Czechoslovak Mathematical Journal

Ivo Marek

Spektrale Eigenschaften der $\mathcal{K}$-positiven Operatoren und Einschlie\ssungssätze für den Spektralradius

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 4, 493–517

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100747

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

SPEKTRALE EIGENSCHAFTEN DER $\mathscr{K}$-POSITIVEN OPERATOREN UND EINSCHLIESSUNGSSÄTZE FÜR DEN SPEKTRALRADIUS

IVO MAREK, Praha

(Eigegangen am 13. August 1965)

In dieser Arbeit wird die Gültigkeit des verallgemeinerten Minimaxprinzips in einem beliebigen Banachschen Raume für $\mathscr{K}$-positive Operatoren bewiesen, die einige spezielle Eigenschaften besitzen. Die Verallgemeinerung des bekannten Minimaxprinzips betrifft auch die Operatoren in den endlichdimensionalen Räumen. Es zeigt sich nämlich, dass das verallgemeinerte Minimaxprinzip auch für einige nichtnegative zerlegbare Matrizen gilt. Ähnlich wie im Falle der endlich dimensionalen Räume werden mit Hilfe dieses Prinzipes einige Einschliessungssätze für den Spektralradius und einige weitere Folgerungen abgeleitet.

1. EINLEITUNG

Bei der angenährten Lösung der Gleichungen, Konstruktion von Eigenwerten und Eigenwektoren entstehen beträchtliche Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der erreichten Genauigkeit und mit derer Vergrösserung. Das praktisch benutzte Halbierungsprinzip der Schrittlänge kann im Falle der monotonen Konvergenz versagen. Es ist deshalb vorteilhaft, für die Berechnung solche Methoden zu wählen, die zu den Näherungen mit gekannten beiderseitigen Schranken führen. Andererseits ist es notwendig nur stabile Methoden zu wählen. Zu diesen gehören die meisten Iterationsverfahren. Wir werden zeigen, dass für einige Operatoren im Banachschen Raume Einschliessungssätze, die ähnlich den Sätzen von L. COLLATZ [4], [5], R. S. VARGA [24], H. WIELANDT [25] und anderer Authoren sind, gelten.

In dieser Arbeit werden die Operatoren untersucht, die einen Kegel $\mathscr{K}$ der nichtnegativen Vektoren im Banachschen Raume $\mathscr{Y}$ reproduzieren. Der Einfachheit wegen werden wir voraussetzen, dass jedes Element $y \in \mathscr{Y}$ in der Form $y = y_1 - y_2$ ausgedrükt werden kann, wo $y_1, y_2 \in \mathscr{Y}$ ist. Wir erstreben dabei die Vermeidung der Voraussetzung, dass der Kegel $\mathscr{K}$ innere Elemente hat. Dies wird aber nur auf Kosten schärferer Voraussetzungen auf die Spektraleigenschaften des untersuchten

Operators gelingen. Wir sind der Meinung, dass bei den Anwendungen in der Regel bekannt ist, ob der untersuchte Operator dieses oder jene Eigenschaften hat und dass also die Beschränkungen natürlich sind, während praktische Aufgaben, bei deren Lösung man sich auf Räume, in denen der Kegel ein nichtleeres Innere oder einige weiteren Eigenschaften hat, beschränken kann, verhältnismässig rar vorkommen, mit Ausnahme der Fälle der endlichdimensionalen Räume. Bei unseren Erwägungen sind wir bestrebt, nur die natürlichsten Voraussetzungen zu benutzen und besonders diejenige, die in den praktischen Aufgaben erfüllt sind. Zu solchen Aufgaben gehören einerseits die schon erwähnten Probleme der numerischen Mathematik und andererseits einige Probleme der mathematischen Physik.

Bei unserer Untersuchung wird es sich um die Verallgemeinerung des bekannten Minimaxprinzips, welches für unzerlegbare Matrizen mit nichtnegativen Elementen gültig ist, handeln. Für solche Matrizen gilt der bekannte Satz von Frobenius (GANTMACHER [6], S. 323, Wielandt [25]), den man folgenderweise formulieren kann:

Frobeniussche Satz. *Wenn T eine m-reihige unzerlegbare Quadratmatrix mit nichtnegativen Elementen ist, dann*

1) *ist der Wert*

$$\mu_0 = \min_{\substack{(x)_j \geqq 0 \\ x \neq 0}} \max_{1 \leqq j \leqq m} \frac{(Tx)_j}{(x)_j} = \max_{(x)_j \geqq 0} \min_{1 \leqq j \leqq m} \frac{(Tx)_j}{(x)_j},$$

wo $(x)_j$ die j-te Komponente des Vektors $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ bedeutet, ein Eigenwert der Matrix T,

2) *zu diesem Eigenwert gehört ein Eigenvektor x_0, dessen Komponenten durchaus positiv sind, und ausser den Vektoren der Form cx_0, wo $c > 0$, hat die Matrix T keine andere nichtnegative Eigenvektoren,*

3) *Für alle Eigenwerte $\mu_0 = \mu_1, \ldots, \mu_m$ der Matrix T gilt die Ungleichung*

$$|\mu_j| \leqq \mu_0 \quad j = 1, \ldots, m .$$

Wenn für $\mu_j \neq \mu_0$ die Gleichung $|\mu_j| = \mu_0$ stattfindet, dann existiert eine ganze Zahl $d \geqq 1$ so, dass $\mu_0^d = \mu_j^d$.

Der Satz von Frobenius und sein Spezialfall – der Satz von Perron für die Matrizen mit positiven Elementen – wurden von vielen Authoren in vielen Richtungen verallgemeinert: BIRKHOFF [1], BONSALL [2], [3], JENTZSCH [7], KRASNOSELSKI [9], KREIN und RUTMAN [10] MAREK [11], [14], [15], SASSER [16], SAWASHIMA [17], SCHAEFER [18], [21], [22] usw.

In dieser Abhandlung werden wir uns auf einige $\mathscr{K}$-positive Operatoren T konzentrieren, die auf der Kreislinie $|\lambda| = r(T)$, wo $r(T)$ den Spektralradius des Operators T bedeutet, eine endliche Anzahl von isolierenten Singularitäten haben. Vom speziellen Interesse wird für uns der Wert $\lambda = r(T)$ und die Methoden einer angenährten Konstruktion desselben sein, besonders die Iterationsmethoden (Potenz- resp. Kelloggsche Methoden).

Nun werden wir den folgenden Hauptsatz formulieren (Bezeichnungen und Definitionen sind im Absatz 2 angeführt).

Vorassetzungen.

(i) $\mathscr{K} \subset \mathscr{Y} = \mathscr{K} - \mathscr{K}$ *ist ein normaler Kegel*;

(ii) $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}' \subset \mathscr{Y}'$ *ist eine* $\mathscr{K}$*-totale Menge*;

(iiia) $T \in [Y]$ *ist eine halbnichttragender Operator*;

(iiib) $T \in [Y]$ *ist ein* u_0*-positiver Operator*;

(iiic) $T \in [Y]$ *ist ein streng nichttragender Operator*;

(iiid) $T \in [Y]$ *ist ein gleichmässig* u_0*-positiver Operator*;

(iv) *Es gibt höchstens endlich viele isolierte Singularitäten* $\mu_0 = \mu_1, \ldots, \mu_s$ *der Resolvente* $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, *für welche* $|\mu_j| = r(T)$ *ist.*

(v) *Die Punkte* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *sind Pole der Resolvente* $R(\lambda, T)$ *mit den Vielfachheiten* $q_1, \ldots, q_s$.

Hauptsatz. *Wenn die Voraussetzungen* (i), (ii), (iv), (v) *und eine von den beiden Voraussetzungen* (iiia), (iiib) *erfüllt sind, so gilt*

1. $$\mu_0 = r(T) = \min_{\substack{x \in \mathscr{K} \\ x \neq 0}} \sup_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = \max_{x \in \mathscr{K}} \inf_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') \langle x\ x' \rangle > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle},$$

wobei $\varkappa(x') = 1$ *für* (iiia) *und* $\varkappa(x') = \langle u_0, x' \rangle$ *für* (iiib) *ist.*

2. μ_0 *ist ein Eigenwert des Operators T, zu dem ein Eigenvektor* $x_0 \in \mathscr{K}$ *gehört, wobei ausser den Vektoren der Form* cx_0, *wo* $c > 0$, *im Kegel kein anderer Eigenvektor des Operators T liegt.*

Wenn ausser (iiia) *resp.* (iiib) *noch die Voraussetzung* (iiic) *resp.* (iiid) *erfüllt ist, dann hat jedes mit Hinsicht auf T extremales Element die Form* cx_0.

3. *Für alle Punkte* λ *des Spektrums* $\sigma(T)$ *gilt die Ungleichung*

$$|\lambda| \leqq \mu_0\,, \quad \lambda \in \sigma(T)\,.$$

Einige Folgerungen aus diesem Satze werden wir im Absatz 4 gemeinsam mit dem Eischliessungssatz für $r(T)$ anführen, der keine Beschränkungen auf den Operator T, sondern auf den untersuchten Raum $\mathscr{Y}$ und den Kegel der nichtnegativen Elemente $\mathscr{K}$ legt. Der grossen Allgemeinheit wegen ist die durch diesen Satz vermittelte Information verhältnissmässige wenig inhaltsreich.

Interessant ist der Vergleich der Voraussetzungen des Hauptsatzes und des Satzes 4.2. Betreffs des Operators T werden im Satze 4.2 keine Ausprüche gestellt und in dieser Richtung ist der Satz 4.2 allgemeiner. Jedoch sind die im Satze 4.2 verlangten Eigenschaften des Raumes $\mathscr{Y}$ und des Kegels $\mathscr{K}$ soweit auspruchsvoll, dass die Benutzung dieses Satzes in der Praxis schon z.B. im Falle der $\mathscr{L}_p$-Räume oder $\mathscr{W}_p^{(k)}$-Räume von Soboleff versagt. Wir geben deshalb dem Hauptsatz den Vorzug, was wir durch das Epitheton „Haupt-" ausdrücken.

