G. N. Tevzadze

О поверхностях R и о реализации пары сопряженных аффинных связностей на поверхностях трехмерного проективного пространства

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 4, 520–534

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100799`

Чехословацкий математический журнал, т. 17 (92) 1967, Прага

О ПОВЕРХНОСТЯХ R И О РЕАЛИЗАЦИИ ПАРЫ СОПРЯЖЕННЫХ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ТРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Г. Н. Тевзадзе, Тбилиси

(Поступило в редакцию 4/III 1966 г.)

Указанные в заглавии два вопроса оказываются тесно связанными между собой.

Как известно [1], [2] на нормализованных поверхностях проективного пространства индуцируются сопряженные пары аффинных связностей, но не всякая сопряженная пара аффинных связностей реализуется на нормализованной поверхности. В предлагаемой работе выводится *необходимое и достаточное условие реализуемости на поверхности заданной пары сопряженных аффинных связностей* [например равенства (63) и (67)]. При этом существенно *предполагается единвственность реализующей поверхности.* Далее показывается, что *если пара связностей реализуется более чем на одну поверхность, то она реализуется на бесконечное множество поверхностей,* и по теореме А. П. Нордена, все они принадлежат к классу проективно изгибаемых поверхностей R. Характерный тензорный признак поверхностей R получается в виде равенств (68), (71) или (72) и (73).

С целью получения этих результатов, прежде всего, вспомним, что А. П. Норден доказал следующую основную теорему теории нормализованных поверхностей трехмерного проективного пространства ([1], стр. 194): задание внутренней геометрии 1 (2)-го рода и тензоров $p_{ij}(\pi_{ij})$ и b_{ij} определяют нормализованную поверхность с точностью до проективного преобразования, если они удовлетворяют условиям интегрируемости основных уравнений нормализованной поверхности:

$$\nabla_j y_i^\alpha = l_j y_i^\alpha + p_{ij} x^\alpha + b_{ij} X^\alpha \; ; \quad \nabla_j \eta_{\alpha(i)} = \lambda_j \eta_{\alpha i} + \pi_{ij} \xi_\alpha + b_{ij} \Sigma_\alpha \,, \tag{1}$$

где x^α, ξ_α — точечные и тангенциальные координаты поверхности соответственно, а b_{ij} — невырожденный симметричный тензор. К основной системе (1) присоединяется система

$$\partial_i X^\alpha = m_i^k y_k^\alpha + m_i x^\alpha - \lambda_i X^\alpha \; ; \quad \partial_i \Sigma_\alpha = \mu_i^k \eta_{\alpha k} + \mu_i \xi_\alpha - l_i \Sigma_\alpha \tag{2}$$

и сразу получаются условия интегрируемости обеих систем (1), (2) ([1], стр. 193):

$$
(3)\quad
\begin{array}{ll}
1.\ \nabla^k l_k = p^k_{.k}\,; & \nabla^k \lambda_k = \pi^k_{.k}\,;\\
2.\ b^k_i m^l_k = R^l_{.i} + p^k_{.k}\delta^l_i - p^l_{i.}\,; & b^k_i \mu_k = \varrho^l_{.i} + \pi^k_{.k}\delta^l_i - \pi^l_{i.}\,;\\
3.\ b^k_i m_k = \nabla^k p_{ik}\,; & b^k_i \mu_k = \nabla^k \pi_{(i)k}\,;\\
5.\ b^k_i(-\lambda_k - l_k) = \nabla^k b_{ik}\,; & b^k_i(-l_k - \lambda_k) = \nabla^k b_{ik}\,;\\
5.\ \nabla^k m^l_k + (l^k + \lambda^k)\, m^l_k = m^l\,; & \nabla^k \mu^{(l)}_k + (\lambda^k + l^k)\,\mu^l_k = \mu^l\,;\\
6.\ \nabla^k m_k + (l^k + \lambda^k)\, m_k = -m^l_k p^k_{l.}\,; & \nabla^k \mu_k + (\lambda^k + l^k)\,\mu_k = -\mu^l_k \pi^k_{l.}\,;\\
7.\ m^l_k b^k_l - \nabla^k \lambda_k = 0\,; & \mu^l_k b^l_k - \nabla^k l_k = 0\,.
\end{array}
$$

При этом греческие индексы принимают значения от 1 до 4 включительно а тензорные латинские индексы — 1 и 2; ∇_i — обозначает ковариантное дифференцирование в связности G^k_{ij} (связность 1-го рода), а $\nabla_{(i)}$ — в связности Γ^k_{ij} (связность 2-го рода). R_{ij}, ϱ_{ij} — тензоры Риччи связностей G^k_{ij}, Γ^k_{ij} соответственно. Кроме того, тензорные индексы перебрасываются при помощи бивекторов ε_{ij}, ε^{ij}, согласованных с невырожденным тензором b_{ij} (тензор асимптотической сети поверхности) [2], стр. 34.

В настоящей работе условия интегрируемости (3) преобразуются сперва к виду (25), а затем еще к двум видам (42) и (63). При этом получается соотвествующая основная теорема существования нормализованной поверхности трехмерного проективного пространства. Исключая случай линейчатых и изотермо-асимптотических поверхностей, в этих системах определяются неизвестные величины, когда системы не вполне интегрируемы [формулы (32), (49), (67)]. Случаи, когда эти уравнения сводятся к вполне интегрируемым системам, характеризуют проективно изгибаемые поверхности и критерии этих поверхностей получаются сразу [формулы (71) и (68)].

