'intégrale (pS) de $\boldsymbol{X}$ dans J existe. La relation (2.2) n'est alors qu'une simple conséquence du fait bien connu que la limite d'une suite de variables aléatoires convergeant en probabilité est déterminée à $V\{0\}$ près.

Par contre, il est aisé de trouver l'exemple d'une fonction aléatoire qui admet une intégrale (pS) dans l'intervalle en question, mais qui n'a pas d'intégrale (pB). En

[1]) On démontre facilement l'équivalence des deux définitions (b') et a')) et l'unicité de l'intégrale (pS) ainsi définie, à l'aide des propriétés fondamentales de la relation $\leqq$ dans $\mathfrak{D}(J)$ (cf. [3], chap. I, théorème 5.1). Comme d'habitude, nous regardons comme égales les variables aléatoires égales presque sûrement (cf. [6]).

effet, soit $K = \langle 0, 1)$, $X(I) = V\{1\}$ pour $I = \langle a, \frac{1}{2})$, $0 \leqq a < \frac{1}{2}$; $X(I) = V\{0\}$ autrement. Il est clair que $(pS) - \int_K \mathbf{X} = V\{1\}$ existe, tandis que $(pB) - \int_K \mathbf{X}$ n'existe pas (cf. aussi [6], § 6).

Avant d'étudier d'autres propriétés de l'intégrale (pS), nous allons établir le théorème suivant, qui nous sera très utile dans la suite (cf. [6], théorème 16).

Théorème 2. *Pour que l'intégrale (pS) d'une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ donnée existe dans l'intervalle $J \in K$, il faut et il suffit que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(J)$, telle que pour toute paire de partitions $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, $\mathscr{D}'' \leqq D_\varepsilon$, ait lieu l'inégalité*

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}'')| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon . \tag{2.3}$$

Démonstration. Comme dans le cas du théorème 16 de [6], il s'agit ici, en principe, de la condition de Bolzano-Cauchy pour la convergence en probabilité. Pour voir que la condition (2.3) est nécessaire, il suffit de considérer les inégalités

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}'')| \geqq \varepsilon\} &\leqq \\ \leqq \mathbf{P}\left\{\left|X(\mathscr{D}') - (pS)\text{-}\int_J \mathbf{X}\right| + \left|X(\mathscr{D}'') - (pS)\text{-}\int_J \mathbf{X}\right| \geqq \varepsilon\right\} &\leqq \\ \leqq \mathbf{P}\left\{\left|X(\mathscr{D}') - (pS)-\int_J \mathbf{X}\right| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon\right\} + \mathbf{P}\left\{\left|X(\mathscr{D}'') - (pS)\text{-}\int_J \mathbf{X}\right| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon\right\} &; \end{aligned} \tag{2.4}$$

dans la suite, nous nous servirons souvent d'inégalités analogues.

Supposons maintenant la condition (2.3) vérifiée. Posons successivement $\varepsilon = 1/2n$, $n = 1, 2, \ldots$; soit $\{\mathscr{D}_n\}$ la suite des partitions $\mathscr{D}_\varepsilon$ (voir l'énoncé) correspondantes. Pour $n = 1, 2, \ldots$ écrivons ensuite $\mathscr{D}_n^* = \mathscr{D}_1 \wedge \mathscr{D}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{D}_n$. Nous aurons alors

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_n^*) - X(\mathscr{D}_{n+p}^*)| \geqq 1/2n\} \leqq 1/2n$$

pour tout $p > 0$; il en résulte que la suite de variables aléatoires $X(\mathscr{D}_n^*)$ est de Cauchy en probabilité. Elle est donc aussi convergente; soit Z sa limite. Pour tout $n = 1, 2, \ldots$ nous avons de nouveau

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_n^*) - \mathrm{Z}| \geqq 1/2n\} \leqq 1/2n . \tag{2.5}$$

Soit maintenant $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_n^*$. En vertu des conditions données et de la définition des partitions $\mathscr{D}_n^*$, nous avons d'une part

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - X(\mathscr{D}_n^*)| \geqq 1/2n\} \leqq 1/2n ,$$

et d'autre part (2.5), de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - \mathrm{Z}| \geqq 1/n\} &\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - X(\mathscr{D}_n^*)| + |X(\mathscr{D}_n^*) - \mathrm{Z}| \geqq 1/n\} \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - X(\mathscr{D}_n^*)| \geqq 1/2n\} + \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_n^*) - \mathrm{Z}| \geqq 1/2n\} \leqq 1/n . \end{aligned}$$

Nous voyons donc que (2.1) a lieu pour $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_n^*$ si nous prenons $\varepsilon = 1/n$. La fonction $\boldsymbol{X}$ admet donc l'intégrale $(pS) - \int_J \boldsymbol{X} = Z$, c.q.f.d.

Nous avons montré dans [6], § 6, que l'existence de l'intégrale (BB) d'une fonction aléatoire n'est pas une propriété héréditaire de l'intervalle. Par contre, pour les intégrales (pB) et (pS) nous avons le suivant

Théorème 3. *Si la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ donnée admet une intégrale (pB), ou une intégrale (pS), dans l'intervalle K, elle admet une intégrale, (pB) ou (pS) respectivement, dans tout intervalle $J \in K$.*[2])

Démonstration. Soit ε un nombre positif, soit $J = \langle t_0, t_1 \rangle \in K$, $K = \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$. Nous allons supposer, pour simplifier, que l'on a $\tau_0 < t_0 < t_1 < \tau_1$; les cas où $t_0 = \tau_0$ ou $t_1 = \tau_1$ n'exigent qu'un changement inessentiel de nos raisonnements. Soit donc $I_1 = \langle \tau_0, t_0 \rangle$, $I_2 = \langle t_1, \tau_1 \rangle$.

I. Supposons que l'intégrale (pB)-$\int_K \boldsymbol{X}$ existe. A notre ε donné nous pouvons donc associer un nombre positif δ tel que deux partitions $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}''$ telles que $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $v(\mathscr{D}') < \delta$, $v(\mathscr{D}'') < \delta$, vérifient toujours (2.3). Soit $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}_2 \in \mathfrak{D}(J)$, $v(\mathscr{D}_1) < \delta$, $v(\mathscr{D}_2) < \delta$, et soit ensuite $\mathscr{D}^{(1)} \in \mathfrak{D}(I_1)$, $v(\mathscr{D}^{(1)}) < \delta$, et $\mathscr{D}^{(2)} \in \mathfrak{D}(I_2)$, $v(\mathscr{D}^{(2)}) < \delta$. Ecrivons alors $\mathscr{D}' = \mathscr{D}^{(1)} \cup \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}^{(2)}$, $\mathscr{D}'' = \mathscr{D}^{(1)} \cup \mathscr{D}_2 \cup \mathscr{D}^{(2)}$. Nous aurons évidemment $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $v(\mathscr{D}') < \delta$, $v(\mathscr{D}'') < \delta$, donc (2.3) aura lieu, or

$$X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}'') = X(\mathscr{D}_1) - X(\mathscr{D}_2)\,, \tag{2.6}$$

donc

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_1) - X(\mathscr{D}_2)| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon \tag{2.7}$$

pour toute paire de partitions $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}_2 \in \mathfrak{D}(J)$, telles que $v(\mathscr{D}_1) < \delta$, $v(\mathscr{D}_2) < \delta$. La fonction aléatoire admet donc une intégrale (pB) dans J.