Den Beweis des Hauptsatzes wird im Absatz 5 geben.

Durch den Vergleich des Hauptsatzes mit dem Frobeniusschen Satz stellen wir fest, dass der Satz von Frobenius ein Spezialfall des Hauptsatzes (mit iiia) ist. Es ist interessant, dass auch für den Fall der nichtnegativen Matrizen im endlichdimensionalen Raume der Hauptsatz allgemeiner ist, da ein u_0-positiver Operator im endlichdimensionalen Raume nicht unzerlegbar sein muss (siehe das Beispiel im Absatz 5).

Das erwähnte verallgemeinerte Minimaxprinzip bei u_0-positiven Operatoren und einige Anwendungen dieses Prinzipes zu der numerischen Analysis wird in der Arbeit [15] des Verfassers entwickelt.

2. BEZEICHNUNGEN UND DEFINITIONEN

Die Untersuchungen werden in dem reellen Banachraume $\mathscr{Y}$ mit dem Kegel $\mathscr{K}$ der nichtnegativen Elemente durchgeführt.

Die Menge $\mathscr{K} \subset \mathscr{Y}$ wird Kegel genannt, wenn sie folgende Eigenschaften hat

(a) $x \in \mathscr{K},\ y \in \mathscr{K} \Rightarrow x + y \in \mathscr{K}$,

(b) $x \in \mathscr{K},\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathscr{K}$,

(c) $x \in \mathscr{K},\ -x \in \mathscr{K} \Rightarrow x = o$,

(d) $\mathscr{K}$ *ist eine abgeschlossene Menge.*

Wir werden voraussetzen, dass der Kegel $\mathscr{K}$ bildend, d.h. $\mathscr{Y} = \mathscr{K} - \mathscr{K}$ (Krein und Rutman [10]) und normal ist, was das bedeutet, dass $\|x + y\| \geqq \delta\|x\|$ für $x \in \mathscr{K}$, $y \in \mathscr{K}$, $\|x\| = \|y\| = 1$, wo $\delta > 0$ nicht von x, y abhängt (Krein und Rutman [10]).

Die Menge aller Paare $z = x + iy$, $x \in \mathscr{Y}$, $y \in \mathscr{Y}$, $i^2 = -1$, bildet auch einen Banachraum – die komplexe Erweiterung des Raumes $\mathscr{Y}$ – den wir mit dem Symbol $\mathscr{X}$ bezeichnen werden. Die Topologie in $\mathscr{X}$ wird durch die Norm

$$\|z\| = \sup_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} \|x \cos \vartheta + y \sin \vartheta\|$$

oder durch eine äquivalente Norm induziert.

Die zu $\mathscr{Y}$, $\mathscr{X}$ konjugierten Räume mit der Topologie, die durch die gleichmässige Konvergenz auf beschränkten Mengen hergestellt ist, werden mit den Symbolen $\mathscr{Y}'$, $\mathscr{X}'$ bezeichnet. Die Symbole $[\mathscr{Y}]$, $[\mathscr{X}]$ bedeuten die Räume der stetigen linearen Abbildungen von $\mathscr{Y}$ resp. $\mathscr{X}$ in sich mit der üblichen Topologie.

Die Menge aller Formen $y' \in \mathscr{Y}'$, für die $\langle x, y' \rangle \geqq 0$ für $x \in \mathscr{K}$ gilt, wo $\langle x, x' \rangle$ den Wert der Form $x' \in \mathscr{Y}'$ auf dem Element $x \in \mathscr{Y}$ bedeutet, bildet einen Kegel $\mathscr{K}'$, den wir den adjungierten Kegel zu $\mathscr{K}$ nennen.

Die komplexe Erweiterung $\tilde{T}$ des Operators $T \in [\mathscr{Y}]$ definieren wir mit Hilfe der Relation $\tilde{T}z = Tx + iTy$, wo $z = x + iy$ ist.

Mit dem Symbol T' wird der Operator bezeichnet, der zum Operator $T \in [\mathscr{Y}]$, resp. $T \in [\mathscr{X}]$ adjungiert ist. T' ist durch die Formel $T'x' = y' \Leftrightarrow \langle x, y' \rangle = \langle Tx, x' \rangle$, wo $x \in \mathscr{Y}$, $x' \in \mathscr{Y}'$ ist, definiert.

Der Operator $T \in [\mathscr{X}]$ wird Operator von Radon-Nikolski genannt, wenn $T = U + V$, wo $U, V \in [\mathscr{X}]$, U ein kompakter Operator und $r(T) > r(V)$ ist. Hier bezeichnet $r(A)$ den Spektralradius vom $A \in [\mathscr{X}]$.

Die Nullelemente in den Räumen $\mathscr{Y}, \mathscr{X}, \mathscr{Y}', \mathscr{X}'$ werden mit demselben Symbol o bezeichnet. Die Symbole I, Θ bezeichnen den identischen und den Null-Operator sowie in $[\mathscr{Y}]$ als auch in $[\mathscr{X}]$.

Die Resolventenmenge $\varrho(T)$ des Operators $T \in [\mathscr{Y}]$ resp. $T \in [\mathscr{X}]$ ist eine Teilmenge der komplexen Ebene, zu der die Punkte λ gehören, für welche der Resolventenoperator $R(\lambda, T) = (\lambda I - \tilde{T})^{-1}$ im $[\mathscr{X}]$ liegt. Das Komplement der Resolventenmenge wird Spektrum des Operators T genannt und durch das Symbol $\sigma(T)$ bezeichnet. Für $T \in [\mathscr{Y}]$ definieren wir $\sigma(T) = \sigma(\tilde{T})$ und $r(T) = r(\tilde{T})$.

Die Menge $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ wird $\mathscr{K}$-total genannt, wenn aus den Bedingungen $\langle x, x' \rangle \geqq 0$, $x' \in \mathscr{H}'$, das Verhältniss $x \in \mathscr{K}$ folgt.

Mit Hilfe des Kegels $\mathscr{K}$ kann man in $\mathscr{Y}$ eine Halbordnung einführen. Wir definieren

$$x < y \ (\text{resp. } y > x) \Leftrightarrow y - x \in \mathscr{K}\,.$$

Ein Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ wird $\mathscr{K}$-positiv genannt, wenn aus der Bedingung $x \in \mathscr{K}$ folgt, dass auch $Tx \in \mathscr{K}$ ist.

Ein $\mathscr{K}$-positiver Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ wird u_0-positiv genannt (Krasnoselski [9], S. 60), *wenn ein Vektor $u_0 \in \mathscr{K}$, $\|u_0\| = 1$ existiert, so dass man zu jedem Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, positive Zahlen $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ und eine natürliche Zahl $p = p(x)$ finden kann, so dass die Relation*

$$\alpha u_0 < T^p x < \beta u_0 \tag{2.1}$$

gilt.

Ein u_0-positiver Operator T wird gleichmässig u_0-positiv genannt, wenn die natürliche Zahl p, von dem in der Definition der u_0-positivität die Rede ist, vom x nicht abhängt.

u_0-positiver Operator T wird stark u_0-positiv genannt (Marek [11]), *wenn zu jedem Vektor $x \in \mathscr{Y}$ eine solche positive Zahl $\gamma = \gamma(x)$ und eine solche natürliche Zahl $q = q(x)$ existieren, dass die Relation*

$$\gamma T^p x < u_0 \tag{2.2}$$

gilt.

Offenbar, wenn ein u_0-positiver Operator nicht stark u_0-positiv ist, so ist $\mathscr{K}$ nicht bildend.

Ein Element $x \in \mathscr{K}$ *wird* u_0*-positiv genannt, wenn eine positive Zahl* $\tau = \tau(x)$ *existiert, so dass* $\tau x > u_0$ *ist.*

Die lineare Form $y' \in \mathscr{K}'$ *wird streng positiv genannt, wenn* $\langle x, y' \rangle > 0$ *für jeden Vektor* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$ *ist.*

Ein Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird stark* $\mathscr{K}$*-positiv* (Krein und Rutman [10]) *genannt, wenn zu jedem* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, *eine natürlich Zahl* $p = p(x)$ *existiert, do dass* $T^p x \in \operatorname{Int} \mathscr{K}$ *ist, wo* $\operatorname{Int} \mathscr{K}$ *das Innere des Kegels* $\mathscr{K}$ *bezeichnet.*

Ein $\mathscr{K}$*-positiver Operator* $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird halbnichttragend (semi-non-support) genannt* (Sawashima [17]), *wenn zum jedem Paar* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, *eine natürliche Zahl* $p = p(x, x')$ *existiert, so dass* $\langle T^p x, x' \rangle > 0$ *ist.*

Ein $\mathscr{K}$*-positiver Operator* $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird nichttragend (non-support) genannt* (Sawashima [17]), *wenn zu jedem Paar* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, *ein Index* $p = p(x, x')$ *existiert, so dass* $\langle T^n x, x' \rangle > 0$ *für alle* $n \geqq p$ *ist.*

Ein $\mathscr{K}$*-positiver Operator* $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird streng nichttragend (strict non-support) genannt* (Sawashima [17]), *wenn für jedes Element* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, *ein* $p = p(x)$ *existiert, so dass* $T^n x = y$ *ein nichttragendes Element des Kegels* $\mathscr{K}$ *für alle* $n \geqq p$ *ist.*

Der Vektor $x \in \mathscr{K}$ *wird ein nichttragendes (non-support) Element des Kegels genannt* (Sawashima [17]), *wenn die Ungleichung* $\langle x, x' \rangle > 0$ *für jede Form* $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, *gilt.*