4. Рассмотрим на поверхности произвольную тройку невырожденных, взаимно аполярных сетей ([2], стр. 331) b_{ij}, e_{ij}, f_{ij},

$$
(4)\quad f^i_n b^n_j = e^i_j\,;\quad f^i_n e^n_j = b^i_j\,;\quad b^i_n e^n_j = f^i_j\,;\quad b^i_n b^n_j = -\delta^i_j\,;\quad f^i_n f^n_j = \delta^i_j\,;\quad e^i_n e^n_j = \delta^i_j\,,
$$

среди которых b_{ij} — тензор асимптотической сети поверхности и нормализуем поверхность прямыми Грина сопряженной сети f_{ij} ([2], стр. 380). Как известно ([2], стр. 386), в этом случае на поверхности индуцируется конформная пара внутренних связностей Вейля (G^n_{ij}, Γ^n_{ij}) с общей изотропной сетью f_{ij} и поэтому, в силу нормирования (4), будем иметь ([2], стр. 348):

$$
(5)\quad \overset{c}{\nabla}_n b_{ij} = \omega_n b_{ij}\,;\quad \overset{c}{\nabla}_n f_{ij} = \omega_n f_{ij}\,;\quad \overset{c}{\nabla}_n e_{ij} = \omega_n e_{ij}\,,
$$

где $\overset{c}{\nabla}_n$ обозначает ковариантное дифференцирование в вейлевой связности $c^n_{ij} = \frac{1}{2}(G^n_{ij} + \Gamma^n_{ij})$ (так называемая средняя связность), а ω_n ее дополнительный вектор.

С другой стороны, например, для тензора b_{ij} можно написать следующее очевидное равенство

$$\nabla_n b_{ij} - \nabla_{(n)} b_{ij} = \left(\Gamma^m_{ni} - G^m_{ni}\right) b_{mj} + \left(\Gamma^m_{nj} - G^m_{nj}\right) b_{mi}\,,$$

в котором разность сопряженных связностей Вейля Γ^n_{ij}, G^n_{ij} с общей изотропной сетью f_{ij} следует представить в виде ([2], стр. 350)

$$\Gamma^k_{ij} - G^k_{ij} = 2\tau_i \delta^k_j + 2\tau_j \delta^k_i + 2\tau_r f^{rk} f_{ij}\,, \tag{6}$$

где $\tau_i = \frac{1}{4}(\Gamma^k_{ik} - G^k_{ik})$ — чебышевский вектор сети b_{ij}. Поэтому теперь, в силу (4), будем иметь:

$$\nabla_n b_{ij} - \nabla_{(n)} b_{ij} = 4\tau_n b_{ij} + 2\tau_i b_{nj} + 2\tau_j b_{ni} - 2\tau_r e^r_j f_{ni} - 2\tau_r e^r_j f_{nj}\,,$$

или, преобразуя здесь член $\tau_r e^r_j f_{ni}$

$$\tau_r e^r_j f_{ni} = -\tau^r e_{rj} f_{ni} = -\tau^r\left(e_{ij} f_{nr} + \varepsilon_{ri} e^k_j f_{nk}\right) = \tau_r f^r_n e_{ij} + \tau_i b_{jn}\,,$$

получим окончательно

$$\nabla_n b_{ij} - \nabla_{(n)} b_{ij} = 4\tau_n b_{ij} + 4\tau^r f_{rn} e_{ij}\,.$$

Точно таким же путем определяются аналогичные выражения для тензоров f_{ij}, e_{ij} и полученные соотношения совместно с равенствами (5) дают, что

$$\nabla_n f_{ij} = (\omega_n + 2\tau_n) f_{ij}\,; \quad \nabla_n b_{ij} = (\omega_n + 2\tau_n)\, b_{ij} + 2\tau^m f_{mn} e_{ij}\,; \tag{7}$$
$$\nabla_n e_{ij} = (\omega_n + 2\tau_n)\, e_{ij} + 2\tau^n f_{mn} b_{ij}\,.$$

Аналогичные выражения для связности второго рода получаются из написанных только заменой τ_i на $(-\tau_i)$.

Для тензоров Риччи конформной пары Вейля имеем ([1], стр. 129)

$$\varrho_{(ij)} = A f_{ij}\,; \quad R_{(ij)} = -A f_{ij}\,; \quad A = \tfrac{1}{2} R_{ij} f^{ij} = -\tfrac{1}{2} \varrho_{ij} f^{ij}\,, \tag{8}$$

где A соответствующий коэффициент. Поэтому из соотношений ([1], стр. 195)

$$R_{ij} = 2p_{ji} - p_{ij} - \pi_{ji} + \left(\pi_{mn} b^{mn} + \Omega\right) b_{ij}\,; \tag{9}$$
$$\varrho_{ij} = 2\pi_{ji} - \pi_{ij} - p_{ji} + \left(p_{mn} b^{mn} + \Omega\right) b_{ij}$$

следуют равенства

$$-2\Omega = \left(p_{mn} + \pi_{mn}\right) b^{mn}\,; \quad \left(p_{ni} - \pi_{ni}\right) e^{ni} = 0\,; \tag{10}$$

при этом в последнем равенстве учтено, что $e_{ij} = f_{ni} b^n_j$.

В разложении (2) предполагается нормирование при котором

$$X^\alpha \xi_\alpha = 1 \; ; \quad x^\alpha \Sigma_\alpha = 1 \, ,$$

поэтому введя известное обозначение $X^\alpha \Sigma_\alpha = \Omega$ и дифференцируя его, сразу получается равенство

$$(11) \qquad m_i + \mu_i = \partial_i \Omega + \Omega \omega_i \, ,$$

так как

$$l_i + \lambda_i = \omega_i \, .$$

Теперь фиксируем выбор элементов X^α, Σ_α согласно равенствам

$$(12) \qquad p_{nm}(e^{nm} - b^{nm}) = 0 \; ; \quad \pi_{nm}(e^{nm} + b^{nm}) = 0 \; ;$$

тогда, в силу (10) и (11),

$$(13) \qquad \Omega = 0 \; ; \quad m_i + \mu_i = 0 \, .$$

Кроме того имеют место следующие разложения для тензоров p_{ij}, π_{ij}:

$$p_{ij} = y(b_{ij} - e_{ij}) - x f_{ij} + \tfrac{1}{2} p^{n}_{.n} \varepsilon_{ij} \; ; \quad \pi_{ij} = y(-b_{ij} - e_{ij}) - z f_{ij} + \tfrac{1}{2} \pi^{n}_{.n} \varepsilon_{ij} \, ,$$

где x, y, z — неизвестные коэффициенты.