II. Supposons maintenant que (pS)-$\int_K \boldsymbol{X}$ existe. Pour notre ε donné, il existe donc une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(K)$ telle que pour $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}' \leqq \mathfrak{D}_\varepsilon$, $\mathscr{D}'' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, (2.3) a lieu. Soit $\mathscr{D}_\varepsilon^* = \mathscr{D}_\varepsilon \wedge \mathscr{D}_J$. Il est alors possible de diviser la partition $\mathscr{D}_\varepsilon^*$ en trois parties disjointes: $\mathscr{D}_\varepsilon^* = \mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \cup \mathscr{D}_\varepsilon^{(0)} \cup \mathscr{D}_\varepsilon^{(2)}$ telles que $\mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \in \mathfrak{D}(I_1)$, $\mathscr{D}_\varepsilon^0 \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}_\varepsilon^{(2)} \in \mathfrak{D}(I_2)$. Soient maintenant $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D}_2 \in \mathfrak{D}(J)$, deux partitions telles que $\mathscr{D}_1 \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(0)}$, $\mathscr{D}_2 \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(0)}$, et posons de nouveau $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \cup \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_\varepsilon^{(2)}$, $\mathscr{D}'' = \mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \cup \mathscr{D}_2 \cup \mathscr{D}_\varepsilon^{(2)}$. Nous aurons alors $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, $\mathscr{D}'' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, donc (2.3) aura lieu. Mais nous avons en même temps (2.6), donc aussi (2.7). Il en résulte que (pS)-$\int_J \boldsymbol{X}$ existe, c.q.f.d.

Si la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ considérée admet dans l'intervalle K une intégrale (pB) ou (pS), nous pouvons donc définir dans K la fonction aléatoire $\boldsymbol{Z}$:

---

[2]) En utilisant la terminologie du travail [6] nous pourrions dire que l'existence de l'intégrale (pB) ou (pS) dans l'intervalle K entraîne l'intégrabilité, (pB) ou (pS) respectivement, dans l'intervalle K.

$Z(I) = (pB)\text{-}\int_I \mathbf{X}$, ou $Z(I) = (pS)\text{-}\int_I \mathbf{X}$ resp., $I \in \boldsymbol{K}$, appelée *intégrale,* (pB) *ou* (pS) resp., *indéfinie* de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ (cf. [6], p. 589). De même que pour l'intégrale (pB) (voir [6], théorème 7, p. 590), on peut démontrer que l'intégrale (pS) indéfinie est une fonction aléatoire p-additive (cf. [6], p. 585). Or, l'intégrale (pS) diffère de l'intégrale (pB) en ce qu'elle permet d'établir un résultat plus fort que celui exprimé par le théorème 8 du travail [6].

Théorème 4. *Soient J_1, J_2 deux intervalles voisins*[3]) *appartenant à $\boldsymbol{K}$, $J_1 \cup J_2 = J$, soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire définie dans K. Si la fonction $\mathbf{X}$ admet une intégrale (pS) dans l'intervalle J, les intégrales (pS) de $\mathbf{X}$ dans J_1 et J_2 existent et vérifient*

$$(pS)-\int_{J_1} \mathbf{X} + (pS)-\int_{J_2} \mathbf{X} = (pS)-\int_{J} \mathbf{X}. \tag{2.8}$$

D'autre part si les deux intégrales (pS), dans J_1 et dans J_2, existent, la fonction $\mathbf{X}$ admet une intégrale (pS) dans J et (2.8) a lieu.

Démonstration. I. Supposons d'abord que l'intégrale $(pS)-\int_J \mathbf{X}$ existe. L'existence des intégrales (pS) de $\mathbf{X}$ dans J_1 et J_2 résultera alors de notre théorème 3. L'égalité (2.8) n'est qu'une simple conséquence de l'égalité

$$X(\mathscr{D}_1) + X(\mathscr{D}_2) = X(\mathscr{D}) \tag{2.9}$$

valable pour n'importe quelles partitions $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{D}(J_1)$, $\mathscr{D}_2 \in \mathfrak{D}(J_2)$, $\mathscr{D} = (\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2) \in \in \mathfrak{D}(J)$.

II. Supposons à présent que la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ admet des intégrales (pS) dans J_1 et dans J_2. Soit ε un nombre positif; il existe alors deux partitions $\mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \in \mathfrak{D}(J_1)$ et $\mathscr{D}_\varepsilon^{(2)} \in \mathfrak{D}(J_2)$ telles que pour $\mathscr{D}_i' \in \mathfrak{D}(J_i)$, $\mathscr{D}_i'' \in \mathfrak{D}(J_i)$, $\mathscr{D}_i' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(i)}$, $\mathscr{D}_i'' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, nous avons

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_i') - X(\mathscr{D}_i'')| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, i = 1,2. \tag{2.10}$$

La partition $\mathscr{D}_\varepsilon = \mathscr{D}_\varepsilon^{(1)} \cup \mathscr{D}_\varepsilon^{(2)}$ appartient à $\mathfrak{D}(J)$; si nous prenons n'importe quelles partitions $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(J)$ et $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(J)$ telles que $\mathscr{D}' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, $\mathscr{D}'' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, nous pouvons leur associer les partitions $\mathscr{D}_1'$, $\mathscr{D}_1''$ et $\mathscr{D}_1'$, $\mathscr{D}_2''$, $\mathscr{D}_i' \in \mathfrak{D}(J_i)$, $\mathscr{D}_i'' \in \mathfrak{D}(J_i)$, $i = 1, 2$, telles que $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_1' \cup \mathscr{D}_2'$ et $\mathscr{D}'' = \mathscr{D}_1'' \cup \mathscr{D}_2''$. Il est aisé de voir que nous avons alors $\mathscr{D}_i' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(i)}$, $\mathscr{D}_i'' \leqq \mathscr{D}_\varepsilon^{(i)}$, $i = 1, 2$, de sorte que (2.10) a lieu. Il en résulte

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}'')| \geqq \varepsilon\} &= \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_1') + X(\mathscr{D}_2') - X(\mathscr{D}_1'') - X(\mathscr{D}_2'')| \geqq \varepsilon\} \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_1') - X(\mathscr{D}_1'')| + |X(\mathscr{D}_2') - X(\mathscr{D}_2'')| \geqq \varepsilon\} \leqq \\ &\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_1') - X(\mathscr{D}_1'')| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} + \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}_2') - X(\mathscr{D}_2'')| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,;\end{aligned}$$

[3]) Cf. [6], p. 584.

nous voyons donc que la fonction $\mathbf{X}$ admet dans J une intégrale (pS), celle-ci est égale, en vertu de (2.9), à la somme des intégrales (pS) de $\mathbf{X}$ dans J_1 et dans J_2, c.q.f.d.

La fonction aléatoire $\mathbf{X}$ définie dans $K = \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ sera dite *localement p-additive en* $t \in K$ (cf. [4]) si à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel que pour $0 < h_1 < \delta$, $I_1 = \langle t - h_1, t) \in \boldsymbol{K}$, $0 < h_2 < \delta$, $I_2 = \langle t, t + h_2) \in \boldsymbol{K}$, $I = I_1 \cup \cup I_2 = \langle t - h_1, t + h_2)$ on ait [4])

$$\mathbf{P}\{|X(I_1) + X(I_2) - X(I)| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon\,. \tag{2.11}$$

Il est évident qu'une fonction aléatoire $\mathbf{X}$, définie dans K, qui est p-additive (cf. [6], p. 585) est aussi localement p-additive en tout $t \in K$; la réciproque n'est pas vraie.

Nous allons voir que la propiété de p-additivité locale caractérise la différence spécifique qui existe entre l'intégrabilité (pS) et l'intégrabilité (pB) (cf. [3], chap. II, théorèmes 3.8 et 3.10).