Ein Element $x \in \mathscr{K}$ *wird ein quasiinneres (quasi-interior) Element des Kegels* $\mathscr{K}$ *genannt* (Schaefer [22]), *wenn die Menge der linearen Kombinationen von Elementen des Intervalles*

$$[0, x] = \{y \mid o < y < x\}$$

dicht in $\mathscr{Y}$ *liegt.*

Ein $\mathscr{K}$*-positiver Operator* $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird quasiinnerer (quasiinterior) Operator genannt* (Schaefer [22]), *wenn* $\lambda > r(T)$ *existiert, so dass* $TR(\lambda, T)\, x$ *ein quasiinneres Element des Kegels* $\mathscr{K}$ *für jeden Vektòr* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, *ist.*

Ein Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird quasipositiv genannt* (Sasser [16]), *wenn zu jedem Paar* $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$ *ein Index* $p = p(x, x')$ *existiert, so dass* $\langle T^n x, x' \rangle \geqq 0$ *für* $n \geqq p$ *ist.*

Ein Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird streng quasipositiv (strictly quasipositive) genannt* (Sasser [16]), *wenn zu jedem Paar* $x \in \mathscr{K}$, $x' \in \mathscr{K}'$, *wo* x *ein nichttragendes Element des Kegels* $\mathscr{K}$ *und* x' *eine streng positive Form ist, ein Index* $p = p(x, x')$ *existiert, sodass* $\langle T^n x, x' \rangle > 0$ *für* $n \geqq p$ *gilt.*

Ein Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ *wird stark quasipositiv (strongly quasipositive) genannt* (Sasser [16]), *wenn er nicht nilpotent ist und wenn für jedes Paar* $x \in \mathscr{K}$, $x' \in \mathscr{K}'$, *wo x ein nichttragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$ und x' eine streng positive Form ist, die Ungleichung*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\langle T^n x, x'\rangle}{\|T^n\|} > 0$$

gilt.

In einer Umgebung einer beliebigen singulären isolierten Stelle der Resolvente $R(\lambda, T)$ kann man $R(\lambda, T)$ in eine Laurentsche Reihe (TAYLOR [23], S. 305) zerlegen

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\lambda - \mu_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\lambda - \mu_0)^{-k}, \tag{2.3}$$

wo $A_k \in [\mathscr{X}]$ und

$$B_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} R(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda\,, \quad B_{k+1} = (T - \mu_0 I)\,B_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

wobei $C_0 = \{\lambda \mid |\lambda - \mu_0| = \varrho_0\}$ und $\overline{\operatorname{Int} C_0} \cap \sigma(T) = \{\mu_0\}$ (der Strich bedeutet den Abschluss).

Besonders wichtig ist der Fall, wo μ_0 ein Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$ ist. In diesem Falle ist in der Laurentschen Entwicklung (2.3) nur eine endliche Anzahl der Operatoren B_k in dem absteigenden Teil der Entwicklung vom Nulloperator verschieden. Wenn $B_q \neq \Theta$, $B_{q+1} = \Theta$ ist, so sagen wir, dass μ_0 ein q-facher Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$ ist.

Wenn $T \in [\mathscr{Y}]$ und auf der Kreislinie $|\lambda| = r(T)$ eine endliche Anzahl der Pole der Resolvente $R(\lambda, T)$ liegt und μ_0 der Pol der grössten Vielfachheit unter diesen Singularitäten ist, so definieren wir

$$S_n^{(q)}(\mu_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^{-q+1}\mu_0^{-k}T^k$$

und speziell

$$S_n = S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_0^{-k}T^k\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ eine $\mathscr{K}$-totale Menge und $T \in [\mathscr{Y}]$ ein $\mathscr{K}$-positiver Operator mit einer von den Eigenschaften (iiia), (iiib) ist, definieren wir die Funktionale

$$r_x = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x')\langle x, x'\rangle > 0}} \frac{\langle Tx, x'\rangle}{\langle x, x'\rangle}\,, \tag{2.4}$$

$$r^x = \sup_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle Tx, x'\rangle}{\langle x, x'\rangle}\,, \tag{2.5}$$

wobei $\varkappa(x') = 1$ für (iiia), $\varkappa(x') = \langle u_0 x'\rangle$ für (iiib) und $r^x = +\infty$ ist, wenn $\langle x, x'\rangle = 0$ und $\langle Tx, x'\rangle > 0$ gilt. Es ist klar, dass $r_x < +\infty$ für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$ ist.

Wenn $y_0 \in \mathscr{K}$ ein nichttragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$ ist, so definieren wir das Funktional

$$\varrho(x) = \sup_{x' \in \mathscr{K}'} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle y_0, x' \rangle}, \tag{2.6}$$

so dass offensichtlich $0 \leqq \varrho(x) \leqq +\infty$ für $x \in \mathscr{K}$ und $-\infty \leqq \varrho(x) \leqq +\infty$ für $x \in \mathscr{Y}$ ist.

Ein Vektor $x \in \mathscr{K}$ wird extremal in Bezug auf T genannt, wenn $r_x = r(T)$ oder $r^x = r(T)$.

Ein halbgeordneter linearer Raum $\mathscr{Y}$ wird ein Rieszscher Raum genannt (Schaefer [18]), *wenn zu jedem Paar $x, y \in \mathscr{Y}$ die Elemente* $\sup \{x, y\} = x \vee y$ *und* $\inf \{x, y\} = x \wedge y$ *existieren.*

Wenn die Ordnung in $\mathscr{Y}$ mit Hilfe des Kegels $\mathscr{K}$ gegeben ist, $\mathscr{Y} = \mathscr{K} - \mathscr{K}$ und wenn $x \vee y$ und $x \wedge y$ in $\mathscr{K}$ existieren, dann ist $\mathscr{Y}$ offensichtlich ein Rieszscher Raum.

Wenn $\mathscr{Y}$ ein Rieszscher Raum ist, so setzen wir $y^+ = y \vee o$, $y^- = -(y \wedge o)$ und $|y| = y^+ + y^-$. Offenbar ist $y = y^+ - y^-$.

3. HILFSÄTZE ÜBER SPEKTRALEIGENSCHAFTEN DER $\mathscr{K}$-POSITIVEN OPERATOREN

Lemma 3.1. *Für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, gilt die Beziehung $r_x \leqq r_y$, wo $y = Tx$.*

Beweis. Es sei $y' \in \mathscr{K}'$ eine solche Form, dass $\langle Tx, y' \rangle > 0$ ist. Aus der Definition des Funktionals r_x und der $\mathscr{K}$-Totalität der Menge $\mathscr{K}'$ folgt die Gültigkeit der Beziehung

$$r_x x < Tx,$$

wovon

$$r_x y < T^2 x = Ty$$

und also ist auch

$$r_x \leqq \frac{\langle Ty, y' \rangle}{\langle y, y' \rangle},$$

so dass endlich

$$r_x \leqq \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x') \langle y, x' \rangle > 0}} \frac{\langle Ty, x' \rangle}{\langle y, x' \rangle} = r_y$$

gilt.

Ein ähnlicher Hilfsatz gilt auch für das Funktional r^x:

Lemma 3.2. *Für $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, gilt die Beziehung $r^x \geqq r^y$, wo $y = Tx$.*

Die folgenden Sätze werden bei dem Beweis des Hauptsatzes angewandt.

Satz 3.1 (Schaefer [20]) *Unter den Voraussetzungen* (i), (iiia) *resp.* (iiib), (iv), (v) *des Hauptsatzes gelten für die Vielfachheiten* $q_0 = q_1, \ldots, q_s$ *der Pole* $\mu_0 = \mu_1, \ldots, \mu_s$ *der Resolvente* $R(\lambda, T)$ *die Ungleichungen*

$$q_j \leqq q_0 \quad j = 1, \ldots, s\,.$$

Satz 3.2 (Marek [13]) *Unter den Voraussetzungen* (i), (iv), (v) *des Hauptsatzes und unter der Voraussetzung, dass die Vielfachheit* $q_j = q$ *der grössten Vielfachheit der Pole gleich ist, konvergiert die Operatorenfolge* $\{S_n^{(q)}\}$, *wo*

$$S_n^{(q)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^{-q+1} \mu_j^{-k} T^k$$

ist, in der Norm von $[\mathscr{X}]$ *zum Operator* $C_q = [\mu_j^{-q+1}/(q-1)!]\, B_q$, *wo* B_q *das führende Glied des absteigenden Teiles der Laurentschen Entwicklung der Resolvente* $R(\lambda, T)$ *in der Umgebung des Punktes* μ_j *ist.*

Lemma 3.3a. *Unter den Voraussetzungen* (i), (iiia), (iv), (v) *des Hauptsatzes liegt der Punkt* $\mu_0 = r(T)$ *im Spektrum* $\sigma(T)$ *und der Vektor*

$$B_1 x = \lim_{n \to} S_n x\,,$$

wo $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, *ist ein nichttragendes Element des Kegels* $\mathscr{K}$.