Теперь равенства (9), в силу (13), принимают вид:

$$(14) \qquad \dot{R}_{ij} = \left(\tfrac{3}{2} p^{n}_{.n} - \tfrac{1}{2} \pi^{n}_{.n}\right) \varepsilon_{ji} + (z - x) f_{ij} \; ;$$

$$\varrho_{ij} = \left(\tfrac{3}{2} \pi^{n}_{.n} - \tfrac{1}{2} p^{n}_{.n}\right) \varepsilon_{ji} + (x - z) f_{ij}$$

и, согласно (8),

$$(15) \qquad z = x - A \, .$$

Таким образом окончательно получается, что

$$(16) \qquad p_{ij} = y(b_{ij} - e_{ij}) - x f_{ij} + l \varepsilon_{ij} \; ;$$

$$m^i_j = \pi_{sj} b^{si} = y(f^i_j - \delta^i_j) + (A - x) e^i_j - \lambda b_{ij} \; ;$$

$$\mu^i_j = p_{sj} b^{si} = y(f^i_j + \delta^i_j) - x e^i_j - l b^i_j \, ,$$

где ([1], стр. 195)

$$(17) \qquad l = \tfrac{1}{2} p^{n}_{.n} = -\tfrac{1}{16}(\varrho_{.n} + 3R^{n}_{.n}) \; ; \quad \lambda = \tfrac{1}{2} \pi^{n}_{.n} = -\tfrac{1}{16}(R^{n}_{.n} + 3\varrho^{n}_{.n}) \, .$$

Обратимся теперь к условиям интегрируемости (3). Соотношения (3_3), т.е. равенства третьей строки системы (3) (аналогичные обозначения употребляются также в дальнейшем), в силу (13), эквивалентны следующим двум равенствам:

$$\nabla^j p_{ij} + \nabla^{(j)}\pi_{(i)j} = 0\,; \quad 2b_i^k m_k = \nabla^k p_{ik} - \nabla^k \pi_{(i)k}\,,$$

которые, согласно (4), (7), (16) и (17), принимают вид:

$$(18) \qquad e_i^n\,\partial_n y + f_i^n\,\partial_n x + \omega_n e_i^n y + \omega_n f_i^n x + H_i = 0\,;$$

$$H_i = \tfrac{1}{2} f_{in}[\nabla^n A + A(\omega^n - 2\tau^n)] - \tfrac{1}{8}\nabla_i(\varrho^n_{.n} + R^n_{.n}) - \tfrac{1}{8}\omega_i(\varrho^n_{.n} + R^n_{.n}) + \\ + \tfrac{1}{8}\tau_i(\varrho^n_{.n} - R^n_{.n})\,.$$

$$(19) \qquad m_i = -\partial_i y - \omega_i y + 2\tau^n e_{ni} x + L_i\,;$$

$$L_i = \tfrac{1}{2} e_{in}[\nabla^n A + A(\omega^n - 2\tau^n)] - \tfrac{1}{4} b_i^n[\tfrac{1}{2}\nabla_n(\varrho^k_{.k} - R^k_{.k}) + \\ + \tfrac{1}{4}\omega_n(\varrho^k_{.k} - R^k_{.k}) - \tau_n(R^k_{.k} + \varrho^k_{.k})]\,.$$

Здесь мы применили также равенства

$$(20) \qquad \nabla_n \varepsilon_{ij} = (\omega_n + 2\tau_n)\,\varepsilon_{ij}\,; \quad \nabla_n \varepsilon^{ij} = -(\omega_n + 2\tau_n)\,\varepsilon^{ij}\,,$$

справедливость которых легко проверяется.

Если в выражениях для H_i, L_i учтем, что

$$(21) \qquad \nabla^n A + A\omega^n = \tfrac{1}{2} f^{ij} \overset{c}{\nabla}{}^n R_{ij}\,;$$

$$\varrho^n_{.n} + R^n_{.n} = -2\nabla^n \omega_n\,; \quad \varrho^n_{.n} - R^n_{.n} = 4\nabla^n \tau_n\,,$$

то эти величины можно представить также в виде:

$$(22) \qquad H_i = f_{in}(\tfrac{1}{4} f^{ms} \overset{c}{\nabla}{}^n R_{ms} - \tau^n) + \tfrac{1}{4}\nabla_i \nabla^n \omega_n + \tfrac{1}{2}\omega_i \nabla^n \omega_n + \tfrac{1}{2}\tau_i \nabla^n \tau_n\,;$$

$$L_i = e_{in}(\tfrac{1}{2} f^{ms} \overset{c}{\nabla}{}^n R_{ms} - \tau^n) - \tfrac{1}{2} b_i^n(\tfrac{1}{2}\nabla_n \nabla^m \tau_m + \tfrac{1}{2}\omega_n \nabla^m \tau_m + \tau_n \nabla^m \omega_m)\,.$$

Совершенно аналогичные вычисления показывают, что равенства (3_5) дают те же самые соотношения (18) и (19).

Кроме того, в силу (4), (16) и (21), получаем, что

(23)

$$m^i_j p^j_{i.} = -\mu^i_j \pi^j_{i.} = 2y(l + \lambda - A) = -\frac{y}{2}(\varrho^n_{.n} + R^n_{.n} + 2R_{mn} f^{mn}) = y(\nabla^n \omega_n - R_{mn} f^{mn})\,,$$

поэтому равенства (3_6) сводятся к единственному условию:

$$(24) \qquad R_{mn} f^{mn} y = 2\tau^n e_{nm} \nabla^m x + 2(\overset{c}{\nabla}{}^m \tau^n + 2\tau^n \omega^m)\, e_{mn} x + \nabla^i L_i + \omega^i L_i\,.$$

Легко проверить, что теперь соотношения (3_1) совпадают с (3_7) и если заданы внутренние связности, то они определяют l_i, λ_i с точностью до градиентного слагаемого, соответствующего произволу в нормировании x^α, ξ_α. Далее (3_2) удовлетворяются выражениями (9) и (16), а (3_4) определяет дополнительный вектор средней связности.

Таким образом, заканчивая анализ условий (3), приходим к следующему результату.