Théorème 5. *Si la fonction aléatoire* $\mathbf{X}$ *donnée admet une intégrale* (pB) *dans* K, *elle est localement p-additive en tout* $t \in K$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tel que (2.3) ait lieu pour toute paire de partitions $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $v(\mathscr{D}') < 2\delta$, $v(\mathscr{D}'') < 2\delta$. Soit t un point arbitraire dans $K = \langle \tau_0, \tau_1 \rangle$, $t > \tau_0$, et prenons deux nombres positifs h_1 et h_2, plus petits que δ et tels que $I_1 = \langle t - h_1, t) \in \boldsymbol{K}$, $I_2 = \langle t, t + h_2) \in \boldsymbol{K}$; soit $I = I_1 \cup I_2$. Soit $\mathscr{D}'_1$ une partition de l'intervalle $\langle \tau_0, t - h_1)$ de norme $v(\mathscr{D}'_1) < 2\delta$, soit $\mathscr{D}'_2$ une partition de l'intervalle $\langle t + h_2, \tau_1 \rangle$ de norme $v(\mathscr{D}'_2) < 2\delta$. [5]) Ecrivons maintenant $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'_1 \cup \cup \{I_1, I_2\} \cup \mathscr{D}'_2$ et $\mathscr{D}'' = \mathscr{D}'_1 \cup \{I\} \cup \mathscr{D}'_2$; nous aurons évidemment $\mathscr{D}' \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}'' \in \mathfrak{D}(K)$, $v(\mathscr{D}') < 2\delta$, $v(\mathscr{D}'') < 2\delta$, donc (2.3) aura lieu. Mais nous avons en même temps

$$X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}'') = X(I_1) + X(I_2) - X(I)\,,$$

donc (2.11) a lieu. Comme les nombres h_1, h_2 sont arbitraires (pourvu que plus petits que δ et tels que $I_1 \in \boldsymbol{K}$, $I_2 \in \boldsymbol{K}$), nous voyons que la fonction $\mathbf{X}$ est en effet localement p-additive en t, mais t est aussi arbitrairement choisi dans K.

Théorème 6. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire définie dans* K, *admettant une intégrale* (pS) *dans* K, *et localement p-additive en tout* $t \in K$. *Alors elle admet aussi une intégrale* (pB) *dans* K *et* (2.2) *a lieu.*

Démonstration. Soit $Z = (pS)\text{-}\int_K \mathbf{X}$. Soit ε un nombre positif et soit $\mathscr{D}_\varepsilon \in \in \mathfrak{D}(K)$ une partition telle que pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, nous ayons

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - Z| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{2.12}$$

---

[4]) Pour $t = \tau_0$ l'additivité locale a toujours lieu, car il n'existe dans K aucun intervalle $\langle \tau_0 - h, \tau_0)$, $h > 0$.

[5]) Si $t + h_2 = \tau_1$, $\mathscr{D}'_2$ sera vide.

Supposons que nous ayons $\mathscr{D}_\varepsilon = \{J_j\}_{j=0}^m$, $J_j = \langle t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\tau_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m+1} = \tau_1$, $K = \langle \tau_0, \tau_1)$. D'après nos hypothèses, la fonction $\boldsymbol{X}$ est localement p-additive en chaque t_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Il existe donc un nombre positif δ tel que pour les nombres $h'_j, h''_j, j = 1, 2, \ldots, m$, tous plus petits que δ, nous ayons $I'_j = \langle t_j - h'_j, t_j) \in \boldsymbol{K}$, $I''_j = \langle t_j, t_j + h''_j) \in \boldsymbol{K}$ et

$$\mathbf{P}\{|X(I'_j) + X(I''_j) - X(I_j)| \geqq \varepsilon/2m\} \leqq \varepsilon/2m\,,$$

où $I_j = I'_j \cup I''_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Soit maintenant $\mathscr{D}'$ une partition de $\mathfrak{D}(K)$, $\nu(\mathscr{D}') < \delta$, d'ailleurs quelconque. Posons $\mathscr{D} = \mathscr{D}' \wedge \mathscr{D}_\varepsilon$. Nous voyons facilement que les partitions $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ diffèrent seulement là où un (au moins) des points t_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, s'est trouvé à l'intérieur d'un intervalle $I \in \mathscr{D}'$. Dans ce cas, la somme $X(\mathscr{D}')$ comprend un terme $X(I)$ qui est remplacé dans $X(\mathscr{D})$ par la somme de deux (ou plusieurs) termes $X(I')$, $X(I'')$, les intervalles I', I'' étant de la forme $I' = \langle t_j - h'_j, t_j)$, ou $I'' = \langle t_j, t_j + h''_j)$ resp., avec $0 < h'_j < \delta$, $0 < h''_j < \delta$, car $|I| \leqq \nu(\mathscr{D}') < \delta$. Nous avons donc évidemment l'inégalité

$$|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D})| \leqq \sum_{j=1}^m |X(I'_j) + X(I''_j) - X(I_j)|\,,$$

où $I'_j = \langle t_j - h_j, t_j)$, $I''_j = \langle t_j, t_j + h''_j)$, $|I'_j| < \delta$, $|I''_j| < \delta$. Il en résulte

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D})| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq \mathbf{P}\{\sum_{j=1}^m |X(I'_j) + X(I''_j) - X(I_j)| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^m \mathbf{P}\{|X(I'_j) + X(I''_j) - X(I_j)| \geqq \varepsilon/2m\} \leqq m\,.\,\varepsilon/2m = \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Comme d'autre part $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, nous avons aussi (2.12), de sorte que

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - Z| \geqq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D}) + X(\mathscr{D}) - Z| \geqq \varepsilon\} \leqq$$
$$\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D})| + |X(\mathscr{D}) - Z| \geqq \varepsilon\} \leqq$$
$$\leqq \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}') - X(\mathscr{D})| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} + \mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - Z| \geqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\} \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon\,.$$

Donc (pB)–$\int_K \boldsymbol{X} = Z$, c.q.f.d.

En combinant nos théorèmes 6 et 4 nous obtenons l'énoncé suivant (cf. [6], théorème 8). Nous le citons sans la démonstration, qui serait facile.

Corollaire. *Soit* $J_1 = \langle t', t) \in \boldsymbol{K}$, $J_2 = \langle t, t'') \in \boldsymbol{K}$, *soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire définie dans* K *et admettant des intégrales* (pB) *dans* J_1 *et dans* J_2 *Pour que la fonction* $\boldsymbol{X}$ *admette une intégrale* (pB) *dans l'intervalle* $J = J_1 \cup J_2 = \langle t', t'')$ *entier, il faut et il suffit qu'elle soit localement p-additive en t.*

Remarque. En procédant à des calculs analogues à (2.4), nous pouvons montrer facilement qu'une fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ continue en $\emptyset$ sur K (voir [6], p. 585) est toujours localement p-additive en tout $t \in K$. Pour les fonctions continues en $\emptyset$, il n'y a donc aucune différence essentielle entre les intégrales (pB) et (pS). Il en résulte que les propositions comme: Si une fonction $\boldsymbol{X}$, intégrable (pS) dans K, est continue en $\emptyset$ sur K, son intégrale (pS) indéfinie l'est également (ou la proposition analogue concernant la continuité absolue (cf. [6], p. 587) etc.) découlent immédiatement des théorèmes analogues, connus pour l'intégrale (pB) (voir [6], théorèmes 10 et 13, cf. aussi [7], Remarque 3) et, bien entendu, de notre théorème 6.