Beweis. Die Behauptung, dass $r(T) = \mu_0 \in \sigma(T)$ ist, gilt für jeden $\mathscr{K}$-positiven Operator $T \in [\mathscr{Y}]$, für den $r(T) > 0$ ist und wenn die Bedingungen (iv), (v) erfüllt sind (Marek [14]). Weiter ist bekannt (Sawashima [17]), dass zum Eigenwert $\mu_0 = r(T)$ des halbnichttragendes Operators $T \in [\mathscr{Y}]$ ein nichttragender Eigenvektor x_0 des Kegels $\mathscr{K}$ gehört und dass demselben Wert eine streng positive Eigenform x_0' des zu T adjungierten Operators T' enspricht. Ebenso ist bekannt (Sawashima [17]), dass die Eigenunterräume in $\mathscr{Y}$ und $\mathscr{Y}'$, die dem Eigenwert μ_0 entsprechen, eindimensional sind. Davon leiten wir her, dass die Folge $\{S_n x\}$, wo $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, nicht zum Nullelement konvergieren kann. Setzen wir voraus im Gegenteil, dass $S_n x \to o$ bei $n \to \infty$. Man kann also den Ausdruck $\langle S_n x, x_0' \rangle$ beliebig klein machen. Wählen wir also $\varepsilon > 0$ und finden wir N so, dass $\langle S_n x, x_0' \rangle < \varepsilon$ für $n \geqq N$ ist. Andererseits ist aber

$$\langle S_n x, x_0' \rangle = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \mu_0^{-k} \langle T^k x, x_0' \rangle = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \langle x, x_0' \rangle = \langle x, x_0' \rangle > 0\,,$$

so dass die Ungleichungen

$$0 < \delta = \langle x, x_0' \rangle = \langle S_n x, x_0' \rangle < \varepsilon$$

gelten müssen, die infolge der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ zum Widerspruch führen. Es ist also der Vektor

$$B_1 x = \lim_{n\to\infty} S_n x$$

vom Nullelement verschieden, wenn $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$ ist. Das bedeutet aber, dass der Vektor $y_x = B_1 x$ ein zu dem Eigenwert $\mu_0 = r(T)$ gehöriger Eigenvektor des Operators T ist, woraus folgt, dass ein nichttragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$ ist, was wir beweisen wollten.

Bemerkung. *Ähnlich gilt, dass für eine beliebige Form $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$, die Folge $\{S'_n x'\}$ zu der Form $\nu x'_0$ konvergiert, wo $\nu > 0$ ist.*

Wir wissen schon, dass der Vektor $y_x = B_1 x$, wo $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, ein nichttragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$ ist. Das bedeutet, dass für jede Form $x' \in \mathscr{K}$, $x' \neq o$, die Beziehungen

$$\langle y_x, S'_n x' \rangle = \langle S_n y_x, x' \rangle = \langle y_x, x' \rangle > 0$$

gelten. Die Folge $\{S'_n x'\}$ kann also nicht zu der Nullform konvergieren, so dass

$$B'_1 x' = \lim_{n\to\infty} S'_n x'$$

ein zum Eigenwert $\mu_0 = r(T)$ gehöriges Eigenfunktional des Operators T ist. Die zu beweisende Behauptung ist dann eine Folgerung dessen, dass T ein halbnichttragender Operator ist.

Damit wir eine Behauptung, die dem Lemma 3.3a analog ist, für u_0-positiven Operator beweisen können, müssen wir zuerst einige Eigenschaften der u_0-positiven Operatoren beweisen.

Lemma 3.4. *Wenn ein u_0-positiver Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ einen Eigenvektor $x_0 \in \mathscr{K}$ und ein Eigenfunktional $x'_0 \in \mathscr{K}'$ hat, die beide zu einem von Null verschiedenen Eigenwert gehören, so gelten die Ungleichungen*

$$\langle u_0, x'_0 \rangle > 0\,, \quad \langle x_0, x'_0 \rangle > 0\,. \tag{3.1}$$

Beweis. Setzen wir voraus, dass $o \neq x'_0 = \nu^{-1} T' x'_0$, wo $\nu > 0$ ist. Dann existiert $x \in \mathscr{K}$, so dass $\langle x, x'_0 \rangle > 0$ und also

$$0 < \langle x, x'_0 \rangle = \frac{1}{\nu^k} \langle T^k x, x'_0 \rangle$$

für ein beliebiges ganzes $k \geqq 1$, also speziell auch für $k = p = p(x)$ wo

$$\alpha u_0 < T^p x < \beta u_0\,.$$

Daraus folgt sogleich die Gültigkeit der ersten Ungleichung in (3.1) Die zweite Ungleichung in (3.1) folgt aus der ersten, denn es gilt $x_0 \in \mathscr{K}$ und also mit $\alpha_0 = \alpha(x_0) > 0$ haben wir $\alpha_0 u_0 < \nu^p x_0$.

Satz 3.3. *Es sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{Y} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$ ein normaler Kegel und es sei $\mu_0 = r(T) > 0$ ein isolierter Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$ eines u_0-positiven Operators T. Setzen wir voraus, dass zum Eigenwert μ_0 ein Eigenvektor $x_0 \in \mathcal{K}$ und ein Eigenfunktional $x_0' \in \mathcal{K}'$ gehört. Dann ist der Punkt μ_0 ein einfacher Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Vielfachheit q des Poles μ_0 grösser als Eins ist. Es sei B_q das führende Glied im absteigenden Teil der Laurentschen Entwicklung der Resolvente $R(\lambda, T)$ in der Umgebung von μ_0. Nach dem Satz 3.2 ist B_q ein $\mathcal{K}$-positiver Operator und nach unserer Voraussetzung ist $B_q \neq \Theta$. Es existiert also ein $y \in \mathcal{K}$, so dass $B_q y \neq o$. Setzen wir $\alpha_0 = \alpha(B_q y)$, $\beta_0 = \beta(B_q y)$, $p_0 = p(B_q y)$. Aus der u_0-Positivität folgen die Beziehungen

$$\alpha_0 u_0 < T^{p_0} B_q y < \beta_0 u_0$$

und aus denen nach lemma 3.4 die Ungleichung

$$0 < \langle T^{p_0} B_q y, x_0' \rangle = \mu_0^{p_0} \langle B_q y, x_0' \rangle . \tag{3.2}$$

Andererseits ist aber

$$B_q = (T - \mu_0 I) B_{q-1} ,$$

also

$$\langle B_q y, x_0' \rangle = \langle B_{q-1} y, (T' - \mu_0 I) x_0' \rangle = 0 ,$$

was im Widerspruch mit (3.2) steht. Es muss also $q = 1$ sein.

Korollar 1. *Wenn auf der Kreislinie $|\lambda| = r(T)$ eine endliche Anzahl von isolierten Polen der Resolvente $R(\lambda, T)$ des u_0-positiven Operators $T \in [\mathcal{Y}]$ liegt, dann konvergiert die Folge $\{S_n\}$, wo*

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_0^{-k} T^k$$

ist, in der Norm des Raumes $[\mathcal{X}]$ zum Projektor B_1.

Korollar 2. *Zu dem Eigenwert $\mu_0 = r(T)$ des u_0-positiven Operators T gehört eine streng positive Eigenform $x_0' \in \mathcal{K}'$, d.h.*

$$\langle x, x_0' \rangle > 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{K},\ x \neq o .$$

Beweis. Für $x \in \mathcal{K}$, $x \neq o$, existieren $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$ und eine natürliche Zahl p, so dass

$$\alpha u_0 < \alpha' x_0 < T^p x ,$$

wo $x_0 = \mu_0^{-1} T x_0$, $x_0 \in \mathcal{K}$, $x_0 \neq o$, und daraus folgt nach Lemma 3.4

$$0 < \alpha' \langle x_0, x_0' \rangle \leqq \langle T^p x, x_0' \rangle = \mu_0^p \langle x, x_0' \rangle .$$

Korollar 3. *Unter der Voraussetzung, dass auf der Kreislinie $|\lambda| = r(T)$ eine endliche Anzahl von Polen der Resolvente $R(\lambda, T)$ des u_0-positiven Operators T liegt, ist der Operator B_1 auch ein u_0-positiver Operator.*

Lemma 3.3b. *Wenn wir im Lemma* 3.3a *die Voraussetzung* (iiia) *durch die Voraussetzung* (iiib) *ersetzen, so ist der Vektor*

$$B_1 x = \lim_{n \to \infty} S_n x$$

ein u_0-positiver Vektor für beliebiges Element $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$.

Beweis. Aus der u_0-Positivität des Operators T folgt nach dem Korollar 2 des Satzes 3.3, dass für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, die Ungleichung $\langle x, x_0' \rangle > 0$ gilt, wo $x_0' = \mu_0^{-1} T' x_0'$, $x_0' \in \mathscr{K}'$, $x_0' \neq o$, ist.

Wenn die Folge $\{S_n x\}$ zum Nullelement konvergieren sollte, so könnte man den Ausdruck $\langle S_n x, x_0' \rangle$ beliebig klein machen, also kleiner als ein im voraus gewähltes positives ε:

$$\langle S_n x, x_0' \rangle < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geqq N . \tag{3.3}$$

Andereseits ist aber

$$\langle S_n x, x_0' \rangle = \langle x, S_n' x_0' \rangle = \langle x, x_0' \rangle > 0 .$$

Dies ist aber ein Widerspruch; es genügt nämlich $\varepsilon = 2^{-1} \langle x, x_0' \rangle$ zu wählen und wir bekommen sogleich $\varepsilon < \langle x, x_0' \rangle < \varepsilon$. Das Lemma 3.3b ist dadurch bewiesen.

Satz 3.4 (Marek [12]) *Setzen wir voraus, dass*

1) *im Spektrum des Operators $T \in [\mathscr{X}]$ liegt das dominante Element μ_0, $|\mu_0| = r(T)$, was das bedeutet, dass die Ungleichung*

$$|\lambda| < |\mu_0|$$

für jeden Punkt $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq \mu_0$, gilt,

2) *der Punkt μ_0 ist ein Eigenwert dès Operators T,*

3) *es existiert die Form $y' \in \mathscr{X}'$, so dass*

$$\langle x, y' \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x, y_n' \rangle$$

für beliebigen Vektor $x \in \mathscr{X}$ gilt, wobei $y_n' \in \mathscr{X}'$ ist,

4) *es existiert ein Vektor $x^{(0)} \in \mathscr{X}$ und ein Index s, $1 \leqq s < +\infty$ so dass*

$$\langle B_s x^{(0)}, y' \rangle \neq 0 , \quad B_{s+1} x^{(0)} = o$$

gilt.