Пусть в некотором аналитическом многообразии (u^1, u^2) *заданы тройка невырожденных, симметричных, взаимно аполярных тензоров* b_{ij}, f_{ij}, e_{ij} *и конформная пара относительно* b_{ij} *сопряженных аффинных связностей без кручения* G^n_{ij}, Γ^n_{ij}, *имеющих* f_{ij} *в качестве общей изотропной сети. Составим следующую систему дифференциальных уравнений, содержащую две неизвестные функции* x *и* y

$$(25)\qquad 1.\ f^n_i\,\partial_n x + e^n_i\,\partial_n y + \omega_n f^n_i x + \omega_n e^n_i y + H_i = 0\,;$$

$$2.\ Ay = \tau^n e_{nm}\,\nabla^m x + (\overset{c}{\nabla^m}\tau^n + 2\tau^n\omega^m)\,e_{nm} x + M\,,$$

где

$$(26)\qquad \omega_i = b^m_i\,\nabla^n b_{nm}\,;\quad 4\tau_i = \Gamma^k_{ik} - G^k_{ik}\,;\quad 2A = R_{mn} f^{mn}\,;\quad 2M = \nabla^i L_i + \omega^i L_i\,;$$

при этом величины M_i, L_i *определены равенствами* (22).

Совместность системы (25) *является необходимым и достаточным условием того, чтобы существовала нормализованная поверхность проективного пространства с асимптотической сетью* b_{ij}, *на которой прямые Грина сети* f_{ij} *индуцируют заданную конформную пару аффинных связностей.*

В случае, когда система (25) допускает более чем одно решение, тогда различным ее решениям соответствуют проективно различные нормализованные поверхности, находящиеся во взаимном однозначном соответствии и несущие заранее заданные величины G^n_{ij}, Γ^n_{ij}, b_{ij} (в силу (16), все эти поверхности имеют разные $p_{ij}(\pi_{ij})$). Это означает, что в этом случае полученные поверхности будут проективно налагаться друг на друга, т.е. будут принадлежат к классу проективно изгибаемых поверхностей ([2], стр. 414).

Заметим, что задание сопряженной пары связностей определяет ее базис, т.е. тензор b_{ij} с точностью до нормирования, если только пара не является квазиевклидовой ([1], стр. 151). В случае не квазиевклидовой конформной пары, по формуле (8), определяется также сеть f_{ij}. Таким образом, не вказиевклидовая конформная пара однозначно определяет соответствующую тройку взаимно аполярных сетей.

Отметим так же, что в системе (25) величины x, y, A зависят от нормирования тензора b_{ij}:

$$b_{ij} = \alpha\,'b_{ij}\,;\quad y\alpha = 'y\,;\quad x\alpha = 'x\,;\quad A\alpha = 'A\,,$$

но сама система от нормирования тензора b_{ij} не зависит.

Систему (25) можно представить в другом виде. С этой целью заметим, что например во втором равенстве из системы (5)

$$\omega_n f_{ij} = \partial_n f_{ij} - \varepsilon^m_{in} f_{mj} - \varepsilon^m_{jn} f_{im}$$

связность ε^k_{ij} можно заменить по известной формуле Вейля ([3], стр. 216)

$$(27) \qquad \varepsilon^k_{ij} = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_b - \frac{1}{q}(\omega_i \delta^k_j + \omega_j \delta^k_i - b_{ij} \tilde{b}^{kn} \omega_n) \ ^{1)}$$

и учитывая, что ([1], стр. 126)

$$b_{ni}\omega_r e^r_j - b_{nr}\omega_i e^r_j = b^k_n \omega_k e_{ij}\,; \quad b_{nr} e^r_j = f_{nj}\,,$$

получим

$$\overset{b}{\nabla}_n f_{ij} = \omega_k b^k_n e_{ij}\,,$$

где $\overset{b}{\nabla}_n$ обозначает ковариантное дифференцирование в римановой связности $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_b$.

Теперь замечая, что

$$(28) \qquad \overset{b}{\nabla}_k b_{ij} = 0\,; \quad \overset{b}{\nabla}_k \varepsilon_{ij} = 0\,,$$

будем иметь окончательно:

$$(29) \qquad \overset{b}{\nabla}_n f_{ij} = \omega_k b^k_n e_{ij}\,; \quad \overset{b}{\nabla}_n e_{ij} = -\omega_k b^k_n f_{ij}\,;$$

$$(30) \qquad \overset{b}{\nabla}_n f^n_i = \omega_n f^n_i; \quad \overset{b}{\nabla}_n e^n_i = \omega_n e^n_i\,.$$

Отметим, что из соотношений (29) сразу следует, что

$$(31) \qquad \overset{b}{f}_i = \overset{b}{e}_i = -\tfrac{1}{2}\omega_i\,,$$

где $\overset{b}{f}_i$, $\overset{b}{e}_i$ — чебышевские векторы в связности $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_b$ сетей f_{ij}, e_{ij} соответственно ([1], стр. 169, [2], стр. 356).

Теперь, в силу (30), первое равенство из системы (25) можно представить или в виде $\overset{b}{\nabla}_n g^n_i + H_i = 0$, или в виде $\overset{b}{\nabla}_n h^n_i + H_n b^n_i = 0$, где введены обозначения

$$(32) \qquad g_{ij} = x f_{ij} + y e_{ij}\,; \quad h_{ij} = g_{ik} b^k_j = x e_{ij} - y f_{ij}\,.$$

---

1) $\begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_b$ обозначает символ Кристоффеля формы, соответствующей тензору b_{ij}.