Il est assez clair que l'opération d'intégration (pS) a un caractère linéaire tout comme l'intégration (pB) (voir [6], p. 594):

Etant donné deux fonctions aléatoires $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, intégrables (pS) dans K et un nombre réel c, posons pour $I \in \boldsymbol{K}$:

$$Z(I) = cX(I), \quad W(I) = X(I) + Y(I). \tag{2 13}$$

Alors les deux fonctions aléatoires $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{W}$ qui viennent ainsi d'être définies dans K, sont aussi intégrables (pS) dans K et pour tout $J \in \boldsymbol{K}$ nous avons

$$(pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{Z} = c\,.\,(pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}, \quad (pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{W} = (pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{X} + (pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{Y}.$$

En définissant la fonction aléatoire $\boldsymbol{W}$ nous devons supposer qu'en additionnant $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ nous obtenons de nouveau une fonction aléatoire à accroissements indépendants; les fonctions $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ ne peuvent donc être quelconques. Il suffit cependant de supposer les fonctions $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ indépendantes au sens que voici: si nous prenons deux entiers positifs n et m, et $n + m$ intervalles disjoints $I_1, I_2, \ldots, I_n, J_1, J_2, \ldots, J_m$ de $\boldsymbol{K}$, alors les variables aléatoires $X(I_1), X(I_2), \ldots, X(I_n), Y(J_1), Y(J_2), \ldots, Y(J_m)$ sont toujours stochastiquement indépendantes (en bloc). Dans la suite, nous faisons cette supposition tacitement partout où nous parlons de sommes (ou d'autres fonctions) de deux (ou plusieurs) fonctions aléatoires d'intervalle. Cela représente, bien entendu, une nouvelle exigeance concernant l'étendue du système $\mathfrak{X}^*$.

A présent, nous allons donner quelques théorèmes analogues au théorème 1 de [8].

Théorème 7. *Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux fonctions aléatoires définies dans K, intégrables, (pS) ou (pB), dans un intervalle $J \in \boldsymbol{K}$. Alors, pour que nous ayons l'égalité $(pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{X} = (pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{Y}$, ou $(pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X} = (pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{Y}$ resp., il faut et il suffit qu'il existe pour chaque ε positif une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(J)$, ou bien un nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon)$, tel que pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, pour laquelle $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, ou $v(\mathscr{D}) < \delta$ resp., on ait*

$$\mathbf{P}\{|X(\mathscr{D}) - Y(\mathscr{D})| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon. \tag{2.14}$$

Pour la d é m o n s t r a t i o n il suffit de considérer la fonction aléatoire $\boldsymbol{Z}$ définie par $Z(I) = X(I) - Y(I)$ pour $I \in \boldsymbol{K}$. Nous avons alors $Z(\mathscr{D}) = X(\mathscr{D}) - Y(\mathscr{D})$ pour toute partition $\mathscr{D}$, et (2.14) n'est que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de l'intégrale, (pS) ou (pB) respectivement, de la fonction $\boldsymbol{Z}$ dans J, ainsi que pour l'égalité $(pS)\text{-}\int_J \boldsymbol{Z} = V\{0\}$, ou $(pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{Z} = V\{0\}$ resp.

De notre théorème 7 découle e.a. la propriété de l'intégrale (pB) mentionnée dans [6], p. 595, comme propriété (β): si $W(J) = (pB)-\int_J \mathbf{X}$ pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$, on a aussi

$$(pB)\text{-}\int_J \mathbf{W} = W(J) = (pB)\text{-}\int_J \mathbf{X},$$

donc aussi $(pB)-\int_J (\mathbf{X} - \mathbf{W}) = V\{0\}$ pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. [6]) Des relations analogues sont d'ailleurs valables pour l'intégrale (pS) également.

Lemme 1. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire intégrable* (BB) *dans* K. *Pour* $\varepsilon > 0$, $I \in \boldsymbol{K}$ *posons* $g_\varepsilon(I) = \mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\}$. *Si pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$ *on a*

$$(BB)-\int_J \mathbf{X} \sim V\{0\}, \tag{2.15}$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$ *on a aussi*

$$\int_J g_\varepsilon(I) = 0. \tag{2.16}$$

Démonstration. La fonction g_ε étant toujours non-négative, il suffit de démontrer (2.16) pour $J = K$ seulement. Soit $\varphi(I, s)$ la fonction caractéristique (voir § 1) de $X(I)$, $I \in \boldsymbol{K}$. Posons pour $\sigma > 0$

$$r(I, \sigma) = \sup_{|s| \leqq \sigma} |1 - \varphi(I, s)|.$$

D'après le lemme 5 du travail [7] nous avons pour tout $\sigma > 0$ l'égalité

$$\int_K r(I, \sigma) = 0. \tag{2.17}$$

Nous allons appliquer à présent l'inégalité (11.8) du chapitre I de la monographie [1], où nous prenons $\mu = \varepsilon$, $A = \langle 0, \sigma \rangle$, de sorte que $a = \sigma$, $\varrho = \sigma$. Nous aurons pour $I \in \boldsymbol{K}$

$$g_\varepsilon(I) \leqq (\sigma + 2\pi/\varepsilon)^2 \, \sigma^{-3} \int_0^\sigma \operatorname{Re}[1 - \varphi(I, s)] \, ds \leqq$$
$$\leqq (\sigma + 2\pi/\varepsilon)^2 \, \sigma^{-2} r(I, \sigma);$$

nous voyons donc que (2.17) entraîne (2.16), c.q.f.d.

Remarquons encore que, en vertu de la relation (1.5) de [6] (cf. aussi la remarque[5]) dans [6], p. 593), (2.15) est équivalent à l'égalité

$$(pB)\text{-}\int_J \mathbf{X} = V\{0\} \tag{2.18}$$

valable pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.

---

[6]) L'indépendance des fonctions $\mathbf{X}$ et $\mathbf{W}$ au sens précisé ci-dessus a évidemment toujours lieu.

A l'aide de notre lemme nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème suivant (cf. [8], théorème 1).

Théorème 8. *Soient* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ *deux fonctions aléatoires intégrables* (pB) *dans* K. *Supposons que nous ayons*

$$(pB)\text{-}\int_J \mathbf{X} = (pB)\text{-}\int_J \mathbf{Y}$$

pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$ *nous avons aussi*

$$\int_J h_\varepsilon(I) = 0 \tag{2.19}$$

où

$$h_\varepsilon(I) = \mathbf{P}\{|X(I) - Y(I)| \geqq \varepsilon\}\,.$$

Démonstration. Une fois de plus, il suffit de considérer la fonction $\mathbf{Z}$: $Z(I) = X(I) - Y(I)$ pour $I \in \boldsymbol{K}$. Nous avons évidemment $(BB)-\int_J \mathbf{Z} = V\{0\}$, et nous obtenons donc (2.19) en appliquant directement notre lemme.

La réciproque de ce lemme n'est pas vraie, comme le montre l'exemple de la fonction $\mathbf{X}$ vérifiant $\mathbf{P}\{X(I) = |I|\} = 1$ pour tout $I \in \boldsymbol{K}$, c'est-à-dire $X(I) = V\{|I|\}$. En effet, fixons un nombre positif ε, alors pour $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(K)$, $v(\mathscr{D}) < \varepsilon$, nous aurons manifestement

$$g_\varepsilon(\mathscr{D}) = \sum_{I \in \mathscr{D}} \mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\} = 0\,,$$

et (2.16) aura lieu pour $J = K$, donc aussi pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. Mais en même temps nous avons pour $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$ évidemment $X(\mathscr{D}) = V\{|J|\}$, donc

$$(pB)\text{-}\int_J \mathbf{X} = V\{|J|\} \neq V\{0\}$$

pour tout $J \in \boldsymbol{K}$, $J \neq \emptyset$, et (2.15) n'a pas lieu.

Pour les mêmes raisons il n'est pas non plus possible de démontrer la réciproque de notre théorème 8 (cf. le théorème 1 de [8]).