Definieren wir die Iterationsfolgen $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$, $\{\lambda_n\}$ durch die Formeln

$$y_{n+1} = \lambda_n T y_n\,, \quad y_0 = x^{(0)}\,, \tag{3.4}$$

$$y'_{n+1} = \lambda_n T' y'_n\,, \quad \langle x^{(0)}, y'_0\rangle \neq 0\,, \tag{3.5}$$

$$\lambda_n = \frac{\langle y_n, y'_n\rangle}{\langle T y_n, y'_n\rangle}\,. \tag{3.6}$$

Dann gelten die folgenden Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x_0 = \mu_0^{-1} T x_0\,, \quad \lim_{n\to\infty} y'_n = x'_0 = \mu_0^{-1} T' x'_0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0 = \mu_0^{-1}\,,$$

wobei $\langle x_0, x'_0\rangle \neq 0$.

Lemma 3.5 *Wenn $T \in [\mathscr{Y}]$ ein $\mathscr{K}$-positiver Operator ist, so hat das Funktional $\varrho = \varrho(x)$, das durch (2.6) definiert ist, die folgenden Eigenschaften:*

(3.7) (a) $\varrho(x)$ *ist eine reelle Zahl,*
(b) $\varrho(x) \geqq 0$ *für* $x \in \mathscr{K}$,
(c) $\varrho(\lambda x) = \lambda \varrho(x)$ *für* $x \in \mathscr{K}$, $\lambda \geqq 0$,
(d) $\varrho(x) \leqq \varrho(y)$ *für* $0 < x < y$,
(e) $\varrho(x + y) \leqq \varrho(x) + \varrho(y)$ *für* $x \in \mathscr{K}$, $y \in \mathscr{K}$,
(f) $\varrho(y_0) = r^{y_0}$,
(g) $Tx < \varrho(x)\, y_0$ *für* $x \in \mathscr{Y}$.

Bemerkung. *Die Eigenschaften des Funktionals $\varrho = \varrho(x)$ sind identisch mit den Eigenschaften des Funktionals $p = p(x)$ in* HADELERS *Dissertation* [8], S. 27.

4. DER EINSCHLIESSUNGSSATZ

In diesem Paragraph werden wir einige Behauptungen betreffs der Einschliessung für den Spektralradius eines $\mathscr{K}$-positiven Operators beweisen. Der Satz 4.1 ist eine leichte Folgerung des Hauptsatzes und stellt wieder eine Verallgemeinerung des entsprechenden Einschliessungssatzes für unzerlegbare Matrizen mit nichtnegativen Elementen vor (Gantmacher [6], S. 325, Varga [24], Wielandt [25]).

Der Satz 4.2 ist stärker als der Hauptsatz in dem Sinne, dass er keine Ansprüche auf den Operator T stellt. Andererseits verlangt er aber einige spezielle Eigenschaften des Raumes $\mathscr{Y}$ und des Kegels $\mathscr{K}$ der nichtnegativen Elemente und in dieser Richtung ist er schwächer. Dieser Satz stellt die abstrakte Formulation eines Satzes von K. P. Hadeler, der für den Fall des Raumes $\mathscr{C}(\Omega)$, wo Ω eine kompakte Menge ist, in seiner Dissertation [8], S. 25 bewiesen wurde.

Der Satz 4.4 gibt ein Mittel zur Verkleinerung des Intervalls, das den Eigenwert $\mu_0 = r(T)$ enthält.

Satz 4.1. *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes gelten die Ungleichungen*

$$(4.1) \qquad r_x = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle x x' \rangle > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} \leqq r(T) \leqq \sup_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = r^x$$

für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$.

Satz 4.2. *Setzen wir voraus, dass der Kegel* $\mathscr{K}$ *im Raume* $\mathscr{Y}$ *bildend und normal ist und dass er ein nichtleeres Innere* Int $\mathscr{K}$ *hat. Weiter setzen wir voraus, dass der Raum* $\mathscr{Y}$ *mit der durch den Kegel* $\mathscr{K}$ *induzierten Ordnung ein Rieszscher Raum ist. Es möge* $T \in [\mathscr{Y}]$ *ein beliebiger* $\mathscr{K}$*-positiver Operator sein.*

Dann gelten für den Spektralradius $r(T)$ *die Ungleichungen* (4.1), *wo* $x = y_0$ *ein beliebiges im* Int $\mathscr{K}$ *liegendes Element ist und* $\varkappa(x') = 1$.

Beweis ist im wesentlichen identisch mit dem entsprechenden Beweis von K. P. Hadeler [8].

Wenn $r_x = 0$ ist, so ist die Ungleichung $r_x \leqq r(T)$ trivial, ebenso wie die Ungleichung $r(T) \leqq r^x$ im Falle, dass $r^x = +\infty$. Es sei also $0 < r_x \leqq r^x < +\infty$. Aus der Definition von r_x und aus der $\mathscr{K}$-Totalität der Menge $\mathscr{K}'$ folgt die Gültigkeit der Relation $r_x x < Tx$ für jeden Vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$. Wir überzeugen uns leicht, dass

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} T^k$$

für $\lambda > r(T)$ ein $\mathscr{K}$-positiver Operator ist.

Setzen wir voraus, dass in (4.1) die erste Ungleichung nicht gilt, also dass $r(T) < r_x$ für ein Element $x \in \mathscr{K}$ ist. In diesem Falle ist $R(r_x, T)$ ein $\mathscr{K}$-positiver Operator und es ist

$$-x = -R(r_x, T)(r_x I - T)\, x \in \mathscr{K}\,,$$

was zusammen mit der Voraussetzung $x \in \mathscr{K}$ die ausgeschlossene Möglichkeit $x = o$ gibt. Somit ist die erste Ungleichung in (4.1) bewiesen.

Beim Beweise der zweiten Ungleichung in 4.1 unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall A. Der Wert $\mu_0 = r(T)$ ist ein Eigenwert des des Operators T. Es sei z ein zu diesem Eigenwert gehöriger Eigenvektor. Dann ist offenbar $-|z| < z < |z|$ und also $-T|z| < Tz < T|z|$, woraus $|Tz| < T|z|$ folgt. Weiter ist nach (3.7) (g)

$$(4.2) \qquad \mu_0 |z| = |Tz| < T|z| < \varrho(|z|)\, y_0\,.$$

Es gilt also die Ungleichung $\varrho(|z|) > 0$. Aus (4.2) erhalten wir nach (3.7) (d) endlich die Ungleichung

$$r(T)\, \varrho(|z|) \leqq \varrho(|z|)\, \varrho(y_0)$$

und aus deran die zu beweisende Ungleichung

$$r(T) \leqq r_{y_0}.$$

Fall B. μ_0 ist nicht ein Eigenwert des Operators T. In diesem Falle ist nach dem Lemma I in der Dissertation [8], S. 25, ein Element des kontinuierlichen Spektrum des Operators T. Es sei $y_0 \in \operatorname{Int} \mathscr{K}$. Die Mengen $\mathfrak{M}_\varepsilon = \{y \mid -\varepsilon y_0 < y < \varepsilon y_0, \varepsilon > 0\}$ bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen des Nullelementes in $\mathscr{Y}$. Die Resolvente $R(\mu_0, T)$ existiert, ist aber unbeschränkt. Es existiert also eine Folge $\{y_n\}$, $y_n \in \mathscr{Y}$, so dass

$$\|(T - r(T)\, I)\, y_n\| \leqq \varepsilon_n, \; \|y_n\| = 1, \; \varepsilon_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to +\infty .$$

Für jeden Vektor $z_n \in \mathscr{Y}$, $\|z_n\| \leqq \varepsilon_n$ existiert eine Umgebung $\mathfrak{M}_{\hat{\varepsilon}_n}$ des Nullelementes, so dass

$$-\hat{\varepsilon}_n y_0 < z_n < \hat{\varepsilon}_n y_0, \; \hat{\varepsilon}_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to +\infty.$$

Speziell für $z_n = (T - r(T)\, I)\, y_n$ gelten also die Beziehungen

$$-\hat{\varepsilon}_n y_0 < (T - r(T)\, I)\, y_n < \hat{\varepsilon}_n y_0, \; 0 < \hat{\varepsilon}_n \to 0 \quad \text{für} \quad n \to +\infty . \tag{4.3}$$

Setzen wir $z_n = z_n^+ - z_n^-$ und $|z_n| = z_n^+ + z_n^-$, wo $z_n^+ = z_n \vee o$, $z_n^- = -(z_n \wedge o)$ ist. Aus (4.3) folgt, dass $|z_n| < \hat{\varepsilon}_n y_0$, wovon

$$r(T)|y_n| < T|y_n| + \hat{\varepsilon}_n y_0 \tag{4.4}$$

folgt.

Wenn die Folge ϱ_n, wo

$$\varrho_n = \varrho(|y_n|) = \sup_{x' \in \mathscr{K}'} \frac{\langle T|y_n|, x' \rangle}{\langle y_0, x' \rangle}$$

eine Nullfolge wäre, so müsste die Folge $\{|y_n|\}$ zum Nullelement konvergieren, denn aus (4.4) folgt infolge der Eigenschaft (3.7) (g) des Funktionals ϱ die Gültigkeit der Beziehung

$$r(T)\, |y_n| < \varrho(|y_n| + \hat{\varepsilon}_n y_0)\, y_0 \tag{4.5}$$

und davon mit Hilfe der Eigenschaften (3.7) (e) und (c)

$$r(T)\, |y_n| < [\varrho(|y_n|) + \hat{\varepsilon}_n \varrho(y_0)]\, y_0 .$$

Das ist aber nicht möglich, da $\|y_n\| = 1$ und $\|\, |y_n| \,\| \geqq \delta \max [\|y_n^+\|, \|y_n^-\|]$, $\delta > 0$ ist. Es existiert daher eine von n unabhängige Konstante $c > 0$, so dass

$$\varrho(|y_n|) \geqq c > 0$$

für alle genügend grosse n ist. Aus (4.5) leiten wir dann mit Hilfe von (3.7) (d) die Gültigkeit der Ungleichung $r(T) \leqq \varrho(y_0)$ her, die wir beweisen sollten.