Чтобы закончить приведение системы (25) к новому виду заметим, что, в силу (6), формулу ([2], стр. 185)

$$B^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - G^k_{ij} - (\delta^k_i \tau_j + \delta^k_j \tau_i + b_{ij} b^{km} \tau_m)$$

можно представить в виде:

$$B^k_{ij} = \tau_i \delta^k_j + \tau_j \delta^k_i + 2\tau_r f^{rk} f_{ij} - \tau_r b^{kr} b_{ij} \tag{33}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} e_{mn} \overset{c}{\nabla}{}^m \tau^n &= \overset{c}{\nabla}{}^m (e_{mn} \tau^n) - \tau^n \omega^m e_{mn} = -\overset{b}{\nabla}_m (e^m_n \tau^n) + \tau^n e^m_n \omega_m = \\ &= \tfrac{1}{2} \overset{b}{\nabla}_m (B^m_{rs} e^{rs}) - \tfrac{1}{2} \omega_m B^m_{rs} e^{rs} ; \end{aligned} \tag{34}$$

$$2\tau^n \omega^m e_{nm} = B^m_{rs} e^{rs} \omega_m ; \quad \nabla^i (\tau^m f_{mi}) = -\overset{b}{\nabla}_i (\tau^m f^i_m) = -\tfrac{1}{2} \overset{b}{\nabla}_i (B^i_{rs} f^{rs}) ;$$

$$\tau^m e^n_m = -\tfrac{1}{2} B^n_{ij} e^{ij} ; \quad \tau^m f^i_m = \tfrac{1}{2} B^i_{rs} f^{rs} .$$

Кроме того условие интегрируемости последних двух уравнений из системы (7), в силу (8), имеет вид:

$$A = \tfrac{1}{2} R_{ij} f^{ij} = -\tfrac{1}{2} \varrho_{ij} f^{ij} = -\nabla^n (\tau^m f_{mn}) . \tag{35}$$

Теперь согласно (33) и (34) второе уравнение системы (25) можно переписать так:

$$y \overset{b}{\nabla}_m (B^m_{rs} f^{rs}) = \overset{b}{\nabla}_m (x B^m_{rs} e^{rs}) + x B^m_{rs} e^{rs} \omega_m + 2M . \tag{36}$$

С другой стороны, в силу (4), из (25_1) следует уравнение

$$-\tau^i e_{in} \nabla^n x - f^n_i \tau^i \partial_n y + \omega_n e^n_i \tau^i x - \omega_n f^n_i \tau^i y + H_n b^n_i \tau^i = 0 ,$$

которое сложением с (25_2) дает

$$\begin{aligned} Ay = (\overset{c}{\nabla}{}^m \tau^n + 2\tau^n \omega^m)\, e_{nm} x + M - f^n_i \tau^i \partial_n y + \omega_n e^n_i \tau^i x - \\ - \omega_n f^n_i \tau^i y + H_n b^n_i \tau^i . \end{aligned}$$

Полученное равенство, согласно (33), (34), (35) принимает вид

$$-\overset{b}{\nabla}_n (y B^n_{rs} f^{rs}) + x \overset{b}{\nabla}_n (B^n_{rs} e^{rs}) - y \omega_n B^n_{rs} f^{rs} + 2M + 2H_n b^n_i \tau^i = 0$$

и, сложив его с равенством (36), будем иметь:

$$\begin{aligned} \overset{b}{\nabla}_m [B^m_{rs} (x e^{rs} - y f^{rs})] + x \overset{b}{\nabla}_m (B^M_{rs} e^{rs}) - y \overset{b}{\nabla}_m (B^m_{rs} f^{rs}) + \\ + (x e^{rs} - y f^{rs})\, B^m_{rs} \omega_m + 4M + 2H_n b^n_i \tau^i = 0 . \end{aligned}$$

Но, согласно (29) и (4),

$$\overset{b}{\nabla}_m(B^m_{rs}e^{rs}) = e^{rs}\overset{b}{\nabla}_m B^m_{rs} - \omega_k b^k_m f^{rs} B^m_{rs} = e^{rs}\overset{b}{\nabla}_m B^m_{rs} - \omega^k B^m_{ks} e^s_m =$$

$$= e^{rs}\overset{b}{\nabla}_m B^m_{ts} - \omega_n B^n_{rs} e^{rs} ;$$

$$\overset{b}{\nabla}_m(B^m_{rs}f^{rs}) = f^{rs}\overset{b}{\nabla}_m B^m_{rs} - \omega_n B^n_{rs} f^{rs} ,$$

поэтому получается уравнение следующего вида:

$$\overset{b}{\nabla}_m[B^m_{rs}(xe^{rs} - yf^{rs})] + (xe^{rs} - yf^{rs})\overset{b}{\nabla}_m B^m_{rs} + 4M + 2H_n b^n_i \tau^i = 0 .$$

Итак, систему (25) можно представить в виде

$$\overset{b}{\nabla}_m g^m_i + H_i = 0 ; \quad \overset{b}{\nabla}_m(g_{rs}D^{rsm}) + g_{rs}\overset{b}{\nabla}_m D^{rsm} + L = 0 , \tag{37}$$

или же в виде

$$\overset{b}{\nabla}_m h^m_i + H_m b^m_i = 0 ; \quad \overset{b}{\nabla}_m(B^m_{rs}h^{rs}) + h^{rs}\nabla_m B^m_{rs} + L = 0 , \tag{37'}$$

где

$$L = 4M + 2H_n b^n_i \tau^i ; \quad D_{ijk} = b_{ks}B^s_{ij} , \tag{38}$$

а неизвестные сопряженные тензоры g_{ij}, h_{ij} представлены равенствами (32).

По формуле (27) получается, что $\overset{b}{\nabla}_m B^m_{ij} = \overset{c}{\nabla}_m B^m_{ij} + \omega_m B^m_{ij}$. Но ([2], стр. 417), $\overset{c}{\nabla}_m B^m_{ij} = -(\partial_m \lg J + 2\psi_m + \omega_m) B^m_{ij}$, поэтому

$$\overset{b}{\nabla}_m B^m_{ij} = -(\partial_m \lg J + 2\psi_m) B^m_{ij} . \tag{39}$$

Теперь, если

$$qJ = b^{rs}B^m_{nr}B^n_{sm} = \text{const.} \neq 0 , \tag{40}$$

(т.е. исключается случай линейчатых поверхностей и рассматривается нормирование Фубини тензора асимптотической сети b_{ij}), то получим известную формулу Фубини:

$$\overset{\circ}{\nabla}_m B^m_{ij} = -2\psi_m B^m_{ij} , \tag{41}$$

где $\overset{\circ}{\nabla}_m$ обозначает ковариантное дифференцирование в связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^r_{ij}$, определенной скобками Кристоффеля формы соответствующей тензору b_{ij}, когда этот тензор нормирован в смысле Фубини.