3. p-DÉRIVÉES

Lorsque nous voulons exprimer la propriété des fonctions aléatoires que nos avons appelée continuité en $\emptyset$ (voir [6], p. 585), nous avons deux possibilités: nous pouvons nous servir des fonctions caractéristiques (voir p. ex. [7], théorème 1) ou bien directement des probabilités des valeurs plus grandes que ε des variables aléatoires en question (cf. [6], théorème 13). Il en va de même dans le cas de la continuité absolue (cf. [6], (2.12), p. 587, et [7], lemme 1). En vertu de (1.5) de [6], ces deux façons de l'exprimer sont équivalentes. En introduisant la notion de dérivée, dans notre travail [7], nous n'avons utilisé que les fonctions caractéristiques (ou leurs logarithmes, les fonctions $-\psi$). Ceci était tout à fait adéquat dans la théorie de l'intégrale (BB). Pour l'intégrale (pB), il serait cependant plus convenable d'avoir une définition de dérivée exprimée directement par les probabilités de certaines valeurs des variables aléatoires considérées. Il s'agit donc de la question de savoir par quoi il faut remplacer la condition (4.1) de [7] dans la définition de la dérivée. Nous sommes ainsi conduits tout naturellement aux trois définitions que voici:

Nous dirons que la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ donnée dans K, admet en $t \in K$[7]) une p_j-dérivée $\mathrm{X}'(t) \in \mathfrak{X}^*$, $j = 1, 2, 3$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < h < \delta, I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, nous avons l'inégalité $(3 . j)$, $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{P}\{|X(I) - h\mathrm{X}'(t)| \geqq \varepsilon h\} \leqq \varepsilon h \; ; \tag{3.1}$$

$$\mathbf{P}\{|X(I) - h\mathrm{X}'(t)| \geqq \varepsilon h\} \leqq \varepsilon \; ; \tag{3.2}$$

$$\mathbf{P}\{|X(I) - h\mathrm{X}'(t)| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon h \, . \tag{3.3}$$

En suivant [7], nous dirons ensuite que la fonction $\boldsymbol{X}$ est p_j-dérivable dans K si elle admet la p_j-dérivée correspondante $(j = 1, 2, 3)$ en tout $t \in K$, le nombre δ pouvant être choisi indépendamment de t, c'est-à-dire le même pour l'intervalle K entier.[8]) Or, nous verrons qu'aucune de ces trois conditions ne nous donne la même satisfaction que la définition de la dérivée $\mathrm{D}X(t)$ donnée dans [7]. Les rapports mutuels des différentes définitions sont rendus visibles par le théorème suivant.

Théorème 9. *Si la fonction aléatoire* $\boldsymbol{X}$ *admet en* $t \in K$ *une* p_1*-dérivée*: $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$, *elle admet en t aussi une dérivée* $\mathrm{D}X(t)$ *(au sens de* [7]) *et l'on a* $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$; *la réciproque n'est pas vraie. Par contre, si* $\boldsymbol{X}$ *admet en t une dérivée* $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$, *elle admet en t aussi une* p_3*-dérivée, et l'on a* $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$; *la réciproque n'est pas vraie. Pour la* p_2*-dérivée, l'implication n'a lieu dans aucun sens.*

Démonstration. I. Supposons que $\boldsymbol{X}$ admet en t une p_1-dérivée: $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$. Alors pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre positif δ tel que pour $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $0 < h < \delta$, on ait

$$\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon h\} \leqq \varepsilon h \, . \tag{3.4}$$

En y appliquant l'inégalité bien connue (voir [2], p. 52), nous en obtenons

$$|1 - \varphi(I, s)| = |\varphi(I, 0) - \varphi(I, s)| \leqq \varepsilon hs + 2\varepsilon h \, ,$$

---

[7]) Comme dans [7] et [8], nous nous bornons ici aux dérivées à droite, sans le souligner à chaque reprise.

[8]) On a manifestement (3.1) $\Rightarrow$ (3.2) et (3.1) $\Rightarrow$ (3.3), (pour $h < 1$ du moins), ce qui veut dire que l'existence d'une p_1-dérivée entraîne celles d'une p_2-dérivée et d'une p_3-dérivée; ces trois dérivées étant alors égales.

de sorte que nous avons

$$\lim_{h \to 0+} h^{-1}[1 - \varphi(\langle t, t + h), s)] = 0$$

localement uniformément en s dans $(-\infty, \infty)$. Donc (voir [7], p. 466), la dérivée $\mathrm{D}X(t)$ existe et l'on a $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$.

II. Considérons une fonction aléatoire homogène (cf. [6], p. 585) ayant la fonction caractéristique

$$\varphi(I, s) = \exp\{-\tfrac{1}{2}s^2|I|^{3/2}\}.$$

Nous trouvons facilement que la fonction $\psi(I, s) = \log \varphi(I, s)$ vérifie alors l'inégalité

$$|\psi(I, s)| \leqq \tfrac{1}{2}\sigma^2|I|^{3/2} < \varepsilon|I|$$

pour tout $s \in \langle -\sigma, \sigma \rangle$, et pour tout $I \in \boldsymbol{K}$, tel que $|I| < 4\varepsilon^2\sigma^{-4}$; la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ admet donc en tout $t \in K$ une dérivée $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$. En même temps, pour tout $t \in K$ nous avons

$$\lim_{h \to 0+} \mathbf{P}\{|X(\langle t, t + h))| \geqq \varepsilon h\} = 1,$$

car la variable aléatoire $X(I)$ a la variance proportionelle à $|I|^{3/2}$ (la variable aléatoire $X(I)/|I|^{3/4}$ suit la loi normale $\mathrm{N}(0, 1)$), et nous avons $\varepsilon h = \varepsilon h^{1/4} h^{3/4}$. Nous voyons donc qu'il est impossible que l'on ait $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$, pour quel t que ce soit, qu'il s'agisse de p_1-dérivée ou de p_2-dérivée.

III. Supposons que $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ existe pour un certain $t \in K$; alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < h < \delta$, $|s| \leqq \sigma$, l'inégalité $|1 - \varphi(\langle t, t + h), s)| \leqq \varepsilon h$ ait lieu. En y appliquant l'inégalité bien connue (11.8) du chapitre I de [1] (cf. la démonstration de notre lemme, p. 425), nous obtenons pour $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $\sigma > 26/\varepsilon$, $h < \delta = \delta(\varepsilon, \sigma)$, l'inégalité

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\} \leqq \mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \tfrac{1}{4}\varepsilon\} \leqq (\sigma + 8\pi/\varepsilon)^2\, \sigma^{-2}\varepsilon h/4 = \\ = h[\tfrac{1}{4}\varepsilon + 4\pi/\sigma + 16\pi^2/\sigma^2\varepsilon] < h\varepsilon[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}] = \varepsilon h,\end{aligned}$$

donc $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ au sens de la p_3-dérivée.

IV. Soit $X(I) = V\{|I|\}$; nous avons alors évidemment $\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\} = 0 < \varepsilon h$, pourvu que $|I| < \varepsilon$, mais pourtant on n'a $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ pour aucun $t \in K$, car on a $(BB) - \int_J \boldsymbol{X} \sim V\{|J|\}$ pour tout $J \in \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{X}$ est homogène (cf. [8], § 3).

V. Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire définie dans K de telle manière que l'on ait pour $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < 1$: $\mathbf{P}\{X(I) = 0\} = 1 - |I|$ et $\mathbf{P}\{X(I) = 1\} = |I|$. Alors l'inégalité $\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon|I|\} \leqq \varepsilon$ est valable pour tous les intervalles $I \in \boldsymbol{K}$ de longueur $|I| < \varepsilon$, or nous avons en même temps $\varphi(I, s) = 1 - |I| + |I|\, e^{is}$, de sorte que $|I|^{-1}[1 - \varphi(I, s)] = 1 - e^{is}$ et $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ est impossible.

La démonstration que nous venons de donner fait voir également qu'aucune des trois p-dérivées ne permet d'établir des théorèmes analogues aux théorèmes 10 et 12 du travail [7]. Ce résultat négatif ne fait que souligner une fois de plus les avantages de la définition de la dérivée $\mathrm{D}X(t)$ introduite dans [7].