Bemerkung. *Aus dem Beweis des Satzes 4.2 ist klar, dass die Voraussetzungen, dass $\mathscr{Y}$ ein Rieszscher Raum ist, nur im Beweise der zweiten Ungleichung in (4.1) und die Voraussetzung* $\operatorname{Int} \mathscr{K} \neq \emptyset$ *nur im Beweise derselben Ungleichung benützt werden, unter der Voraussetzung, dass $\mu_0 = r(T)$ nicht ein Eigenwert des Operators T ist. Es gilt deshalb die folgende Behauptung.*

Satz 4.3. *Es sei $\mathscr{Y} = \mathscr{K} - \mathscr{K}$, wo $\mathscr{K}$ ein normaler Kegel ist. Dann gelten die Ungleichungen $0 \leqq r_x \leqq r(T)$, wo $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, für beliebigen $\mathscr{K}$-positiven Operator $T \in [\mathscr{Y}]$. Wenn nochmehr dazu der Raum $\mathscr{Y}$ mit der durch den Kegel $\mathscr{K}$ induzierten Halbordnung ein Rieszscher Raum und $\mu_0 = r(T)$ ein Eigenwert des Operators T ist, dann gelten die Ungleichungen (4.1), in welchen $x = y_0$ ein beliebiges nichttragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$ ist.*

Definieren wir die Folgen

$$\alpha_n = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle y_n, x'\rangle > 0}} \frac{\langle Ty_n, x'\rangle}{\langle y_n, x'\rangle}, \quad \beta_n = \sup_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle Ty_n, x'\rangle}{\langle y_n, x'\rangle}, \tag{4.6}$$

wo $y_0 = x^{(0)} \in \mathscr{K}$, $x^{(0)} \neq o$ und $y_{n+1} = Ty_n$ ist.

Satz 4.4. *Wenn die Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt sind, so existieren die Grenzwerte*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} \beta_n,$$

wobei

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n+1} \leqq \alpha \leqq r(T) \leqq \beta \leqq \beta_{n+1} \leqq \beta_n. \tag{4.7}$$

(vi) *Wenn nochmehr dazu der Punkt $\mu_0 = r(T)$ ein dominantes Element des Spektrums $\sigma(T)$ ist, so gilt*

$$\alpha = \beta = r(T). \tag{4.8}$$

Beweis. Offenbar ist

$$\alpha_n = r_{y(n)}, \quad \beta_n = r^{y(n)}, \quad y(n) = y_n,$$

so dass (4.7) leicht aus der Ungleichungen $r_x \leqq r_y$, $r^x \geqq r^y$ folgt, wo $y = Tx$, $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, ist.

Wir werden zeigen, dass die Gültigkeit der Beziehung (4.8) eine Folgerung der Dominanteneigenschaft des Eigenwertes μ_0 ist.

Leicht stellen wir fest, dass für α_n, β_n auch die Darstellungen

$$\alpha_n = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle y_n, x'\rangle > 0}} \frac{\langle \mu_0^{-n} T^{n+1} x^{(0)}, x'\rangle}{\langle \mu_0^{-n} T^n x^{(0)}, x'\rangle},$$

$$\beta_n = \sup_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle \mu_0^{-n} T^{n+1} x^{(0)}, x'\rangle}{\langle \mu_0^{-n} T^n x^{(0)}, x'\rangle}$$

gelten müssen. Nach dem Satz 3.4 ist für jede Form $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$,

$$\langle \mu_0^{-n} T^{n+1} x^{(0)}, x' \rangle \to \mu_0 \langle B_1 x^{(0)}, x' \rangle = \mu_0 \langle B_1 x^{(0)}, B_1' x' \rangle > 0 .$$

Danach können wir den Urteil machen, dass für genügend grosse n $\langle T^n x^{(0)}, x' \rangle \geqq \geqq c > 0$ vom n unabhängig gilt, da $B_1' x'$ eine streng positive Form ist (Lemma 3.3a, Lemma 3.3b). Wir nützen weiter die Tatsache aus, dass die Folgen $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ monoton sind und also die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha , \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta$$

haben. Offenbar ist $\alpha \leqq r(T) \leqq \beta$. Es möge $\alpha < r(T)$ sein. In diesem Falle existiert für ein beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ eine Form $\tilde{x}' \in \mathscr{K}'$, so dass die Ungleichung

$$\alpha + \varepsilon > \frac{\langle T^{n+1} x^{(0)}, \tilde{x}' \rangle}{\langle T^n x^{(0)}, \tilde{x}' \rangle} \tag{4.9}$$

für genügend grosse n gelten muss.

Andererseits existiert für dasselbe $\varepsilon > 0$ ein N, so dass die Ungleichungen

$$r(T) - \varepsilon < \frac{\langle T^{n+1} x^{(0)}, \tilde{x}' \rangle}{\langle T^n x^{(0)}, \tilde{x}' \rangle} < r(T) + \varepsilon \tag{4.10}$$

für $n \geqq N$ gelten.

Aus (4.9) und (4.10) erhalten wir die Ungleichung

$$r(T) - \varepsilon < \alpha + \varepsilon$$

die mit Hinsicht auf die Beliebigkeit der Wahl von $\varepsilon > 0$ und in Bezug auf die von uns gamachte Voraussetzung $\alpha < r(T)$ zum Widerspruch führt.

In ähnlicher Weise existiert zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\hat{x}' \in \mathscr{K}'$ so dass die Ungleichung

$$\beta - \varepsilon < \frac{\langle T^{n+1} x^{(0)}, \hat{x}' \rangle}{\langle T^n x^{(0)}, \hat{x}' \rangle}$$

gilt, die zusammen mit der entsprechenden Ungleichung wie (4.10) zur Ungleichung $\beta - \varepsilon < r(T)$ und also auch zum Widerspruch mit der Ungleichung $\beta > r(T)$ führt.

Somit ist die Gültigkeit der Beziehungen (4.8) und dadurch auch des Satzes 4.4 bewiesen.

Bemerkung. *Die Voraussetzung, dass der Wert μ_0 dominant ist, kann man nicht auslassen, wie es das folgende Beispiel zeigt.*

Setzen wir voraus, dass $\mathscr{Y} = \mathscr{R}_3$ der dreidimensionale euklidische Raum ist. Die Norm in $\mathscr{Y}$ ist durch das Skalar-produkt $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$, wo $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ bestimmt. Der Kegel $\mathscr{K}$ ist die Menge der Vektoren $x = (x_1, x_2,$

$x_3)^T$ mit nicht negativen Koordinaten x_j. Das Symbol $(x_1, x_2, x_3)^T$ bezeichnet einen Spaltenvektor. Der Operator T sei in einer Basis des Raumes $\mathscr{Y}$ durch die Matrix, die auch mit dem Symbol T bezeichnet wird, dargestellt:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Operator T ist halbnichttragend (die Matrix T ist unzerlegbar). Die Eigenwerte des Operators sind $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, $\mu_2 = (-\frac{1}{2})(1 - i\sqrt{3})$, sodass $\mu_j^3 = 1$. Es sei $x^{(0)} = (0, 1, 1)^T$. Wir stellen leicht fest, dass

$$\alpha_{6k} = \min_{j=2,3} \frac{(T^{6k+1}x^{(0)})_j}{(T^{6k}x^{(0)})_j} = \min_{j=2,3} \frac{(Tx^{(0)})_j}{(x^{(0)})_j} = 0\,.$$

Mit Hilfe von (4.7) stellen wir fest, dass $\alpha_k = 0$ für alle $k = 0, 1, \ldots$ Es ist also

$$0 = \alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n < 1 = r(T)\,.$$

Bemerken wir noch, dass der Operator T für kein $u_0 \in \mathscr{K}$ ein u_0-positiver Operator sein kann. Im entgegengesetzten Falle wäre er nämlich auch ein stark u_0-positiver Operator, was unmöglich ist, weil auf der Kreislinie $|\lambda| = 1 = r(T)$ drei Elemente des Spektrums $\sigma(T)$ liegen (Marek [11]).

5. BEWEIS DES HAUPTSATZES

Aus der Beziehung $r^x x > Tx$, die für ein beliebiges Element $x \in K$, $x \neq o$, gültig ist, können wir die Beziehung

$$r^x S_n x > T S_n x$$

ableiten und somit auch die Ungleichung

$$r^x \geqq r^y\,, \tag{5.1}$$

wo $y = S_n x$ ist.