Таким образом (37) и (37') принимают вид

$$(42)\qquad \overset{\circ}{\nabla}_m g_i^m + \overset{\circ}{H}_i = 0\,; \qquad \overset{\circ}{\nabla}_m(g_{rs}D^{rsm}) - 2\psi_m D^{mrs} g_{rs} + \overset{\circ}{L} = 0\,;$$

$$(43)\qquad \overset{\circ}{\nabla}_m \overset{\circ}{h}{}_i^m + \overset{\circ}{H}_m b_i^m = 0\,; \quad \overset{\circ}{\nabla}_m(B_{rs}^m h^{rs}) - 2\psi_m B_{rs}^m h^{rs} + \overset{\circ}{L} = 0\,,$$

где $\overset{\circ}{H}_i$, $\overset{\circ}{L}$ вычисляются по прежним формулам (22) и (38), только теперь следует в них учитывать нормирование Фубини тензора b_{ij}.

При этом, как это следует из формул (31), (34) и (35), величины τ_i, ω_i, A зависят только от b_{ij}, e_{ij}, f_{ij}. Поэтому, обозначая через $'f_i, '\varphi_i$ чебышевские векторы первого и второго родов сети f_{ij} в случае произвольной нормализации поверхности, а через $'\tau_i, '\omega_i$ — значение величин τ_i, ω_i в той же нормализации, будем иметь

$$'\tau_i + '\varphi_i - 'f_i = \tfrac{1}{2} f_{ki} B_{rs}^i f^{rs}\,; \quad '\omega_i - '\varphi_i - 'f_i = -2\overset{b}{f}_i\,,$$

где первое из этих формул принадлежит А. П. Нордену ([2], стр. 400).

Таким образом:

$$(44)\qquad 'f_i = \tfrac{1}{2}'\omega_i + \tfrac{1}{2}'\tau_i + \overset{b}{f}_i - \tfrac{1}{4} f_{ki} B_{rs}^k f^{rs}\,; \quad '\varphi_i = \tfrac{1}{2}'\omega_i - \tfrac{1}{2}'\tau_i + \overset{b}{f}_i + \tfrac{1}{4} f_{ki} B_{rs}^k f^{rs}\,.$$

Кроме того, обозначая через $'G_{ij}^n, '\Gamma_{ij}^n$ значение величин G_{ij}^n, Γ_{ij}^n при произвольной нормализации поверхности, будем иметь ([2], стр. 184)

$$(45)\qquad \begin{aligned} 'G_{ij}^n &= G_{ij}^n - 'f_i\delta_j^n - 'f_j\delta_i^n + b_{ij}b^{nm}\,'\varphi_m\,; \\ '\Gamma_{ij}^n &= \Gamma_{ij}^n - '\varphi_i\delta_j^n - '\varphi_j\delta_i^n + b_{ij}b^{nm}\,'f_m\,, \end{aligned}$$

где величины G_{ij}^n, Γ_{ij}^n, в силу равенств (6) и (27), имеют значения:

$$(46)\qquad \begin{aligned} G_{ij}^n &= \left\{ {n \atop ij} \right\}_b - (\tau_i + \tfrac{1}{2}\omega_i)\,\delta_j^n - (\tau_j + \tfrac{1}{2}\omega_j)\,\delta_i^n + \tfrac{1}{2} b_{ij} b^{nk}\omega_k - \tau_r f^{rn} f_{ij}\,, \\ \Gamma_{ij}^n &= \left\{ {n \atop ij} \right\}_b + (\tau_i - \tfrac{1}{2}\omega_i)\,\delta_j^n + (\tau_j - \tfrac{1}{2}\omega_j)\,\delta_i^n + \tfrac{1}{2} b_{ij} b^{nk}\omega_k + \tau_r f^{rn} f_{ij} \end{aligned}$$

и поэтому зависят только от b_{ij}, e_{ij}, f_{ij}. Следовательно, по этим формулам произвольная пара сопряженных связностей поверхности выражается через $b_{ij}, f_{ij}, '\tau_i, '\omega_i$.

Вернемся к системам (42) и (43). Каждая из них выражает условия интегрируемости освновных уравнений (1). Постараемся теперь из этих систем исключить неизвестные сопряженные тензоры g_{ij}, h_{ij}. С этой целью введем новый неизвестный вектор

$$(47)\qquad B_{ij}^m h^{ij} = z^m\,;$$

применяя здесь для тензора Сегре непосредственно проверяемую (например в асимптотической системе координат) формулу

$$(48)\qquad B^m_{ij}B^s_{mk} = \frac{J}{2}(b^s_i\varepsilon_{kj} + b^s_j\varepsilon_{ki} + b_{ij}\delta^s_k)\ ;\quad 2J = \tilde{b}^{rs}B^m_{nr}B^n_{ms}$$

получим:

$$(49)\qquad g_{ij} = -\frac{1}{J}B^m_{ij}z_m\,.$$

Поэтому (предполагая что в нормализации фубини $J = 1$), первое уравнение системы (42), согласно (41), примет вид

$$B^n_{im}\overset{\circ}{\nabla}_n z^m - 2\psi_n B^n_{im}z^m + H_i = 0\,.$$

Свернем полученное равенство поочередно с $B^i_{rs}f^{rs}$ и $B^i_{rs}e^{rs}$; учитывая что, в силу (48),

$$f^{rs}B^i_{rs}B^n_{im} = -e^n_m;\quad e^{rs}B^i_{rs}B^n_{im} = f^n_m,$$

будем иметь:

$$(50)\qquad e^n_m\overset{\circ}{\nabla}_n z^m = 2\psi_n e^n_m z^m + H_i B^i_{rs}f^{rs}\ ;\quad f^n_m\overset{\circ}{\nabla}_n z^m = 2\psi_n f^n_m z^m - H_i B^i_{rs}e^{rs}\,.$$