Par contre, il est aisé de voir que pour les fonctions aléatoires p-dérivables l'égalité $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ valable pour tout $t \in K$ entraîne la continuité en $\emptyset$ sur K. Cela est vrai pour n'importe quelle des trois p-dérivées; dans le cas de la p_1-dérivabilité, l'égalité $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ entraîne même la continuité absolue de la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$.

En effet, soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire définie et p_1-dérivable dans K, avec $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ pour tout $t \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon|I|\} \leqq \varepsilon|I| , \tag{3.5}$$

pourvu que $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \delta$. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_n$, n intervalles de $\boldsymbol{K}$, disjoints deux à deux et de longueur totale $\sum_{j=1}^{n} |I_j| < \delta$. Alors (pour $\delta \leqq 1$, ce qui ne restreint pas la généralité de nos raisonnements) nous avons

$$\mathbf{P}\{|\sum X(I_j)| \geqq \varepsilon\} \leqq \mathbf{P}\{\sum|X(I_j)| \geqq \varepsilon\} \leqq \mathbf{P}\{\sum|X(I_j)| \geqq \varepsilon\delta\} \leqq$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}\{|X(I_j)| \geqq \varepsilon|I_j|\} \leqq \varepsilon \sum|I_j| < \varepsilon\delta \leqq \varepsilon ,$$

donc la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ est absolument continue dans K.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{X}$ est seulement p_2-dérivable, ou p_3-dérivable, avec $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ pour $t \in K$. On a donc (pour $|I| < 1$, ce qui suffit) soit

$$\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\} \leqq \mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon|I|\} \leqq \varepsilon ,$$

soit respectivement

$$\mathbf{P}\{|X(I)| \geqq \varepsilon\} \leqq \varepsilon|I| \leqq \varepsilon ,$$

d'où la continuité en $\emptyset$.[9])

Remarquons encore qu'il importe de supposer la p-dérivabilité et que la simple égalité $\mathrm{X}'(t) = V\{0\}$ valable pour tout $t \in K$ ne suffit pas pour assurer la continuité en $\emptyset$, même s'il s'agit de la p_1-dérivée. En effet, il suffit de considérer l'exemple de la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ définie dans $K = \langle 0, 1)$ de telle manière que pour $I = \langle a, b) \in \boldsymbol{K}$ la variable aléatoire $X(I)$ ne prenne que les valeurs 0 et 1 avec les probabilités $\mathbf{P}\{X(I) = 1\} = (b - a)^2 (1 - a)^{-2} = 1 - \mathbf{P}\{X(I) = 0\}$.

---

[9]) Si nous n'imposons aucune condition concernant les „valeurs" de la p-dérivée $\mathrm{X}'(t)$, la seule p-dérivabilité ne suffit pas pour garantir la continuité en $\emptyset$ de $\boldsymbol{X}$. Il en va de même dans le cas de la dérivée $\mathrm{D}X(t)$: il n'est donc pas en général vrai ce que nous avons dit à ce sujet dans [7], p. 466 sqq. Cela découle d'ailleurs même de l'exemple cité dans [7], p. 467, avant le théorème 10.

4. L'INTÉGRALE (BS)

Nous allons introduire maintenant une nouvelle notion d'intégrale, appelée intégrale (BS), analogue à l'intégrale (BB); le rapport de l'intégrale (BS) à l'intégrale (BB) rapelle celui de l'intégrale (pS) à l'intégrale (pB). Nous pouvons procéder par deux voies différentes, mais qui conduisent, en fin de compte, au même but.

Le premier procédé suppose que nous exprimons la convergence, appelée convergence-B dans [6] (c'est-à-dire la convergence en loi) à l'aide d'une métrique convenable. Pour ce but, nous pouvons utiliser p. ex. la métrique de P. Lévy pour les fonctions de répartition (voir p. ex. [2], p. 40); il est également possible de rendre métrique la convergence localement uniforme des fonctions caractéristiques. En effet, nous pouvons définir la distance de deux fonctions caractéristiques $\varphi_1(s)$ et $\varphi_2(s)$ par la formule (voir [5], p. 158)

$$\varrho[\varphi_1, \varphi_2] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \min\,[1, \sup_{|s| \leqq k} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|] \,. \tag{4.1}$$

Nous dirons ensuite que la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ en question admet *une intégrale* (BS) dans l'intervalle $J \in \boldsymbol{K}$, lorsqu'il existe une variable aléatoire $Z \in \mathfrak{X}^*$ de fonction caractéristique $\chi(s)$ et telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(J)$ telle que l'inégalité

$$\varrho[\prod_{\mathscr{D}} \varphi(I, s), \chi(s)] < \varepsilon \tag{4.2}$$

ait lieu pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$. Nous posons alors bien entendu (BS)-$\int_J \boldsymbol{X} \sim Z$.

Il est clair que l'on a (BB)-$\int_J \boldsymbol{X} \sim Z$ si et seulement si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un nombre $\delta > 0$ tel que (4.2) ait lieu pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(J)$, $v(\mathscr{D}) < \delta$.

L'autre procédé permettant de définir l'intégrale (BS) se passe de la métrique et n'utilise que la convergence-B. Nous dirons que $Z \in \mathfrak{X}^*$ représente l'intégrale (BS) de $\boldsymbol{X}$ dans $J \in \boldsymbol{K}$ et nous écrirons (BS)-$\int_J \boldsymbol{X} \sim Z$, s'il existe une suite $\{\mathscr{D}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ de partitions $\mathscr{D}_n^* \in \mathfrak{D}(J)$ telle que

$$B \lim_{n \to \infty} X(\mathscr{D}_n) \sim Z \tag{4.3}$$

a lieu pour toute suite $\{\mathscr{D}_n\}$, $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{D}(J)$, $n = 1, 2, \ldots$, vérifiant les conditions (i) et (ii), cf. ci-dessus p. 418.

Il est assez facile de démonter l'équivalence des deux définitions de l'intégrale (BS): il suffit d'une légère modification de la démonstration du théorème 5.1 du chapitre 1 du livre [3].

Les propriétés de l'intégrale (BS) sont dans une grande mesure analogues aux propriétés de l'intégrale (BB), ou encore de l'intégrale (pS).

L'exemple de l'intégrale (BB) nous fait attendre (voir [6], § 6) que l'existence de l'intégrale (BS) n'est pas une propriété héréditaire de l'intervalle: l'existence de $(BS)-\int_K \mathbf{X}$ n'entraîne pas encore l'existence de $(BS)-\int_J \mathbf{X}$ pour tout $J \in \boldsymbol{K}$. En effet, soit $K = \langle 0, 1)$, et soit $\varphi_0(s) \equiv 1$; $\varphi_1(s) = 1 - |s|$ pour $|s| \leqq 1$, $\varphi_1(s) = 0$ pour $|s| > 1$; $\varphi_2(s) = \varphi_1(s - 2k)$ où k est l'entier vérifiant les inégalités $\frac{1}{2}(s - 1) < < k \leqq \frac{1}{2}(s + 1)$. La fonction aléatoire $\mathbf{X}$ soit définie dans K de telle manière que nous ayons pour $I \in \boldsymbol{K}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(I, s) &= \varphi_0(s)\,, && \text{lorsque } 0 \notin I,\ \tfrac{1}{2} \notin I;\\
\varphi(I, s) &= \varphi_1(s)\,, && \text{lorsque } 0 \notin I,\ \tfrac{1}{2} \in I;\\
\varphi(I, s) &= [\varphi_1(s)]^2\,, && \text{lorsque } 0 \in I,\ \tfrac{1}{2} \in I;\\
\varphi(I, s) &= \varphi_1(s)\,, && \text{lorsque } I = \langle 0, a) \text{ avec } a < \tfrac{1}{2}, \text{ rationnel};\\
\varphi(I, s) &= \varphi_2(s)\,, && \text{lorsque } I = \langle 0, a) \text{ avec } a < \tfrac{1}{2}, \text{ irrationnel.}
\end{aligned}$$

Dans l'intervalle K la fonction $\mathbf{X}$ admet une intégrale (BS), voire [10]) une intégrale (BB), mais dans aucun intervalle $\langle 0, a)$, $0 < a < \frac{1}{2}$, ni l'intégrale (BB) ni l'intégrale (BS) de $\mathbf{X}$ ne peut exister.