Es sei

$$\alpha = \inf_{x\in\mathscr{K}\ x\neq 0}\ \sup_{\substack{x'\in\mathscr{K}'\\ \varkappa(x')>0}} \frac{\langle Tx, x'\rangle}{\langle x, x'\rangle}\,. \tag{5.2}$$

Offenbar ist $0 \leqq \alpha \leqq +\infty$. Andererseits haben wir

$$\mu_0 = r(T) = r^y = \sup_{\substack{x'\in\mathscr{K}'\\ \varkappa(x')>0}} \frac{\langle Ty, x'\rangle}{\langle y, x'\rangle}$$

wo $y = B_1 x$ und $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$ ist, sodass $\mu_0 \geqq \alpha$. Wir schliessen die Möglichkeit $\alpha < \mu_0$ aus. Offenbar genügt es, sich auf solche Vektoren $z \in \mathscr{K}$ zu beschränken, für welche $\langle z, x' \rangle > 0$ für $x' \in \mathscr{K}'$, $\varkappa(x') > 0$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathscr{K}$, $z \neq o$. Finden wir ein solches N, dass

$$\|S_n - B_1\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geqq N \, .$$

Die Existenz eines solchen N ist durch den Satz 3.2 gesichert. Nach dem entsprechenden von den Hilfssätzen 3.3 und laut dem Korollar 2 zum Satz 3.3 existiert ein $\zeta > 0$, $\zeta = \zeta(z, x')$, wo $x' \in \mathscr{K}'$, $\varkappa(x') > 0$, so dass die Ungleichungen $\langle S_n z, x' \rangle \geqq$ $\geqq \zeta > 0$ für $n \geqq N$ gelten, und also

$$\left| \frac{\langle TS_n z, x' \rangle}{\langle S_n z, x' \rangle} - \mu_0 \right| \leqq \frac{1}{\zeta} \left| \langle TS_n z, x' \rangle - \mu_0 \langle S_n z, x' \rangle \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\zeta} \left\{ \left| \langle TS_n z, x' \rangle - \langle TB_1 z, x' \rangle \right| + \left| \langle TB_1 z, x' \rangle - \mu_0 \langle S_n z, x' \rangle \right| \right\} .$$

Hier haben wir also einerseits

$$\left| \langle TB_1 z, x' \rangle - \langle TS_n z, x' \rangle \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \|T\| \, \|z\| \, \|x'\|$$

und andererseits

$$\left| \langle TB_1 z, x' \rangle - \mu_0 \langle S_n z, x' \rangle \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \mu_0 \|z\| \, \|x'\| \, .$$

Zusammen erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \frac{\langle TS_n z, x' \rangle}{\langle S_n z, x' \rangle} - \mu_0 \right| \leqq \frac{\varepsilon}{\zeta} \|T\| \, \|z\| \, \|x'\| \, . \tag{5.3}$$

Aus (5.1) folgt die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{\langle TS_n z, x' \rangle}{\langle S_n z, x' \rangle} \leqq r^{S_n z} \leqq r^z \tag{5.4}$$

und nach (5.3)

$$\mu_0 = \frac{\langle TS_n z, x' \rangle}{\langle S_n z, x' \rangle} + \chi_n \, ,$$

wo

$$|\chi_n| \leqq \frac{1}{\zeta} \|T\| \, \|z\| \, \|x'\| \, \varepsilon = \delta \varepsilon \, ,$$

so dass

$$\mu_0 \leqq r^y + \delta\varepsilon \leqq r^z + \delta\varepsilon \, , \quad y = S_n z \, ,$$

was infolge der Beliebigkeit der Wahl von $\varepsilon > 0$ zur Ungleichung

$$\mu_0 \leqq r^y \leqq r^z , \quad y = S_n z$$

und weiter davon zur Gleichung

$$\mu_0 = \alpha = \inf_{x \in \mathscr{K}, x \neq o} r^x = \min_{x \in \mathscr{K}, x \neq o} r^x$$

führt.

Den übrigbleibenden Teil der Behauptung des Hauptsatzes, nämlich die Gültigkeit der Gleichungen

$$\max_{x \in \mathscr{K}} \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle x\, x' \rangle > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = r(T)$$

kann man analog beweisen. Es ist aber nicht nötig, denn es sind die beiden Voraussetzungen des schon bewiesenen Satzes 4.3 erfüllt, nach welchem $r_x \leqq r(T)$ für ein beliebiges Element $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$, ist.

Andererseits gilt für die Elemente der Form $y = B_1 x$, wo $x \in \mathscr{K}$, $x \neq o$ ist die Gleichung

$$r_y = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle B_1 x\, x' \rangle > 0}} \frac{\langle TB_1 x, x' \rangle}{\langle B_1 x, x' \rangle} = \mu_0 ,$$

so dass auch

$$\max_{x \in \mathscr{K}} r_x \geqq \mu_0 = r(T) .$$

Damit ist der Beweis des Hauptsatzes vollendet.

Es bleibt übrig zu beweisen, dass das einzige extremale Element in Bezug auf T, bis auf einen positiven Multiplikationsfaktor, der Eigenvektor $x_0 = \mu_0^{-1} T x_0$, $x_0 \in \mathscr{K}$, $x_0 \neq o$ ist.

Setzen wir voraus also, dass $z \in \mathscr{K}$ die Eigenschaft hat, dass

$$r_z = \inf_{\substack{x' \in \mathscr{K}' \\ \varkappa(x')\langle x\, x' \rangle > 0}} \frac{\langle Tz, x' \rangle}{\langle z, x' \rangle} = \mu_0 = r(T) = r$$

ist.

Fall (iiic). Es sei nach der Voraussetzung $Tz - r_z z = v \neq o$ und $\langle T^n v, x' \rangle > 0$ für $n \geqq p = p(v)$ und $x' \in \mathscr{K}'$, $x' \neq o$. Weiter erhalten wir die Beziehungen

$$0 < \langle v, T'^p x' \rangle = \langle (T - rI)\, z, T'^p x' \rangle .$$

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$0 < \langle (T - rI)\, z - \varepsilon z, T'^p x' \rangle$$

und also

$$\langle Ty, x' \rangle \geqq (r + \varepsilon) \langle y, x' \rangle$$

wo $y = T^p z$. Aus dieser Ungleichung folgt, dass

$$r_y \geqq r + \varepsilon > r$$

ist, aber das ist im Widerspruch mit der Ungleichung $r_y \leqq r$. Also ist $Tz - rz = o$ und $z = cx_0$, $c > 0$.

Fall (iiid). Es sei nach der Voraussetzung

$$0 < Tz - r(T) z = v \neq o .$$

Dann ist $T^p v > \alpha(v) u_0$ und für $y = T^p z$ gilt

$$Ty - ry = T^{p+1} z - rT^p z = T^p(Tz - rz) = T^p v > \alpha(v) u_0 .$$

Für genügend kleine $\varepsilon > 0$ werden noch folgende Beziehungen gelten:

$$Ty - (r + \varepsilon) y > \alpha(v) u_0 - \varepsilon y > [\alpha(v) - \alpha(z) \varepsilon] u_0 ,$$

wo $\alpha(z) u_0 < T^p z$, $\alpha(v) u_0 < T^p v$. Es ist dann

$$\frac{\langle Ty, x' \rangle}{\langle y, x' \rangle} \geqq r_y \geqq r + \varepsilon , \quad \varepsilon > 0 ,$$

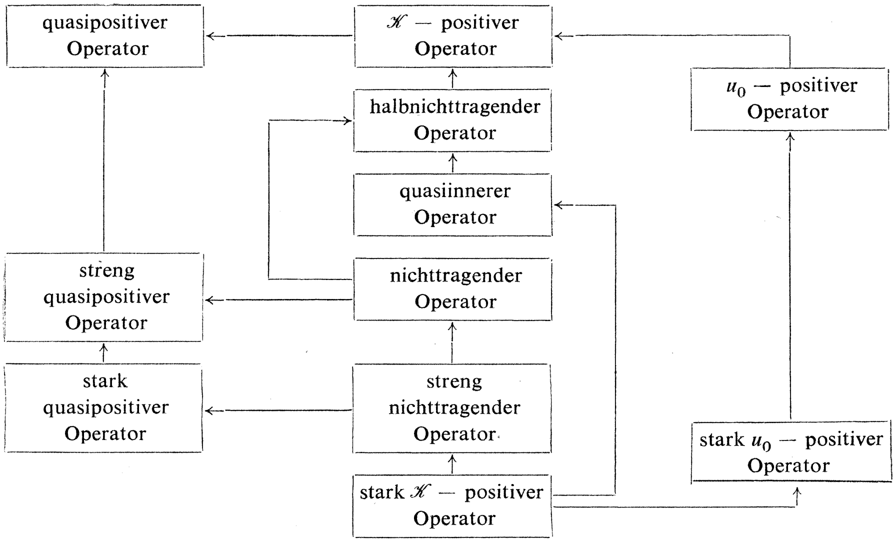
was im Widerspruch mit der Definition der Zahl r steht.

Also ist der Eigenvektor $x_0/\|x_0\|$, $x_0 = \mu_0^{-1} T x_0$ der einzige extremale normierte Vektor in Bezug auf T.

Bemerkung. *Im Laufe des Beweises des Hauptsatzes wurde gezeigt, dass man sich bei der Bestimmung des Maximums oder Minimums über den Kegel $\mathscr{K}$ auf die nichttragenden Elemente des Kegels $\mathscr{K}$ im Falle* (iiia) *oder auf die u_0-positiven Elemente des Kegels $\mathscr{K}$ im Falle* (iiib) *beschränken kann.*

6. SPEZIELLE OPERATOREN

In diesem Paragraph werden einige spezielle $\mathscr{K}$-positive Operatoren behandelt, die den Voraussetzungen des Hauptsatzes genügen. Wir werden auch versuchen einen Überblick der verschiedenen Beziehungen zwischen den verschiedenen Typen der $\mathscr{K}$-positiven Operatoren zu geben. Der Bequemlichkeit des Lesers wegen sind die nötigen Definitionen im Absatz 2 angeführt. Der Anschaulichkeit wegen sind die erwähnten Beziehungen im angeführten Diagramm eingezeichnet.



Es ist klar, dass für einen beliebigen $\mathscr{K}$-positiven Operator $T \in [\mathscr{Y}]$ der Hauptsatz nicht gilt. Aus dem Diagramm ist ersichtlich, dass man die Voraussetzungen (iii) schon nicht mehr wesentlich verschwächen kann.