В качестве третьего уравнения можно взять второе равенство системы (43), которое согласно (47), принимает вид:

$$(51)\qquad \overset{\circ}{\nabla}_n z^n = 2\psi_m z^m - \overset{\circ}{L}\,.$$

Теперь, написав разложение

$$\overset{\circ}{\nabla}_n z^m = \alpha b^m_n + \beta f^m_n + \gamma e^m_n + \delta\delta^m_n\,,$$

в силу (50) и (51), сразу можно подсчитать коеффициэнты β, γ, δ; получим, что

$$(52)\qquad \overset{\circ}{\nabla}_n z^m = \psi_k z^r(b^k_r e^m_n + f^k_r f^m_n + \delta^k_r\delta^m_n) + \alpha b^m_n + A^m_n\ ;$$

$$A^m_n = \tfrac{1}{2}H_i B^i_{rs}(e^m_n f^{rs} - f^m_n e^{rs}) = \frac{L}{2}\delta^m_n\,,$$

где α — неизвестный коэффициент.

Но, согласно (4),

$$e^k_r e^m_n = f^k_p b^p_r e^m_p = b^p_r(f^k_n e^m_p - \varepsilon_{pn}b^{km}) = b_{nr}b^{km} - f^k_n f^m_r\ ;$$

$$b_{nr}b^{km} = b^k_s b_{nr}\varepsilon^{ms} = \varepsilon^{ms}(b^k_r b_{ns} + \varepsilon_{sr}\delta^k_n) = b^k_r b^m_n + \delta^k_n\delta^m_r\ ;$$

$$f^k_n f^m_r = f^k_r f^m_n + \varepsilon_{nr}\varepsilon^{km} = f^k_r f^m_n + \delta^m_n\delta^k_r - \delta^k_n\delta^m_r\,,$$

поэтому (52) принимает вид:

$$(53) \qquad \overset{\circ}{\nabla}_n z^m = \psi_k z^r (b^k_r b^m_n + 2\delta^k_n \delta^m_r) + \alpha b^m_n + A^m_n .$$

Производя здесь преобразование

$$\psi_k z_r (2\delta^k_n \delta^r_m - b^{kr} b_{mn}) = z_r (\delta^r_m \psi_n + \delta^r_n \psi_m - b^{kr} b_{mn} \psi_k + \varepsilon_{nm} \psi^r)$$

и обозначая связность ковариантного дифференцирования, участвующую в уравнении (53) через $\overset{\circ}{\Gamma}{}^n_{ij}$, получим:

$$(54) \qquad \overset{S}{\nabla}_n z_m = \alpha b_{nm} + A_{;nm} ; \quad (\overset{S}{\nabla}_n z_m = \partial_n z_m - S^r_{mn} z_r) ,$$

где $\overset{S}{\nabla}_n$ обозначает ковариантное дифференцирование в связности, коэффициенты которой имеют вид:

$$(55) \qquad S^r_{nm} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^r_{nm} + \psi_n \delta^r_m + \psi_m \delta^r_n - b_{nm} b^{rk} \psi_k - \varepsilon_{nm} \psi^r .$$

Тензор Риччи этой связности можно представить в виде

$$(56) \qquad \overset{S}{R}_{im} = \tfrac{1}{2} \overset{\circ}{K} b_{im} - \psi_i \psi_m - \overset{K}{\nabla}_i \psi_m + 2\psi \varepsilon_{im}$$

где

$$(57) \qquad \psi = \nabla^n \psi_n = \tfrac{1}{3} \overset{S}{R}{}^n_{.n} ,$$

$\overset{\circ}{K}$ – кривизна римановой связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^n_{ij}$, а $\overset{K}{\nabla}_i$ обозначает ковариантное дифференцирование в связности, коэффициенты которой имеют вид:

$$(58) \qquad \overset{K}{\Gamma}{}^r_{mn} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^r_{mn} + \psi_n \delta^r_m + \psi_m \delta^r_n - b_{mn} b^{rk} \psi_k .$$

Кроме того, полезно заметить следующие равенства:

$$(59) \qquad \overset{S}{\nabla}_k b^i_j = \psi^i b_{kj} + \psi_j b^i_k - \psi_k b^i_j ; \quad \overset{S}{\nabla}_k \varepsilon_{ij} = -3\psi_k \varepsilon_{ij} ; \quad \overset{S}{\nabla}_k \varepsilon^{ij} = 3\psi_k \varepsilon^{ij} .$$

Известная формула тензорного анализа ([3], стр. 85)

$$2\overset{S}{\nabla}_{[i} \overset{S}{\nabla}_{j]} z_m = \overset{S}{R}{}^n_{ijm} z_n + 2\overset{S}{S}{}^n_{[ij]} \nabla_n z_m ,$$

согласно (55), принимает вид

$$\overset{S}{\nabla}{}^n \overset{S}{\nabla}_n z_m = -\overset{S}{R}{}^n_{.m} z_n - 2\psi^n \overset{S}{\nabla}_n z_m$$

так как ([1], стр. 127)

$$R^l_{ijk} = -\varepsilon_{ij} R^l_{.k}\,.$$

Поэтому, для определения α, из системы (54) получается новая система

$$(60)\qquad \nabla_i \alpha = 3\psi_i \alpha - \overset{S}{R}{}^n_{.m} b^m_i z_n + a_i\,; \quad a_i = 2\psi^n A^m_n b_{mi} - \overset{S}{b}{}^m_i \nabla^n A^{\cdot}_{mn}\,,$$

условием интегрируемости которой служит равенство

$$(61)\qquad 6\psi\alpha = z_n[3\psi_i \overset{S}{b}{}^{mi} R^n_{.m} + \nabla^i(\overset{S}{R}{}^n_{.m} \overset{S}{b}{}^m_i)] + 6\psi a\,;$$

$$6\psi a = \overset{S}{R}_{nm} b^{mi} A^n_i - 3\psi_i a^i - \nabla^i a_i$$

Отсюда определяется функция α, если

$$(62)\qquad \psi = \nabla^n \psi_n \neq 0\,,$$

т.е., если нормализованная поверхность не принадлежит к классу изотермо-асимптотических поверхностей ([2], стр. 423).