Théorème 10. *Toute fonction aléatoire $\mathbf{X}$ définie dans K qui admet une intégrale (BB) ou une intégrale (pS) dans K, admet aussi une intégrale (BS) dans K, et l'on a*

$$(BS)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim (BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}\,, \tag{4.4a}$$

ou

$$(BS)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim (pS)\text{-}\int_K \mathbf{X}\,, \tag{4.4b}$$

respectivement.

Démonstration. I. Supposons que c'est l'intégrale (BB) de $\mathbf{X}$ dans K qui existe. Prenons une suite $\{\mathscr{D}_n^*\}$ de partitions $\mathscr{D}_n^* \in \mathfrak{D}(K)$ telle que $v(\mathscr{D}_n^*) \to 0$. La suite $X(\mathscr{D}_n^*)$ sera alors B-convergente vers $(BB)-\int_K \mathbf{X}$. Si nous avons ensuite une autre suite $\{\mathscr{D}_n\}$, $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D}_{n+1} \leqq \mathscr{D}_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, et telle que pour chaque n on puisse trouver un entier $k(n)$ tel que $\mathscr{D}_{k(n)} \leqq \mathscr{D}_n^*$, alors évidemment $v(\mathscr{D}_n) \to 0$ également, en vertu de (1.2). La suite $X(\mathscr{D}_n)$ sera donc B-convergente vers la même limite, donc (BS)-$\int_K \mathbf{X}$ existe et (4.4a) a lieu.

II. Si c'est l'intégrale (pS)-$\int_K \mathbf{X}$ qui existe, l'existence d'une intégrale (BS) découle du simple fait que la convergence en probabilité implique la B-convergence (cf. [6], (1.4), p. 584).

En ce qui concerne les rapports existant entre l'intégrale (BB) et l'intégrale (BS), on peut s'attendre à ce qu'un rôle important soit joué par une propriété analogue à la p-additivité locale, et que nous appellerons *B-additivité locale.*

---

[10]) Cf. le théorème 10 qui suit.

Soit donc $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire définie dans K; nous dirons que $\mathbf{X}$ est *localement B-additive en* $t \in K$, lorsque nous pouvons trouver pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, un nombre $\delta > 0$ tel que pour $I_1 = \langle t - h_1, t) \in \boldsymbol{K}$, $0 < h_1 < \delta$, $I_2 = \langle t, t + h_2) \in \in \boldsymbol{K}$, $0 < h_2 < \delta$, $I = \langle t - h_1, t + h_2) = I_1 \cup I_2$, on ait toujours

$$|\varphi(I_1, s)\, \varphi(I_2, s) - \varphi(I, s)| < \varepsilon \tag{4.5}$$

pour $|s| \leqq \sigma$.[11])

Théorème 11. *Si* $\mathbf{X}$ *est localement p-additive en* $t \in K$, *elle est aussi localement B-additive en* t.

Démonstration. Soient ε, σ deux nombres positifs, soit $\eta = \varepsilon/(2 + \sigma)$. La fonction $\mathbf{X}$ étant localement p-additive en t, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour $I_1 = \langle t - h_1, t) \in \boldsymbol{K}$, $0 < h_1 < \delta$, $I_2 = \langle t, t + h_2) \in \boldsymbol{K}$, $0 < h_2 < \delta$, $I = I_1 \cup I_2 = \langle t - h_1, t + h_2)$, nous ayons toujours

$$\mathbf{P}\{|X(I_1) + X(I_2) - X(I)| \geqq \eta\} \leqq \eta\,. \tag{4.6}$$

Ecrivons, pour simplifier, $Y = X(I_1) + X(I_2)$, $W = X(I)$; alors

$$|\varphi(I_1, s)\, \varphi(I_2, s) - \varphi(I, s)| = \left|\int_\Omega (e^{isY} - e^{isW})\, \mathrm{d}\mathbf{P}\right| \leqq \tag{4.7}$$
$$\leqq \int_\Omega |e^{isY} - e^{isW}|\, \mathrm{d}\mathbf{P} \leqq \int_\Omega |1 - e^{is(Y-W)}|\, \mathrm{d}\mathbf{P}\,.$$

Or, la dernière intégrale est égale à la somme de deux intégrales que nous obtenons en divisant Ω en deux parties: celle où $|Y - W| \geqq \eta$, et celle où $|Y - W| < \eta$. Dans le premier cas, nous aurons l'inégalité

$$\int |1 - e^{is(Y-W)}|\, \mathrm{d}\mathbf{P} \leqq \int 2\, \mathrm{d}\mathbf{P} = 2\mathbf{P}\{|Y - W| \geqq \eta\} \leqq 2\eta \tag{4.8}$$

en vertu de (4.6). Dans le second cas, nous n'avons qu'à appliquer l'inégalité $|1 - e^{iz}| \leqq |z|$ valable pour tout z réel; nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\int |1 - e^{is(Y-W)}|\, \mathrm{d}\mathbf{P} \leqq \int |Y - W|\, |s|\, \mathrm{d}\mathbf{P} < |s|\, \eta\,. \tag{4.9}$$

En vertu de (4.7), (4.8) et (4.9) nous avons donc pour $|s| \leqq \sigma$ l'inégalité

$$|\varphi(I_1, s)\, \varphi(I_2, s) - \varphi(I, s)| < 2\eta + \sigma\eta = \varepsilon\,,$$

donc (4.5), c.q.f.d.

[11]) La même propriété pourrait également être exprimé à l'aide de la métrique ϱ définie par (4.1): pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$\varrho[\varphi(I_1, s)\, \varphi(I_2, s), \varphi(I, s)] < \varepsilon$$

pour tous I_1, I_2, I, vérifiant les conditions mentionnées.

En particulier, il s'ensuit de notre théorème 11 que toute fonction aléatoire continue en $\emptyset$ sur K est aussi localement B-additive en tout $t \in K$; cf. notre Remarque au paragraphe 2, p. 423. Une remarque analogue s'applique donc également à l'intégrale (BS): pour les fonctions aléatoires continues en $\emptyset$ sur K, les notions d'intégrale (BS) et d'intégrale (BB) coïncident, etc.