Die Voraussetzungen (iv), (v) haben keine Beziehung zur Ordnung in $\mathscr{Y}$ und also zum Kegel $\mathscr{K}$. Ihre Erfüllung ist gesichert, wenn wir voraussetzen, dass

(vii) *eine Funktion f existiert, die analytisch in den zusammenhängenden Komponenten des Definitionsbereiches $\Delta(f) \supset \sigma(T)$* (TAYLOR [23], S. 288) *und so beschaffen ist, dass der Operator $f(T) = U + V$ ein Operator von Radon-Nikolski ist und $|f(\lambda)| > r(V)$ für $|\lambda| = r(T)$ gilt.*

Bemerkung 1. *Die Bedingung* (vii) *ist äquivalent (Anmerkung von* A. PIETSCH) *mit der Bedingung*

(vii′) *Es existiert eine Funktion g, die analytisch in den zusammenhängenden Komponenten des Definitionsbereiches $\Delta(g) \supset \sigma(T)$ und so beschaffen ist, dass ein kompakter Operator $U \in [\mathscr{Y}]$ existiert, so dass $\|g(T) - U\| < 1$ ist.*

Die Voraussetzung (vi) im Satz 4.4 ist erfüllt, wenn der Operator eine von diesen Eigenschaften besitzt:

(via) *Der Operator T ist nichttragend.*

(vib) *Der Operator T ist stark u_0-positiv.*

Bemerkung 2. *Es ist erwähnungswert, dass in dem angeführten Diagramm keine Beziehung zwischen den halbnichttragenden und u_0-positiven Operatoren besteht.*

Wir werden zeigen, dass ein stark u_0-positiver Operator existiert, der kein halbnichttragender Operator ist.

Es sei $\mathscr{Y} = \mathscr{R}_2$ ein reeller zweidimensionaler euklidischer Raum und T ein Operator, den man in einer Basis von $\mathscr{Y}$ durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

darstellen kann. Dieser Operator ist stark u_0-positiv, wo $u_0 = (0, 1)^T$ ist, denn $Tx = y$, $y = (0, \gamma + \tau)^T$, wo $x = (\gamma, \tau)^T$, aber ist er kein halbnichttragender Operator, weil das Skalarprodukt $\langle u_0, v_0 \rangle$, $v_0 = (1, 0)^T$, gleich Null ist. Der Vektor v_0 ist ein Eigenvektor des adjungierten Operators T'. Es ist also der Vektor $u_0 = Tu_0$ ein tragendes Element des Kegels $\mathscr{K}$, wo $\mathscr{K}$ die Menge aller Vektoren mit nicht negativen Koordinaten bezeichnet, was für einen halbnichttragenden Operator ausgeschlossen ist.

Andererseits braucht ein halbnichttragender Operator für kein Element $u_0 \in \mathscr{K}$ ein u_0-positiver Operator sein, wie es das in der Bemerkung zum Satz 4.4 angeführte Beispiel zeigt.

Bemerkung 3. *Es ziemt anzuführen, dass im endlichdimensionalen Raume die Begriffe $\mathscr{K}$-positiver unzerlegbarer Operator, halbnichttragender Operator und quasiinnerer Operator sowie auch die Begriffe primitiver Operator, nichttragender Operator und stark $\mathscr{K}$-positiver Operator zusammenfallen.*

Literaturverzeichniss

[1] *G. Birkhoff:* An extension of Jentzsch's theorem. Trans. Amer. Math. Soc. *85* (1957), 219—227.

[2] *F. F. Bonsall:* Endomorphisms of partially ordered vector spaces. J. London Math. Soc. *30* (1955), 133—144.

[3] *F. F. Bonsall:* Linear operators in complete positive cones. Proc. London Math. Soc. (3) *8* (1958), 53—75.

[4] *L. Collatz:* Einschliessungssatz für die Eigenwerte von Integralgleichungen. Math. Zeitschr. *47* (1942), 395—398.

[5] *L. Collatz:* Einschliessungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen. Math. Zeitschr. *48* (1942—43), 221—226.

[6] *Ф. Р. Гантмахер:* Теория матриц. Москва 1953.

[7] *R. Jentzsch:* Über Integralgleichungen mit positiven Kern. Journ. für reine und angew. Math. Bd. *141* (1912), 235—244.

[8] *K. P. Hadeler:* Einschliessungssätze bei normalen und bei positiven Operatoren. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hamburg. Hamburg 1965.

[9] *М. А. Красносельский:* Положительные решения операторных уравнений. Москва 1962.

[10] *М. Г. Крейн, М. А. Рутман:* Линейные операторы оставляющие инвариантными конус в иространстве Банаха. Усп. мат. наук III (1948), N1, 3—95.

[11] *I. Marek:* A note on $\mathscr{K}$-positive operators. Coment. Math. Univ. Carol. *4*, 4 (1963), 137 to 146.

[12] *I. Marek:* Iterations of linear bounded operators and Kellogg's iterations in non self-adjoint eigenvalue problems. Czech. Math. Journ. *12* (1962), 536—554.

[13] *I. Marek:* On approximative construction of eigenvectors corresponding to a pair of complex conjugated eigenvalues. Mat. fyz. časopis *14* (1964), 277—288.

[14] *I. Marek:* Some spectral properties of Radon-Nicolski operators and some their generalizations. Comment. Math. Univ. Carol. *3*, 1 (1962), 20—30.

[15] *I. Marek:* u_0-positive operators and some of their applications. J. Soc. Industr. Apl. Math. (Im Druck.)

[16] *D. W. Sasser:* Quasi-positive operators. Pacif. J. Math. *14* (1964), 1029—1037.

[17] *I. Sawashima:* On spectral properties of some positive operators. Nat. Sci. Rep. of the Ochanomizu Univ. *15* (1964), 53—64.

[18] *H. Schaefer:* Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume. Math. Annalen Bd. *135* (1958), 115—141.

[19] *H. Schaefer:* Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume II. Math. Annalen Bd. *138* (1959), 254—286.

[20] *H. Schaefer:* On the singularities of an analytic function with values in a Banach space. Arch. Math. XI (1960), 40—43.

[21] *H. Schaefer:* Positive Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen. Math. Annalen Bd. *129* (1955), 323—329.

[22] *H. Schaefer:* Spectral properties of positive linear transformations. Pacif. J. Math. *10* (1960), 1009—1019.

[23] *A. E. Taylor:* Introduction to Functional Analysis. J. Wiley publ. New York 1958.

[24] *P. C. Варга* (R. S. Varga): Численные истоды решения многомерных многогрупповых диффузионных уравнений. Теория ядерных реакторов, стр. 187—214. Москва 1963.

[25] *H. Wielandt:* Unzerlegbare nichtnegative Matrizen. Math. Zeitschr. 52 (1950), 642—648.

Anschrift des Verfassers: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА $\mathscr{K}$-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРЕМЫ О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА

ИВО МАРЕК, (Ivo Marek), Прага

Исследования проводятся в вещественном банаховом пространстве $\mathscr{Y}$ с воспроизводящим нормальным конусом $\mathscr{K}$. В $\mathscr{Y}$ вводится обычным способом частичная упорядоченность и с ее помощью положительность (линейного) отображения $\mathscr{Y}$ в $\mathscr{Y}$. Основным результатом статьи является обобщение „минимакспринципа" для линейных положительных отображений специального типа. Этот принцип доказан для полуненесущих (Sawashima [17]), с одной стороны и для u_0-положительных (Красносельский [10]), с другой стороны, операторов.

Пусть $\mathscr{K}' \subset \mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}'$ – сопряженное с $\mathscr{Y}$ пространство непрерывных линейных форм на $\mathscr{Y}$, – сопряженный с $\mathscr{K}$ конус. Предположим, что $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$.

Множество $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ назовем $\mathscr{K}$-тотальным, если из условий $\langle x, x' \rangle \geqq 0$, $x' \in \mathscr{H}'$, вытекает, что $x \in \mathscr{K}$.

Спектральный радиус линейного ограниченного отображения T пространства $\mathscr{X}$ в себя обозначаем символом $r(T)$.

Основной результат статьи сформулируем в виде теоремы.

Предположения.

(i) $\mathscr{K} \subset \mathscr{Y} = \mathscr{K} - \mathscr{K}$ — *нормальный конус;*

(ii) $\mathscr{H}' \subset \mathscr{K}'$ — $\mathscr{K}$*-тотальное множество;*

(iiia) T — *полуненесущий оператор;*

(iiib) T — u_0*-положительный оператор;*

(iv) *Существует не более чем конечное множество особых точек* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *резольвенты* $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, *для которых* $|\mu_j| = r(T)$.

(v) *Точки* $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *являются полюсами резольвенты* $R(\lambda, T)$ *кратностей* $q_1, \ldots, q_s$.

Основная теорема. *При выполнении условий* (i), (ii), (iv), (v) *и по крайней мере одного из условий* (iiia), (iiib) *имеем:*

1) $$\mu_0 = \mu_1 = r(T) = \min_{x \in \mathscr{K}, x \neq 0} \sup_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = \max_{x \in \mathscr{K}} \inf_{\substack{x \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') \langle x\ x' \rangle > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle},$$

где $\varkappa(x') = 1$ *для* (iiia) *и* $\varkappa(x') = \langle u_0, x' \rangle$ *для* (iiib).

2) μ_0 — *собственное значение оператора* T *и ему соответствует единственный нормализированный вектор* $x_0 \in \mathscr{K}$.

Если кроме (iiia) *выполнено условие* (iiic): *оператор* T — *строго ненесущий, или кроме* (iiib) *выполнено условие* (iiid): T — *равномерно* u_0*-положительный оператор, то каждый вектор* $x \in \mathscr{K}$, *для которого или*

$$\inf_{\substack{x' \in \mathscr{H}' \\ \varkappa(x') \langle x\ x' \rangle}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = r(T)$$

или

$$\sup_{\substack{x \in \mathscr{H}' \\ \alpha(x') > 0}} \frac{\langle Tx, x' \rangle}{\langle x, x' \rangle} = r(T),$$

имеет вид cx_0, *где* c — *постоянная.*

Отметим, что основная теорема обобщает известную теорему Фробениуса в формулировке Виланда (Wielandt [25]). Интересно также, что для квадратных неотрицательных матриц доказанный принцип является более общим, чем упомянутый принцип Виланда, потому что u_0-положительный оператор может быть, в общем, представлен в виде неотрицательной разложимой матрицы.

Кроме прямых следствий основной теоремы в статье имеются утверждения, касающиеся локализации спектрального радиуса рассматрваемого оператора.