Внося наиденное выражение для α в (54), получим следующую систему

$$(63)\qquad \overset{L}{\nabla}_n z_m = c_{nm}\,; \quad c_{nm} = a b_{nm} + A^{\cdot}_{nm}\,; \quad (\overset{L}{\nabla}_n z_m = \partial_n z_m - L^r_{mn} z_r)\,,$$

где ∇_n обозначает ковариантное дифференцирование в связности, коэффициенты которой имеют вид

$$(64)\qquad L^r_{mn} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^r_{mn} + \psi_m \delta^r_n + \psi_n \delta^r_m - b_{mn} b^{rk} \varphi_k - \varepsilon_{mn} \psi^r = S^r_{mn} + b_{mn} b^{rk} \pi_k\,;$$

$$\varphi_r = \psi_r - \pi_r\,; \quad \pi_i = b_{ir}\left[\frac{1}{2\psi}\, \psi_k \overset{S}{b}{}^{pk} R^r_{.p} + \frac{1}{6\psi}\, \nabla^k(\overset{S}{R}{}^r_{.p} \overset{S}{b}{}^p_k)\right] = -\frac{1}{6\psi}\, \overset{S}{b}{}^n_i \nabla^k(\overset{S}{R}_{np} b^p_k)\,.$$

Для определения z_m, условие интегрируемости системы (63) дает линейное соотношение

$$(65)\qquad \overset{L}{R}{}^n_{.m} z_n = P_m\,; \quad P_m = -2\psi^n c_{nm} - \overset{L}{\nabla}{}^n c_{nm}\,,$$

где тензор Риччи связности (64) можно представить в виде

$$(66)\qquad \overset{L}{R}_{im} = \overset{S}{R}_{im} + \overset{S}{b}{}^k_m \nabla_k \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_i \bar{\pi}_m\,; \quad \bar{\pi}_i = -\pi_r b^r_i = -\frac{1}{6\psi}\, \overset{S}{\nabla}{}^k(\overset{S}{R}_{in} b^n_k)\,.$$

Относительно линейной системы (65) возможен следующие случаи:

$$(67)\qquad \mathbf{1.}\ \text{Дет}\ \|\overset{L}{R}_{ij}\| \neq 0\,; \quad z_i = \frac{2}{\overset{L}{R}{}^k_{.n} \overset{L}{R}{}^n_{.k} - (\overset{L}{R}{}^k_{.k})^2}\,(\overset{L}{R}{}^m_{.i} - \overset{L}{R}{}^k_{.k} \delta^m_i)\, P_m\,.$$

При этом основная система (1) определяет единственную нормализованную поверхность, если полученное значение z_i удовлетворяет одну из эквивалентных систем (25), (42) и (63).

Таким образом, *если ранг матрицы* $\|\overset{L}{R}_{ij}\|$ *равняется двум, то равенства* (63) *и* (67) *выражают необходимое и достаточное условие реализуемости на поверхности заданной пары сопряженных аффинных связностей.*

2. Ранг матрицы $\|\overset{L}{R}_{ij}\|$ равняется единице, т.е.

$$\overset{L}{R}{}^k_{.n}\overset{L}{R}{}^n_{.k} - (\overset{L}{R}{}^k_{.k})^2 = 0 \; ; \quad \overset{L}{R}_{ij} = R_i Q_j \neq 0 \tag{68}$$

где R_i, Q_i — определенные векторы.

Теперь система (65) содержит лишь одно независимое уравнение, которое можно например представить в виде

$$r^m z_m = P \; ; \quad r^n = \overset{L}{R}{}^n_{.m} B^m_{ij} f^{ij} \; ; \quad P = P_m B^m_{ij} f^{ij} \, , \tag{69}$$

предполагая, что векторы Q_m и $B^m_{ij} f^{ij}$ не коллиенарны (в противном случае вместо $B^m_{ij} f^{ij}$ можно было бы взять $B^m_{ij} e^{ij}$). Согласно (63), из (69) следует условие

$$z_m \overset{L}{\nabla}_n r^m + r^m c_{nm} = \nabla_n P \, . \tag{70}$$

Если теперь ранг системы (69), (70) *равняется двум,* то вектор Z_i однозначно определяется и он должен еще удовлетворять одну из систем (25), (42) и (63). В этом случае *существует единственная нормализованная поверхность проективного пространства.*

Чтобы ранг системы (69), (70) равнялся единице, необходимо и достаточно следующее условие

$$\overset{L}{\nabla}_n r^m = K_n r^m \; ; \quad P K_n = \nabla_n P - r^m c_{nm} \; ; \tag{71}$$

при этом, в силу (69), вектор r^m всегда коллиенарен вектору R^i из (68).

Таким образом, *при условии* (68), (71), решение системы (63) содержит одно произвольное постоянное и для соответствующих, различных p_{ij} *основные уравнения* (1) *определяют* ∞^1 *проективно налагающихся поверхностей* (каждая поверхность несет одну сеть R, [4], стр. 67).

3. Наконец, если

$$\overset{L}{R}_{ij} = 0 \, , \tag{72}$$

то

$$P_m = 0 \, . \tag{73}$$

Теперь система (63) вполне интегрируема. Ее решение содержит две произвольные постоянные и для соответствующих различных P_{ij} *основные уравнения* (1) *определяют* ∞^2 *проективно налагающихся поверхностей* (каждая поверхность несет ∞^1 сетей R, [4], стр. 67).

Заметим, что если система (42) допускает более чем одно решение, то разность двух ее решений удовлетворяет систему, аналогичную полученной А. П. Норденом ([2], стр. 410).

Литература

[1] *А. П. Норден:* О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства. Тр. семин. по вект. и тензорн. анализу, вып. 6, М.—Л., 1948.

[2] *А. П. Норден:* Пространства аффинной связности. М.—Л., 1950.

[3] *J. A. Schouten:* Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924.

[4] *С. П. Фиников:* Проективно-дифференциальная геометрия. М.—Л., 1937.

Адрес автора: Математический институт АН Грузинской ССР, Тбилиси, СССР.