Théorème 12. *Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire définie dans K, localement B-additive en tout $t \in K$, et supposons que (BS)-$\int_K \mathbf{X}$ existe. Alors l'intégrale (BB)-$\int_K \mathbf{X}$ existe également, et (4.4a) a lieu.*

Démonstration. Soit ε un nombre positif; il existe alors une partition $\mathscr{D}_\varepsilon \in \mathfrak{D}(K)$ telle que pour toute partition $\mathscr{D} \in \mathfrak{D}(K)$, $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, nous ayons

$$\varrho\left[\prod_{\mathscr{D}} \varphi(I, s), \chi(s)\right] < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \tag{4.10}$$

où $\chi(s)$ dénote la fonction caractéristique de l'intégrale $(BS)-\int_K \mathbf{X}$. Soit, pour fixer les idées $\mathscr{D}_\varepsilon = \{J_j\}_{j=0}^m$, $J_j = \langle t_j, t_{j+1})$, $K = \langle t_0, t_{m+1})$. D'après nos hypothèses, la fonction $\mathbf{X}$ est localement B-additive en tous les t_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Pour notre ε donné, il existe donc un nombre positif δ tel que si des intervalles $I'_j = \langle t_j - h'_j, t_j) \in \boldsymbol{K}$, $I''_j = \langle t_j, t_j + h''_j) \in \boldsymbol{K}$, $I_j = I'_j \cup I''_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, vérifient les conditions $0 < h'_j < \delta$, $0 < h''_j < \delta$ pour $j = 1, 2, \ldots, m$, nous avons l'inégalité

$$\varrho[\varphi(I'_j, s)\, \varphi(I''_j, s), \varphi(I_j, s)] < \varepsilon/2m\,, \tag{4.11}$$

valable pour $j = 1, 2, \ldots, m$. Soit maintenant $\mathscr{D}'$ une partition quelconque de $\mathfrak{D}(K)$ avec $\nu(\mathscr{D}') < \delta$, et posons $\mathscr{D} = \mathscr{D}' \wedge \mathscr{D}_\varepsilon$. Comme $\mathscr{D} \leqq \mathscr{D}_\varepsilon$, l'inégalité (4.10) a lieu. Mais en même temps les produits $\prod_{\mathscr{D}} \varphi(I, s)$ et $\prod_{\mathscr{D}'} \varphi(I, s)$ ne diffèrent que dans les cas où un (ou plusieurs) des points t_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) s'est trouvé à l'intérieur d'un intervalle appartenant à $\mathscr{D}'$. Dans ce cas, le produit $\prod_{\mathscr{D}'}$ contient un facteur $\varphi(I, s)$ qui est remplacé dans $\prod_{\mathscr{D}}$ par un produit de deux (au moins) facteurs $\varphi(I^{(i)}, s)$. Comme $\nu(\mathscr{D}') < \delta$, tous ces intervalles sont de longueur plus petite que δ, de sorte que l'inégalité (4.11) est toujours valable.[12]) Les autres facteurs des deux produits étant identiques, nous pouvons établir, d'une manière analogue à [8], p. 369, l'inégalité suivante, valable pour tout s réel:

$$\left|\prod_{\mathscr{D}} \varphi(I, s) - \prod_{\mathscr{D}'} \varphi(I, s)\right| \leqq \sum_{j=1}^{m} \left|\varphi(I'_j, s)\, \varphi(I''_j, s) - \varphi(I_j, s)\right|, \tag{4.12}$$

[12]) Le cas où il y a dans I plusieurs points t_j se réduit aisément au cas simple par applications successives de l'inégalité (4.11).

où les intervalles I'_j, I''_j, I_j, obtenus de la façon décrite ci-dessus, vérifient les conditions précitées. En combinant (4.11) et (4.12), nous obtenons l'inégalité

$$(4.13) \qquad \varrho[\prod_{\mathscr{D}} \varphi(I, s), \prod_{\mathscr{D}'} \varphi(I, s)] < \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

La métrique ϱ vérifie, bien entendu, l'inégalité triangulaire, et il résulte de (4.13) et (4.10) que l'on a bien

$$(4.14) \qquad \varrho[\prod_{\mathscr{D}'} \varphi(I, s), \chi(s)] < \varepsilon$$

c.q.f.d.

Bien entendu, l'hypothèse de la B-additivité locale est essentielle pour notre théorème 12. Il est en effet bien facile de trouver un exemple de fonction aléatoire admettant, dans un intervalle, une intégrale (BS), sans que l'intégrale (BB) correspondante existe. (Voir p. ex. [6], § 6, la fonction $\boldsymbol{X}$ qui y est définie est même intégrable (BS) dans K entier).

Notre théorème 12 correspond au théorème 6, de même que la première partie du théorème 10 correspond au théorème 1. Il est donc fort naturel de se poser le problème d'établir pour l'intégrale (BB) un résultat analogue à notre théorème 5. Ce problème reste malheureusement ouvert. Il n'est pas possible, en effet, de transformer les raisonnements d'une façon aussi simple que dans le cas des théorèmes 1 et 6. C'est dû au fait que la „division" n'est pas une opération univoque dans le domaine des lois de répartition (cf. [6], § 6). On pourrait éluder cette difficulté en ajoutant de novelles hypothèses (p. ex. en supposant que la fonction aléatoire est du type ID (cf. [6], p. 584)), mais cela ne peut être regardé comme solution définitive du problème.

Littérature

[1] *J. L. Doob:* Stochastic processes. New York 1953.

[2] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow:* Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych. Warszawa 1957.

[3] *T. H. Hildebrandt:* Introduction to the theory of integration. New York - London 1963.

[4] *H. Kober:* On the existence of the Burkill integral. Canadian Journal of Mathematics, *10* (1958), 115–121.

[5] *R. Sikorski:* Funkcje rzeczywiste, I. Warszawa 1958.

[6] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle. Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 583–609.

[7] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle, II. Czechoslovak Math. Journal, *10* (1960), 457–473.

[8] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle, III. Czechoslovak Math. Journal, *12* (1962), 366–374.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА, IV

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

Статья является продолжением одноименных статей [6], [7] и [8]. В ней вводятся некоторые новые понятия.

Сначала, в превом параграфе напоминаются некоторые понятия и обозначения теории случайных функций интервала. Во втором параграфе изучается теория (pB)-интеграла (см. [6]) с главной целью дополнить ее результатами, аналогичными тем, которые уже известны в теории (BB)-интеграла. При этом вводится также новое понятие (pS)-интеграла и исследуются его свойства. Вообще говоря, (pS)-интеграл отличается от (pB)-интеграла тем, что сходимость сумм $X(\mathscr{D}) = \sum_{I \in \mathscr{D}} X(I)$ не требуется для всех последовательностей разбиений данного интервала, норма которых стремится к нулю, но только для последовательностей „кофинальных" (в смысле мелькости) с некоторой фиксированной последовательностью, существование которой становит условие существования (pS)-интеграла.

Третий параграф посвящен определению нового понятия производной случайной функции интервала. Она должна соответствовать (pB)-интегралу так, как и аналогичное понятие производной, введенное в [7], § 4, соответствует (BB)-интегралу. Однако показывается, что эти p-производные лишены некоторых хороших свойств, которыми обладает производная в смысле [7].

В последнем, четвертом, параграфе вводится еще одно новое понятие, а именно понятие (BS)-интеграла. Связь между (BS)-интегралом и (BB)-интегралом аналогична связи между (pS)-интегралом и (pB)-интегралом. В статье показаны основные свойства (BS)-интеграла; они в большинстве вполне аналогичны свойствам (BB)-интеграла или (pS)-интеграла.

Открытым остается однако один интересный вопрос. Случайную функцию $\mathbf{X}$ назовем локально B-аддитивной в точке t, если для всякой последовательности интервалов

$$I_n = \langle t - h_n', t + h_n''\rangle\,, \quad h_n' \to 0+\,, \quad h_n'' \to 0+\,,$$

справедливо

$$\lim_{n \to \infty} \left|\varphi(I_n', s)\, \varphi(I_n'', s) - \varphi(I_n, s)\right| = 0$$

локально равномерно по s, причем $I_n' = \langle t - h_n', t)$, $I_n'' = \langle t, t + h_n'')$, и $\varphi(I, s)$, конечно, обозначает характеристическую функцию случайной величины $X(I)$, см. (1.4). Тогда неизвестно, справедливо ли следующее утверждение: Если $\mathbf{X}$ имеет (BB)-интеграл в некотором интервале J и во всех его подинтервалах, то $\mathbf{X}$ локально B-аддитивна во всех $t \in J$. Аналогичное утверждение для (pB)-интеграла верно (см. теорему 5 настоящей работы).